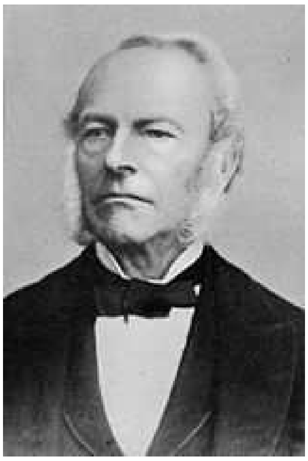
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 90



George Stokes (1819 -1903)

Der Satz von Stokes gehört zu den wichtigsten Sätzen der Mathematik. Er stiftet eine direkte Beziehung zwischen dem Integral einer Differentialform über dem Rand einer berandeten Mannigfaltigkeit und dem Integral der äußeren Ableitung dieser Form über der gesamten Mannigfaltigkeit. Damit handelt es sich um eine weitgehende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung, nach dem das bestimmte Integral einer auf einem Intervall definierten Funktion mittels der Stammfunktion allein durch die Werte am Intervallrand ausgedrückt werden kann.

Der Satz von Stokes-Quaderversion

Bevor wir den Satz von Stokes allgemein formulieren und beweisen, geben wir die Quaderversion davon, bei der der Definitionsbereich der Differentialform ein Quader ist, dessen Rand aus seinen Seiten besteht. Damit dieses geometrische Objekt eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist, müssen wir die „Kanten“ herausnehmen. Allerdings sind die Kanten auf den Seiten jeweils Nullmengen (und ebenso die Seiten auf dem Gesamtquader), so dass beim Integrieren diese Teilmengen ignoriert werden können.

Satz 90.1. *Es sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Quader (mit Seiten aber ohne Kanten)*[1] *mit dem Rand ∂Q und ω eine auf einer offenen Umgebung von Q*

[1] Diese Voraussetzungen sichern, dass eine Mannigfaltigkeit mit Rand vorliegt, und zwar ist der Rand die disjunkte Vereinigung der offenen Seiten. Im Beweis werden wir aber auch den abgeschlossenen Quader verwenden.

definierte stetig-differenzierbare $(n-1)$*-Differentialform. Dann ist*

$$\int_Q d\omega \;=\; \int_{\partial Q} \omega.$$

Beweis. Da beide Seiten dieser Gleichung linear in ω sind, können wir annehmen, dass ω die Gestalt $\omega = f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ mit einer in einer offenen Umgebung von Q definierten stetig differenzierbaren Funktion f besitzt. Die Integrale sind links und rechts Lebesgue-Integrale zu stetigen Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^{n-1}$. Daher können wir auf beiden Seiten zum topologischen Abschluss übergehen, da dadurch die in Frage stehenden Integrationsbereiche nur um eine Nullmenge verändert werden, so dass dies die Integrale nicht ändert.

Wir schreiben den abgeschlossenen Quader als $\overline{Q} = [a,b] \times \tilde{Q}$. Wir wenden Korollar 83.10 auf jede Seite S ausgenommen $a \times \tilde{Q}$ und $b \times \tilde{Q}$ an und erhalten darauf

$$\int_S \omega \;=\; \int_S f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \;=\; 0,$$

da auf diesen Seiten jeweils eine der Variablen $x_2, \ldots, x_n$ konstant ist. Aufgrund des Satzes von Fubini und des Hauptsatzes der Infinitesimalrechnung (angewendet auf jedes fixierte $(x_2, \ldots, x_n)$) gilt

$$\begin{aligned}
\int_Q d\omega &= \int_Q df \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_Q (\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j) \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_{\tilde{Q}} (\int_{[a,b]} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1) dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_{\tilde{Q}} (f(b, x_2, \ldots, x_n) - f(a, x_2, \ldots, x_n)) dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_{b \times \tilde{Q}} f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n - \int_{a \times \tilde{Q}} f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \sum_{S \text{ orientierte Seite von } Q} \int_S f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \\
&= \int_{\partial Q} f dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.
\end{aligned}$$

□

Der Satz von Stokes

Satz 90.2. *Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und mit abzählbarer Topologie, und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform mit kompaktem Träger*[2] *auf M. Dann ist*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega .$$

