КЪ ТЕОРЕМѢ О РАЗЛОЖИМОСТИ КРЕМОНОВЫХЪ ПРЕОБРАЗОВАНІЙ НА ПЛОСКОСТИ.

Б. К. Млодзѣевскій.

(Читано 2 декабря 1914 г.)

Какъ извѣстно, Nöther и Rosanes одновременно доказали въ 1871 году, что каждое Кремоново преобразованіе на плоскости, всѣ центры котораго различны (не сливаются между собою), можетъ быть разложено на рядъ преобразованій второй степени. Доказательство этой теоремы, существенная важность которой очевидна, основывается на томъ, что въ той Кремоновой сѣти кривыхъ одной плоскости, въ которую данное Кремоново преобразованіе превращаетъ сѣть прямыхъ линій на другой плоскости, наивысшая сумма кратностей этихъ кривыхъ въ трехъ изъ центровъ сѣти всегда больше, чѣмъ порядокъ кривыхъ сѣти, т.-е. чѣмъ порядокъ этого Кремонова преобразованія. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ n порядокъ даннаго Кремонова преобразованія и черезъ α_1, α_2, α_3 порядки кратности Кремоновыхъ кривыхъ въ трехъ высшихъ центрахъ A_1, A_2, A_3 Кремоновой сѣти. Тогда, если мы примемъ точки A_1, A_2, A_3 за три центра квадратичнаго преобразованія, то это преобразованіе превратитъ кривыя нашей сѣти въ кривыя порядка $2n-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$. Такимъ образомъ, если $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>n$, то порядокъ новыхъ кривыхъ будетъ менѣе n, и, слѣдовательно, порядокъ Кремонова преобразованія понизится. Продолжая поступать такимъ образомъ, мы разложимъ данное Кремоново преобразованіе на рядъ преобразованій второй степени.

Предложеніе, выражаемое неравенствомъ $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>n$, на которомъ основанъ предыдущій выводъ, доказывалось неоднократно, но всѣ доказательства этого предложенія, данныя различными учеными, чрезмѣрно искусственны и сложны. Наиболѣе простое доказательство было предложено К. А. Андреевымъ въ его сочиненіи «О геометрическихъ соотвѣтствіяхъ въ примѣненіи къ вопросу о построеніи кривыхъ линій» («Математическій Сборникъ», т. IX, 1878). Доказательство того же предложенія, предлагаемое мною въ настоящей статьѣ, какъ мнѣ кажется, приводитъ къ цѣли наиболѣе естественнымъ и простымъ путемъ.

Пусть мы имѣемъ Кремоново преобразованіе n—го порядка, гдѣ $n \geqq 2$. Пусть сѣть Кремоновыхъ кривыхъ этого преобразованія имѣетъ k центровъ A_1, $A_2 \ldots A_k$, въ которыхъ кривыя сѣти имѣютъ точки съ кратностями α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_k$, при чемъ эти центры расположены въ порядкѣ убыванія ихъ кратностей, такъ что

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \ldots \geqq \alpha_k.$$

Докажемъ, что $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>n$.

Извѣстно, что числа α удовлетворяютъ двумъ соотношеніямъ

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_1^k \alpha_r(\alpha_r+1) &= \frac{1}{2}n(n+3)-2, \\ \sum_1^k \alpha_r^2 &= n^2-1, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

изъ которыхъ первое выражаетъ, что кривыя, проходящія черезъ центры A, образуютъ сѣть, а второе, что каждыя двѣ кривыя сѣти имѣютъ, кромѣ центровъ A, еще только одну точку пересѣченія.

Вычитая первое уравненіе изъ второго, получаемъ

$$\frac{1}{2}\sum \alpha_r(\alpha_r-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2),$$

которое показываетъ, что всѣ кривыя сѣти — уникурсальныя и что всѣ ихъ кратныя точки входятъ въ число центровъ сѣти. Уравненія (1) можно замѣнить двумя слѣдующими:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\cdots+\alpha_k^2=n^2-1, \tag{2}$$

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_k=3(n-1). \tag{3}$$

Такъ какъ кривая n-го порядка не можетъ имѣть кратныхъ точекъ выше $(n-1)$-й кратности, то каждое число α_r не можетъ быть болѣе $n-1$; а тогда второе уравненіе показываетъ, что k, число центровъ сѣти, не можетъ быть менѣе трехъ.

Обращаемся къ доказательству нашей теоремы. Разложимъ въ первомъ равенствѣ всѣ члены, кромѣ первыхъ двухъ, на два множителя, и сохраняя одинъ изъ множителей, замѣнимъ другой вездѣ черезъ α_3. Такъ какъ α_3 не менѣе каждаго изъ послѣдующихъ указателей кратности $\alpha_4,..\ \alpha_k$, то такая замѣна можетъ только увеличить лѣвую часть, и мы будемъ имѣть

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4+\cdots+\alpha_k)\geqq n^2-1,$$

или, на основаніи второго равенства,

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3[3(n-1)-\alpha_1-\alpha_2]\geqq n^2-1.$$

Послѣднее неравенство можно представить такъ:

$$\alpha_1(\alpha_1-\alpha_3)+\alpha_2(\alpha_2-\alpha_3)+3(n-1)\alpha_3\geqq n^2-1.$$

Мы уже видѣли, что указатели α_1 и α_2 не могутъ быть болѣе $n-1$; поэтому, замѣняя ихъ черезъ $n-1$, мы можемъ только усилить неревенство и получимъ

$$(n-1)(\alpha_1-\alpha_3)+(n-1)(\alpha_2-\alpha_3)+3(n-1)\alpha_3\geqq n^2-1.$$

или

$$(n-1)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\geqq n^2-1.$$

Такъ какъ $n>1$, то отсюда, сокращая на $n-1$, получимъ требуемое неравенство

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqq n+1.$$

Пользуясь тѣмъ же пріемомъ, можно весьма просто доказать и болѣе общую теорему Nöther'а, полученную имъ довольно сложнымъ и притомъ косвеннымъ путемъ («Mathematische Annalen», Bd. V, 1872). Возьмемъ въ рядѣ указателей α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_k$ столько послѣдовательныхъ указателей, начиная съ α_2, чтобы ихъ сумма не превышала α_1. Такимъ образомъ, если эти указатели будутъ α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_{h-1}$, то будемъ имѣть

$$\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1} \leqq \alpha_1. \qquad (5)$$

Здѣсь число h не есть непремѣнно наибольшій нумеръ указателя, удовлетворяющій нашему требованію. Поэтому, если сумма $\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1}$ удовлетворяетъ условію (5), то вмѣсто нея мы можемъ взять $\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-2}$ или $\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-3}$ и т. д. Легко видѣть что указатель h, удовлетворяющій условію (5), всегда существуетъ, такъ какъ $\alpha_2 \leqq \alpha_1$ и потому, положивъ $h=3$, мы навѣрное получимъ одночленную сумму, удовлетворяющую условію (5).

Пусть будетъ α_h указатель кратности, слѣдующій за α_{h-1}. Такой указатель навѣрное существуетъ, такъ какъ изъ условія (5) слѣдуетъ, что

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1} \leqq 2\alpha_1 \leqq 2(n-1),$$

а такъ какъ согласно равенству (3), сумма всѣхъ указателей $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k$ равна $3(n-1)$, то число k всѣхъ центровъ сѣти должно быть болѣе, чѣмъ $h-1$. Разсмотримъ, напримѣръ, одно изъ Кремоновыхъ преобразованій порядка $n=15$. Оно имѣетъ десять центровъ слѣдующихъ кратностей:

$$\alpha_1=10,\ \alpha_2=\alpha_3=5,\ \alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=4,\ \alpha_7=\alpha_8=3\ \ \alpha_9=\alpha_{10}=2.$$

Здѣсь $k=10$, h можетъ быть 3 или 4.

Nöther доказалъ, что если h удовлетворяетъ условію (5), то имѣетъ мѣсто неравенство

$$\alpha_1+2\alpha_h>n. \tag{6}$$

Мы докажемъ это предложеніе весьма просто слѣдующимъ образомъ. Разложимъ, какъ и выше, въ равенствѣ (2) каждое слагаемое лѣвой части на два множителя; но теперь замѣнимъ первые множители во всѣхъ членахъ отъ α_2^2 до α_{h-1}^2 черезъ α_2, а во всѣхъ членахъ отъ α_h^2 до конца — черезъ α_h. Отъ этого лѣвая часть можетъ только увеличиться, и мы будемъ имѣть

$$\alpha_1^2+\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1})+\alpha_h(\alpha_h+\alpha_{h+1}+\cdots+\alpha_k)\geqq n^2-1,$$

или, на основаніи (3)

$$\alpha_1^2+\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1})+\alpha_h[3(n-1)-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_{h-1}]\geqq n^2-1,$$

или, иначе,

$$(\alpha_1-\alpha_h)\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_h)(\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1})+3(n-1)\alpha_h\geqq n^2-1.$$

Но, по условію (5), это неравенство можетъ только усилиться отъ замѣны множителя при $(\alpha_2-\alpha_h)$ черезъ α_1. Поэтому имѣемъ

$$(\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_h)\alpha_1+3(n-1)\alpha_h\geqq n^2-1,$$

или

$$(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1-2\alpha_1\alpha_h+3n\alpha_h-3\alpha_h\geqq n^2-1.$$

Такъ какъ $2\alpha_1\geqq\alpha_1+\alpha_2$ и $3\alpha_h>1$, то отсюда слѣдуетъ

$$(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_h)-3n\alpha_h\geqq n^2.$$

Но $\alpha_1+\alpha_2\leqq n$, такъ какъ въ противномъ случаѣ прямая, соединяющая два высшихъ центра A_1 и A_2 Кремоновой сѣти, встрѣчала бы кривыя n-го порядка, образующія эту сѣть, больше чѣмъ въ n точкахъ. Поэтому мы можемъ только усилить послѣднее неравенство, замѣнивъ въ немъ $\alpha_1+\alpha_2$ черезъ n. Мы будемъ имѣть

$$n(\alpha_1-\alpha_h)+3n\alpha_h>n^2,$$

или

$$\alpha_1+2\alpha_h>n. \tag{6}$$

Такимъ образомъ, теорема Nöther'a нами доказана.

Легко видѣть, что теорема Nöther'a содержитъ въ себѣ, какъ частный случай, теорему, выражаемую неравенствомъ (4). Послѣднее получается изъ (6) при $h=3$.

Изъ теоремы Nöther'a вытекаетъ слѣдующее важное свойство Кремоновой сѣти. Пусть будетъ A_g центръ сѣти, нумеръ котораго болѣе единицы, но менѣе h. Такъ какъ центры расположены въ порядкѣ убыванія ихъ кратностей, то $\alpha_g \geqq \alpha_h$. Поэтому изъ неравенства (5) слѣдуетъ

$$\alpha_1+\alpha_g+\alpha_h>n.$$

Это показываетъ, что мы понизимъ порядокъ Кремонова преобразованія не только въ томъ случаѣ, если примѣнимъ къ нему квадратичное преобразованіе, центры котораго лежатъ въ трехъ высшихъ центрахъ A_1, A_2, A_3 сѣти, какъ мы это видѣли въ первой части этой статьи. Порядокъ сѣти понизится всякій разъ, когда мы возьмемъ, кромѣ наивысшаго центра A_1, два другихъ, нумера которыхъ не болѣе наибольшаго числа h, удовлетворяющаго условію (4):

$$\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{h-1}\leqq\alpha_1.$$

Такъ, въ приведенномъ выше примѣрѣ Кремонова преобразованія при $n=15$ мы имѣемъ $h\leqq 4$, и потому мы навѣрное понизимъ порядокъ этого преобразованія, помѣстивъ одинъ центръ квадратичнаго преобразованія въ A_1, а два другихъ въ двухъ изъ трехъ точекъ A_2, A_3, A_4. Дѣйствительно, мы имѣемъ, напримѣръ,

$$\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4=10+5+4>15.$$

Теорема Nöther'а показываетъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда $h>3$, мы можемъ понизить порядокъ Кремонова преобразованія посредствомъ нѣсколькихъ различныхъ квадратичныхъ преобразованій. Это обстоятельство имѣетъ особенное значеніе въ тѣхъ случаяхъ, когда три высшихъ центра Кремонова преобразованія сливаются между собою и не могутъ быть приняты за центры квадратичнаго преобразованія.

К теории Кремоновых преобразований.

Б. К. Млодзеевский.

(Читано 19 января 1916 года.)

