Topologische Raum

kompakt

Fundamentalgruppe

Überlagerung

Homotopie

Faserbündel, Zellenkomplexe, Puppe-Sequenzen, Homologiegruppen

Satz von Whitehead

" " Blakers-Massey

" " Freudenthal

Frage: Ist $\mathbb{R}^m$ topologisch äquivalent zu $\mathbb{R}^n$?

Antwort mit π_1: Sei $m=2$. Antwort: Ja $\Leftrightarrow$ $n=2$

Definition: $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

$I^n = I \times \ldots \times I \subseteq \mathbb{R}^n$

$\partial I^n := \{ s \in I^n : \exists\ 1 \leq i \leq n \text{ mit } s_i \in \{0,1\} \}$

$s = (s_1, \ldots, s_n)$

Sei X topologische Raum, $x_0 \in X$.

$\pi_n(X, x_0) := \{ f: I^n \xrightarrow[\text{stetig}]{} X : f(s) = x_0 \ \forall s \in \partial I^n \} / \text{Homotopie rel. } \partial I^n$

$n=1$:
f ist Schleife
$f(0) = f(1) = x_0$

ist die n-te Homotopiegruppe von X (bzgl. x_0).

Gruppenstruktur:

Seien $f, g: (I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ stetig.

$$f+g : I^n \longrightarrow X$$
$$s \longmapsto \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \le s_1 \le 1 \end{cases}$$

Satz:

① Sei X topologischer Raum. Dann ist

$$\pi_n(X, x_0), \quad ([f], [g]) \longmapsto [f+g]$$

eine abelsche Gruppe $\forall n \geq 2$.

② Sei $\varphi: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ stetig.
Dann ist

$$\pi_n(X, x_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_n(Y, y_0)$$
$$[f] \longmapsto [\varphi \circ f]$$

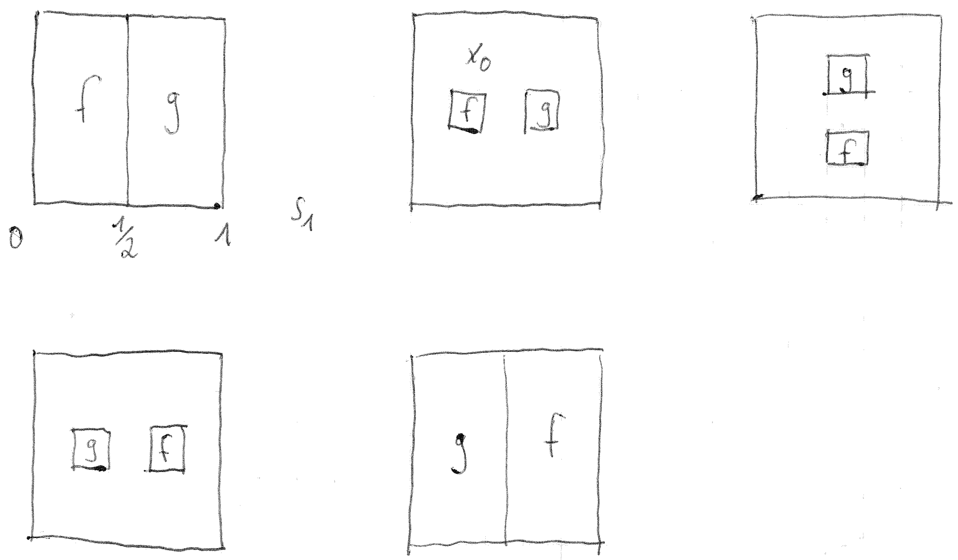
ein Gruppenhomomorphismus.
Es gilt

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* \quad \text{und} \quad id_* = id$$

Beweis:

① Wohldefiniert und Gruppe: wie bei $n = 1$ (FDG).
Warum ist

$$f+g \underset{\text{rel } \partial I^n}{\simeq} g+f \; ?$$



② genau wie im Fall $n=1$.

- $\pi_n S^n \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_3 S^2 \cong \mathbb{Z}$
- $\pi_i S^n \cong 0 \qquad \forall i<n$

Satz von Whitehead:

Sei $f: X \to Y$ stetige Abb. von Zellenkomplexen.
Ist

$$\pi_0 X = \pi_0 Y = * \quad \text{(wegzshgd.)}$$

und

$$f_*: \pi_n X \to \pi_n Y$$

ein Isomorphismus $\forall n$, so ist f eine Homotopieäquivalenz.

$$\pi_n(X, x_0) = \{f: I^n \to X: \dots\}/\simeq \text{rel}$$
$$\cong$$
$$\{g: S^n \to X \text{ stetig} : g(1) = x_0\}/\simeq \text{rel}$$

$n=1$:

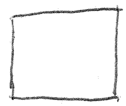
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "QRP"'] & X \\ & S^1 \arrow[u, dashed, "\bar f"'] \arrow[u, bend right, "g"'] \end{tikzcd}$$

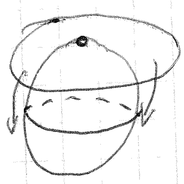
$s \mapsto e^{2\pi i \cdot s}$

$f(0)=f(1)=x_0$ Schleife!

n beliebig:

$$I^n \longrightarrow S^n \cong I^n/\partial I^n$$





$$\begin{tikzcd} & D^n \arrow[r] & S^n \\ & x \arrow[r, mapsto] & \left(1-2\cdot\|x\|,\ 2\cdot\sqrt{\frac{1-\|x\|}{\|x\|}}\cdot x\right) \\ I^n \arrow[uur] & & \end{tikzcd}$$

$$I^n = B_{max}\left(\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots\right), \tfrac{1}{2}\right) \cong B_{eukl}(0,1)$$

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & X \\ & I^n/\partial I^n \cong S^n \arrow[u, dashed, "\bar f"'] \end{tikzcd}$$

