Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 23

In den folgenden Vorlesungen möchten wir die endlichen Untergruppen $G \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (bis auf Konjugation) und die zugehörigen Invariantenringe $K[U,V]^G$ bestimmen. Es wird sich herausstellen, dass es hierzu eine überschaubare Klassifikation gibt, nämlich die ADE-Klassifikation. Die auftretenden Invariantenringe bzw. ihre Spektren (also die Bahnenräume) nennt man *ADE-Singularitäten*. Von Singularitäten spricht man, da diese Invariantenringe keine Polynomringe sind, also nicht „regulär" sind. Die anvisierte Klassifikation beruht auf der Klassifikation der endlichen Bewegungsgruppen im $\mathbb{R}^3$.

Eine Liste von Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$

Wir betrachten die folgenden Beispiele von endlichen Untergruppen der SL_2 $(\mathbb{C})$. Wir werden später sehen, dass diese Liste bis auf Konjugation vollständig ist.

Beispiel 23.1. Die zyklische Gruppe der Ordnung n lässt sich einfach als eine Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ realisieren. Dazu sei ζ eine n-te komplexe primitive Einheitswurzel, beispielsweise $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Die von

$$\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} \zeta^j & 0 \\ 0 & \zeta^{-j} \end{pmatrix} \mid j = 0, \ldots, n-1 \right\} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) ,$$

ist eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Diese Untergruppe wird mit Z_n bezeichnet.

Beispiel 23.2. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine $2n$-te komplexe primitive Einheitswurzel, beispielsweise

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{2n}} = e^{\frac{\pi i}{n}} .$$

Die von den Matrizen

$$A = A_{2n} = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ heißt die *binäre Diedergruppe*. Sie wird mit BD_n bezeichnet. Das Element A besitzt die Ordnung $2n$ und es ist

$$A^n = \begin{pmatrix} \zeta^n & 0 \\ 0 & \zeta^{-n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^2 .$$

Insbesondere besitzt B die Ordnung 4. Es ist

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\zeta^{-1} \\ i\zeta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta^{-1} & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A^{2n-1}B.$$

Somit lassen sich alle Elemente der Gruppe als

$$A^iB^j \text{ mit } 0 \leq i \leq 2n-1,\, 0 \leq j \leq 1,$$

schreiben. Da B nicht zu der von A erzeugten Untergruppe gehört, ist diese Darstellung eindeutig und BD_n besitzt genau $4n$ Elemente. Es liegt die Untergruppenbeziehung $Z_{2n} \subseteq BD_n$ vom Index 2 vor.

Beispiel 23.3. Die Matrizen

$$A = A_8 = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix},\, B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix},$$

wobei ζ eine primitive achte Einheitswurzel ist, erzeugen eine Untergruppe von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Die Ordnungen dieser Elemente ergeben sich folgendermaßen. Es ist

$$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B^2,$$

also besitzt A die Ordnung 8 und B die Ordnung 4. Mit

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{8}} = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

ist

$$\begin{aligned} C^3 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^6+\zeta^4 & \zeta^6+1 \\ \zeta^4+\zeta^6 & \zeta^4+\zeta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^5+\zeta^3+\zeta^3+\zeta^5 & \zeta^5+\zeta^3+\zeta^7+\zeta \\ \zeta^3+\zeta^5+\zeta+\zeta^7 & \zeta^3+\zeta^5+\zeta^5+\zeta^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

so dass die Ordnung von C gleich 6 ist. Jedes Element dieser Gruppe kann man als $A^iB^jC^k$ schreiben, wobei die Exponenten jeweils maximal bis zur Ordnung der Matrizen laufen. Um das einzusehen muss man untersuchen, was passiert, wenn man ein solches Element mit A oder B rechterhand multipliziert. Es ist

