Prof. Dr. H. Brenner   Osnabrück SS 2009

Einführung in die Algebra

Arbeitsblatt 13

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 1. Es sei R ein kommutativer Ring und seien f, g Nichtnullteiler in R. Zeige, dass das Produkt fg ebenfalls ein Nichtnullteiler ist.

Aufgabe 2. Zeige, dass ein Unterring eines Körpers ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 3. Es sei R ein Ring, bei dem das multiplikative Monoid eine Gruppe ist. Welche Möglichkeiten gibt es da?

Aufgabe 4. Es sei A eine Menge mit zwei Verknüpfungen, die beide für sich ein Monoid bilden. Ferner seien beide Verknüpfungen miteinander distributiv verbunden. Gibt es (interessante) Beispiele für eine solche algebraische Struktur? Kann ein Ring diese doppelte Distributivität besitzen?

Aufgabe 5. Zeige, dass die Umkehrabbildung eines Ringisomorphismus wieder ein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 6. Es sei R ein kommutativer Ring mit Elementen $x, y, z, w \in R$, wobei z und w Einheiten seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{x} = x^{-1}\,,$$

(3)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(4)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(5)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$
(6)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$
(7)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$
(8)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xw+yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (8) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x-z)+(y-w) = (x+w)(z+y)-(z+w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x+y}{w+z}$$

nicht gilt, außer im Nullring.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 7. (2 Punkte)

Studiere den kanonischen Ringhomomorphismus in den Endomorphismenring für $R = \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$. Charakterisiere mit Hilfe der Multiplikationsabbildung

$$\mu_f : R \longrightarrow R,\ g \longmapsto fg,$$

wann f ein Nichtnullteiler und wann f eine Einheit ist.

Aufgabe 9. (2 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $f \in R$ ein nilpotentes Element. Zeige, dass $1+f$ eine Einheit ist.

Aufgabe 10. (2 Punkte)

Sei R ein Ring und seien L und M zwei Mengen mit den in Aufgabe 12.10 konstruierten Ringen $A = \operatorname{Abb}(L, R)$ und $B = \operatorname{Abb}(M, R)$. Zeige, dass eine Abbildung $L \longrightarrow M$ einen Ringhomomorphismus

$$B \longrightarrow A$$

induziert.

Aufgabe 11. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine K- lineare Abbildung. Es sei f nilpotent, d.h. es gebe ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^m = 0$. Zeige, dass $f^n = 0$ ist, wobei n die Dimension von V bezeichnet.

In der folgenden Aufgabe muss man mittels einiger topologischer Eigenschaften der reellen Zahlen argumentieren.

Aufgabe 12. (5 Punkte)

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $C(X, \mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Dann ist durch

$$\varphi : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C(X, \mathbb{R}),\ f \longmapsto f|_X,$$

ein Ringhomomorphismus gegeben.

(1) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn X abgeschlossen ist.
(2) Für welche Mengen X ist φ injektiv?

In der letzten Aufgabe geht es nochmal „nur“ um Gruppen. Die darin verwendete Konstruktion spielt bei „elliptischen Kurven“ eine wichtige Rolle.

Aufgabe 13. (5 Punkte)

Es sei M eine Menge mit einer Verknüpfung

$$* : M \times M \longrightarrow M,\ (P, Q) \longmapsto P * Q,$$

die für alle Elemente $P, Q, R, S \in M$ folgende Eigenschaften erfüllt.

(1) $P * Q = Q * P$
(2) $(P * Q) * P = Q$
(3) $((P * Q) * R) * S = P((Q * S) * R)$.

Es sei O ein beliebiges aber fest gewähltes Element aus M. (a) Zeige, dass die Verknüpfung

$$P + Q := (P * Q) * O$$

eine kommutative Gruppenstruktur auf M mit O als neutralem Element definiert.

(b) Es sei nun O' ein zweites Element aus M. Zeige, dass die durch O und durch O' definierten Gruppen isomorph sind.