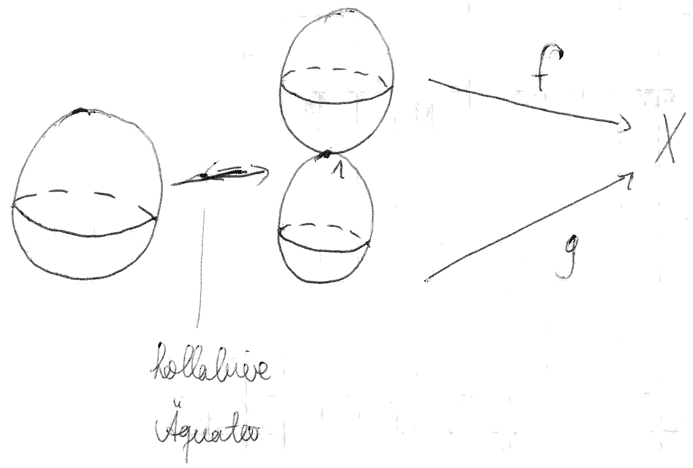
$f(\partial I^n) = \{x_0\}$

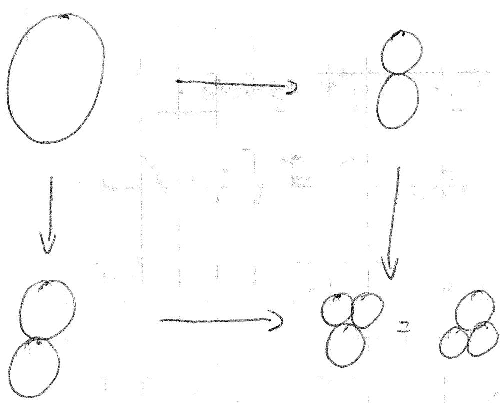
0.

$$\begin{tikzcd} I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "QRP \times I"'] & X \\ & S^n \times I \arrow[u, dashed, "\bar H"'] \end{tikzcd}$$

rel ∂I^n

Gruppenoperation in $\{(S^n, 1) \to (X, x_0)\} / \simeq$ rel.





(Assoziativität)

Proposition:

Sei $p: E \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$, $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Dann ist

$$p_* : \pi_n(E, e_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$$

bijektiv für $n \geq 2$.

Beweis:

$$(I, \partial I^n) \to (X, x_0) \qquad (S^n, \overset{\overset{?}{\|}}{1}) \to (X, x_0)$$

surjektiv:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X \end{tikzcd}$$

Allg. Liftungssatz:

$\pi_1 S^n \cong \{1\} \; \forall n \geq 2$

S^n ist wegzshgd. u. lokal wegzshgd.

injektiv:

Sei $f: (I^n, \partial I^n) \to (E, e_0)$ und
$H: I^n \times I \to X$ von $p \circ f$ zu x_0, die auf ∂I^n konstant ist.

$$\begin{tikzcd} I^n \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & X \end{tikzcd}$$

$\tilde{H}$ von f nach e_0.

Homotopie $\tilde{H}$ ist konstant auf ∂I^n.
($p^{-1}(x_0)$ diskret, I^n bzw. ∂I^n zshgd.) □

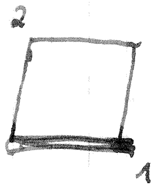
Relative Homotopiegruppen

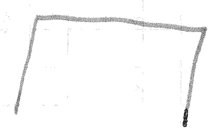
$n \geq 1$:

$$\ell: I^{n-1} \to I^n, \quad s \mapsto (s,0) \qquad J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus \ell(I^{n-1})}$$

$n = 1$: $\{0\} \to I$ $\qquad$ $\{1\}$

$n = 2$





$\ell: I^2 \to I$

$(s_1, s_2) \mapsto (s_1, 0)$

$n = 3$

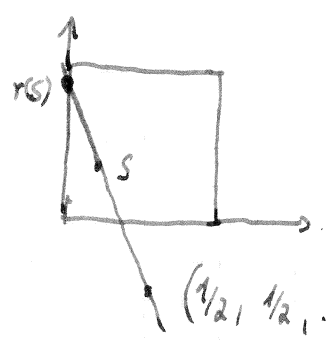
$J^{n-1} \overset{j}{\hookrightarrow} I^n$ ist starke Deformationsretrakt

$H: I^n \times I \longrightarrow I^n$ von id nach $j \circ r$ mit

$r: I^n \to J^{n-1}$

stetig.

$H(s,t) = s \quad \forall s \in J^{n-1}$



$$H(s,t) := (1-t)\cdot s + t \cdot r(s)$$

Definition:

$x_0 \in A \subseteq X \quad (n \geq 1)$

$$\pi_n(X, A, x_0) := \{f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)\}/_{\simeq}$$

$f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$

$H : I^n \times I \to X$ Homotopie von f nach g

- $H(s,t) \in A \quad \forall\, (s,t) \in \partial I^n \times I$
- $H(s,t) \in \{x_0\} \quad \forall\, (s,t) \in J^{n-1} \times I$

Beispiel:

$A = \{x_0\}$

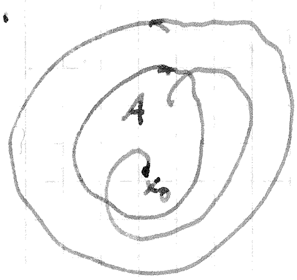
$\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$

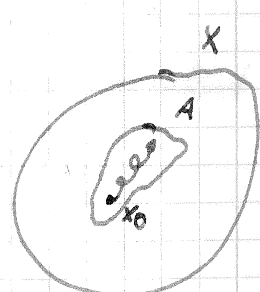
$n = 1$:

$(I, \{0,1\}, \{1\}) \to (X, A, x_0)$

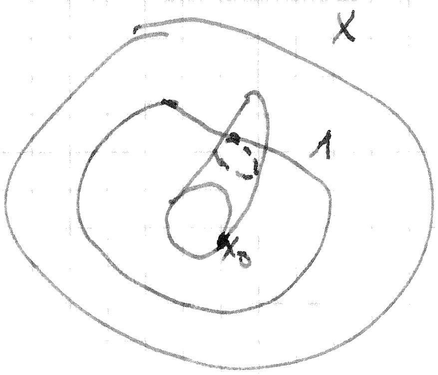
$A = X$

$\pi_n(X, X, x_0) = \{[x_0]\}$ $n=1.$





$n = 2$:



Lemma (Kompressionskriterium):

Sei $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$.