1. Рассмотрим две плоскости P, Q, связанные между собою определенным Кремоновым преобразованием n-го порядка. Известно, что при таких преобразованиях сети прямых на каждой из двух плоскостей соответствует на другой плоскости гомалоидная сеть уникурсальных кривых, т.-е. сеть кривых, из которых каждые две имеют только одну подвижную общую точку. Такая сеть вполне определяется своими основными точками, или центрами,—неподвижными общими точками всех кривых сети. Как показал еще в 1863 году Cremona, число p этих основных точек на обеих плоскостях одинаково, и если мы обозначим их кратности для плоскости P через

$$r_1 \geqq r_2 \ . \ . \ . \ . \geqq r_p,$$

а для плоскости Q через

$$s_1 \geqq s_2 \ . \ . \ . \ . \geqq s_p,$$

то между этими $2p$ числами имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{k=p} r_k^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{k=1}^{k=p} r_k = 3(n-1) \tag{1}$$

$$\sum_{l=1}^{l=p} s_l^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{l=1}^{l=p} s_l = 3(n-1) \tag{2}$$

Далее, Cremona показал, что каждой основной точке первой плоскости A_k с кратностью r_k соответствуют на второй плоскости все точки некоторой основной кривой a_k порядка r_k; точно так же каждой основной точке второй плоскости B_l кратности l соответствуют на первой плоскости все точки основной кривой b_l порядка s_l, при чем все основные кривые обеих сетей—уникурсальные. При этом кривая a_k на плоскости Q имеет в каждой основной точке B_l этой плоскости точку такой же кратности, какую на плоскости P имеет кривая b_l в точке A_k. Мы обозначим эту общую кратность кривых a_k, b_l соответственно в точках B_l, A_k через α_{kl}. Известно, что числа α_{kl} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sum_k r\, \alpha_{kl} = n s_l, \qquad \sum_l s_l\, \alpha_{kl} = n r_k, \tag{3}$$

$$\sum_k \alpha_{kl}^2 = s_l^2 + 1, \quad \sum_l \alpha_{kl}^2 = r_k^2 + 1, \tag{4}$$

$$\sum_k \alpha_{kl}\, \alpha_{kl'} = s_l s_{l'}, \quad \sum_l \alpha_{kl}\, \alpha_{k'l} = r_k r_{k'}, \tag{5}$$

$$\sum_k \alpha_{kl} = 3s_l - 1, \quad \sum_l \alpha_{kl} = 3 r_k - 1 \tag{6}$$

Эти соотношения выражают, что основные кривые уникурсальные и пересекаются как между собою, так и со всеми кривыми Кремоновой сети только в основных точках.

Clebsch показал (Math. Annalen, Bd. 4, 1871), что детерминант

$$N = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} \tag{7}$$

всегда равен $\pm n$, где n — порядок данной Кремоновой сети. Мы покажем, что это предложение представляет одно из следствий одного более общего свойства Кремоновых сетей. Рассмотрим детерминант

$$M_0 = \begin{vmatrix} -n & is_1 & is_2 & \dots & is_p \\ ir_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ ir_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ir_p & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} \tag{8}$$

где $i = \sqrt{-1}$. Соотношения (1), (3), (4), (5), могут быть представлены в следующем виде:

$$(-n)^2 + \Sigma (is_l)^2 = 1, \quad (ir_k)^2 + \Sigma \alpha_{kl}^2 = 0$$

$$n \, . \, ir_k + \Sigma is_l \, . \, \alpha_{kl} = 0, \quad ir_k \, . \, ir_{k'} + \sum_l \alpha_{kl'} \alpha_{kl'} = 0.$$

Отсюда видно, что M_0 есть детерминант прямоугольного преобразования. Так как в таком детерминанте каждый элемент равен своему дополнительному минору, умноженному на ± 1, то отсюда следует не только теорема Clebsch'a, но и ряд других аналогичных соотношений между Кремоновыми числами.

Умножая в детерминанте (8) первый столбец и первую строку на $-i$, мы получим новый детерминант, не содержащий мнимых элементов

$$M_1 = \begin{vmatrix} n & s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ r_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_p & \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \dots & \alpha_{pp} \end{vmatrix} \tag{9}$$

Этот детерминант уже не ортогональный, но его числовое значение остается попрежнему равным ± 1, и его элементы точно так же равны по абсолютной величине своим дополнительным минорам.

3. Как показал Cayley (Crelle, Bd. 32, 1846), элементы ортогонального детерминанта $(p+1)$-го порядка могут быть выражены рационально через $\frac{p(p+1)}{2}$ произвольных количеств. Естественно было бы искать соответствующие выражения и для детерминанта M_0. Оказывается, однако, что к детерминанту M_0 метод Cayley неприложим. Именно, Frobenius заметил, что если в положительном ортогональном детерминанте

$$| c_{kl} |$$
$$(k, l = 0, 1 \dots \dots p)$$

мы имеем

$$\begin{vmatrix} c_{00}+1 & c_{01} & \dots & c_{0p} \\ c_{10} & c_{11}+1 & \dots & c_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p0} & c_{p1} & \dots & c_{pp}+1 \end{vmatrix} = 0,$$

то к такому детерминанту формулы Cayley неприменимы. Легко видеть, что детерминант M_0 находится именно в этих условиях. Действительно, если в детерминанте

$$\begin{vmatrix} -n+1 & is_1 & \dots & is_p \\ ir_1 & a_{11}+1 & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ir_p & a_{p1} & \dots & a_{pp}+1 \end{vmatrix}$$

мы вычтем из элементов первого столбца соответственные элементы остальных столбцов, умноженные на $\frac{i}{3}$, то, как видно из формул (2), (6) получим в первом столбце всюду нули.

4. Детерминант M_0 является основным в теории Кремоновых преобразований. Как видно из его выражения (8), все его элементы суть целые числа; некоторые из них мнимые; первая строка и первый столбец отличаются по своему составу от остальных. Мы покажем здесь, каким образом из M_0 можно получить другой ортогональный детерминант, свободный от мнимых элементов и вполне однородный по своему составу; но элементы его уже не будут целыми числами. Я останавливаюсь здесь на этом преобразовании детерминанта M_0 потому, что оно основано на одном небезынтересном свойстве ортогональных детерминантов. Возьмем ортогональный детерминант $(p+1)$ го порядка

$$| c_{kl} | = 0,$$
$$(k,\ l = 0,\ 1\ \dots\dots\ p);$$

будем рассматривать элементы c_{kl}, как взаимные угловые коэффициенты двух прямоугольных систем осей $(x_0, x_1 \dots\ x_p)$, $(y_0, y_1 \dots\ y_p)$ в пространстве $p+1$ измерений. Если мы повернем систему осей $(y_0,\ y_1 \dots\ y_p)$ около $(p-1)$-мерной оси перпендикулярной к осям x_0, y_0 так, чтобы ось y_0 пришла в совпадение с осью x_0, то угловыми коэффициентами новых направлений осей $(y_1, y_2 \dots y_p)$ по отношению к осям $(x_1, x_2 \dots x_p)$ будут элементы следующего ортогонального детерминанта p-го порядка

$$\left| c_{kl} - \frac{c_{k0} c_{0l}}{c_{00} \mp 1} \right|,$$
$$(k,\ l = 1, 2\ \dots\ p)$$

где двойной знак соответствует двум противоположным направлениям вращения. В самом деле, так как вращение происходит параллельно плоскости осей (x_0, y_0), и ось y_0 приходит после вращения в совпадение с осью x_0, то угловые коэффициенты c'_{kl} оси y_l относительно оси x_k после вращения выразятся следующим образом

$$c'_{00} = 1,\ c'_{k0} = 0,\ c'_{0l} = 0,\ c'_{kl} = c_{kl} + \vartheta_l c_{k0},$$
$$(k,\ l = 1,\ 2\ \dots\ p),$$

где ϑ_l—числовые множители.

Так как $\sum_{k=0}^{k=p} c'^2_{kl} = 1$, то отсюда имеем

$$\sum_{k=1}^{k=p} c_{kl}^2 + 2\,\vartheta_l \Sigma c_{kl}\, c_{k0} + \vartheta_l^2 \Sigma c_{k0}^2 = 1,$$

или

$$(1 - c_{0l}^2) - 2c_{0l}\, c_{00}\, \vartheta_l + (1 - c_{00}^2)\, \vartheta_l^2 = 1,$$

откуда

$$\vartheta_l = -\frac{c_{0l}}{c_{00} \pm 1}$$

и, следовательно,

$$c'_{kl} = c_{kl} - \frac{c_{k0}\, c_{0l}}{c_{00} \pm 1}.$$

Применяя это преобразование к детерминанту (8), получим следующий ортогональный детерминант p-го порядка

$$\left| \alpha_{kl} - \frac{r_k s_l}{n \pm 1} \right|$$

$$(k,\ l = 1, 2\ .\ .\ .\ .\ p).$$

В этом детерминанте все элементы—числа действительные и имеют одинаковый вид; но это уже не целые числа.

5. Расположим в детерминанте (8) ряды в определенном порядке. Известно, что все основные точки Кремоновой сети можно распределить в группы, причисляя к одной группе основные точки одинаковой кратности. При этом число групп в обеих плоскостях, связанных данным Кремоновым преобразованием, будет одно и то же; точно так же и числа основных точек, входящих в различные группы, будут в обеих плоскостях одни и те же. Так, например, в одном из Кремоновых преобразований 11-го порядка мы имеем в одной плоскости сеть с одною основною точкою 7-го порядка, двумя точками 4-го порядка, тремя—3-го и тремя—2-го; в другой плоскости мы имеем сеть, сопряженную с первою, имеющую три основных точки 5-го порядка, одну—4-го, три 3-го и две—1-го.

Clebsch заметил, что если мы возьмем в одной плоскости одну из групп основных точек одинаковой кратности r_k, число которых пусть будет μ, а в другой плоскости также какую-нибудь группу основных точек одинаковой кратности s_l, число которых обозначим через v, то все μv чисел α_{kl}, соответствующие различным парам основных точек обеих групп, будут равны между собою, с тем исключением, что каждой группе первой плоскости P будет соответствовать на второй плоскости группа Q, равная ей по числу входящих в нее точек, где каждой основной точке A_k первой плоскости будет соответствовать одна определенная точка B_l второй плоскости так, что соответствующие этим парам точек μ чисел α_{kl} будут отличаться от остальных $\mu(\mu - 1)$ чисел и притом, как это заметил впервые Bertini, непременно на единицу. Ниже мы поясним на примере указанный здесь закон распределения чисел α_{kl}.

В дальнейшем мы введем для Кремоновых сетей другие обозначения. Будем обозначать через $r_1, r_2\ .\ .\ .\ ,\ s_1, s_2\ .\ .\ .\ .\ .$ не кратности отдельных основных точек или центров сети, как мы это делали до сих пор, а кратности точек отдельных групп. Пусть в плоскости P будет q различных групп основных точек; пусть в первую группу входят p_1 основных точек кратности r_1 и т. д. Тогда мы будем иметь $p_1 + p_2 \ldots + p_q = p$, где p — общее число центров Кремоновой сети на плоскости P. Согласно сказанному выше, мы будем иметь и на второй плоскости Q такое же число групп основных точек, при чем первой группе плоскости P будет соответствовать на плоскости Q группа также из p_1 центров определенной кратности s_1, второй—группа из p_2 центров кратности s_2 и т. д. Каждой паре основных точек A_k, B_l обеих плоскостей, из которых A_k принадлежит к k-той группе первой плоскости, а B_l — к l-той группе второй плоскости, будет соответствовать попрежнему определенное число α_{kl}; при этом, если указатели k и l различны, то для всех основных точек с кратностями r_k и s_l число α_{kl} будет одно и то же; если же указатели k и l равны между собою и, следовательно, точки A_k и B_l принадлежат двум группам соответствующим одна другой в указанном выше смысле, то каждой из основных точек k-той группы первой плоскости будет соответствовать в k-той группе второй плоскости одна основная точка, для которой число α_{kk} заменится через $\alpha_{kk}+\varepsilon_k$, где $\varepsilon_k=\pm 1$.

Располагая в детерминанте Clebsch'а (7) ряды так, чтобы элементы, соответствующие членам одной и той же группы, стояли рядом, мы дадим ему в новых обозначениях следующий вид:

$$N=\begin{vmatrix} \alpha_{11}+\varepsilon_1 & \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{12} & \alpha_{12}\ldots, & \ldots \\ \alpha_{11} & \alpha_{11}+\varepsilon_1 & \ldots & \alpha_{12} & \alpha_{12}\ldots, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{22}+\varepsilon_2 & \alpha_{22}\ldots, & \ldots \\ \alpha_{21} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{22} & \alpha_{22}+\varepsilon_2, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad (10)$$

Этот детерминант p-го порядка состоит из групп строк и столбцов по $p_1, p_2 \ldots p_q$ рядов в каждой группе. Таким образом все элементы распадаются на p^2 прямоугольников, среди которых могут быть и квадраты. В каждом прямоугольнике все элементы α_{kl} равны между собою; исключение представляют квадраты, расположенные по главной диагонали детерминанта, в них диагональные элементы различаются от остальных на единицу.

Поясним сказанное на приведенном выше детерминанте 11-го порядка.

