Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 28

In diesem Abschnitt untersuchen wir mit Mitteln der Differentialrechnung, wann eine Funktion

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, (lokale) Extrema besitzt und wie ihr Wachstumverhalten aussieht. Da man nur reelle Zahlen der Größe nach miteinander vergleichen kann, nicht aber komplexe Zahlen, muss die Wertemenge reell sein. Die Definitionsmenge könnte grundsätzlich beliebig sein, und wir werden im zweiten Semester entsprechende Überlegungen für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ anstellen, hier ist aber die Definitionsmenge $\mathbb{R}$ bzw. ein Teilintervall davon.

Satz 28.1. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und sei*

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die in $a \in D$ ein lokales Extremum besitze und dort differenzierbar sei. Dann ist

$$f'(a) = 0 .$$

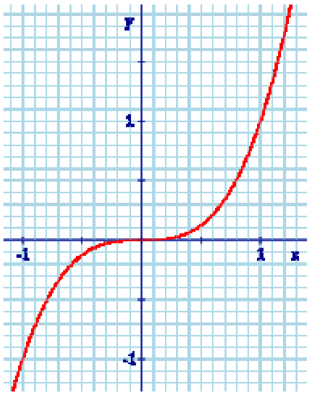
Beweis. Wir können annehmen, dass f ein lokales Maximum in a besitzt. Es gibt also ein $\epsilon > 0$ mit $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a - \epsilon, a + \epsilon]$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $a - \epsilon \leq s_n < a$, die gegen a („von unten“) konvergiere. Dann ist

$$\frac{f(s_n) - f(a)}{s_n - a} \geq 0 ,$$

was sich dann auf den Limes überträgt. Für eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a + \epsilon \geq t_n > a$ gilt andererseits

$$\frac{f(t_n) - f(a)}{t_n - a} \leq 0 .$$

Nach Voraussetzung existiert der Differentialquotient, d.h. für jede gegen a konvergente Folge existiert der Limes und besitzt stets den gleichen Wert. Also muss dieser Grenzwert 0 sein. □



Man beachte, dass das Verschwinden der Ableitung nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für die Existenz eines Extremums ist. Das einfachste Beispiel für dieses Phänomen ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, die streng wachsend ist, deren Ableitung aber im Nullpunkt verschwindet.

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

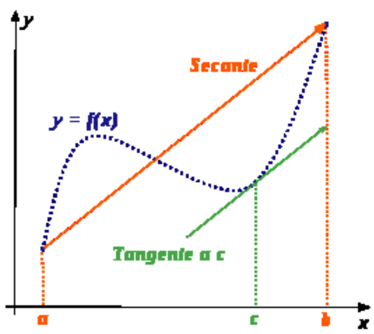
Satz 28.2. *(Satz von Rolle) Sei $a < b$ und sei*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = 0\,.$$

Beweis. Wenn f konstant ist, so ist die Aussage richtig. Sei also f nicht konstant. Dann gibt es ein $x \in]a, b[$ mit $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Sagen wir, dass $f(x)$ größer als dieser Wert ist. Aufgrund von Satz 22.7 gibt es ein $c \in [a, b]$, wo die Funktion ihr Maximum annimmt, und dieser Punkt kann kein Randpunkt sein. Für dieses c ist dann $f'(c) = 0$ nach Satz 28.1. $\square$



Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt anschaulich gesprochen, dass es zu einer Sekante eine parallele Tangente gibt.

Satz 28.3. *(Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $a < b$ und sei*
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion
$$g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$
Diese Funktion ist ebenfalls stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Ferner ist $g(a) = f(a)$ und
$$g(b) \;=\; f(b) - (f(b) - f(a)) \;=\; f(a).$$
Daher erfüllt g die Voraussetzungen von Satz 28.2 und somit gibt es ein $c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0$. Aufgrund der Ableitungsregeln gilt also
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$
□

Korollar 28.4. *Sei*
$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktion mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist f konstant.