Es ist

$$[f] = [x_0] \in \pi_n(X, A, x_0) \iff f \simeq_{\text{rel}\, \partial I^n} g, \text{ wobei}$$
$$g(I^n) \subseteq A.$$

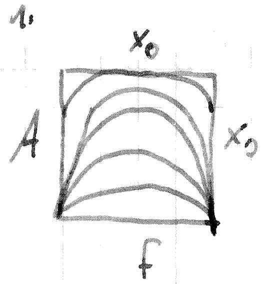
Beweis:

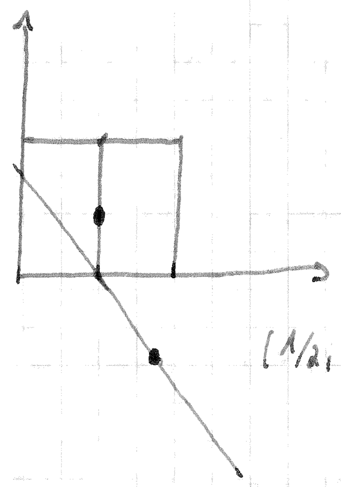
„$\Rightarrow$": Sei $H: I^n \times I \to X$ Homotopie von f nach x_0 mit

$$H(s,t) \in A \quad \forall (s,t) \in \partial I^n \times I$$
$$H(s,t) = x_0 \quad \forall (s,t) \in J^{n-1} \times I$$

$$I^n \times I \xrightarrow{\phi} I^n \times I \xrightarrow{H} X$$

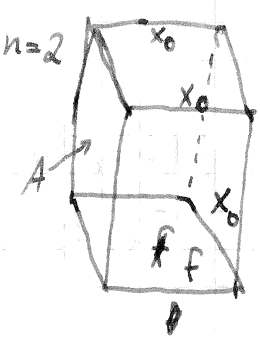
$n = 1$:





$(1/2, 1/2, \ldots, 1/2, -1)$

$n = 2$



Es ist $\phi(s,0) = s \quad \forall s \in I^n$. $H \circ \phi$ ist konstant auf ∂I^n.

Es ist $H \circ \phi(I^n \times 1) \subseteq A$.

„$\Leftarrow$": Sei $f \simeq_{\partial I^n} g$

$$I^n \times I \xrightarrow[\text{Deform. auf } J^{n-1}]{} I^n \xrightarrow{g} X$$

ist Homotopie von Tripeln von g nach x_0.

$\square$

Satz:

Sei $x_0 \in A \subseteq X$, $n \geq 2$. Dann ist $\pi_n(X, A, x_0)$ eine Gruppe, kommutativ für $n \geq 3$.

Beweis:

$f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$

$$(f+g)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & 0 \leq s_1 \leq 1/2 \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

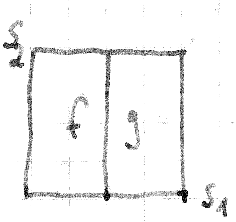
$s_1 = \frac{1}{2}$

$$f(1, s_2, \dots, s_n) = x_0$$

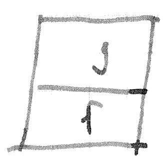
$$g(0, s_2, \dots, s_n) \overset{!}{\in} A \quad \text{(nicht unbed. gleich } x_0\text{)}$$

$n = 1$: Problem: Ist $g(0) = x_0$?

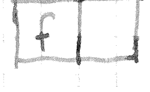
$n \geq 2$: $(0, s_2, \dots, s_n) \in J^{n-1}$



$$(f +_{s_2} g)(s) = \begin{cases} f(s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n), & 0 \leq s_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(s_1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n), & \frac{1}{2} \leq s_2 \leq 1 \end{cases}$$



$$(f \overset{(=+_3)}{\hat{+}} g)(s) = \begin{cases} f(2s_1, 2s_2, s_3, \dots, s_n) & 0 \leq s_1, s_2 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, 2s_2 - 1, s_3, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1, s_2 \leq 1 \end{cases}$$

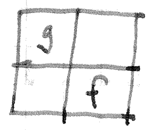


Homotopie von $f+g$ zu $f \hat{+} g$:

$$H(s,t) := \begin{cases} f(2s_1, \min\{s_2 + t\cdot s_2, 1\}, s_3, \dots, s_n); & 0 \le s_1 \le \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, \max\{s_2 + t\cdot(s_2 - 1), 0\}, s_3, \dots, s_n); & 1/2 \le s_1 \le 1 \end{cases}$$

$s = (s_1, \dots, s_n)$

$f \tilde{+} g$



$$\Rightarrow f + g \simeq f \hat{+} g \simeq f +_2 g \simeq f \tilde{+} g \simeq g + f \qquad \square$$

$x_0 \in A \subseteq X \qquad y_0 \in B \subseteq Y$

$$\{ (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0) \} / \simeq \qquad n \geq 3$$

$\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$

$$\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$$
$$[f] \mapsto [\varphi \circ f]$$

$$(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$$
$$id_* = id \qquad \text{Funktor!}$$