В нем мы имеем 9 основных точек, распадающихся на четыре группы. Таким образом в нашем случае

$$n=11,\ p=9,\ q=4.$$

Далее, имеем число центров в каждой группе и их кратности

$$\begin{array}{llll} p_1=1, & p_2=2, & p_3=3, & p_4=3, \\ r_1=7, & r_2=4, & r_3=3, & r_4=2, \\ s_1=4, & s_2=1, & s_3=5, & s_4=3. \end{array}$$

По способу, который будет изложен в следующей статье, мы находим

$$\begin{array}{llll} \alpha_{11}=2, & \alpha_{12}=1, & \alpha_{13}=3, & \alpha_{14}=2, \\ \alpha_{21}=1, & \alpha_{22}=0, & \alpha_{23}=2, & \alpha_{24}=1, \\ \alpha_{31}=1, & \alpha_{32}=0, & \alpha_{33}=1, & \alpha_{34}=1, \\ \alpha_{41}=1, & \alpha_{42}=0, & \alpha_{43}=1, & \alpha_{44}=0, \end{array}$$

$$\varepsilon_1=+1, \qquad \varepsilon_2=+1, \qquad \varepsilon_3=+1, \qquad \varepsilon_4=+1.$$

Так как первая группа содержит только один центр, то мы могли бы положить не $\alpha_{11}=2$, $\varepsilon_1=+1$, а $\alpha_{11}=4$, $\varepsilon_1=-1$. Точно так же во вторую группу входят только два центра; поэтому мы могли бы положить не $\alpha_{22}=0$, $\varepsilon_2=+1$, а $\alpha_{22}=1$, $\varepsilon_2=-1$. Заметим еще, что в нашем примере на каждой из двух плоскостей имеется по две группы из трех центров, но соответственными в указанном выше смысле мы должны считать группу центров кратности 3 в первой плоскости с группою центров кратности 5 во второй плоскости и точно так же группу центров кратности 2 в первой плоскости и группу с кратностью 3 во второй плоскости, потому что только в числах соответствующих этим парам групп некоторые из чисел отличаются от остальных.

Составляя для данного примера детерминант (7), получим

$$\left|\begin{array}{c|cc|ccc|ccc}
3 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|$$

Пунктирные линии показывают разбиение членов α_{kl} на группы, соответствующие центрам одинаковой кратности. Мы видим, что в квадратах, расположенных по главной диагонали, диагональные элементы отличаются от остальных на единицу, тогда как в остальных прямоугольниках все элементы одинаковы.

6. Детерминант Clebsch'a (10) может быть преобразован в детерминант низшего порядка, что бывает полезно при его вычислении.

Рассмотрим в детерминанте (10) ряд столбцов, принадлежащих к одной и той же l-той группе, соответствующей p_l основным точкам второй сети

$$\begin{array}{llll}
\alpha_{1l} & \alpha_{1l} \;\ldots & \ldots \; \alpha_{1l} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \Big\} \; p_1 \\
\alpha_{1l} & \alpha_{1l} \;\ldots & \ldots \; \alpha_{1l} & \\
\alpha_{2l} & \alpha_{2l} & \ldots \; \alpha_{2l} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \Big\} \; p_2 \\
\alpha_{2l} & \alpha_{2l} \;\ldots & \ldots \; \alpha_{2l} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
\alpha_{ll}+\varepsilon_l & \alpha_{ll} \;\ldots & \ldots \; \alpha_{ll} & \\
\alpha_{ll} & \alpha_{ll}+\varepsilon_l & \ldots \; \alpha_{ll} & \Big\} \; p_l \\
\ldots & \ldots & \ldots & \\
\alpha_{ll} & \alpha_{ll} \;\ldots & \ldots \; \alpha_{ll}+\varepsilon^l & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \} \; p_{l+1} \ldots p_q
\end{array}$$

Эта полоса разбивается на прямоугольники по $p_1, p_2 \ldots p_q$ строк, причем в каждом прямоугольнике все элементы равны, и только в l-том квадрате диагональные элементы отличаются от остальных на положительную или отрицательную единицу. Вычитая элементы первого столбца из остальных, мы дадим им следующий вид

$$\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
\alpha_{1l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_{1l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0
\end{array}\right\} & p_1 \\
\left.\begin{array}{ll}
\alpha_{2l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_{2l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0
\end{array}\right\} & p_2 \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \\
\left.\begin{array}{ll}
\alpha_{ll} + \varepsilon_l & -\varepsilon_l\ .\ -\varepsilon_l \\
\alpha_{ll} & \varepsilon_l\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_{ll} & 0\ .\ .\ .\ .\ \varepsilon_l
\end{array}\right\} & p_l \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &
\end{array}$$

Будем теперь в каждом прямоугольнике прикладывать элементы всех строк к элементам первой строки. Получим

$$\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{ll}
p_1\alpha_{1l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_{1l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0
\end{array}\right\} & p_1 \\
\left.\begin{array}{ll}
p_2\alpha_{2l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_{2l} & 0\ .\ .\ .\ .\ 0
\end{array}\right\} & p_2 \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \\
\left.\begin{array}{ll}
p_l\alpha_{1l} + \varepsilon_l & 0\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
\alpha_{ll} & \varepsilon_l\ .\ .\ .\ .\ 0 \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . \\
\alpha_l & 0\ .\ .\ .\ .\ \varepsilon_l
\end{array}\right\} & p_l \\
.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . &
\end{array}$$

Если мы выполним такое преобразование над всеми полосами детерминанта (10), то мы дадим ему такой вид

$$\left|\begin{array}{llllll}
p_1\alpha_{11} + \varepsilon_1 & 0\ .\ .\ .\ 0 & p_1\alpha_{12} & 0\ .\ .\ 0 & p_1\alpha_{13} & .\ . \\
\alpha_{11} & \varepsilon_1\ .\ .\ .\ 0 & \alpha_{12} & 0\ .\ .\ 0 & \alpha_{13} & .\ . \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ . \\
\alpha_{11} & 0\ .\ .\ .\ \varepsilon_1 & \alpha_{12}\ .\ .\ . & 0\ .\ .\ 0 & \alpha_{13} & .\ . \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ . \\
p_2\alpha_{21} & 0\ .\ .\ .\ 0 & p_2\alpha_{22} + \varepsilon_2 & 0\ .\ .\ 0 & \alpha_{23} & .\ . \\
\alpha_{21} & 0\ .\ .\ .\ 0 & \alpha_{22} & \varepsilon_2\ .\ .\ 0 & \alpha_{23} & .\ . \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & .\ . \\
\alpha_{21} & 0\ .\ .\ .\ 0 & \alpha_{22} & 0\ .\ .\ 0 & \alpha_{23} & .\ .
\end{array}\right|$$

$$.\ .$$

Полученный детерминант имеет следующее строение. Он состоит из q вертикальных полос по $p_1, p_2 \ldots p_q$ столбцов; в каждой полосе только первый столбец состоит целиком из элементов отличных от нуля; в каждом из остальных столбцов все члены, кроме одного—нули, а этот последний член равен соответственно $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_q$. Поэтому последний детерминант может быть приведен окончательно к следующему виду

$$\varepsilon_1^{p_1-1}\ \varepsilon_2^{p_2-1} \cdots \varepsilon_q^{p_q-1} \left|\begin{array}{llll}
p_1\alpha_{11} + \varepsilon & p_1\alpha_{12}\ .\ .\ . & p_1\alpha_{1q} & .\ . \\
p_2\alpha_{21} & p_2\alpha_{22} + \varepsilon_2 & .\ p_2\alpha_{2q} & .\ . \\
.\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ .\ . & .\ .\ .\ . & \\
p_q\alpha_{q1} & p_q\alpha_{q2}\ .\ .\ . & p_q\alpha_{qq} + \varepsilon_q &
\end{array}\right| .$$

Таким образом мы преобразовали детерминант Clebsch'а порядка p в детерминант низшего порядка q. Отсюда, между прочим, получается соотношение

$$\begin{vmatrix} p_1\alpha_{11}+\varepsilon & p_1\alpha_{12} & \ldots & p_1\alpha_{1q} \\ p_2\alpha_{21} & p_2\alpha_{22}+\varepsilon_2 & \ldots & p_2\alpha_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_q\alpha_q & p_q\alpha_{q2} & \ldots & p_q\alpha_{qq}+\varepsilon_q \end{vmatrix} = \pm n.$$

Для разобранного выше примера это равенство принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1.2+1 & 1.1 & 1.3 & 1.2 \\ 2\,.\,1 & 2.0+1 & 2.2 & 2.1 \\ 3\,.\,1 & 3.0 & 3.1+1 & 3.1 \\ 3\,.\,1 & 3.0 & 3.1 & 3.0+1 \end{vmatrix} = -11.$$

7. В Кремоновых преобразованиях иногда бывает удобно присоединять к основным точкам сети другие дополнительные основные точки, взятые в той или другой точке плоскости. Так как кривые сети имеют кратные точки только в основных точках сети и сходятся все только в них, то эти новые основные точки мы должны рассматривать как точки нулевой кратности. Посмотрим, какие характеристические числа мы должны приписать каждому такому центру нулевой кратности. Пусть между плоскостями P, Q установлено Кремоново преобразование, характеристические числа которых удовлетворяют соотношениям (1)—(6). Прибавим теперь на первой плоскости еще π новых центров A_k, указатели которых изменяются от $p+1$ до $p+\pi$. Так как на обеих плоскостях должно быть одинаковое число центров, то и на плоскости Q должно взять π новых центров $B_l\,(l=p+1,\ldots p+\pi)$. Будем обозначать попрежнему через $r_k, s_l (k, l=p+1,\ldots p+\pi)$ кратности новых основных точек и через α_{kl} их характеристические числа. Тогда формулы (1), (2) примут следующий вид

$$\sum_1^{p+\pi} r_k^2 = n^2-1,\quad \sum_1^{p+\pi} s_l^2 = n^2-1, \tag{1'}$$

$$\sum_1^{p+\pi} r_k = 3(n-1),\quad \sum_1^{p+\pi} s_l = 3(n-1), \tag{2'}$$

Вычитая (1) из (1'), имеем

$$\sum_{p+1}^{p+\pi} r_k^2 = 0,\quad \sum_{p+1}^{p+\pi} s_l^2 = 0. \tag{3'}$$

Отсюда видно, что все указатели r_k, s_l, соответствующие новым основным точкам, равны нулю, т.-е. что это основные точки нулевой кратности, как это мы видели выше.

Так как каждой основной точке Кремоновой сети в одной плоскости соответствует в другой плоскости основная линия, порядок которой равен кратности соответствующей ей основной точки, то, вводя в каждой сети π основных точек нулевой кратности, мы вместе с тем должны ввести столько же основных линий нулевого порядка. Посмотрим, какие значения должны мы приписать характеристическим числам α_{kl} для этих линий. Давая в первой формуле (4) указателю l значение, не превосходящее p, и распространяя суммирование на все значения k от 1 до $p+\pi$, мы получим

$$\sum_{k=1}^{k=p+\pi} \alpha_{kl}^2 = s_l^2+1. \tag{4'}$$

Вычитая отсюда первое равенство (4), будем иметь

$$\sum_{k=p+1}^{k=p+\pi} \alpha_{kl}^2 = 0.$$

Отсюда видно, что при $k > p$, $l \leq p$ мы имеем $\alpha_{kl} = 0$. Применяя то же рассуждение ко второй формуле (4), мы найдем, что все числа α_{kl}, для которых только один из указателей не превосходит p, также равны нулю. Это показывает, что основные линии, соответствующие новым центрам, не проходят через старые центры. Положим теперь в первой формуле (4) $l > p$. Тогда $s_l = 0$, и мы найдем, что при $l > p$ все числа α_{kl} равны нулю, кроме одного, равного ± 1, при чем в последнем случае оба указателя k, l больше p. Обращаясь затем к первой формуле (6) и полагая $l > p$, мы найдем, что при $k > p$, $l > p$ число α_{kl}, неравное нулю, равно не $+1$, а -1. Если мы теперь обратимся к первой формуле (5) и распространим в ней суммирование на все значения k от 1 до $p + \pi$, полагая $l, l' > p$, то, на основании предыдущего, все числа $\alpha_{kl}, \alpha_{kl'}$ равны нулю, кроме одной пары чисел α_{kl}, $\alpha_{k'l'}$ равных -1; если бы указатели k и k' были равны, то все члены левой части были бы нулями, кроме одного равного единице, и мы имели бы $s_l s_{l'} = 1$; но $s_l s_{l'} = 0$, следовательно, k и k' различны, и каждому указателю $l > p$ должен соответствовать свой указатель $k > p$, для которого $\alpha_{kl} = -1$. Отсюда видно, что каждой основной точке нулевой кратности на одной плоскости соответствует на другой плоскости определенная основная точка той же кратности, так что для них число $\alpha_{kl} = -1$. Приписывая в обеих плоскостях соответственным точкам одинаковые указатели, мы можем сказать, что при $k > p$, $l > p$ мы имеем $\alpha_{kl} = -1$ при $k = l$, и $\alpha_{kl} = 0$ при $k \neq l$. Таким образом, каждой основной точке нулевой кратности в одной из двух плоскостей соответствует в другой плоскости основная кривая нулевого порядка, имеющая в точке, сопряженной с данною основною точкою, кратную точку порядка -1. Очевидно, что двумя сопряженными точками нулевой кратности будут такие две обыкновенные точки обеих плоскостей, которые переходят одна в другую при данном Кремоновом преобразовании. Действительно, при Кремоновом преобразовании каждой основной точке на одной плоскости соответствуют на другой плоскости все точки соответственной основной кривой; но для основной точки нулевой кратности все точки основной кривой сводятся к одной точке, той, в которую эта точка превращается при данном Кремоновом преобразовании.