$$\begin{aligned} CA &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \zeta^6 \\ \zeta^6 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}i \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta+\zeta^7 & \zeta^5+\zeta^7 \\ \zeta^7+\zeta^5 & \zeta^7+\zeta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\zeta^6 & \zeta^4+\zeta^6 \\ 1+\zeta^6 & 1+\zeta^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^6+\zeta^4 & \zeta^6+1 \\ \zeta^4+\zeta^6 & \zeta^4+\zeta^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}^2 \\
&= ABC^2,
\end{aligned}$$

man kann also A von rechts an C vorbeischieben. Wegen

$$\begin{aligned}
CB &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \zeta & \zeta \\ \zeta^3 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix} \\
&= A^2C
\end{aligned}$$

kann man B von rechts an C vorbeischieben. Wegen

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta^3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \zeta^7 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix}^7\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= A^7B
\end{aligned}$$

kann man B von rechts an A vorbeischieben. Wegen

$$C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A^4 = B^2$$

kann man sogar jedes Gruppenelement als

$$A^iB^jC^k \text{ mit } 0 \leq i \leq 7,\ 0 \leq j \leq 1,\ 0 \leq k \leq 2,$$

schreiben.

Wir zeigen, dass es unter diesen Elementen keine Wiederholungen gibt. Die Produkte A^iB^j mit $0 \leq i \leq 7$, $0 \leq j \leq 1$, bilden nach Beispiel 23.2 die binäre Diedergruppe BD_4 der Ordnung 16, dort gibt es also keine Wiederholungen. Also enthält die Gruppe eine Untergruppe der Ordnung 16 aber auch eine Untergruppe der Ordnung 3 (die von C^2 erzeugte Untergruppe), also muss ihre Ordnung 48 sein (und in den obigen Produkten kann es keine Wiederholung geben). Es handelt sich also um eine Gruppe mit 48 Elementen, die die *binäre Oktaedergruppe* heißt. Sie wird mit BO bezeichnet. Es liegt die Untergruppenbeziehung

$$Z_8 \subseteq BD_4 \subseteq BO$$

vor.

Beispiel 23.4. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta^7 & \zeta^7 \\ \zeta^5 & \zeta \end{pmatrix},$$

wobei ζ eine primitive achte Einheitswurzel ist, die Erzeuger der binären Oktaedergruppe BO. Die darin von A^2, B, C erzeugte Untergruppe besteht aus allen Elementen $A^{2i}B^jC^k$ mit $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$, $0 \leq k \leq 2$, wie ähnliche Berechnungen wie die aus Beispiel 23.3 zeigen, und besitzt demnach 24 Elemente. Diese Gruppe nennt man die *binäre Tetraedergruppe*, sie wird mit BT bezeichnet.

Beispiel 23.5. Es sei ξ eine primitive 5-te komplexe Einheitswurzel. Wir setzen

$$E = -\begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix} \text{ und } F = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix}.$$

Die von diesen Elementen erzeugte Untergruppe der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ heißt die *binäre Ikosaedergruppe*. Es ist

$$E^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und somit besitzt E die Ordnung 10. Wegen

$$\begin{aligned} F^2 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \xi^2 + \xi^3 - 2 + \xi^4 + \xi - 2 & 0 \\ 0 & \xi^4 + \xi - 2 + \xi^2 + \xi^3 - 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt F die Ordnung 4. Ferner ist

$$\begin{aligned} EF &= -\begin{pmatrix} \xi^3 & 0 \\ 0 & \xi^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi + \xi^4 & \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 - \xi^3 & \xi - \xi^4 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi^4 + \xi^3 - \xi - 2 & -2\xi^4 + 2\xi^2 - \xi + 1 \\ \xi^4 - 2\xi^3 + 2\xi - 1 & -\xi^4 + \xi^2 + 2\xi - 2 \end{pmatrix}$$