$x_0 \in A \subseteq X$

$$(A, \{x_0\}, x_0) \xhookrightarrow{i} (X, \{x_0\}, x_0)$$
$$(X, \{x_0\}, x_0) \xhookrightarrow{j} (X, A, x_0)$$

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_n(A,\{x_0\},x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X,\{x_0\},x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X,A,x_0) \\
\parallel & & \parallel & & \downarrow \partial \\
\pi_n(A,x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X,x_0) & & \pi_{n-1}(A,x_0)
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\pi_{n-1}(A,x_0) \\
\vdots \\
\downarrow \\
\pi_{n+1}(X,A,x_0) \\
\downarrow \partial \\
\pi_n(A,x_0) \\
\downarrow i_* \\
\pi_n(X,x_0) \\
\swarrow j_*
\end{array}$$

$$l : I^{n-1} \to I^n$$

$$s \mapsto (s,0)$$

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \xrightarrow{f} (X, A, x_0)$$

$$f \circ l : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$$

$$J^{n-1} \cap l(I^{n-1}) = \partial I^{n-1}$$

$$\pi_0(X,x_0) \xleftarrow{i_*} \pi_0(A,x_0) \xleftarrow{\partial} \pi_1(X,A,x_0) \leftarrow \dots \leftarrow \pi_n(X,A,x_0)$$

ist eine lange Folge.

Satz: Diese Folge ist exakt.

Definition:

Seien $(A,a_0) \xrightarrow{\varphi} (B,b_0) \xrightarrow{\psi} (C,c_0)$ Abbildungen von punktierten Menge.

$$\operatorname{Im} \varphi := \{ \varphi(a) : a \in A \}$$

$$\ker \psi := \{ b \in B : \psi(B) = c_0 \}$$

Die Folge (φ, ψ) ist exakt (an der Stelle (B, b_0)), wenn

$$\operatorname{Im} \varphi = \ker \psi.$$

Beispiel:

Sei $H \overset{i}{\hookrightarrow} G$ eine Untergruppe, G/H punktierte Menge der Linksnebenklassen von H in G.

$$(H, e) \to (G, e) \to (G/H, eH).$$

ist exakt.

$\varphi : (G, e) \to (H, f)$ Gruppenhomomorphismus

$$\{e\} \longrightarrow (G, e) \xrightarrow{\varphi} (H, f)$$

ist exakt $\Leftrightarrow$ φ injektiv.

$$(G, e) \xrightarrow{\varphi} (H, f) \longrightarrow \{1\}$$

ist exakt $\Leftrightarrow$ φ surjektiv

Definition:

Sei $\ldots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \ldots$ eine lange Folge punktierter Mengen. Sie ist exakt, wenn sie exakt an A_n ist $\forall n \in \mathbb{Z}$

Beispiel:

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\substack{5\\0\\2}} \mathbb{Z} \longrightarrow A \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\substack{7\\2\\0}} \mathbb{Z}$$

sei exakt

$$0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z} \to 0$$

$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

Beweis des Satzes:

$\pi_0(A, x_0)$:

$\operatorname{Im} \partial \subseteq \ker i_*$:

Sei $f : (I, \partial I, J^0 = \{1\}) \to (X, A, x_0)$

$f \circ l = f(0) : \{0\} \to A$

$i \circ f \circ l : \{0\} \to X$

f ist Weg von $f(0)$ zu x_0 in X.

$\Rightarrow [f(0)] = [x_0]$.

$\operatorname{Im} \partial \supseteq \ker i_*$:

Sei $a \in A$ mit $[a] = [x_0] \in \pi_0(X, x_0)$

$\Rightarrow \exists$ Weg $w : I \to X$ von a nach x_0.

$(I, \partial I, \{1\}) \xrightarrow{w} (X, A, x_0) \Rightarrow w \circ l = a$

$\Rightarrow [a] = \partial([w])$

$\pi_1(X, A, x_0)$

$\operatorname{Im} j_* \subseteq \ker \partial$: Sei $f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$. Dann ist

$f \circ l : \{0\} \to A$

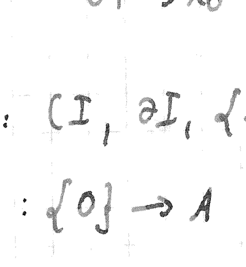
$0 \mapsto x_0$

$\operatorname{Im} j_* \supseteq \ker \partial$: Sei $f : (I, \partial I, \{1\}) \to (X, A, x_0)$

$f \circ l : \{0\} \to A$: $[f(0)] = [x_0] \in \pi_0(A, x_0)$

$\Downarrow$

$\pi_1(X, A, x_0) \; \overset{\partial}{} \; [f] = [\overline{w} \,\square\, f]$



+ Weg w von $f(0)$ nach x_0

~~Alt~~ Alternativ: Kompressionskrit. ($j_*[\bar{w} \square f] = \langle f \rangle$

$x_0 \in B \subseteq A \subseteq X$

$(A, B, x_0) \xrightarrow{i} (X, B, x_0) \xrightarrow{j} (X, A, x_0)$

$B = \{x_0\}$

$\pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, B, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, B, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0)$

$\downarrow \partial$

$\vdots$

$\pi_1(X, A, x_0) \longleftarrow$

$\to \pi_n(A, B, x_0)$:

- $\operatorname{Im} \partial \subseteq \ker i_*$:

$f: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$

$i \circ f \circ \ell: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, B, x_0)$

$f: I^n \times I \to X$ ist Homotopie von $i \circ f \circ \ell$ zu x_0, ist Homotopie ~~von~~ rel ∂I^n.

$\Rightarrow i_*(\partial([f])) = [x_0]$.

