Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Restklassenräume

Lemma 1. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist die durch*

$$v \sim w, \text{ falls } v - w \in U\,,$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf V.

Beweis. Wir gehen die Bedingungen einer Äquivalenzrelation durch. Die Reflexivität folgt aus $v - v = 0 \in U$, die Symmetrie folgt aus $w - v = -(v - w) \in U$, die Transitivität ergibt sich so: Aus $u - v \in U$ und $v - w \in U$ folgt $u - w = (u - v) + (v - w) \in U$. □

Wir können auf diese Äquivalenzrelation die allgemeinen Ergebnisse aus der zweiten Volesung des ersten Teils anwenden und erhalten eine surjektive Quotientenabbildung (oder Identifizierungsabbildung oder kanonische Projektion)

$$q : V \longrightarrow V/\sim\,,\; v \longmapsto q(v) = [v].$$

Statt $V/\sim$ werden wir V/U schreiben. Das Besondere an dieser Situation ist, dass diese Quotientenmenge selbst ein Vektorraum ist, und dass die kanonische Abbildung linear ist.

Satz 2. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei V/U die Menge der Äquivalenzklassen (die Quotientenmenge) zu der durch U definierten Äquivalenzrelation auf V und es sei $q : V \to V/U$, $v \mapsto [v]$, die kanonische Projektion. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte K-Vektorraumstruktur auf V/U derart, dass q eine K-lineare Abbildung ist.*

Beweis. Da die kanonische Projektion zu einer linearen Abbildung werden soll, muss die Addition durch

$$[v] + [w] = [v + w]$$

und die Skalarmultiplikation durch

$$\lambda[v] = [\lambda v]$$

gegeben sein. Insbesondere kann es also nur eine Vektorraumstruktur mit der gewünschten Eigenschaft geben, und wir müssen zeigen, dass durch diese Vorschriften wohldefinierte Operationen auf V/U definiert sind, die unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. D.h. wir haben für $[v] = [v']$ und

$[w] = [w']$ zu zeigen, dass $[v+w] = [v'+w']$ ist. Nach Voraussetzung können wir $v' = v + u$ und $w' = w + u'$ mit $u, u' \in U$ schreiben. Damit ist

$$v' + w' \;=\; v + w + u + u'$$

und dies ist wegen $u + u' \in U$ äquivalent zu $v + w$. Zur Skalarmultiplikation sei wieder $v' = v + u$ mit $u \in U$. Dann ist

$$\lambda v' \;=\; \lambda(v+u) \;=\; \lambda v + \lambda u,$$

und das ist äquivalent zu λv. Aus der Wohldefiniertheit der Verknüpfung auf V/U und der Surjektivität der Abbildung folgt, dass eine Vektorraumstruktur vorliegt und dass die Abbildung linear ist. $\square$

DEFINITION 3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann nennt man die Menge V/U der Äquivalenzklassen mit der in Lemma RKR.1 bewiesenen Vektorraumstruktur den *Restklassenraum* (oder *Quotientenraum*) von V modulo U.

SATZ 4. *Es sei K ein Körper und es seien V, Q und W K-Vektorräume. Es sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abildung und $\psi : V \to Q$ eine surjektive lineare Abbildung. Es sei vorausgesetzt, dass*

$$\text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

ist. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : Q \longrightarrow W$$

derart, dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ ist. Mit anderen Worten: das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & Q \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis. Für jedes Element $u \in Q$ gibt es mindestens ein $v \in V$ mit $\psi(v) = u$. Wegen der Kommutativität muss

$$\tilde{\varphi}(u) = \varphi(v)$$

gelten. Das bedeutet, dass es maximal ein $\tilde{\varphi}$ geben kann. Wir haben zu zeigen, dass durch diese Bedingung eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist. Seien also $v, v' \in V$ zwei Urbilder von u. Dann ist

$$v' - v \in \text{kern } \psi \subseteq \text{kern } \varphi$$

und daher ist $\varphi(v) = \varphi(v')$. Die Abbildung ist also wohldefiniert. Seien $u, u' \in Q$ und seien $v, v' \in V$ Urbilder davon. Dann ist $v + v'$ ein Urbild von $u + u'$ und daher ist

$$\tilde{\varphi}(u + u') \;=\; \varphi(v + v') \;=\; \varphi(v) + \varphi(v') \;=\; \tilde{\varphi}(u) + \tilde{\varphi}(u').$$

D.h. φ ist mit der Addition verträglich. Sei $u \in Q$ mit einem Urbild $v \in V$ und sei $\lambda \in K$. Dann ist λv ein Urbild von λu und daher ist

$$\tilde{\varphi}(\lambda u) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda\tilde{\varphi}(u),$$

also ist φ auch mit der Skalarmultiplikation verträglich. □

Die im vorstehenden Satz konstruierte Abbildung $\tilde{\varphi}$ heißt *induzierte lineare Abbildung* und entsprechend heißt der Satz auch *der Satz über die induzierte Abbildung.*

Korollar 5. *Es sei K ein Körper und es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine surjektive lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische lineare Isomorphie

$$\tilde{\varphi} : V/\operatorname{kern}\varphi \longrightarrow W.$$

Beweis. Wir wenden Satz RKR.4 auf $Q = V/\operatorname{kern}\varphi$ und die kanonische Projektion $q : V \to V/\operatorname{kern}\varphi$ an. Dies induziert eine lineare Abbildung

$$\tilde{\varphi} : V/\operatorname{kern}\varphi \longrightarrow W$$

mit $\varphi = \tilde{\varphi} \circ q$, die surjektiv ist. Sei $[x] \in V/\operatorname{kern}\varphi$ und $[x] \in \operatorname{kern}\tilde{\varphi}$. Dann ist

$$\tilde{\varphi}([x]) = \varphi(x) = 0,$$

also $x \in \operatorname{kern}\varphi$. Damit ist $[x] = 0$ in $V/\operatorname{kern}\varphi$, d.h. der Kern von $\tilde{\varphi}$ ist trivial und nach Lemma 12.7 ist $\tilde{\varphi}$ auch injektiv. □

Satz 6. *Es sei K ein Körper und es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen. Dann gibt es eine kanonische Faktorisierung

$$V \xrightarrow{q} V/\operatorname{kern}\varphi \xrightarrow{\theta} \operatorname{bild}\varphi \xhookrightarrow{\iota} W\,,$$

wobei q die kanonische Projektion, θ ein Vektorraum-Isomorphismus und i die kanonische Inklusion des Bildraumes in W ist.

Beweis. Dies folgt aus Korollar RKR.5, angewendet aud die surjektive Abbildung

$$V \longrightarrow \operatorname{bild}\varphi.$$

□

Diese Aussage wird häufig kurz und prägnant so formuliert:

Bild = Urbild modulo Kern.