und (unter Verwendung von $\xi^2 + \xi^3 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 2\xi^4 + \xi^3 - \xi - 2 & -2\xi^4 + 2\xi^2 - \xi + 1 \\ \xi^4 - 2\xi^3 + 2\xi - 1 & -\xi^4 + \xi^2 + 2\xi - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\xi^4 + \xi^2 & 1 - \xi \\ \xi^4 - 1 & \xi^3 - \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\xi^4 - 5\xi^3 - 5\xi^2 + 5\xi & 0 \\ 0 & 5\xi^4 - 5\xi^3 - 5\xi^2 + 5\xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 - 10\left(\xi^3 + \xi^2\right) & 0 \\ 0 & -5 - 10\left(\xi^3 + \xi^2\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 5\sqrt{5} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also ist

$$(EF)^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Ordnung von EF ist 6. Diese Gruppe besitzt 120 Elemente und heißt die , sie wird mit BI bezeichnet.

Untergruppen der speziellen unitären Gruppe

In den oben aufgelisteten endlichen Untergruppen der $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sind die (erzeugenden) Matrizen von der Form

$$\begin{pmatrix} u & -\overline{v} \\ v & \overline{u} \end{pmatrix},$$

d.h. es handelt sich um unitäre Matrizen. Wir erinnern an die entsprechenden Begrifflichkeiten. Das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$ ist durch

$$\langle w, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{z_i}$$

definiert. Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ heißt *unitär*, wenn sie das Standardskalarprodukt respektiert, wenn also

$$\langle f(w), f(z) \rangle = \langle w, z \rangle$$

für alle $w, z \in \mathbb{C}^n$ gilt. Dies ist das komplexe Analogon zu den Isometrien im Reellen.

Definition 23.6. Der $\mathbb{C}^n$ sei mit dem komplexen Standardskalarprodukt versehen. Die Menge aller unitären linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bilden eine Gruppe, die die *unitäre Gruppe* heißt. Sie wird mit $\mathrm{U}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

Definition 23.7. Der $\mathbb{C}^n$ sei mit dem komplexen Standardskalarprodukt versehen. Die Menge aller unitären linearen Abbildungen $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit Determinante 1 bilden eine Gruppe, die die *spezielle unitäre Gruppe* heißt. Sie wird mit $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ bezeichnet.

Lemma 23.8. *Jede endliche Untergruppe $G \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ist zu einer Untergruppe der $\mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$ konjugiert.*

Beweis. Es sei $\langle -,- \rangle$ das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^n$. Wir definieren zuerst unter Bezug auf die endliche Gruppe

$$G \subseteq \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$$

ein neues Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, nämlich

$$\Phi(w,z) := \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma w, \sigma z \rangle .$$

Nach Aufgabe 23.6 handelt es sich in der Tat um ein Skalarprodukt. Für ein Gruppenelement $\tau \in G$ ist ferner

$$\Phi(\tau w, \tau z) = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma \tau w, \sigma \tau z \rangle = \frac{1}{\#(G)} \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma w, \sigma z \rangle = \Phi(w,z),$$

da ja insgesamt über die gleichen Gruppenelemente aufsummiert wird. Die zu G gehörenden linearen Abbildungen sind also unitär bezüglich Φ. Es sei $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ bezüglich Φ und sei M die Matrix, deren Spalten die u_i sind. Wir betrachten die konjugierte Gruppe

$$H := M^{-1} G M,$$

also

$$H = \left\{ M^{-1} \sigma M \mid \sigma \in G \right\} .$$

Dabei gilt die Beziehung

$$\langle w,z \rangle = \Phi(Mw, Mz),$$

da dies für die Standardbasis git. Für $\tau \in H$ und $w,z \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \tau w, \tau z \rangle &= \left\langle M^{-1}\sigma M w, M^{-1} \sigma M z \right\rangle \\ &= \Phi(\sigma M w, \sigma M z) \\ &= \Phi(Mw, Mz) \\ &= \langle w, z \rangle , \end{aligned}$$

d.h. H ist bezüglich des Standardskalarproduktes unitär. Wegen

$$\tau = M^{-1} \sigma M$$

und $\sigma \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ besitzt auch τ die Determinante 1, und daher ist $H \subseteq \mathrm{SU}_n(\mathbb{C})$. $\square$