Beweis. Es sei U_i, $i \in I$, eine offene Überdeckung von M mit orientierten Karten und es sei h_j, $j \in J$, eine dieser Überdeckung untergeordnete stetig differenzierbare Partition der Eins, die nach Satz 89.8 existiert. Zu jedem $P \in M$ gibt es eine offene Umgebung $P \in V_P \subseteq M$ derart, dass $h_j|_{V_P} = 0$ ist bis auf endlich viele Ausnahmen. Es sei Y der Träger von ω. Die Überdeckung $Y \subseteq \bigcup_{P \in M} V_P$ besitzt wegen der vorausgesetzten Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung, sagen wir $Y \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_r = V$. Daher sind überhaupt nur endlich viele der h_j auf V von 0 verschieden. Wir setzen $\omega_j = h_j \omega$; diese Differentialformen sind ebenfalls stetig differenzierbar. Der Träger von h_j ist eine in M abgeschlossene Teilmenge, die in $U_{i(j)}$ liegt, daher liegt der Träger von ω_j in $Y \cap U_{i(j)}$ und ist selbst kompakt nach Aufgabe 82.8. Es gilt

$$\omega = \sum_{j \in J} \omega_j \, ,$$

wobei nur endlich viele dieser Differentialformen ω_j von 0 verschieden sind, da $\omega_j|_{M \setminus Y} = 0$ ist für alle j und $\omega_j|_V = 0$ für alle j bis auf endlich viele Ausnahmen. Wegen der Additivität des Integrals von Differentialformen und der Additivität der äußeren Ableitung kann man die Aussage für die einzelnen ω_j getrennt beweisen. Wir können also annehmen, dass eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform gegeben ist, die kompakten Träger besitzt, der ganz in einer Kartenumgebung U liegt. Es liegt ein Diffeomorphismus $\alpha : U \to V$ mit $V \subseteq H$ offen vor, der zugleich einen Diffeomorphismus zwischen den Rändern $\partial U = \partial M \cap U$ und $\partial V = \partial H \cap V$ induziert. Dabei gilt

$$\int_{\partial U} \omega = \int_{\partial V} \alpha^{-1*} \omega$$

und

$$\int_U d\omega = \int_V \alpha^{-1*}(d\omega) = \int_V d(\alpha^{-1*}\omega)$$

nach Lemma 87.2 (5). Wir können also von einer auf $V \subseteq H$ definierten stetig differenzierbaren Differentialform mit kompakten Träger ausgehen. Diese Form können wir stetig differenzierbar fortsetzen auf eine offene Umgebung von H im $\mathbb{R}^n$. Wegen der Kompaktheit des Trägers gibt es einen hinreichend großen Quader $Q \subseteq H$, dessen eine Seite S auf ∂H liegt und der den Träger

[2] Unter dem Träger einer Differentialform versteht man den topologischen Abschluss der Punkte, auf denen die Form $\neq 0$ ist.

von ω nur in S trifft. Auf allen anderen Seiten von Q ist ω (und damit auch $d\omega$) die Nullform. Daher gilt einerseits

$$\int_H d\omega \;=\; \int_Q d\omega$$

und andererseits

$$\int_{\partial H} \omega \;=\; \int_S \omega \;=\; \int_{\partial Q} \omega .$$

Somit folgt die Aussage aus der Quaderversion des Satzes von Stokes. □

KOROLLAR 90.3. *Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) mit abzählbarer Topologie und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform mit kompaktem Träger auf M. Dann ist*

$$\int_M d\omega \;=\; 0.$$

Beweis. Dies folgt wegen $\partial M = \emptyset$ unmittelbar aus Satz 90.2. □

KOROLLAR 90.4. *Es sei M eine n-dimensionale orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand und mit abzählbarer Topologie, und es sei ω eine stetig differenzierbare $(n-1)$-Differentialform mit kompaktem Träger auf M, die auf dem Rand ∂M konstant gleich 0 ist. Dann ist*

$$\int_M d\omega \;=\; 0.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 90.2. □

Wichtig bei der vorstehenden Aussage ist, dass ω auf dem Rand 0 ist; es genügt nicht, dass die äußere Ableitung $d\omega$ auf dem Rand 0 ist, wie schon die eindimensionale Situation zeigt.

Es gibt viele Möglichkeiten, die Volumenform $\tau = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ des $\mathbb{R}^n$ als äußere Ableitung einer $(n-1)$-Form zu realisieren, bspw. mit $\omega = x_1 dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Damit kann man die Berechnung des Volumens eines berandeten Körpers auf die Berechung eines Integrals über den Rand zurückführen. Im ebenen Fall nennt man diese Aussage auch den *Satz von Green*.

SATZ 90.5. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand*[3] *δM, und es seien*

$$f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist

$$\int_M (-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)) dx \wedge dy \;=\; \int_{\partial M} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

[3]Die umgebende reelle Ebene spielt nur insofern eine Rolle, dass durch sie Koordinaten und Differentialformen auf M festgelegt werden.