- $\operatorname{Im} \partial \supseteq \ker i_*$:

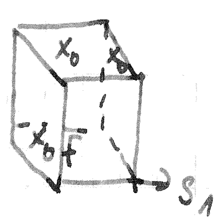
$f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (A, B, x_0)$

$H: I^n \times I \to X$ Homotopie von $i \circ f$ nach x_0.

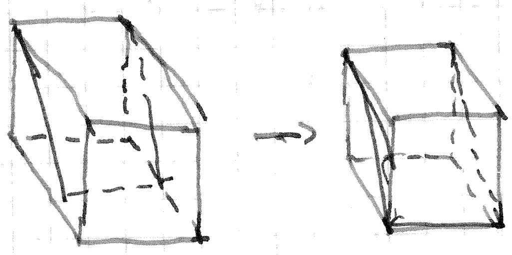
$H(\partial I^n \times I) \subseteq B$; $H(J^{n-1} \times I) \subseteq \{x_0\}$

I

I^n



$I^n \times I \xrightarrow{\phi} I^n \times I \xrightarrow{H} X$



$$g := H\big|_{I^{n-1}\times\{0\}\times I} : I^n \to B$$

$$H \circ \phi\big|_{I^n \times 0} = f +_2 g$$

$$[H \circ \phi] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$$

$$\partial([H\circ\phi]) = [f +_2 g] = [f] \in \pi_n(A, B, x_0)$$

Kompressionskriterium:

$[g] = [x_0] \in \pi_1(A, B, x_0)$, weil g Bild in B hat.

Faserbündel

$$F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} X$$

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(F) & \to & \pi_n(E) & \to & \pi_n(E,F) & \to & \pi_{n-1}(F) \\ & & & & \| & & \\ & & & & \pi_n(X) & & \end{array}$$

Exaktheit bei $\pi_n(X, B, x_0)$: Kompressionskrit.

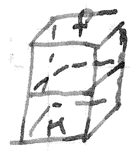
" " $\pi_n(X, A, x_0)$:

$\operatorname{Im} j_* \subseteq \ker \partial$: Kompr.-krit.

$\operatorname{Im} j_* \supseteq \ker \partial$: $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$

$f\circ l: I^{n-1} \to (A, B, x_0) \simeq x_0.$

Sei $H: I^{n-1} \times I \to A$ Homotopie von x_0 nach $f\circ l$.

$j_*\Big($  $\Big) = [f].$ □

Lemma: Diese Folge ist funktoriell.

Beweis: $\varphi: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$

$\varphi_*: \pi_n(X,A,x_0) \to \pi_n(Y,B,y_0)$

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"'] & \pi_{n-1}(A, x_0) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
\pi_n(Y, B, y_0) \arrow[r] & \pi_{n-1}(B, y_0)
\end{tikzcd}$$

$[f] \longmapsto [f\circ l] \longmapsto [\varphi\circ(f\circ l)]$

$[f] \longmapsto [\varphi\circ f] \longmapsto [(\varphi\circ f)\circ l]$

$[\varphi\circ(f\circ l)] = [(\varphi\circ f)\circ l]$

□

Lemma:

Sei $H: X\times I \to Y$ Homotopie mit

$$H(A\times I) \subseteq B$$

$$H(\{x_0\}\times I) \subseteq \{y_0\}$$

Sei $\varphi := H|_{X\times 0}$, $\psi = H|_{X\times 1}$.

Dann ist

$$\varphi_* = \psi_*: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$$

$[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] \underset{H \circ f}{\simeq} [\psi \circ f] = \psi_*([f]).$$

Folgerung:

Sei $\varphi: (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ Homotopieäquivalenz von Tripeln.

Dann ist $\varphi_*: \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$ ein Isomorphismus $\forall n \geq 1$.

π_1: Sei $\varphi: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz.

Dann ist

$$\varphi_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$$

ein Isomorphismus $\forall x_0 \in X$.

Um Folgerung zu beweisen:

- Abhängigkeit vom Basispunkt
- Homotopieerweiterungseigenschaft.

Basispunkt:

- absolute Homotopiegruppen:

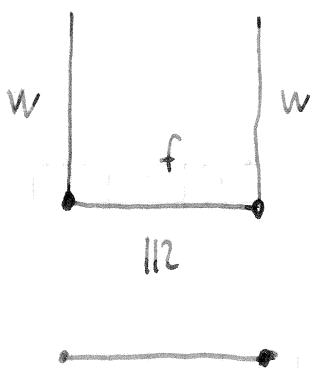
Sei $w: I \to X$ Weg von x_0 nach x_1

$$f: (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$$

$$w \circ f: I^n \cong \partial I^n \times I \underset{\partial I^n \times \{1\}}{\cup} I^n \longrightarrow X$$

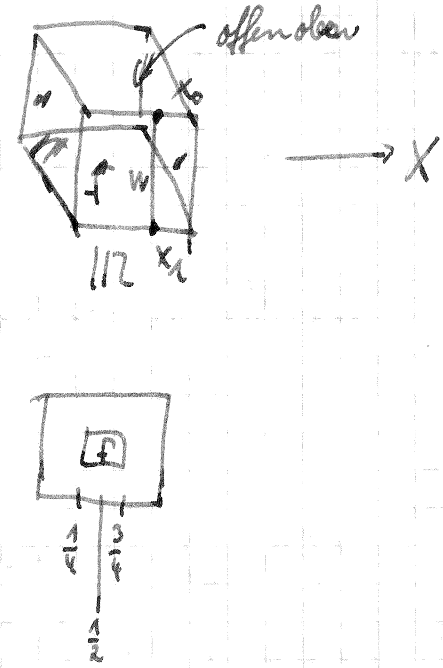
$$s \longmapsto f(s)$$
$$(s,t) \longmapsto w(t)$$
$$wf(\partial I^n) \subseteq \{x_0\}$$

