

## Invariantentheorie

### Arbeitsblatt 20

#### Aufwärmaufgaben

AUFGABE 20.1. Überprüfe Korollar 20.3 für die symmetrische Gruppe.

AUFGABE 20.2. Zeige, dass die spezielle lineare Gruppe  $SL_n(K)$  keine Pseudoreflektionen enthält.

AUFGABE 20.3. Es sei  $K$  ein Körper,  $\sigma \in GL_n(K)$  eine Pseudoreflektion und  $G$  die von  $\sigma$  erzeugte zyklische Gruppe. Zeige direkt, dass der Invariantenring  $K[X_1, \dots, X_n]^G$  ein Polynomring ist.

AUFGABE 20.4. Man gebe ein Beispiel für eine Reflektionsgruppe  $G$  und eine nichttriviale Untergruppe  $H \subseteq G$ , die keine Pseudoreflektion enthält.

AUFGABE 20.5. Wir betrachten die symmetrische Gruppe  $S_n$  mit ihrer natürlichen Einbettung  $S_n \subseteq GL_n(K)$  über einem Körper  $K$ . Zeige, dass  $\sigma \in S_n$  genau dann eine Transposition ist, wenn  $\sigma$  eine Pseudoreflektion ist.

AUFGABE 20.6. Zeige, dass der Polynomring  $K[X_1, \dots, X_n]$  ein freier Modul über dem Polynomring  $K[E_1, \dots, E_n]$  der elementarsymmetrischen Polynome ist.

AUFGABE 20.7. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Beweise die folgenden Rechenregeln für das formale Ableiten  $F \mapsto F'$ :

- (1) Die Ableitung eines konstanten Polynoms ist null.
- (2) Die Ableitung ist  $K$ -linear.
- (3) Es gilt die *Produktregel*, also

$$(FG)' = FG' + F'G.$$

AUFGABE 20.8. Sei  $K$  ein Körper und sei  $K[X]$  der Polynomring über  $K$ . Es sei  $F \in K[X]$  und  $a \in K$ . Zeige, dass  $a$  genau dann eine mehrfache Nullstelle von  $F$  ist, wenn  $F'(a) = 0$  ist, wobei  $F'$  die formale Ableitung von  $F$  bezeichnet.

AUFGABE 20.9. Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik  $p \geq 0$ . Man charakterisiere die Polynome  $F \in K[X, Y]$  mit der Eigenschaft, dass

- (1) die erste partielle Ableitung,
- (2) die zweite partielle Ableitung,
- (3) beide partiellen Ableitungen

null sind.

AUFGABE 20.10. Es sei  $H \in K[X_1, \dots, X_n]$  ein (in der Standardgraduierung) homogenes Polynom vom Grad  $e$ . Zeige die Beziehung

$$eH = X_1 \frac{\partial H}{\partial X_1} + \dots + X_n \frac{\partial H}{\partial X_n}.$$

AUFGABE 20.11. Es sei  $K$  ein Körper und seien  $F_1, \dots, F_m \in K[X_1, \dots, X_n]$  und  $G_1, \dots, G_k \in K[Y_1, \dots, Y_m]$  Polynome. Wir setzen

$$H_i = G_i(F_1, \dots, F_m).$$

Dann gilt für die formalen partiellen Ableitungen die „formale Kettenregel“

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial H_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial H_k}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial H_k}{\partial X_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial G_1}{\partial Y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial G_k}{\partial Y_1} & \cdots & \frac{\partial G_k}{\partial Y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_j \\ Y_j \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial X_n} \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 20.12. Es sei  $K$  ein Körper und  $R = K[X_1, \dots, X_n]$  der Polynomring mit der Standardgraduierung. Es seien  $Q, P_1, \dots, P_m \in R$  homogene Polynome mit

$$Q \in K[P_1, \dots, P_m].$$

Zeige  $Q \in K[P_j, j \in J]$ , wobei der Grad der  $P_j, j \in J$ , maximal gleich dem Grad von  $Q$  ist.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 20.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine zyklische Reflektionsgruppe derart, dass die Erzeuger der Gruppe keine Pseudoreflektionen sind.

AUFGABE 20.14. (5 Punkte)

Wie viele Pseudoreflektionen enthält die allgemeine lineare Gruppe  $GL_2(\mathbb{F}_3)$  über dem Körper  $\mathbb{F}_3$  mit drei Elementen.

Die folgende Aussage kann man bei  $K = \mathbb{C}$  mit dem Satz von Chevalley (der besagt, dass Bilder „konstruierbarer Mengen“ wieder konstruierbar sind) und der Transformationsformel für Volumina beweisen. Gibt es auch einen elementaren algebraischen Beweis?

AUFGABE 20.15. (10 Punkte)

Es sei  $K$  ein Körper der Charakteristik 0 und seien  $Q_1, \dots, Q_n \in K[X_1, \dots, X_n]$  algebraisch unabhängige Polynome. Zeige

$$\det \left( \left( \frac{\partial Q_i}{\partial X_j} \right)_{ij} \right) \neq 0.$$