8. Основные линии нулевого порядка обладают тем парадоксальным свойством, что, состоя из единственной точки, они имеют эту точку кратною точкою отрицательного порядка. Я думаю, что эта особенность линий нулевого порядка может быть объяснена следующим образом. Подобно тому, как прямая, рассматриваемая как геометрическое место лежащих на ней точек, представляет собою линию первого порядка и нулевого класса, так точка, рассматриваемая как геометрическое место, или огибающая проходящих через нее прямых, есть линия первого класса и нулевого порядка. Если мы рассмотрим какую-нибудь линию, проходящую через эту точку, то общее число точек пересечения ее с линией нулевого порядка должно быть равно произведению порядков обеих линий, т.-е. нулю. С другой стороны, касательная к рассматриваемой линии в данной точке есть один из лучей пучка, проходящего через эту точку и, следовательно, есть также касательная к линии нулевого порядка. Таким образом, рассматриваемая кривая и линия нулевого порядка имеют общую касательную и, следовательно, имеют две общих бесконечно-близких точки. По предыдущему, сумма кратностей этих двух общих точек на линии нулевого порядка должна равняться нулю, и так как эта линия имеет одну особую точку, то ее кратность должна быть принята равною —1; тогда кратность бесконечно-близких точек на проходящих через нее прямых будет нормальная, равная $+1$.

С точки зрения Кремоновых преобразований тот же факт можно истолковать еще следующим образом. Пусть плоскости P и Q связаны между собою квадратичным преобразованием, при чем основным точкам A_1, A_2, A_3 на плоскости P сопряжены соответственно основные точки B_1, B_2, B_3 на плоскости Q. Пусть на плоскости P нам дана кривая L m-го порядка, не проходящая ни через одну из трех основных точек. Тогда на плоскости Q ей будет соответствовать кривая L' порядка $2m$, имеющая в каждой из вершин B_1, B_2, B_3 m-кратную точку. Положим теперь, что кривая L имеет в центре A_1 простую точку. Тогда из кривой L' выделится прямая, проходящая через точки B_2, B_3 и в остатке получится кривая порядка $2m-1$, имеющая в точке B_1 попрежнему m-кратную точку, но в точках B_2, B_3 точки кратности $m-1$, так как дополнительные m-ые точки перешли в выделившуюся прямую B_2B_3. Отсюда видно, что когда преобразуемая кривая на плоскости P проходит через одну из основных точек квадратичного преобразования, то порядок преобразованной кривой на плоскости Q понижается на единицу, и на единицу же понижается кратность точек этой кривой, лежащих в двух из основных точек этой плоскости Q. Если кривая L проходит через две основные точки A_1, A_2, то порядок кривой L' понизится еще на единицу, кратности точек B_1, B_2 понизятся каждая на единицу, но кратность точки B_3 понизится на две единицы, так как из кривой L' выделятся две прямые, и каждая из них проходит через точку B_3. Положим теперь, что вместо кривой L мы имеем прямую. Применяя к этому случаю предыдущие соображения, мы найдем, что, если прямая не проходит ни через одну из точек A_1, A_2, A_3, то она превратится на плоскости Q в кривую 2-го порядка, имеющую в точках B_1, B_2, B_3 простые точки; но если преобразуемая прямая проходит через точку A_1, то на плоскости Q из кривой 2-го порядка выделится прямая B_2B_3 и в остатке получится прямая, т.-е. линия 1-го порядка, не проходящая через точки B_2, B_3, т.-е. имеющая в точках B_2, B_3 точки нулевой кратности, следовательно, кратности на единицу меньшей, нежели прежде. Таким образом, выделившаяся прямая B_2B_3 унесла с собою по точке простой кратности из центров B_2 и B_3. Положим теперь, что преобразуемая прямая в плоскости P проходит не только через основную точку A_1, но также и через другую основную точку A_2. Тогда из кривой 2-го порядка, получившейся первоначально в плоскости Q, выделится еще прямая B_1B_3, порядок оставшейся линии в этой плоскости понизится еще на единицу и будет равен нулю; кратности точек B_1 и B_3 для этой линии нулевого порядка также понизятся еще на единицу, и мы получим в B_1 точку нулевой кратности, а в B_3 точку кратности —1. Таким образом, рассмотрение Кремоновых преобразований приводит к той же точке зрения на линии нулевого порядка, к какой мы пришли выше.

Мы видели, что, рассматривая линию нулевого порядка, как огибающую пучка прямых, проходящих через одну точку, мы должны понимать эту линию, как состоящую из этой точки, как кратной порядка —1, со всеми окружающими ее бесконечно-близкими точками кратности $+1$. Отсюда следует, что если мы рассматриваем какую-нибудь точку, как основную точку нулевого порядка какой-нибудь Кремоновой сети, то проходящая через эту точку основная линия нулевого порядка должна быть рассматриваема, как имеющая в этой точке кратную точку порядка -1, так как точки порядка $+1$, окружающие эту точку, не совпадают с самою основною точкою, а только бесконечно-близки к ней.

9. Введение линий нулевого порядка в теорию Кремоновых преобразований позволяет объединить в одной общей закономерности преобразование линий с преобразованием точек. Чтобы это видеть, рассмотрим Кремоново преобразование C, имеющее в первой плоскости P p основных точек $A_1, A_2 \dots A_p$ с кратностями $r_1, r_2 \dots r_p$ и во второй плоскости Q столько же основных точек $B_1, B_2 \dots B_p$ с кратностями $s_1, s_2 \dots s_p$. Здесь мы возвращаемся к обозначениям § 1, так что между числами r, как и между числами s, могут быть и одинаковые. Тогда, как мы знаем, мы будем иметь в плоскости P p основных линий $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_p$ порядков $s_1, s_2 \dots s_p$, а в плоскости Q p линий $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_p$ порядков $r_1, r_2 \dots r_p$. Кроме того известно, что если линия $\mathfrak{B}_l$ имеет в точке A_k кратную точку порядка α_{kl}, то и линия $\mathfrak{A}_k$ будет иметь в точке B_l точку той же кратности. Все количества n, r, s, α связаны между собою соотношениями (1)—(6) § 1.

Пусть теперь нам дана в плоскости P кривая L m-го порядка, имеющая в каждой из основных точек A_k сети точку кратности q_k. Если мы произведем над кривою L Кремоново преобразование, то, как это известно из общей теории, мы получим в плоскости Q кривую L, порядок m' которой выразится формулою

$$m' = mn - \sum_k q_k r_k. \tag{11}$$

Точно так же кратность кривой L в точке B_l второй плоскости представится формулою

$$q'_l = m s_l - \sum_k q_k \alpha_{kl}. \tag{12}$$

Положим теперь, что линия L есть основная линия $\mathfrak{B}_{l'}$ первой плоскости. Тогда числа m, q_r превратятся соответственно в $s_{l'}$, $\alpha_{kl'}$. Производя эту замену в предыдущих формулах и имея в виду соотношения (1)—(6), мы получим, что в этом случае $m' = s_{l'} n - \sum_k \alpha_{kl'} r$. Но формулы (3), (5) показывают, что здесь $m' = 0$, а $q'_l = s_{l'} s_l - \sum_k \alpha_{kl'} \alpha_{kl}$ равно нулю при $l \neq l'$ и равно -1 при $l = l'$. Таким образом наши формулы показывают, что линия $\mathfrak{B}_l$ превратилась в линию нулевого порядка, имеющую кратную точку в точке $B_{l'}$, т.-е. превратилась в самую эту точку, как и должно быть.

Пусть теперь мы имеем на плоскости P вместо линии точку, отличную от центров $A_1\ A_2, \dots A_p$ Кремоновой сети. Рассматривая эту точку, как кривую нулевого порядка с кратностью нуль в основных точках, мы получим, полагая в формулах (11), (12) $m = 0$, $q_k = 0$, что $m' = 0$, $q'_l = 0$. Таким образом, обыкновенная точка переходит в точку, как и должно быть. Если, наконец, данная точка совпадает с одним из центров $A_{k'}$ сети, то мы должны положить в тех же формулах $m = 0$, $q_k = -1$ при $k = k'$ и $q_k = 0$ при $k \neq k'$. Тогда эти формулы дают $m' = r_{k'}$, $q_l = \alpha_{k'l}$. Это показывает, что основной точке первой плоскости соответствует во второй плоскости основная линия порядка $r_{k'}$ с кратною точкою порядка $\alpha_{k'l}$ в точке B_l, согласно с общею теорией. В частности, если основная точка A_k имеет кратность нуль, то $r_{k'} = 0$ и $\alpha_{k'l}$ равно -1, если $l = k'$ и равно нулю, если $l \neq k'$; это показывает, что основной точке нулевого порядка соответствует основная линия нулевого порядка, т.-е. точка, как мы получили это и выше, когда рассматривали ту же точку не как основную, а как простую. Эта точка есть как раз та основная точка $B_{k'}$ нулевого порядка на плоскости Q, которая в данном Кремоновом преобразовании соответствует точке A_k первой плоскости. Легко видеть, что включение точки A_k нулевой кратности в число основных точек или исключение ее не отражается на формулах (11), (12). Если преобразуемая кривая L не проходит через точку A_k, то для нее $q_k = 0$, а члены, соответствующие точке A_k, выпадают из формул. Если же линия L проходит через точку A_k и имеет в ней q_k-кратную точку, то формула (11) не изменится, так как $r_k = 0$; что касается формулы (12), то при $l' \neq k$ она не изменится, так как $\alpha_{kl'} = 0$; если же $l' = k$, то, полагая $r_k = 0$, $\alpha_{kl'} = 0$ при $l' \neq k$ и $r_k = 0$, $\alpha_{kl'} = -1$ при $l' = k$, мы получим $q'_k = q_k$; это показывает, что преобразованная кривая L' имеет в основной точке B_k, соответствующей точке A_k первой плоскости, точку той же кратности, какую кривая L имела в точке A_k. Но, очевидно, что то же самое было бы, если бы мы не считали точку A_k принадлежащею к основным точкам сети, так как точка B_k есть та точка второй плоскости, в которую точка A_k переходит при данном Кремоновом преобразовании.

Из предыдущего видно, что, рассматривая точки, как линии нулевого порядка, мы получаем возможность выразить в одних и тех же формулах законы Кремоновых преобразований как для линий, так и для точек.

Рассмотрение точек, как линий нулевого порядка, применил впервые в теории Кремоновых преобразований в 1872 г. Samuel Roberts (Proceedings of the London Mathematical Society, Vol. IV). Но Робертс ограничился вопросом об изменении порядка этих линий при Кремоновых преобразованиях и не вводил точек отрицательной кратности. Вследствие этого Робертс не получил той простоты и стройности, которой здесь можно достигнуть введением этих точек; он интересовался только задачей об особенностях основных линий Кремоновой сети, соответствующих различным основным точкам другой плоскости.

Мысль о введении в число основных точек Кремоновой сети дополнительных основных точек нулевой кратности принадлежит, повидимому, Montesano (Rendiconti dell' Accademia di Napoli (3), t. XI, 1905).

10. Введение основных точек нулевой кратности позволяет представить в простом виде результат последовательного применения нескольких Кремоновых преобразований. Пусть между плоскостями P, Q установлено Кремоново соответствие C порядка n с основными точками $A_1, A_2 \ldots A_p$ в первой плоскости и с основными же точками $B_1, B_2 \ldots B_p$ во второй; пусть будут n', $r_{k'}$, $s_{l'}$, α_{kl} $(k, l = 1, 2 \ldots p)$ характеристические числа этого соответствия. Точно так же, пусть преобразование C' преобразует плоскость Q в плоскость R, и пусть соответствующие Кремоновы сети имеют в плоскости Q те же самые основные точки B_1, $B_2 \ldots B_p$, а в плоскости R основные точки $D_1, D_2 \ldots D_p$; пусть будут n', r'_k, s'_l, α'_{kl} $(k, l = 1, 2 \ldots p)$ характеристические числа преобразования C'. Мы здесь предполагаем, что в плоскости Q оба преобразования имеют общие основные точки: мы можем сделать это благодаря введению основных точек нулевой кратности; если бы какая-нибудь основная точка одной из двух Кремоновых сетей, лежащих в плоскости Q, не была основною точкою другой сети, то мы введем ее в эту сеть, как новую основную точку с нулевою кратностью. При этом, разумеется, нужно будет дополнить соответствующим образом и сопряженную Кремонову сеть, введя в нее также дополнительную основную точку нулевой кратности.

Посмотрим, каково будет то Кремоново преобразование C'', которое связывает первую плоскость P с третьею плоскостью R. Пусть будут n'', r''_k, s''_l, α''_{kl} $(k, l = 1, 2 \ldots p)$ характеристические числа этого нового преобразования. Очевидно, что для преобразования C'' Кремонова сеть на первой плоскости P получится, если мы совершим преобразование C над тою сетью на плоскости Q, которая принадлежит преобразованию C', и точно так же новая сеть на плоскости R получится, если мы выполним преобразование C' над тою сетью на плоскости Q, которая соответствует преобразованию C. Действительно, чтобы получить, например, новую сеть на плоскости R, нужно знать, во что обращаются после преобразования C'' прямые линии плоскости P. Преобразованием C эти прямые превращаются в первую сеть на плоскости Q, и нам остается только подвергнуть эту сеть второму преобразованию C'.