$n=1$:



$w \,\square\, f \,\square\, \bar{w}$

$n=2$:



• relative Homotopiegruppen:

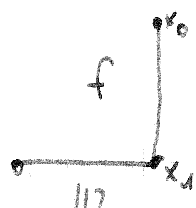
Sei $w: I \to A$ von x_0 nach x_1.

$$f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$$

$$wf: I^n \cong J^{n-1} \times I \underset{J^{n-1}\times\{1\}}{\cup} I^n \longrightarrow X$$

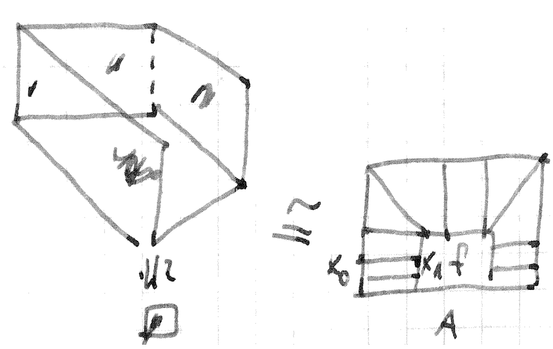
$$s \longmapsto f(s)$$
$$(s,t) \longmapsto w(t)$$

$n=1$:



$f \,\square\, \bar{w}$

$n=2$:



Lemma:

Es gilt:

① $\pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0)$

$[f] \mapsto [wf]$

ist wohldefiniert.

$\pi_n(X, A, x_1) \to \pi_n(X, A, x_0)$

$[f] \mapsto [wf]$

②

$w(f+g) \simeq wf + wg$

③ $(v \square w) f \simeq v(wf)$

④ $x_0 f \simeq f$

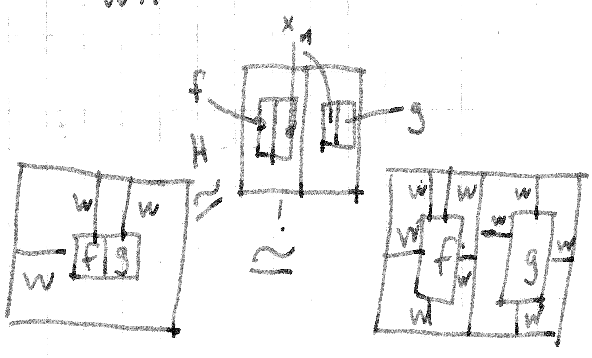
Beweis:

①

$f \simeq_H g$

$wf \simeq_{wH} g$, wobei $(wH)|_{I^n \times \{t\}} = w(H|_{I^n \times \{t\}})$

②

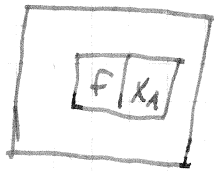


$H : I^n \times I \longrightarrow X$

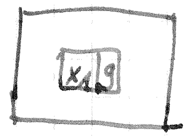
$$(s, t) \longmapsto \begin{cases} w(f + x_1)\left((2-t) \cdot s_1, s_2, \dots, s_n\right), & 0 \leq s_1 \leq \dots \\ w(x_1 + g)\left((2-t) \cdot s_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n\right) & \frac{1}{2} \leq \dots \end{cases}$$

$s_1 = \frac{1}{2}$

$w(f+x_1)(1-\frac{1}{2}t, s_2, \dots, s_n)$



$w(x_1+g)(\frac{1}{2}t, s_2, \dots, s_n)$



$n=1$: $wf = w \circ f \circ \bar{w}$

$H|_{I^n \times 0}$: $w(f+x_1) + w(x_1+g) \simeq wf + wg$

$H|_{I^n \times 1}$: $w(f+g)$

Folgerung:

- $\pi_1(X, x_0)$ operiert auf $\pi_n(X, x_0)$ $\forall n \geq 1$
- $\pi_1(A, x_0)$ " " $\pi_n(X, A, x_0)$ $\forall n \geq 1$, kompatibel mit der langen exakten Folge.

Aufgabe 1:

Sei $i_n : S^n \to S^\infty$ die Inklusion.

Sei $\underset{\text{offen}}{V \subseteq S^\infty}$. $i_n^{-1}(U) = U \cap S^n$

Sei $f : S^\infty \to X$, $\underset{\text{offen}}{V \subseteq X}$

Jetzt gilt:

f stetig

$\Leftrightarrow$ $U := f^{-1}(V) \subseteq S^\infty$ ist offen

$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow U \cap S^n \text{ offen} \\ \Leftrightarrow i_n^{-1}(U) \text{ offen} \\ \Leftrightarrow i_n^{-1}(f^{-1}(V)) \text{ offen} \end{array}\right\} \forall n$

$\Leftrightarrow$ $f \circ i_n$ stetig

$\square$

Aufgabe 2:

$i : S^{n-1} \hookrightarrow S^n$ nullhomotop

$H(s,0) = i(s)$

$H(s,1) = (0, \dots, 0, 1)$

$H(x_0, \dots, x_{n-1}, t) = \left((1-t)^{\frac{1}{2}} x_0, \dots, (1-t)^{\frac{1}{2}} x_{n-1}, t^{\frac{1}{2}}\right)$

Aufgabe 3:

1.) $\mathrm{Id} \simeq T(x_1, \dots) = (0, x_1, \dots)$

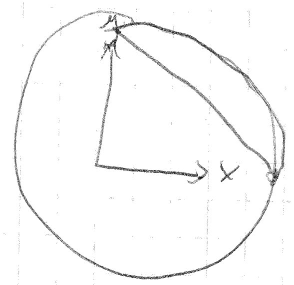
2) $T \simeq \text{const}$

zu 1.)

