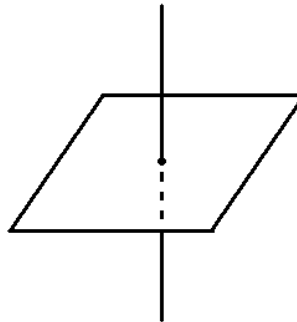


## Algebraische Kurven

### Arbeitsblatt 8

#### Aufgabe 1. (2 Punkte)

Finde ein Ideal, dessen Nullstellenmenge das folgende Gebilde ist.



#### Aufgabe 2. (6 Punkte)

Es sei  $C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$  der Schnitt von zwei Zylindern mit Radius eins ( $C$  ist also die Vereinigung von zwei Ellipsen). Wir betrachten die durch einen Vektor  $v = (a, b, c) \neq 0$  definierte senkrechte Projektion

$$p_v : \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2.$$

Man charakterisiere, in Abhängigkeit von  $a, b, c$ , die möglichen Bilder unter diesen Projektionen.

#### Aufgabe 3. (4 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2, (x, y) \longrightarrow (x^2, y^2) = (u, v).$$

Wie sieht das Bild der Ebene und wie das Bild des Einheitskreises unter dieser Abbildung für  $K = \mathbb{R}$  und wie für  $K = \mathbb{C}$  aus? Im reellen Fall, wenn der Kreis einmal durchlaufen wird, wie oft wird das Bild durchlaufen?

#### Aufgabe 4. (4 Punkte)

Sei  $\varphi : \mathbb{A}_K^r \rightarrow \mathbb{A}_K^n$  eine polynomiale Abbildung und sei  $T \subseteq \mathbb{A}^r$  eine Teilmenge. Zeige, dass die Gleichheit

$$\overline{\varphi(T)} = \overline{\varphi(\overline{T})}$$

gilt.

**Aufgabe 5.** (3 Punkte)

Zeige, dass die Aussage von Aufgabe 4 nicht gilt ohne die Voraussetzung, dass die Abbildung polynomial ist.

**Aufgabe 6.** (2 Punkte)

Sei  $\varphi : \mathbb{A}_K^2 \rightarrow \mathbb{A}_K^2$  eine polynomiale Abbildung und sei  $C$  eine ebene rationale Kurve. Es sei ferner vorausgesetzt, dass  $C$  durch  $\varphi$  nicht auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Zeige, dass dann  $\overline{\varphi(C)}$  ebenfalls eine rationale Kurve ist.

**Aufgabe 7.** (6 Punkte)

Betrachte in  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$  die beiden Nullstellenmengen

$$K = V(X^2 + Y^2 - 1) \text{ und } C = V(X^4 + Y^4 - 1).$$

Zeige, dass es eine polynomiale Abbildung in zwei Variablen gibt, die die eine Nullstellenmenge surjektiv auf die andere abbildet. Zeige, dass diese Abbildung schon über  $\mathbb{Q}$  definiert ist, dort aber nicht surjektiv ist. Zeige ferner, dass es über  $\mathbb{Q}$  überhaupt keine surjektive polynomiale Abbildung von  $C$  nach  $K$  geben kann und dass es nur die konstanten polynomialen Abbildungen von  $K$  nach  $C$  gibt.

**Aufgabe 8.** (2 Punkte)

Zeige, dass eine ebene algebraische Kurve über den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  nicht kompakt in der metrischen Topologie ist.

**Aufgabe 9.** (4 Punkte)

Zeige, dass die affine Ebene  $\mathbb{A}_K^2$  mit der Zariski-Topologie kompakt ist.

**Aufgabe 10.** (10 Punkte)

Schreibe eine Computeranimation, die die Stangenkonfiguration bzw. die zugehörigen Trajektorien aus Beispiel 8.5 wiedergibt.