Обозначим через S ту сеть на плоскости Q, которая принадлежит к преобразованию C, и через S'—сеть, принадлежащую к преобразованию C'. Производя над кривыми сети S в плоскости Q преобразование C', мы получим в плоскости R согласно формулам (11) кривые порядка

$$n'' = nn' - \sum_m s_m r'_m. \tag{13}$$

Таков будет порядок Кремонова преобразования C'', которое устанавливается между плоскостями P и R. Далее, согласно формуле (13), все кривые новой Кремоновой сети в плоскости R, получающиеся из сети S преобразованием C', будут иметь в каждой основной точке C_l этой плоскости кратную точку порядка

$$s''_l = ns'_l - \sum_m s_m \alpha'_{ml}. \tag{14}$$

Точно так же мы найдем, что в каждой основной точке A_k плоскости P кривые новой Кремоновой сети будут иметь кратную точку порядка

$$r''_k = n'r_k - \sum_m r'_m \alpha_{km}. \tag{15}$$

Чтобы получить выражения для чисел α''_{kl}, возьмем в плоскости P основную точку A_k кратности r_k; ее кратность в новой сети на плоскости P выражается формулою (15). После преобразования C эта точка обратится на плоскости Q в основную кривую порядка r_k, имеющую в каждом центре B_l кратную точку порядка α_{kl}. Подвергая эту кривую преобразованию C', мы получим в плоскости R кривую порядка r'', определяемого формулою (15); кроме того, подставляя в формулу (12) вместо m и q_k соответственно r_k и α_{km}, получим числа α''_{kl}, показывающие, с какою кратностью полученная основная линия будет проходить через точку D_l третьей плоскости. Таким образом получим

$$\alpha''_{kl} = r_k s'_l - \sum_m \alpha_{km} \alpha'_{ml}. \tag{16}$$

Формулы (13)—(15) известны в теории Кремоновых преобразований; но формула (16) мне не встречалась, может быть, потому, что свойствами основных линий Кремоновых сетей до сих пор мало интересовались.

Должно заметить, что все изложенные здесь соображения относятся к общему случаю, т.-е. к тому случаю, когда относительные положения основных точек данной сети не связаны никакими условиями. Прежде всего эти точки не должны лежать так, чтобы через них нельзя было провести нераспадающихся линий данной Кремоновой сети. Если, например, в сети второго порядка три ее основные точки лежат на одной прямой, то такая сеть невозможна. Далее, требует особого исследования тот случай, когда некоторые из основных точек бесконечно-близки друг к другу.

11. Формулы (13)—(16) устанавливают интересную зависимость между детерминантом (8), который мы обозначали через M_0, составленным для сложного Кремонова преобразования, и соответствующими детерминантами, составленными для тех преобразований, из которых это сложное преобразование получено. Чтобы обнаружить эту зависимость, заменим детерминант M_0 следующим

$$M = \begin{vmatrix} n & is_1 & is_2 & \dots & is_p \\ ir_1 & -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1p} \\ ir_2 & -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ ir_p & -a_{p1} & -a_{p2} & \dots & -a_{pp} \end{vmatrix} \tag{17}$$

Детерминант M получится из M_0, если мы умножим на -1 первый столбец и все строки, кроме первой.

Если мы в данном Кремоновом преобразовании C перенумеруем определенным образом основные точки обеих сетей, то каждому преобразованию будет соответствовать определенный детерминант M, характеризующий это преобразование, и мы будем считать равносильными все Кремоновы преобразования, которым соответствует одинаковый детерминант M, так как они могут отличаться только расположением своих основных точек. Пусть мы имеем два Кремонова преобразования C, C' с одинаковым числом p основных точек. Применяя их последовательно, мы получим новое преобразование C'' с тем же числом основных точек. Если мы составим для этих трех преобразований соответствующие детерминанты M, M', M'', то, как показывают формулы (13)—(16), будет иметь место соотношение

$$M'' = M \, . \, M' \tag{18}$$

при чем элемент детерминанта M'', принадлежащий к строке с указателем k и к столбцу с указателем l ($k, l = 1, 2, \dots p$), получается через умножение k-той строки детерминанта M на l-тый столбец детерминанта M'. Действительно, формулы (13)—(16) дают

$$M'' = \begin{vmatrix} (nn' - \sum\limits_m s_m r'_m), & i(ns'_1 - \sum\limits_m s_m a'_{m1}), & \dots & i(ns'_p - \sum\limits_m s_m a'_{mp}) \\ i(r_1 n' - \sum\limits_m a_{1m} r'_m), & -(r_1 s'_1 - \sum\limits_m a_{1m} a'_{m1}), & \dots & -(r_1 s'_p - \sum\limits_m a_{1m} a'_{mp}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i(r_p n' - \sum\limits_m a_{pm} r'_m), & -(r_p s'_1 - \sum\limits_m a_{pm} a'_{m1}), & \dots & -(r_p s'_p - \sum\limits_m a_{pm} a'_{mp}) \end{vmatrix}$$

Мы уже отметили, что Кремонова сеть не изменится, если мы прибавим к ее основным точкам произвольное число основных точек нулевой кратности, и если мы изменим порядок нумерации основных точек. Это показывает, что каждому Кремонову преобразованию соответствует не один детерминант M, а бесконечное множество детерминантов, различающихся между собою порядком столбцов и строк и числом дополнительных столбцов и строк, соответствующих добавленным центрам нулевой кратности. Пока мы имеем дело с одним Кремоновым преобразованием, мы можем ограничиться для его характеристики одним из соответствующих ему детерминантов M, но когда мы составляем сложное Кремоново преобразование C'' через последовательное применение двух преобразований C, C', то соответствующие им детерминанты M, M' должны быть взяты надлежащим образом. Именно, для применения формул (13)—(16) § 10 детерминанты M и M' должны быть таковы, чтобы в плоскости Q § 10 каждой основной точке второй сети S первого преобразования C и той же точке, как основной точке первой сети S' второго преобразования C' соответствовали в обоих детерминантах M, M' одинаковые указатели; а для этого необходимо, как мы видели в § 10, ввести центры нулевой кратности там, где одна из двух сетей S, S' имеет основную точку, а другая ее не имеет и, кроме того, установить порядок строк в детерминанте M' сообразно с порядком столбцов в детерминанте M.

12. Эти простые замечания приводят к следующим важным следствиям. Все Кремоновы преобразования образуют группу преобразований в том смысле, что последовательность двух Кремоновых преобразований дает также Кремоново преобразование. Но если мы будем рассматривать Кремоново преобразование независимо от того, в каком порядке мы берем определяющие его основные точки, то последовательность двух Кремоновых преобразований C, C' может в различных случаях давать различные преобразования C''. Поэтому, чтобы рассматривать Кремоновы преобразования как группу преобразований в обычном смысле этого слова, мы должны рассматривать каждое Кремоново преобразование, как определяемое соответствующим детерминантом M, так что два Кремоновых преобразования с основными точками одной и той же кратности, но отличающиеся расположением строк и столбцов в соответствующих им детерминантах M, должны считаться различными. При таком условии все Кремоновы преобразования с одинаковым числом p основных точек образуют одну группу. Произведение двух преобразований C, C' дает преобразование C'', если соответствующие им детерминанты связаны соотношением

$$M'' = M . M',$$

выражающим закон составления элементов детерминанта M'' через элементы детерминантов M и M'. Преобразование тождественное есть, очевидно, преобразование, определяемое детерминантом $p+1$-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1i & 0 & i0 & . & . & i0 \\ i0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ i0 & 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ i0 & 0 & 0 & . & . & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & i0 \\ i0 & 1 \\ i0 & 0 \end{vmatrix}$$

так как при умножении всякого детерминанта M на этот детерминант все элементы умножаемого детерминанта не изменяются. Очевидно, что это преобразование, которое в теории групп обозначается символом 1, есть преобразование 1-го порядка, т.-е. проективное, имеющее p основных точек нулевой кратности в основных точках преобразуемой сети. Каждому преобразованию C, определяемому детерминантом (17), соответствует обратное преобразование C', определяемое детерминантом, который мы обозначим через M^{-1}

$$M^{-1} = \begin{vmatrix} n & ir_1 & ir_2 & . & . & . & . & ir_p \\ is_1 & -\alpha_{11} & -\alpha_{21} & . & . & . & . & -\alpha_{p1} \\ is_2 & -\alpha_{12} & -\alpha_{22} & . & . & . & . & -\alpha_{p2} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ is_p & -\alpha_{1p} & -\alpha_{2p} & . & . & . & . & -\alpha_{pp} \end{vmatrix}.$$

Легко убедиться, что произведение $M . M^{-1}$ действительно дает детерминант, который мы выше обозначили символом 1, т.-е. $C . C^{-1} = 1$.

Каждая Кремонова сеть с p основными точками может быть превращена в сеть с $p+1$ основными точками через присоединение одной точки нулевой кратности. Отсюда следует, что каждое Кремоново преобразование с p основными точками будет входить во все группы преобразований с бо̀льшим числом основных точек, если мы прибавим нужное число точек нулевой кратности и соответствующим образом расширим принадлежащий к этому преобразованию детерминант M. Поэтому мы можем рассматривать в пределе всю совокупность Кремоновых преобразований на плоскости, как группу преобразований с бесконечным числом центров. В эту группу входят, как подгруппы, группы Кремоновых преобразований с определенным конечным числом центров p. Каждая такая группа является вместе с тем подгруппою каждой группы с бо̀льшим числом центров, если мы в ней дополним недостающие центры точками нулевой кратности.

13. Группы Кремоновых преобразований с p основными точками суть группы конечные при $p<9$ и бесконечные при $p\geqq 9$. Действительно, рассмотрим матрицу

$$\begin{Vmatrix} r_1 & r_2 & . & . & . & r_p \\ 1, & 1 & . & . & . & 1 \end{Vmatrix}$$

где $r_1,\ldots r_p$ — кратности отдельных основных точек. Как известно, квадрат этой матрицы равен сумме квадратов детерминантов вида

$$\begin{vmatrix} r_k & r_l \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

С другой стороны тот же квадрат равен детерминанту

$$\begin{vmatrix} r_1^2+r_2^2 \;.\;.\; +r_p^2 & r_1+r_2\;.\;.\;.+r_p \\ r_1+r_2\;.\;.\;.+r_p & 1+1\;.\;.\;.+1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда, на основании формул (1), (2), находим

$$(n^2-1)p-9(n-1)^2=\Sigma(r_k-r_l)^2.$$

$$(k,\ l=1,\ 2\ .\ .\ .\ p).$$

Это соотношение даст

$$p\geqq\frac{9(n-1)}{n+1},$$

или

$$p\geqq 9-\frac{18}{n+1}.$$

Это показывает, что p может быть меньше девяти только при $n\leqq 17$, а так как при данном n число Кремоновых преобразований не может быть более числа целых и положительных решений системы уравнений (1), (2) и потому есть число конечное, то и число групп преобразований, в которых число основных точек меньше девяти,—конечное.

С другой стороны, пусть $p\geqq 9$. Возьмем уравнение (2)

$$r_1+r_2+r_3\;.\;.\;.\;+r_p=3(n-1).$$

Положим, что числа $r_1\;.\;.\;.\;r_p$ расположены в убывающем порядке. Рассмотрим три центра низшей кратности r_{p-2}, r_{p-1}, r_p. Очевидно, что их среднее арифметическое не может быть больше среднего арифметического всех кратностей. Поэтому имеем

$$\frac{r_{p-2}+r_{p-1}+r_p}{3} \leq \frac{3(n-1)}{p},$$

или

$$r_{p-2}+r_{p-1}+r_p \leq \frac{9(n-1)}{p}.$$

Это неравенство показывает, что при $p \geq 9$

$$r_{p-2}+r_{p-1}+r_p < n.$$

Подвергнем данное Кремоново преобразование квадратичному преобразованию, поместив три центра последнего в трех низших центрах Кремоновой сети. Тогда порядок нового преобразования будет, по формуле (13),

$$n'' = 2n - (r_{p-2}+r_{p-1}+r_p) > n.$$

Отсюда видно, что из каждого Кремонова преобразования с числом центров не меньшим девяти можно получить другое преобразование с тем же числом центров, но более высокой степени. Так как этот процесс можно продолжать неограниченно, то отсюда ясно, что группа Кремоновых преобразований при $p \geq 9$ есть группа бесконечная.

14. Введение в теорию Кремоновых преобразований понятия о линиях нулевого порядка позволяет разъяснить одно обстоятельство в теории Кремоновой сети, кажущееся парадоксальным. Пусть мы имеем Кремонову сеть S линий n-го порядка, определяемую p основными точками $A_1, A_2 \ldots A_p$, кратности которых удовлетворяют обычным условиям Кремоновой сети

$$\sum_1^p r_k^2 = n^2 - 1, \tag{1}$$

$$\sum_1^p r_k = 3(n-1). \tag{2}$$

Так как из этого следует

$$\frac{1}{2}\sum_1^p r_k(r_k+1) = \frac{1}{2}n(n+3) - 2,$$

то данных основных точек недостаточно для определения кривой n-го порядка, что и понятно, так как они определяют целую сеть таких кривых. Поэтому как бы эти точки ни были расположены на плоскости, семейство линий S, имеющих в $A_1, A_2 \ldots A_p$ точки кратностей $r_1, r_2 \ldots r_p$, всегда существует, хотя, может быть, и не всегда представляет Кремонову сеть. Тем не менее известно, что во всяком случае сумма кратностей $r_1+r_2+r_3$ трех высших центров A_1, A_2, A_3 такого семейства больше порядка n кривых этого семейства. Если мы подвергаем семейство S квадратичному преобразованию с центрами в A_1, A_2, A_3, то порядок семейства понизится с n до $2n-(r_1+r_2+r_3)$, а на место центров A_1, A_2, A_3 явятся центры с кратностями $n-(r_2+r_3)$, $n-(r_3+r_1)$, $n-(r_1+r_2)$. Повторяя такое преобразование несколько раз, мы придем к одному из двух результатов. Мы можем понизить порядок семейства S до единицы: тогда мы получим сеть прямых и, выполняя произведенные преобразования в обратном порядке, мы превратим эту сеть прямых в первоначальную сеть S, которая таким образом будет настоящею Кремоновою сетью. Но может быть и другое,—при этих преобразованиях мы можем прийти к такому семейству линий, в котором один, два или нуль центра будут центрами с отрицательною кратностью. Так как такое семейство невозможно, то невозможно и то начальное семейство S, из которого оно получено. Отсюда, повидимому, получается то парадоксальное следствие, что через точки A_1, $A_2 \ldots A_p$, кратности которых удовлетворяют условиям (1), (2), не всегда можно провести линии n-го порядка. На самом деле известно, что в таком случае линии семейства s, проходящие через эти точки, распадаются на более простые и не образуют Кремоновой сети; тем не менее эти линии существуют, и представляется непонятным, каким образом эти линии могут преобразоваться в линии, обладающие невозможными центрами с отрицательностью кратностью.