$$f: S^\infty \times I \to \mathbb{R}^\infty = \{\text{endl. Folgen}\}$$

$$f(x_1,\dots,t)_i = (1-t)\cdot x_i + t\cdot x_{i-1}$$

$$x_0 := 0$$



$$f: S^\infty \times I \to S^\infty$$

$$\varphi(x,t) = \frac{f(x,t)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} f(x,t)_i}}$$

φ stetig wg 1.)

$$\varphi(x,0) = \cancel{id}\; x, \quad \varphi(x,1) = T(x)$$

zu 2.)

$$\psi: S^\infty \times I \to S^\infty$$

$$\psi(x,t) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot(1,0,\dots) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot t\right)\cdot T(x)$$

$$\psi(x,0) = T(x)$$
$$\psi(x,1) = (1,0,\dots)$$

$$\sum \psi(x,t)_i^2 = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)^2 + \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\cdot t\right)^2 \} \cdot \sum T(x_i)^2 = 1$$

Aufgabe 5:

$f: S^\infty \to \mathbb{RP}^\infty$ $\qquad i \in \mathbb{N}$

$$U_i^\infty := \{[x_0,\dots,x_n,0,\dots] \in \mathbb{RP}^\infty : x_i \neq 0\}$$

$$U_i^\infty \cap \mathbb{RP}^n = U_i \quad (0 \le i \le n)$$

offen $\forall n$, also ist $U_i^\infty \subseteq \mathbb{RP}^\infty$ offen nach Aufgabe 4

$f^{-1}(U_i^\infty) = \{x \in S^\infty : x_i \neq 0\}$

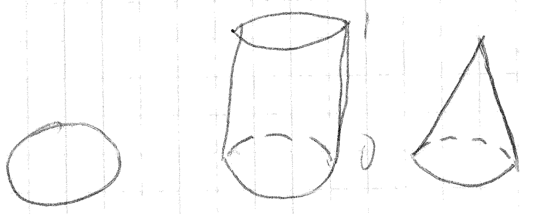
$f^{-1}(U_i^\infty) \cong U_i^\infty \times \{+1, -1\}$

$x \mapsto ([x], \text{Vorzeichen in } x_i)$

$U_i \cap S^n \Rightarrow \varphi_i$ ist kon. äq. nach dem Fall $S^n \to \mathbb{RP}^n$

$X = X \times \{0\} \subset CX := X \times I / X \times \{1\}$

$$\pi_n(CX, X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(X, x_0) \to \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_{n-1}(CX, x_0)} \to \pi_{n-1}(CX, X, x_0) \to$$



Kegel ist zusammenziehbar

Homotopie - Erweiterungs - Eigenschaft

Sei $A \subseteq X$ ein abg. Unterraum. Das Paar (X, A) hat die HEE, wenn folgendes gilt:

$\forall$ stetige Abb. $f : X \to Y$

$\forall$ Homotopie $F : A \times I \to Y$ mit $F(a, 0) = f(a) \ \forall a \in A$

$\exists$ Homotopie $H : X \times I \to Y$ mit $H(a, t) = F(a, t) \ \forall a \in A$

und $H(x, 0) = f(x) \ \forall x \in X$

$$\begin{tikzcd}
A \times 0 \arrow[r, hook] & X \times 0 \arrow[d, hook] \arrow[dr, bend left] & \\
A \times I \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "F"'] & X \times I \arrow[r, dashed, "H"] & Y
\end{tikzcd}$$

Hier taucht die Verklebung

$$X\times\{0\}\cup_{A\times\{0\}} A\times I$$

auf. Es gilt:

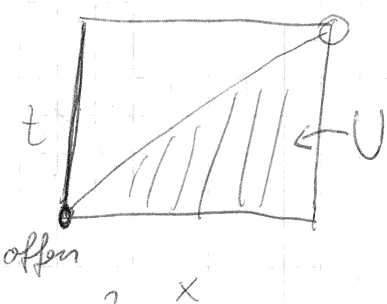
$$X\times\{0\}\cup A\times I \subseteq X\times I.$$

$\exists$ hom. Abb. $X\times\{0\}\cup_{A\times\{0\}} A\times I \longrightarrow X\times I$ ~~de~~ $\cup A\times I$

Sie ist abgeschlossen, weil $A\subseteq X$ abg. ist.

$B=(0,1]\subseteq I = X$

$I\times\{0\}\cup_{B\times\{0\}} B\times I$



hier offen $I\times\{0\}\cup B\times I \longleftarrow$ hier <u>nicht</u> offen

$U=\{(x,t)\in I\times I : t=0 \text{ oder } t<x\}$

$$\begin{tikzcd}
X\times 0\cup_{A\times 0} A\times I \arrow[r, "f\cup f"] \arrow[d, hook] & Y \\
X\times I \arrow[ur, dashed, "H?"] &
\end{tikzcd}$$

Lemma: Sei $A\subseteq X$ abgeschlossen. Das Paar (X,A) hat die HEE.
$\Leftrightarrow$ $X\times 0\cup A\times I\subseteq X\times I$ ist ein Retrakt, d.h. $\exists$ stetige Abbildung $r: X\times I\to X\times 0\cup A\times I$ mit $r(x,t)=(x,t)$ $\forall (x,t)\in X\times 0\cup A\times I$.

