Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 27

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-43}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -43$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei $R = A_{-67}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -67$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Sei $R = A_{13}$ der quadratische Zahlbereich zu $D = 13$. Zeige mittels Korollar 27.10, dass R faktoriell ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Seien D und E zwei verschiedene quadratfreie Zahlen und seien Sei A_D und A_E die zugehörigen quadratischen Zahlbereiche. Zeige:

$$A_D \cap A_E = \mathbb{Z} .$$

Aufgabe 5. (6 Punkte)

Sei $R = A_{-15} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-15}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -15$. Berechne zu

$$q = \tfrac{3}{10} - \tfrac{5}{6}\sqrt{-15}$$

den zugehörigen Hauptdivisor und stelle ihn als Differenz zweier effektiver Divisoren dar.

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Sei $R = A_{-11} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-11}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -11$. Berechne mittels des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von

$$35 + \sqrt{-11} \text{ und } -89 + 21\sqrt{-11} .$$

Tipp: berechne zuerst die Normen der beiden Elemente und davon den ganzzahligen ggT.

Aufgabe 7. (5 Punkte)

Sei $R = A_{-7} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$ der quadratische Zahlbereich zu $D = -7$. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$4 + 9\sqrt{-7} \ .$$

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Betrachte die kommutativen Ringe $\mathbb{Z}/(13)$, $\mathbb{Z}/(169)$ und $\mathbb{F}_{169}$. Bestimme alle Ringhomomorphismen zwischen diesen drei Ringen. Tipp: nicht die Endomorphismen, also die Homomorphismen von R nach R, ignorieren.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei R ein quadratischer Zahlbereich und $\mathfrak{a} \neq 0$ ein Ideal in R. Zeige, dass es ein Element $f \in \mathfrak{a}$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ gilt:

$$f \in \mathfrak{m} \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \ .$$

Aufgabe 10. (5 Punkte)

Sei D quadratfrei und sei A_D der zugehörige quadratische Zahlbereich. Ferner sei D ein Vielfaches von 5 und $D = 2, 3 \mod 4$. Zeige: A_D ist nicht faktoriell. Tipp: siehe Aufgabe 25.5.