Указанное здесь противоречие устранится, если мы введем в рассмотрение точки с кратностью — 1, как кратные точки линий нулевого порядка. В самом деле, положим, что мы имеем кривую n-го порядка L, обладающую точкою A_1, с кратностью — 1. Возьмем на этой кривой две другие точки A_2, A_3, кратности которых пусть будут r_2, r_3, и подвергнем кривую L квадратичному преобразованию с центрами в A_1, A_2, A_3. Тогда формулы (13) — (15) показывают, что полученная кривая L будет порядка

$$n' = 2n + 1 - (r_2 + r_3)$$

и кратности ее в новых центрах A'_1, A'_2, A'_3 будет соответственно

$$r'_1 = n - (r_2 + r_3),\ r'_2 = n + 1 - r_3,\ r'_3 = n + 1 - r_2;$$

отсюда следует, что

$$r'_2 + r'_3 = n' + 1 > n'.$$

Это показывает, что прямая, проходящая через A'_2, A'_3, пересекает нашу кривую n'-го порядка более, нежели в n' точках; а это может быть только в том случае, если кривая L' распадается на эту прямую и на кривую L'' порядка $n' - 1$. Очевидно, что в общем случае, который мы и рассматриваем, прямая $A'_2 A'_3$ не проходит через A'_1, а кривая L'' имеет в точке A'_1 кратность r'_1, а в A'_2 и A'_3 кратности $r'_2 - 1$, $r'_3 - 1$, так как через эти две точки проходит еще прямая. Если мы теперь произведем обратное квадратичное преобразование над распавшеюся кривою L', то прямая $A'_2 A'_3$ превратится в линию порядка

$$2 . 1 - (0 + 1 + 1) = 0,$$

и ее кратности в точках A_1, A_2, A_3 будут соответственно

$$1 - (1 + 1) = -1,\ 1 - (1 + 0) = 0,\ 1 - (0 + 1) = 0,$$

т.-е. это будет линия нулевого порядка с кратною точкою порядка — 1 в A_1. Что касается линии $(n' - 1)$-го порядка L'', то она превратится в кривую порядка

$$2[2n - (r_2 + r_3)] - [n - (r_2 + r_3)] - (n - r_2) - (n - r_3) = n$$

с кратными точками в A_1, A_2, A_3 порядков

$$[2n - (r_2 + r_3)] - (n - r_2) - (n - r_3) = 0.$$
$$[2n - (r_2 + r_3)] - [n - (r_2 + r_3)] - (n - r_2) = r_2.$$
$$[2n - (r_2 + r_3)] - [n - (r_2 + r_3)] - (n - r_3) = r_3.$$

Отсюда видно, что кривая n-го порядка с одною точкою кратности — 1 представляет совокупность кривой n-го порядка без этой точки и линии нулевого порядка, совпадающую с этой точкой.

Легко видеть, что, если бы мы выполнили над кривою L несколько последовательных Кремоновых преобразований, то эта линия нулевого порядка превратилась бы не в прямую, а в некоторую кривую высшего порядка, и мы получили бы после преобразования кривую, распадающуюся на две кривых высших порядков.

Если бы кривая L имела не одну, а несколько точек кратности -1, то мы таким же образом убедились бы, что она получилась из кривой, распавшейся на несколько кривых низших порядков. Ниже мы рассмотрим подробнее различные возможные здесь случаи.

Положим теперь, что кривая L имеет точку A_1 с отрицательною кратностью $-k$, где $k > 1$. Произведя такое же квадратичное преобразование, какое мы делали в предыдущем случае, мы получим кривую L', которой порядок и кратности в основных точках определяются формулами

$$n' = 2n + k - (r_2 + r_3),$$

$$r'_1 = n - (r_2 + r_3),\ r'_2 = n + k - r_3,\ r'_3 = n + k - r_2.$$

Отсюда имеем

$$r'_2 + r'_3 = n' + k > n'.$$

Отсюда, как и выше, заключаем, что кривая L' распадается на прямую A'_2, A'_3 и на кривую L'' порядка $n'' = n' - 1$. Для этой кривой мы имеем

$$n'' = n' - 1,$$

$$r''_1 = r'_1,\ r''_2 = r'_2 - 1,\ r''_3 = r'_3 - 1,$$

откуда

$$r''_1 + r''_3 = n'' + k - 1 > n''.$$

Это показывает, что и кривая L'' также распадается на ту же прямую $A'_2A'_3$ и на кривую L''' порядка $n' - 2$. Повторяя это рассуждение k раз, мы найдем, что в нашем случае кривая L распадается на k-кратную прямую $A'_2A'_3$ и на кривую $L^{(k)}$ порядка $n' - k$. Если мы теперь произведем обратное квадратичное преобразование, то k-кратная прямая $A'_2A'_3$ обратится в k-кратную линию нулевого порядка с точкою порядка $-k$ в точке A_1 и в кривую n-го порядка L, не проходящую через точку A. Таким образом, если кривая n-го порядка имеет кратную точку отрицательного порядка $-k$, то она распадается на кривую n-го порядка без этой точки и на k-кратную линию нулевого порядка, совпадающую с этою точкою.

Применим эти выводы к сетям кривых, у которых кратности основных точек удовлетворяют Кремоновым уравнениям

$$\sum_{k=1}^{k=p} r^2_k = n^2 - 1 \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{k=p} r_k = 3(n - 1). \tag{1'}$$

Системы целых и положительных решений этих двух уравнений могут быть, как мы видим, двух родов. Одни из этих решений определяют сети S нераспадающихся уникурсальных кривых n-го порядка—Кремоновы сети; эти решения называются „геометрическими". Другие решения ведут к распадающимся семействам линий n-го порядка, не образующих Кремоновой сети; такие решения называются „арифметическими". Посмотрим, что можно сказать о свойствах таких арифметических семейств кривых n-го порядка. Прежде всего обратим внимание на следующее. Пусть мы имеем Кремоново преобразование n-го порядка с p-кратными точками A_1, $A_2 \dots A_p$, кратностей r_1, $r_2 \dots$, r_k. Мы будем предполагать, что некоторые из этих точек имеют нулевую кратность, чтобы иметь возможность вводить в число основных точек любые точки плоскости. Пусть, далее, мы имеем в плоскости P кривую m-го порядка L, имеющую в основных точках Кремоновой сети, лежащей на этой плоскости, точки кратности q_1, $q_2 \dots q_p$ (ср. § 9). Мы можем предположить, что все кратные точки кривой L лежат в основных точках Кремоновой сети, так как в противном случае мы ввели бы в сеть дополнительные основные точки нулевой кратности. Пусть кривая L превращается после преобразования в кривую L' порядка m', лежащую в плоскости Q, с точками кратностей q'_1, $q'_2 \dots q'_p$ в основных точках Кремоновой сети на плоскости Q. Из формул (11), (12) вытекают следующие равенства

$$n'^2 - \sum_k q'^2_k = n^2 - \sum_k q_k^2, \tag{19}$$

$$3n' - \sum_k q'_k = 3n - \sum_k q_k. \tag{20}$$

Пусть кривая L принадлежит к семейству линий ступени h (зависящему от h параметров), определяемому своими кратными точками q_1, $q_2 \dots q_p$, среди которых могут быть и простые; пусть кривые этого семейства имеют род, или дефект g. Известно, что числа h, g выражаются через кратности точек, определяющих семейство кривых L следующим образом

$$h = \frac{n(n+3)}{3} - \sum_k \frac{q_k(q_k+1)}{2} \tag{21}$$

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum \frac{q_k(q_k-1)}{2}. \tag{22}$$

Отсюда находим

$$h + g = n^2 + 1 - \sum_k q_k^2 \tag{23}$$

$$h - g = 3n - 1 - \sum_k q_k. \tag{24}$$

Из сравнения последних формул с (19), (20) видно, что числа h, g не меняются при Кремоновых преобразованиях, как и должно быть, так как эти преобразования однозначные. Таким образом, системы кривых ступени h и ряда r переходят при Кремоновых преобразованиях в системы кривых иного порядка, но той же ступени и того же рода.

Положим, что мы имеем Кремонову сеть, состоящую из нераспадающихся кривых, сеть, которую мы назвали геометрическою. Тогда из формул (1), (2) находим для кривых сети

$$h + g = 2, \; h - g = 2,$$

откуда

$$h = 2, \; g = 0;$$

это значит, что Кремонова сеть есть система второй ступени, составленная из уникурсальных кривых, как это и должно быть.

Положим теперь, что мы имеем „арифметическую" распадающуюся сеть. Мы видели выше, что последовательными квадратичными преобразованиями мы можем понизить порядок этой сети так, что отделяющимся частям первоначальных кривых сети будут соответствовать линии нулевого порядка, каждая с точкою кратности — 1. Легко видеть, что линия нулевого порядка—уникурсальная и вполне определяемая своею кратною точкою. Действительно, полагая в формулах (21), (22) $n=0$, $p=1$, $r=-1$, получим $h=0$, $r=0$. На основании сказанного отсюда заключаем, что и в первоначальной сети выпадающие части кривых сети представляют уникурсальные кривые и притом вполне определенные, т.-е. общие всем кривым сети. Здесь особенно замечательно то, что эти выпадающие части могут быть только уникурсальными. Далее, нетрудно видеть, что эти выпадающие неподвижные части могут пересекаться, как между собою, так и с оставшимися переменными частями сети, только в основных точках. Это видно из того, что соответствующие им линии нулевого порядка не имеют общих точек ни между собою, ни с оставшимися линиями сети.

15. Посмотрим, какими свойствами обладает та часть арифметической сети, которая остается после отделения тех общих уникурсальных кривых, существование которых мы обнаружили. Пусть в арифметической сети S, определяемой p основными точками с кратностями r_1, r_2... r_p есть общая выделившаяся кривая порядка m с кратными точками порядков q_1, q_2... q_p. Тогда оставшиеся части кривых образуют новую сеть S', порядка $n'=n-m$ с кратными точками порядков r_1', r_2'... r'_p, при чем

$$r'_k=r_k-q_k\,.$$

$$(k=1,\ 2...p)$$

Числа r удовлетворяют уравнениям (1), (1').

$$\sum_k r_k^2=n^2-1 \tag{1}$$

$$\sum_k r_k=3\,(n-1)\,. \tag{2}$$

Далее, мы видели в § 14, что для выделившейся кривой $h=0$, $g=0$. Отсюда имеем

$$\sum_k q_k^2=m^2+1, \tag{25}$$

$$\sum_k q_k=3\,m-1\,. \tag{26}$$

Наконец, так как выделившаяся кривая встречается с оставшимися кривыми сети только в основных точках, то

$$\sum_k (r_k-q_k)\,q_k=(n-m)\,m\,. \tag{27}$$

Из уравнений (1), (25), (27) и из уравнений (2), (26) находим

$$\sum_k (r_k-q_k)^2=(n-m)^2-2,\ \ \sum_k (r_k-q_k)=3\,(n-m)-2 \tag{28}$$

или

$$\sum_k r'^2_k=n'^2-2,\ \ \sum_k r'_k=3\,n'-2.$$

Отсюда, заменяя в формулах (23), (24) n через n' и q_k через r'_k, видим, что для оставшейся сети S' ступень h' и род g' определяются из уравнений

$$h'+g'=3,\ h'-g'=1,$$

откуда

$$h'=2,\ g'=1. \tag{29}$$

Это показывает, что оставшиеся кривые образуют попрежнему сеть S' второй ступени; но это уже не уникурсальные кривые, а кривые первого рода. Тогда как в Кремоновой сети две кривые пересекаются вне основных точек только в одной точке, формулы (28) показывают, что кривые сети S' пересекаются в двух точках, и потому такая сеть не может давать однозначного преобразования плоскости. Если бы мы имели в сети не одну, а a различных выделившихся кривых, то таким же образом убедились бы, что оставшаяся сеть была бы также второй ступени, но состояла бы из кривых a-го рода.

