Fachbereich Mathematik/Informatik **18. Dezember 2010**
Prof. Dr. H. Brenner

Mathematik II

Nachklausur

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt (siehe aber den Anhang).

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl.

Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	3	9	4	6	4	6	8	8	8	64
erhalt. Pkt.:												

Note:

AUFGABE 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *obere* Treppenfunktion zu einer Funktion

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(2) Das *totale Differential* in einem Punkt $P \in V$ einer in diesem Punkt total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

(dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).

(3) Der *Tangentialraum* an die Faser durch einen Punkt $P \in V$ einer total differenzierbaren Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

mit einem surjektiven totalen Differential (dabei seien V und W endlichdimensionale reelle Vektorräume).

(4) Ein *Vektorfeld* auf einer offenen Menge $U \subseteq V$ in einem reellen Vektorraum V.

(5) Eine *Bilinearform* $\langle -, - \rangle$ auf einem K-Vektorraum V.

(6) Die *Gramsche Matrix* zu einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem K-Vektorraum V bzgl. einer Basis $v_1, \ldots, v_n$.

(7) Der *Dualraum* eines K-Vektorraumes V.

(8) Eine *trigonalisierbare* lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ (V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum).

AUFGABE 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Der *Satz über die (lokale) Umkehrabbildung.*

(2) Die Formel für die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

(3) Der *Satz über die komplexe Partialbruchzerlegung.*

(4) Der Satz über den Zusammenhang von totaler Differenzierbarkeit und Richtungsableitung für eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

in einem Punkt $P \in \mathbb{R}^n$.

AUFGABE 3. (3 Punkte)
Berechne das bestimmte Integral zur Funktion

$$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x+3} - e^{-x},$$

über $[1, 4]$.

AUFGABE 4. (9 (6+3) Punkte)
Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{x^5 + 3x^3 - 2x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x^2+1)}.$$

a) Bestimme die reelle Partialbruchzerlegung von f.

b) Bestimme eine Stammfunktion von f für $x > 1$.

AUFGABE 5. (4 Punkte)
Es sei

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Kurve und sei

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Isometrie. Beweise die Längengleichheit

$$L(\gamma) = L(\varphi \circ \gamma)\,.$$

AUFGABE 6. (6 (2+2+2) Punkte)
Wir betrachten die Abbildung

$\varphi : \mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\ (a, b, c, d, u, v) \longmapsto (au + bv + c + d, ad - bc, ac - b^2, bd - c^2).$

a) Bestimme die Jacobi-Matrix zu dieser Abbildung.

b) Zeige, dass φ im Nullpunkt nicht regulär ist.

c) Zeige, dass φ in $(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ regulär ist.

AUFGABE 7. (4 Punkte)
Untersuche die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + xy - 6y^2 - y,$$

auf kritische Punkte und Extrema.

AUFGABE 8. (6 Punkte)

Beweise den Mittelwertsatz der Integralrechnung.

AUFGABE 9. (8 Punkte)

Beweise den Satz über implizite Abbildungen für den Fall einer linearen surjektiven Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m .$$

Für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt?

AUFGABE 10. (8 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2 .$$

Für welche $x, y \in [0,1]$, $x < y$, besitzt die zugehörige dreistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt. Welchen Wert besitzt er?

AUFGABE 11. (8 (5+3) Punkte)

a) Bestimme den Lösungsraum des linearen Differentialgleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

b) Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ANHANG

SATZ 1. *Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $P \in G$ und es sei $Z = \varphi^{-1}(\varphi(P))$ die Faser durch P. Das totale Differential $(D\varphi)_P$ sei surjektiv. Dann gibt es eine offene Menge $P \in W$, $W \subseteq G$, eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : V \longrightarrow W$$

derart, dass $\psi(V) \subseteq Z \cap W$ ist und ψ eine Bijektion

$$\psi : V \longrightarrow Z \cap W$$

induziert. Die Abbildung ψ ist in jedem Punkt $Q \in V$ regulär und für das totale Differential von ψ gilt

$$(D\varphi)_{\psi(Q)} \circ (D\psi)_Q = 0 \,.$$

DEFINITION 2. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow V$$

auf einem euklidischen Vektorraum V heißt *Isometrie*, wenn für alle $v, w \in V$ gilt:

$$\langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle = \langle v, w \rangle \,.$$