Beweis. Wenn f nicht konstant ist, so gibt es $x < x'$ mit $f(x) \neq f(x')$. Dann gibt es aufgrund von Satz 28.3 ein c, $x < c < x'$, mit $f'(c) = \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \neq 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 28.5. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und*
$$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine differenzierbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Die Funktion f ist genau dann auf I wachsend (bzw. fallend), wenn $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) ist für alle $x \in I$.*
(2) *Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng wachsend.*
(3) *Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$ ist und f' nur endlich viele Nullstellen besitzt, so ist f streng fallend.*

Beweis. Es genügt, die Aussagen mit wachsend zu beweisen. Wenn f wachsend ist, und $x \in I$ ist, so gilt für den Differenzenquotient
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0$$

für jedes h mit $x+h \in I$. Diese Abschätzung gilt dann auch für den Grenzwert, und dieser ist $f'(x)$. Sei umgekehrt die Ableitung ≥ 0 ist. Nehmen wir an, dass es zwei Punkte $x < x'$ in I gibt mit $f(x) > f(x')$. Aufgrund des Mittelwertsatzes gibt es dann ein c mit $x < c < x'$ mit

$$f'(c) \;=\; \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \;<\; 0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Es sei nun $f'(x) > 0$ mit nur endlich vielen Ausnahmen. Angenommen es wäre $f(x) = f(x')$ für zwei Punkte $x < x'$. Da f nach dem ersten Teil wachsend ist, ist f auf dem Intervall $[x, x']$ konstant. Somit ist $f' = 0$ auf diesem gesamten Intervall, ein Widerspruch dazu, dass f' nur endlich viele Nullstellen besitzt. □

KOROLLAR 28.6. *Eine reelle Polynomfunktion*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $d \geq 1$ besitzt maximal $d-1$ Extrema, und die reellen Zahlen lassen sich in maximal d Abschnitte unterteilen, auf denen f streng wachsend oder streng fallend ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 28.5. □

Der zweite Mittelwertsatz und die Regel von l'Hospital

Die folgende Aussage heißt auch *zweiter Mittelwertsatz.*

SATZ 28.7. *Es sei $b > a$ und*

$$f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige, in $]a, b[$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]a, b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a, b[$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 28.2, angewendet auf die Hilfsfunktion

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x)\,.$$

□

L 'Hôspital (1661-1704)

Zur Berechnung von Grenzwerten einer Funktion, die als Quotient gegeben ist, ist die folgende *Regel von l'Hospital* hilfreich.

Korollar 28.8. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $a \in I$ ein Punkt. Es seien*

$$f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Funktionen, die in $I \setminus \{a\}$ differenzierbar seien mit $f(a) = g(a) = 0$ und mit $g'(x) \neq 0$ für $x \neq a$. Es sei vorausgesetzt, dass der Grenzwert

$$w = \lim_{x \in I \setminus \{a\}, \, x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existiert. Dann existiert auch der Grenzwert

$$\lim_{x \in I \setminus \{a\}, \, x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \, ,$$

und sein Wert ist ebenfalls w.

Beweis. Zur Ermittlung des Grenzwertes benutzen wir das Folgenkriterium. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $I \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert. Zu jedem x_n gibt es nach Satz 28.7, angewandt auf $I_n = [x_n, a]$ bzw. $[a, x_n]$, ein c_n (im Innern von I_n) mit

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \, .$$

Die Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert ebenfalls gegen a, so dass nach Voraussetzung die rechte Seite gegen $\frac{f'(a)}{g'(a)} = w$ konvergiert. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen w, und wegen $f(a) = g(a) = 0$ bedeutet das, dass $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ gegen w konvergiert. $\square$

Beispiel 28.9. Die beiden Polynome

$$3x^2 - 5x - 2 \text{ und } x^3 - 4x^2 + x + 6$$

haben beide für $x = 2$ eine Nullstelle. Es ist also nicht von vornherein klar, ob der Limes

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$$

existiert und welchen Wert er besitzt. Aufgrund der Regel von l'Hospital kann man den Grenzwert über die Ableitungen bestimmen, und das ergibt

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{6x - 5}{3x^2 - 8x + 1} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

Abbildungsverzeichnis