Beweis. Dies folgt aus Satz 90.2, angewendet auf die stetig differenzierbare 1-Form $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$. $\square$

KOROLLAR 90.6. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand δM. Dann ist der Flächeninhalt von M gleich*

$$\lambda^2(M) = \int_{\partial M} xdy = -\int_{\partial M} ydx.$$

Beweis. Dies folgt wegen $\lambda^2(M) = \int_M dx \wedge dy$ aus Satz 90.5 angewendet auf $f = 0$, $g = x$ bzw. $f = -y$, $g = 0$. $\square$

Der Brouwersche Fixpunktsatz

SATZ 90.7. *Es sei M eine kompakte orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und mit abzählbarer Topologie. Dann gibt es keine stetig differenzierbare Abbildung*

$$\varphi : M \longrightarrow \partial M,$$

deren Einschränkung auf ∂M die Identität ist.

Beweis. Der Rand ∂M ist nach Satz 88.8 eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Daher gibt es nach Satz 89.8 eine stetig differenzierbare positive Volumenform τ auf ∂M. Es ist $\int_{\partial M} \tau > 0$. Die äußere Ableitung der Volumenform τ ist 0. Nehmen wir an, dass es eine stetig differenzierbare Abbildung

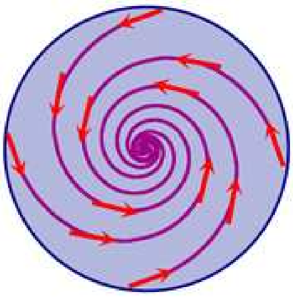
$$\varphi : M \longrightarrow \partial M$$

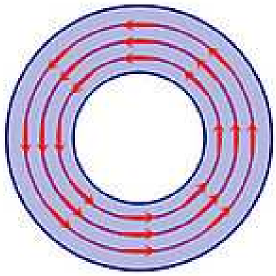
mit $\varphi|_{\partial M} = \mathrm{Id}_{\partial M}$ gebe. Dann ist die zurückgezogene Form $\varphi^*\tau$ eine $(n-1)$-Differentialform auf M, deren Einschränkung auf den Rand mit τ übereinstimmt. Daher gilt unter Verwendung von Satz 90.2 und Satz 87.4 (5)

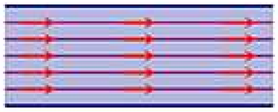
$$\begin{aligned} \int_{\partial M} \tau &= \int_{\partial M} \varphi^*\tau \\ &= \int_M d(\varphi^*\tau) \\ &= \int_M \varphi^*(d\tau) \\ &= \int_M \varphi^*(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Man formuliert diese Aussage auch so, dass man sagt, dass es keine (stetig differenzierbare) *Retraktion* auf den Rand gibt.







Satz 90.8. *Es sei*

$$\psi : B(0,r) \longrightarrow B(0,r)$$

eines stetig differenzierbare Abbildung der abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^n$ in sich. Dann besitzt ψ einen Fixpunkt.

Beweis. Zur Notationsvereinfachung sei $r = 1$. Nehmen wir an, dass es eine fixpunktfreie stetig differenzierbare Abbildung ψ geben würde. Dann ist stets $x \neq \psi(x)$, so dass die beiden Punkte eine Gerade definieren. Die Idee ist, mittels dieser Geraden einen (der beiden) Durchstoßungspunkt mit der Sphäre als Bildpunkt einer Retraktion zu nehmen. Mit der Hilfsfunktion

$$h(x) = \frac{\psi(x) - x}{|| \psi(x) - x ||}$$

definieren wir eine Abbildung

$$\varphi : B(0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$\varphi(x) = x + \left(-\langle x, h(x) \rangle + \sqrt{1 + \langle x, h(x) \rangle^2 - || x ||^2} \right) \cdot h(x) \, .$$

Dabei ist der Ausdruck unter der Wurzel positiv. Dies ist bei $|| \, x \, || < 1$ klar und bei $|| \, x \, || = 1$ liegt ein Punkt auf der Sphäre vor, dessen Verbindungsgerade mit dem Kugelpunkt $\psi(x)$ nicht senkrecht zu x ist (der affine Tangentialraum trifft eine Kugel nur in einem Punkt), so dass $\langle x, h(x) \rangle \neq 0$ ist. Da die Quadratwurzel und der Betrag außerhalb des Nullpunktes stetig differenzierbar sind, handelt es sich bei $h(x)$ und bei $\varphi(x)$ um stetig differenzierbare Abbildungen. Die Abbildung φ bildet die Kugel auf die Sphäre ab und ihre Einschränkung auf die Sphäre ist die Identität. Damit liegt eine stetig differenzierbare Retraktion der Vollkugel auf ihren Rand vor, was nach Satz 90.7 nicht sein kann. $\square$

Abbildungsverzeichnis