Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 5

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 5.1. Sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom mit Nullstellenmenge $V(F)$. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in V(F)$ und jeden Skalar $\lambda \in K$ auch $\lambda P \in V(F)$ ist.

AUFGABE 5.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und sei $F \in K[X, Y]$ ein homogenes Polynom. Zeige: F zerfällt in Linearfaktoren.

AUFGABE 5.3. Sei K ein Körper und $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom. Es sei $F = GH$ ein Faktorzerlegung. Zeige, dass G und H ebenfalls homogen sind.

AUFGABE 5.4. Zeige, dass ein homogenes Polynom unter einer linearen Variablentransformation homogen vom gleichen Grad bleibt, und dass dies bei einer affin-linearen Variablentransformation nicht sein muss.

Die folgenden zwei Aufgaben dienen dem Verständnis von Satz 5.4 und Korollar 5.5.

AUFGABE 5.5. Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf das Polynom Y an.

AUFGABE 5.6. Sei $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeige, dass die zugehörige algebraische Kurve $C = V(F)$ überabzählbar viele Elemente besitzt.

AUFGABE 5.7. Berechne das Bild $\tilde{F}$ des Polynoms

$$F = X^2Y + 3XY - Y^3$$

unter dem durch

$$X \longmapsto T^2 + S - 3,\ Y \longmapsto 3TS + S^2 - T$$

definierten Einsetzungshomomorphismus

$$K[X, Y] \longrightarrow K[S, T]\,.$$

Aufgabe 5.8. Es sei K ein unendlicher Körper und es sei $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein Polynom mit der zugehörigen Abbildung

$$F\colon \mathbb{A}_K^n \longrightarrow \mathbb{A}_K^1.$$

Zeige mit und ohne Satz 5.11, dass das Bild von F einpunktig oder unendlich ist.

Aufgabe 5.9. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und

$$P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{A}_K^2$$

n Punkte in der affinen Ebene. Zeige, dass es genau dann eine polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2$$

mit bild $\varphi = \{P_1, \ldots, P_n\}$ gibt, wenn $1 \leq n \leq q$ ist.

Aufgabe 5.10.*

Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^1$$

derart, dass das Urbild von einem Punkt reduzibel ist, das Urbild von allen anderen Punkten aber irreduzibel.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 5.11. (3 Punkte)

Wie viele Monome vom Grad d gibt es im Polynomring in einer, in zwei und in drei Variablen?

Aufgabe 5.12. (3 Punkte)

Wende den Beweis zu Satz 5.4 auf die algebraische Kurve an, die zur rationalen Funktion

$$Y = \frac{X^2 - 2X}{X^2 - 1}$$

gehört.

Aufgabe 5.13. (3 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2\,, (x, y) \longmapsto (x, xy)\,.$$

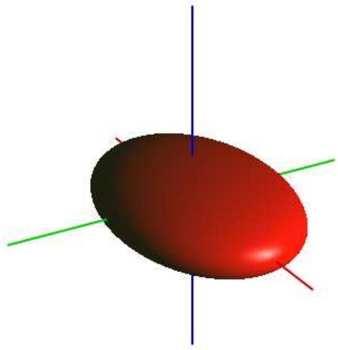
Bestimme das Bild und die Fasern dieser Abbildung.

Aufgabe 5.14. (3 Punkte)

Betrachte das *Ellipsoid*

$$E = V(2x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 5) = \{(x, y, z) : 2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 5\}.$$

Finde eine affin-lineare Variablentransformation(über $\mathbb{R}$) derart, dass das Bild von E unter der Abbildung die *Standardkugel* $V(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ wird.



Ein Ellipsoid: In der algebraischen Geometrie ist damit die Oberfläche gemeint.

Aufgabe 5.15. (4 Punkte)

Seien V und $\tilde{V}$ affin-algebraische Mengen in $\mathbb{A}_K^2$ zu $K = \mathbb{Z}/(2)$. Zeige, dass diese beiden Mengen affin-linear äquivalent sind genau dann, wenn sie die gleiche Anzahl besitzen.

Zeige ebenso, dass dies bei $K = \mathbb{Z}/(p)$ für $p \geq 3$ und auch für $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}/(2)}^n$ für $n \geq 3$ nicht gilt.