В виде примера рассмотрим сеть кривых 8-го порядка, имеющую 2 центра 4-го порядка, 3 центра 3-го и 4 центра 1-го порядка; эти числа удовлетворяют Кремоновым уравнениям (1), (2). Кривая 2-го порядка, проходящая через 5 высших центров, пересекает все кривые сети в $2\cdot4+3\cdot3=2\cdot8+1$ точках: следовательно, эта кривая 2-го порядка должна входить, как часть, во все кривые сети. Оставшаяся сеть будет состоять из кривых 6-го порядка, имеющих 2 центра 3-го порядка, 3 центра 2-го и 4 центра 1 порядка; это кривые первого рода.

Положим теперь, что в данной сети выделяется μ-кратная кривая m-го порядка. Тогда мы будем иметь

$$n'=n-\mu m,\quad r'_k=r_k-\mu q_k.$$

и предыдущие формулы дадут

$$\sum_k (r_k-\mu q_k)^2=(n-\mu m)^2-2+(\mu-1)^2,$$

$$\sum_k (r_k-\mu q_k)=3(n-\mu m)-2+(\mu-1),$$

или

$$\sum_k r'^2_k=n'^2-2+(\mu-1)^2,\quad \sum_k r'_k=3n'-2+(\mu-1)\,;$$

отсюда имеем

$$h'+g'=3-(\mu-1)^2,\ h'-g'=1-(\mu-1)$$

и, наконец,

$$h'=2-\tfrac{1}{2}\mu(\mu-1),\quad g'=1-\tfrac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2).$$

Таким образом, при наличности кратных выпадающих ветвей изменяется не только род остающихся кривых сети, но и самая ступень. При $\mu=2$ мы получаем $h'=1$, т.-е. сеть обращается в пучок; при $\mu>2$ h' получает отрицательное значение, и сеть становится невозможною. Если мы имеем две выделяющихся двукратных ветви, то h' обращается в нуль, и мы получаем не семейство оставшихся кривых, а одну оставшуюся кривую. Из этого видно, что не может быть кривой, кратные точки которой удовлетворяли бы Кремоновым уравнениям (1), (2), и которая содержала бы в себе кривую низшего порядка с кратностью большею двух или более чем две двукратных кривых.

16. Если мы имеем арифметическую сеть, то, как мы видели, понижая ее порядок последовательными квадратичными преобразованиями, мы необходимо придем к такой сети, в которой один или несколько центров будут отрицательной кратности. Может случиться, что порядок сети, выделившейся после отделения этих линий, может быть понижаем еще дальше, пока мы не дойдем до такой сети, в которой сумма кратностей трех высших центров будет не выше порядка сети, после чего дальнейшее понижение порядка сети сделается невозможным.

Мы покажем, что если сеть содержит только одну отделяющуюся кривую, то эту сеть можно превратить в сеть кривых 3-го порядка с одною точкою кратности — 1. Предположим, что мы понизили порядок настолько, что получили сеть с одною точкою кратности — 1. Пусть будет порядок сети n, а кратности остальных основных точек $r_1, r_2 \ . \ . \ . \ r_{p-1}$. Тогда наша сеть будет состоять из одной линии нулевого порядка и из сети кривых n-го порядка, имеющей основными точками все основные точки первой сети, кроме последней точки кратности — 1, полагая $r_p = -1$. Перенося в формулах (1), (2) члены r_p^2 и r_p в правую часть получим

$$\sum_{k=1}^{k=p-1} r_k^2 = n^2 - 2, \quad \sum_{k=1}^{k=p-1} r_k = 3n - 2.$$

Применим к этим уравнениям преобразование, предложенное мною в т. 29 «Математического Сборника». Мы только увеличим левую часть первого равенства, если во всех слагаемых, начиная с третьего, заменим квадраты r_k^2 произведениями $r_3 r_k$. Таким образом получим

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3(r_3 + r_4 + \ . \ . \ . + r_{p-1}) \geqq n^2 - 2 .$$

Заменяя сумму, стоящую во второй скобке, из второго равенства, будем иметь

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3(3n - 2 - r_1 - r_2) \geqq n^2 - 2,$$

или

$$r_1(r_1 - r_3) + r_2(r_2 - r_3) + 3r_3(n-1) \geqq n^2 - 2 - r_3.$$

Так как кратности двух высших точек r_1, r_2, не могут быть больше $n - 1$, то, заменяя их через $n - 1$, мы получим

$$(n-1)(r_1 + r_2 + r_3) \geqq n^2 - 2 - r_3,$$

или

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq n + 1 - \frac{r_3 + 1}{n - 1}.$$

Если сумма трех высших кратностей больше порядка n сети, то, приняв соответствующие центры за основные точки квадратичного преобразования, мы понизим порядок сети. Следовательно, чтобы порядок сети был самый малый, должно быть

$$n + 1 - \frac{r_3 + 1}{n - 1} \leqq n,$$

откуда

$$r_3 \geqq n - 2;$$

с другой стороны

$$r_1 + r_2 + r_3 = n;$$

и так как $r_3 \leqq r_2 \leqq r_1$, то

$$r_3 \leqq \frac{n}{3}.$$

Таким образом имеем

$$\frac{n}{3} \geqq n-2$$

и отсюда

$$n \leqq 3.$$

Но при $n = 2$ уравнения дают

$$\sum_k r^2_k = 2, \quad \sum_k r_k = 4$$

и не имеют целых и положительных решений.

При $n = 3$ имеем

$$\sum_k r^2_k = 7, \quad \sum_k r_k = 7.$$

Отсюда видно, что все арифметические сети, содержащие одну выпадающую из всех кривых сети линию, получаются, как Кремоновы преобразования, сети кривых третьего порядка, имеющих 7 простых основных точек и одну основную точку кратности — 1. Так, сеть 8-го порядка, приведенная в § 15, получится из указанной сети 3-го порядка посредством Кремонова преобразования 3-го порядка, у которого двойная точка помещена в точке кратности — 1 сети 3-го порядка, три простые точки в трех простых точках этой сети, а четвертая — вне сети.

Если мы применим тот же способ к исследованию сетей, содержащих две выделяющихся уникурсальных кривых, то мы должны будем рассмотреть сети, имеющие два центра кратности — 1. Тогда уравнения (29)заменятся следующими:

$$\sum_{k=1}^{k=p-2} r^2_k = n^2 - 3, \quad \sum_{k=1}^{k=p-2} r_k = 3n - 1. \tag{30}$$

Прилагая сюда предыдущие преобразования, получим последовательно

$$r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3 (3n - 1 - r_1 - r_2) \geqq n^2 - 3,$$

$$r_1 (r_1 - r_3) + r_2 (r_2 - r_3) + 3 r_3 (n-1) \geqq n^2 - 3 - 2 r_3,$$

$$(n-1)(r_1 + r_2 + r_3) \geqq n^2 - 3 - 2 r_3,$$

$$r_1 + r_2 + r_3 \geqq n + 1 - 2\frac{r_3 + 1}{n-1}.$$

Отсюда заключаем, что для искомых сетей должно быть

$$2\frac{r_3 + 1}{n-1} \geqq 1,$$

и следовательно

$$r_3 \geqq 2n - 3.$$

Но, с другой стороны,

$$r_3 \leqq \frac{n}{3};$$

отсюда находим

$$2n - 3 \leqq \frac{n}{3}$$

и, наконец,

$$n \leqq 9.$$

Дальнейшее исследование показывает, что возможны только две сети, удовлетворяющие всем поставленным условиям, именно:

$$1)\ n=4,\quad r_1=2_1,\ r_2=r_3=\ldots=r_{10}=1,\ r_{11}=r_{12}=-1,$$

$$2)\ n=6,\quad r_1=r_2=\ldots=r_8=2_1,\ r_9=1,\ r_{10}=r_{11}=-1.$$

Таким образом, тогда как все Кремоновы сети получаются Кремоновыми преобразованиями из одной сети, и точно так же все арифметические сети с одною выделяющеюся кривой получаются Кремоновыми преобразованиями из одной сети,—арифметические сети с двумя выделяющимися кривыми образуют две неприводимые группы, получающиеся из двух различных основных сетей.

17. Если мы имеем „арифметическую" сеть с одною выделяющеюся кривою, то порядок этой кривой для данной сети не может быть выше некоторого предела. Пусть сеть m-го порядка получается из основной сети 3-го порядка (§ 16) помощью Кремонова преобразования n-го порядка с основными точками кратностей $r_1,\ r_2\ldots r_p$. Порядок m, выделяющейся кривой будет равен кратности той основной точки Кремонова преобразования, которая совпадает с точкою кратности — 1 сети 3-го порядка; в самом деле, положим, что основная точка Кремонова преобразования, которая совпадает с точкою кратности — 1, имеет кратность r_1; тогда, полагая в формуле (11) § 9 $m=0,\ q_1=-1,\ q_2=q_3=\ldots=q_p=0$, получим $m'=r_1$. С другой стороны, если $r_2,\ r_3\ldots r_7$ суть кратности основных точек Кремонова преобразования, совпадающих с 7-ю основными точками сети 3-го порядка, то та же формула (11) даст

$$m=3n+r_1-(r_2+r_3+\ .\ .\ .\ +r_7);$$

но мы имеем по уравнению (2)

$$3n=\sum_k r_k+3;$$

следовательно

$$m\geqq 2r_1+3,$$

а так как выше мы имели $m'=r_1$, то отсюда следует

$$m'\leqq\frac{m-3}{2}.$$

Таков высший предел порядка выпадающей кривой в арифметической сети m-го порядка. Если бы выпадающих кривых было несколько, то мы получили бы тот же самый предел для суммы их порядков.

Sur la théorie des transformations Crémoniennes.

B. Mlodzieiowski.

(Resumé)

Si l'on a $p+1$ nombres n, r_1, $r_2 \ldots r_p$ satisfaisant aux équations (1), ces nombres sont appelés solutions géométriques de ces équations lorsqu'elles déterminent un réseau homaloïde de courbes d'ordre n. Ils s'appellent solutions arithmétiques, lorsqu'il ne déterminent pas un tel réseau; dans ce cas ils déterminent une famille de courbes possédant une partie commune. Dans le premier cas ce nombres déterminent un second système de nombres s_1, $s_2 \ldots s_p$ satisfaisant auxs mêmes équations, et relatifs à un second réseau homaloïde, conjugué au premier. Ces deux réseaux définissent une transformation Crémonienne du n-ième ordre entre deux plans. Dans le premier plan les r_k définissent les multiplicités des courbes du réseau aux points fondamentaux tandis que les s_l sont les ordres des lignes fondamentales du réseau. Dans le second plan, inversement, les s_l sont les multiplicités des points fondamentaux et les r_k les ordres des lignes fondamentales. A chaque point A_k de multiplicité r_k du premier plan correspond dans le second plan une ligne fondamentale a_k d'ordre r_k et réciproquement, à chaque point fondamental B_l du second plan de multiplicité s_l correspond dans le premier plan une ligne fondamentale d'ordre s_l. Chaque courbe fondamentale du premier plan b_l a au point A_k un point de multiplicité α_{kl} et la même multiplicité α_{kl} appartient dans le second plan à la courbe a_k par rapport au point B_l. Les nombres n, p_k, s_l, α_{kl} satisfont aux relations (1)—(6).

Clebsch a montré que le déterminant $|\alpha_{kl}|$ est égal à $\pm n$. Cette proposition ainsi qu'un grand nombre de propositions analogues peut être déduit de ce que le déterminant M_0 (8) d'ordre $p+1$ est un déterminant orthogonal, d'où il suit que ses mineurs sont égaux en valeur absolue à leurs éléments correspondants. Les éléments du déterminant (8) ne peuvent pas être exprimés par la méthode de Cayley, parce que ce déterminant s'annule quand on ajoute $+1$ aux éléments de la diagonale principale. Les éléments du déterminant (8) sont en partie imaginaires; on peut le transformer en un autre déterminant d'ordre p, dont tous les éléments sont réels, ce déterminant est

$$\left| \alpha_{kl} - \frac{r_k s_l}{n \pm 1} \right|$$

Dans l'étude des transformations Crémoniennes il est souvent avantageux, comme l'a remarqué Roberts, de considérer les points comme des lignes d'ordre zéro et d'exprimer par les mêmes formules les transformations des lignes et celles des points. Pour que les formules soient applicables de cette manière, il est nécessaire d'admettre que la ligne d'ordre zéro a au point qu'elle représente un point multiple de multiplicité -1. Ce fait, purement formel, pourrait être completé en admettant

en même temps un des points infiniment voisins, et par suite l'ordre de l'intersection de deux lignes serait bien $-1+1=0$, égal au produit des ordres des deux lignes.

Il parait que M. Montesano eut le premier l'heureuse idée d'introduire dans les réseaux Crémoniens des points fondamentaux complémentaires de multiplicité nulle. A ces points correspondent dans le second plan des lignes d'ordre nul, dont le point multiple est celui que dérive du point correspondant du premier plan au moyen de la transformation Crémonienne considérée. Pour chacune de ces lignes, tous les nombres α_{kl} sont nuls à l'exception du nombre $\alpha_{kk}=-1$, qui correspond au point de l'autre plan qui se rattache à cette ligne. L'introduction dans les réseaux Crémoniens de ces points fondamentaux de multiplicité nulle et des lignes correspondantes d'ordre nul permet de mettre sous une forme très simple les résultats de la composition de plusieurs transformations Crémoniennes. Si l'on a une transformation Crémonienne $C(n, r_k, s_l, \alpha_{kl})$ entre les plans P, Q et une autre transformation Crémonienne $C'(n', r'_k, s'_l, \alpha'_{kl})$ entre les plans Q, R, ces deux transformations établissent entre les plans P, R une nouvelle transformation Crémonienne $C''(n'', r''_k, s''_l, \alpha''_{kl})$. En introduisant des points et des lignes fondamentales auxiliaires on peut faire que les deux réseaux situés dans le plan Q aient les mêmes points fondamentaux. Alors les deux transformations Crémoniennes C, C' auront le même nombre des points fondamentaux, et la transformation C'' sera définie par les formules (13)—(16). De ces formules la (16) n'a pas été donnée jusqu'ici, probablement parce que on s'est peu occupé des nombres α_{kl}.