Beweis:

„$\Rightarrow$":
$$\begin{tikzcd}
X\times 0\cup A\times I \arrow[r, "id"] \arrow[d, hook, "j"] & X\times 0\cup A\times I \\
X\times I \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

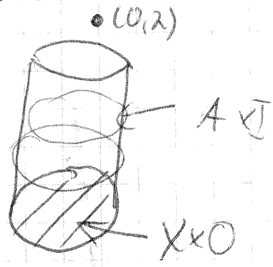
$\Leftarrow$:

$$\begin{tikzcd} X\times 0 \cup A\times I \arrow[r, "f\cup F"] \arrow[d, hook, "i"] & Y \\ X\times I \arrow[r, "r"] & X\times 0 \cup A\times I \arrow[u, "f\cup F"'] \end{tikzcd}$$

$\square$

Beispiel:

- $S^{n-1} = \partial D^n \subseteq D^n$ hat die HEE



r ist gegeben durch radiale Projektion von $(0,2) \in D^n \times \mathbb{R}$

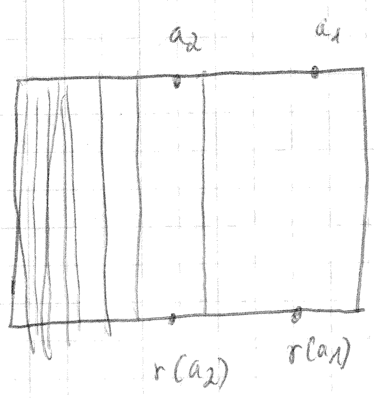
- $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\} \subseteq I$ hat nicht die HEE

Denn $I\times 0 \cup A\times I$ ist nicht Retrakt von $I\times I$.

<u>Annahme:</u>

Sei $r: I\times I \to I\times 0 \cup A\times I$ mit

$$r|_{I\times 0 \cup A\times I} = id$$



"MP zw. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \exists$ Folge mit $\lim_{n\to\infty} a_n = (0,1)$
$\neq$
$\lim r(a_n) = (0,0)$ ↯

Lemma:

(1) Eine disjunkte Vereinigung von Abb., mit der HEE ist wieder eine HEE.

(2)
$$A_0 \xhookrightarrow{HEE} A_1 \xhookrightarrow{HEE} A_2 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow A_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

$\Rightarrow A_0 \hookrightarrow A_\infty$ hat die HEE.

(3) Hat (X,A) die HEE und $f: A \to B$ gegeben, so hat

$$(B \cup_A X, B)$$

die HEE

(4) Hat (X,A) die HEE, so auch $(X\times Y, A\times Y)$

Beweis:

(4) (X,A) HEE $\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $X\times 0 \cup A\times I \subseteq X\times I$ Retrakt

$\Downarrow$

$(X\times 0 \cup A\times I)\times Y \subseteq X\times I\times Y$ ist Retrakt

$\Rightarrow X\times Y\times 0 \cup A\times Y\times I \subseteq X\times Y\times I$ Retrakt

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $(X\times Y, A\times Y)$ ~~Retrakt~~ hat HEE

(3)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \arrow[dr, "\Phi_t"] & \\
X \arrow[r] & B\cup_A X \arrow[r, "\varphi"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Nun ist $Z = B\times I \cup_{A\times I} X\times I \cong (B\cup_A X)\times I$

da I lokal kompakt ist.

$$\begin{tikzcd}
A\times I \arrow[r, "f\times I"] \arrow[d] & B\times I \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "\Phi"] \\
X\times I \arrow[r] \arrow[dr] & Z \\
& Y
\end{tikzcd}$$

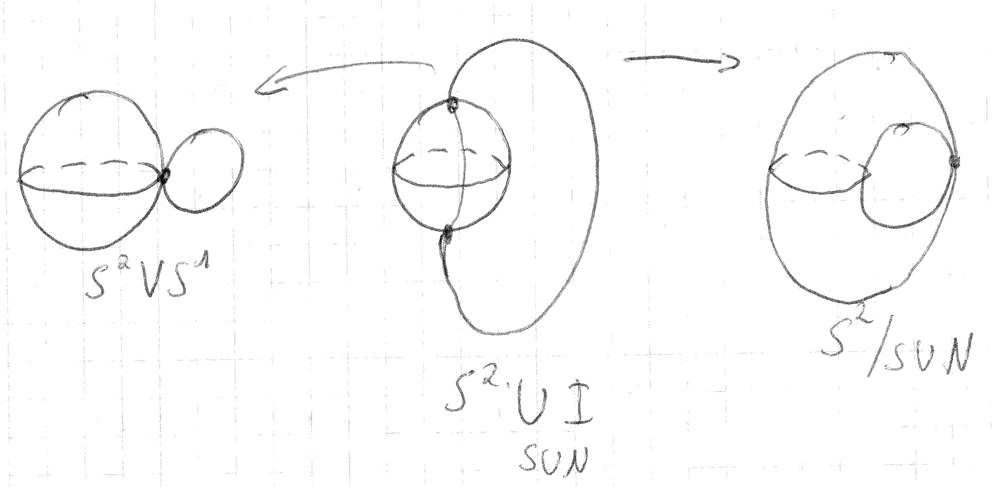
Dies liefert Homotopie

$$(B \cup_A X) \times I \longrightarrow Y,$$

die die vorgegebene ~~ist~~ erweitert.

② siehe Blatt 3, Aufg. 2

① Banal: $\left(\coprod_\alpha X_\alpha\right) \times I = \coprod_\alpha (X_\alpha \times I)$



Proposition (Hatcher 0.17):

Das Paar (X, A) habe die HEE und A sei zusammenziehbar.

Dann ist

$$q: X \longrightarrow X/A$$

eine Homotopieäquivalenz.

Beweis:

Sei $F: A \times I \rightarrow A$ Homotopie mit $F(a, 0) = a \ \forall a \in A$ und $F(a, 1) = a_0 \ \forall a \in A$.

Sei $i: A \hookrightarrow X$. Sei $i \circ F: A \times I \to X$ und $X = X \times \{0\} \to X$ die Identität.

Weil (X, A) HEE hat, $\exists$ Homotopie

$$H: X \times I \to X$$

von id zu $H|_{X \times 1} = f$, und $H(a,t) = i(F(a,t)) \ \forall (a,t) \in A \times I$