Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Arbeitsblatt 81

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 81.1. Man gebe ein Beispiel einer surjektiven differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : M \longrightarrow N$$
zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung
$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$
nicht surjektiv ist.

Aufgabe 81.2. Man gebe ein Beispiel einer injektiven differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : M \longrightarrow N$$
zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten M und N derart, dass die zugehörige Tangentialabbildung
$$T(\varphi) : TM \longrightarrow TN$$
nicht injektiv ist.

Aufgabe 81.3. Zeige, dass
$$M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | \, x + x^2y + z^2 + t^3 = 0\}$$
eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 81.4. Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Die in der folgenden Aufgabe konstruierte Basis des Dualraums heißt *Dualbasis.*

Aufgabe 81.5. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \operatorname{Hom}_K(V, K)$$

der sogenannte *Dualraum* zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

Aufgabe 81.6. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es seien $f_1, \ldots, f_k \in V^*$. Zeige, dass die Abbildung

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow K,\, (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto \det\left(f_i(v_j)\right)_{1 \leq i,j \leq k},$$

multilinear und alternierend ist.

Aufgabe 81.7. Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bzgl. den Standardbasen der Dachprodukte.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 81.8. (2 Punkte)

Drücke das Dachprodukt $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.

Aufgabe 81.9. (4 Punkte)

Drücke das Dachprodukt

$$-2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

in der Standardbasis von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ aus.

Aufgabe 81.10. (6 Punkte)

Wir betrachten das zweite Dachprodukt $\bigwedge^2 \mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $e_i \wedge e_j$, $i < j$, und der zugehörigen Dualbasis $\varphi_{ij} = e_{ij}^*$. Zeige, dass die Funktion

$$\varphi : \bigwedge^2 \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \varphi(x) = \sqrt{\sum_{i<j} (\varphi_{ij}(x))^2},$$

die Eigenschaft besitzt, dass $\varphi(v \wedge w)$ mit dem Flächeninhalt des von v und w im $\mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops übereinstimmt.

Aufgabe 81.11. (5 Punkte)

Es sei

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & -3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung. Bestimme die Matrix zu $\bigwedge^2 \varphi$ bzgl. den Standardbasen der Dachprodukte.

Aufgabe 81.12. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $u_1, \ldots, u_n \in V$. Zeige, dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\bigwedge^k V \longrightarrow \bigwedge^{k+n} V$$

mit $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge u_1 \wedge \ldots \wedge u_n$ gibt.