Les formules (13)—(16) permettent de mettre sous une forme très simple le relation entre la transformation composée C'' et les transformations C, C'. Multiplions par -1 la première colonne et les p dernières lignes du déterminant M (8). Nous obtiendrons ainsi le déterminant M (17). Si l'on désigne par M, M', M'' les expressions du déterminant M pour les transformations C, C', C'', l'on aura

$$M''=M.M'$$

en ayant soin de multiplier les lignes de M par les colonnes de M'.

Puisqu'on peut ajouter à chaque réseau Crémonien un nombre arbitraire de points fondamentaux d'ordre nul, il est évident qu' à chaque transformation Crémonienne peuvent correspondre différentes formes du déterminant M: ces formes peuvent se distinguer en outre par l'ordre des lignes et des colonnes, ce qui n'a pas d'importance pour le déterminant M en lui-même, mais devient essentiel quand on multiplie deux déterminants. Désignons par le symbole (C, M) la transformation C unie à une forme déterminée du déterminant correspondant M. Alors toutes les transformations (C, M) à p points fondamentaux formeront un groupe dont la génération est définie par la formule $M''=M.M'$. Ce groupe possède la transformation identique

$$\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 0 \, . \; . & . \; 0 \\ 0 & -1 & 0 \, . \; . & . \; 0 \\ 0 & 0 & -1 \, . \; . & . \; 0 \\ . & . & . \; . \; . & . \; . \\ 0, & 0, & 0 \; . \; . & -1 \end{array}$$

Le déterminant d'une transformation inverse s'obtient en interchangeant les lignes et les colonnes du déterminant primitif. Il est évident que les transformations à un nombre $p' < p$ de points fondamentaux forme un sous-groupe du groupe considéré.

On peut voir que ces groupes sont finies pour $p < 9$ et infinies pour $p \geq 9$.

Passons aux solutions arithmétiques des équations (1). Alors il n'existe pas de nombres s_i, α_{kl} satisfaisant aux équations (2)—(6), et les nombres r_k définissent bien encore une famille de lignes d'ordre n, mais ses lignes ne forment plus un réseau homaloïde. Toutes cettes lignes possèdent en commun une ou plusieurs lignes unicursales. Dans ce cas si nous formons au moyen des nombres r_k une famille de lignes et que nous en abaissions l'ordre au moyen d'un certain nombre de transformations quadratiques, nous arriverons finalement à un système de solutions des équations (1), où quelques-uns des nombres r_k deviennent négatifs. Cela montre que les lignes du système sont des lignes composées contenant toutes une ligne de degré nul. En exécutant les transformations inverses cette dernière ligne se transforme en une ligne unicursale.

Il peut arriver que cette décomposition puisse être poussée plus loin; alors les lignes du système auront en commun plusieurs lignes unicursales de différents ordres.

Toutes ces lignes ne se rencontrent entre elles et ne rencontrent les parties variables des lignes du système qu'aux points fondamentaux.

En étudiant les parties variables des courbes du système, à l'exclusion des parties communes qui viennent d'être signalées, on voit d'après les formules (29) que si les lignes du système ne contiennent qu' une partie commune, la dimension du système reste égale à 2, c'est à dire que le système reste un réseau, mais qu'il n'est plus composé des courbes unicursales, mais des courbes du genre un. S'il y avait dans le système plusieurs courbes communes, le genre des courbes restantes s'éleverait en conséquence. Si les courbes communes sont multiples, alors non seulement le genre des courbes change, mais la dimension du réseau change aussi et il se transforme en faisceau et même en un nombre fini de lignes. En désignant par μ la multiplicité de la courbe commune, par h' la dimension du système restant, par g' le genre des courbes restantes, l'on a

$$h' = 2 - \tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1), \quad g' = 1 - \tfrac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - 2).$$

On voit que la famille des courbes ne peut pas contenir de lignes communes de multiplicité supérieure à deux et qu'elle ne peut pas contenir plus d'une ligne commune double. Cela ne signifie pas que les équations (1) (2) ne puissent pas avoir d'autres solutions arithmétiques, mais ces solutions n'ont aucune signification géométrique.

Si la famille des lignes satisfaisant aux équations Crémoniennes (1) (1') ne contient qu'une ligne commune, cette famille peut toujours être transformée en une famille de courbes du 4-ème ordre ayant en commun 2 points doubles et 6 points simples, et en une droite passant par les deux points doubles.

De même, chaque famille satisfaisant aux mêmes équations et contenant deux lignes communes peut être transformée en l'une des deux formes suivantes: en une famille de courbes du 7-ème ordre avec un point commun quadruple, deux triples, un double et 7 simples avec deux droites passant chacune par le point quadruple et un point triple, ou bien en une famille de courbes du 11-ème ordre avec un point quintuple deux quadruples et 8 doubles, avec deux droites passant chacune par le point quintuple et par l'un des points quadruples.

Si l'on a une famille arithmétique d'ordre m n'ayant qu'une courbe commune l'ordre de cette courbe ne pourra dépasser $\frac{m-3}{2}$.

К таблицам Кремоновых чисел первых 21 порядка.

Б. К. Млодзеевский.

Как известно, всякое Кремоново преобразование между двумя плоскостями P, Q определяется, если в каждой плоскости даны определенные сети кривых, которым в другой плоскости соответствует сеть прямых линий. Это—так называемые **Кремоновы сети**. Когда дана Кремонова сеть на одной из двух плоскостей, то этим вполне определен характер Кремонова преобразования; чтобы окончательно определить самое преобразование, нужно только еще дать на обеих плоскостях четыре пары соответствующих точек. Вместе с Кремоновою сетью на первой плоскости устанавливается и на второй плоскости другая Кремонова сеть, кривые которой соответствуют прямым линиям первой плоскости, и которая называется сетью **сопряженною** первой сети; очевидно, что сопряженность двух Кремоновых сетей взаимна. Каждая Кремонова сеть характеризуется кратностями ее кривых в ее основных точках, или, короче, кратностями ее основных точек. Числа, выражающие эти кратности, называются **Кремоновыми числами** данной сети. Если нам даны Кремоновы числа r_1, $r_2 \dots r_p$, соответствующие p основным точкам Кремоновой сети, то этим вполне определяется характер этой сети; вместе с тем определяются и числа k, l, определяющие кратность каждой основной кривой b_l этой сети в каждой основной точке A_k. Если в первой сети на плоскости P мы имеем p основных точек A_1, $A_2 \dots A_p$ с кратностями r_1, $r_2 \dots r_p$ и такое же число основных кривых b_1, $b_2 \dots b_p$ порядков s_1, $s_2 \dots s_p$, и если кривая b_l имеет в центре A_k кратную точку порядка α_{kl}, то, как показал Кремона, сеть, сопряженная данной и расположенная во второй плоскости, имеет p основных точек B_1, $B_2 \dots B_p$ с кратностями s_1, $s_2 \dots s_p$ и p основных кривых a_1, $a_2 \dots a_p$; при этом каждой основной точке A_k или B_l соответствует в другой плоскости основная кривая a_k или b_l, при чем порядок основной кривой всегда равен кратности соответствующей ей основной точки другой плоскости. Кроме того, основная кривая a_k второй сети имеет в основной точке B_l точку такой же кратности α_{kl}, какую кривая b_l первой сети имеет в основной точке A_k той же сети. Отсюда видно, что изыскание всех Кремоновых сетей данного порядка сводится прежде всего к нахождению всех систем Кремоновых чисел для различных сетей этого порядка и затем к установлению для каждой сети сети ей сопряженной.

Как было указано в моей статье „К теории Кремоновых преобразований“, числа $r_1 \dots r_p$, $s_1 \dots s_p$, характеризующие сеть, и порядок сети n должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=p} r_k^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{k=1}^{k=p} r_k = 3(n-1), \\ &\sum_{l=1}^{l=p} s_l^2 = n^2 - 1, \quad \sum_{l=1}^{l=p} s_l = 3(n-1). \end{aligned} \qquad (1).$$

Таким образом для определения всех Кремоновых сетей n-го порядка мы прежде всего должны решить в целых положительных числах систему уравнений (1).

Однако не всякое решение этих уравнений дает Кремонову сеть: некоторые из этих решений соответствуют распадающимся кривым, не образующим Кремоновой сети, как это было указано в предыдущей статье. Таким образом система (1) имеет кроме „геометрических" решений, дающих Кремоновы сети, еще решения „арифметические", не дающие таких сетей; эти названия принадлежат Jonquières (Giornale di Matematiche, t. 24, 1886). Поэтому, найдя все целые решения уравнений (1) для данного n, мы должны еще затем узнать, которые из этих решений дают Кремоновы сети. Такой способ изыскания Кремоновых сетей требует много лишних вычислений, так как в нем мы рядом с нужными решениями получаем и много посторонних. Вследствие этого такой способ нахождения Кремоновых преобразований удобен только в простейших случаях: так, им пользовался сам Кремона (Giornale di Matematiche, t. 3, 1865) для определения сетей первых десяти порядков. Jonquières (Giornale di Matematiche, t. 24, 1886) дал способ получать из решений уравнений для данного n решения для данного $n' > n$. Его способ очень сложен, и хотя он сравнительно проще для $n' = n + 1$, но и в этом случае он требует довольно больших вычислений. Кроме того, способ Jonquières лишен того единственного преимущества, которое могло бы заставить предпочесть непосредственное решение уравнений тем более удобным приемам, которые будут указаны ниже; в этом способе каждое решение получается только на основании других решений, ранее известных и соответствующих меньшим значениям числа n. Сам Jonquières применил свой метод к нахождению Кремоновых преобразований 12-го и 13-го порядка. Столь же сложным является и метод Ruffini (Memorie dell'Accademia di Bologna, Ser. 3 t. 8, 1877; t. 9, 1878).

Несмотря на указанные недостатки, я все же пользовался методом непосредственного решения уравнений (1), как средством проверки тех вычислений, которые я производил другим, указанным ниже, более удобным способом. Прием, которым я при этом пользовался, близок к методу Ruffini, но проще его. Вот в чем состоит этот прием. Уравнения (1) можно представить в другом виде следующим образом. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ будут числа основных точек сети, имеющих соответственные кратности $1, 2 \ldots n-1$, при чем некоторые из этих чисел могут быть равны нулю. Тогда уравнения (1) примут следующий вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 + \ldots + (n-1)^2\alpha_{n-1} &= n^2 - 1 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \ldots + (n-1)\alpha_{n-1} &= 3(n-1) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Приступая к решению уравнений (2), мы прежде всего можем устранить те решения, которые явно не являются „геометрическими", так как соответствуют распадающимся кривым. Это те решения, в которых сумма двух высших кратностей больше n, или сумма пяти высших кратностей больше $2n$, и, вообще, те решения, в которых высшая кратность, умноженная на $m-1$ и сложенная с кратностями следующих $2m$ старших центров дает в сумме число, большее mn. Действительно, в этом случае мы можем провести через эти $2m+1$ точек кривую m-го порядка, имеющую в центре высшей кратности $m-1$-кратную точку—кривую Jonquières, или изологическую,—и такая кривая имела бы со всеми кривыми сети более, нежели mn общих точек, т.-е. входила бы в эти кривые, как часть. Кроме этих не „геометрических" решений существуют и другие; но, по крайней мере, для n, не превышающего 22, они немногочисленны и легко устранимы постепенным понижением порядка n при помощи квадратичных преобразований, как это будет указано ниже.

Прежде чем перейти к решению уравнений (2), изменим несколько обозначения. Распределим, как выше, все основные точки $A_1, A_2 \ldots A_p$ нашей Кремоновой сети в группы, соединяя в одну группу те точки, в которых все основные кривые этой сети имеют точки одинаковой кратности. Обозначим через α_k число основных точек кратности k. Представим уравнения (2) в виде

$$\sum_1^{n-1} k^2 \alpha_k = n^2 - 1; \quad \sum_1^{n-1} k\, \alpha_k = 3(n-1) \tag{3}$$

Обратимся к решению этих уравнений в числах целых и положительных. Положим, что мы уже нашли значения неизвестных $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \ldots \alpha_{m+1}$. Внося эти значения в уравнения (3) и перенося найденные члены в правую часть, получим

$$\sum_1^{m} k^2 \alpha_k = n^2 - 1 - \sum_{m+1}^{n-1} k^2 \alpha_k, \qquad \sum_1^{m} k\, \alpha_k = 3(n-1) - \sum_{m+1}^{n-1} k\, \alpha_k .$$

Полагая здесь

$$n^2 - 1 - \sum_{m+1}^{n-1} k^2 \alpha_k = a_m, \qquad 3(n-1) - \sum_{m+1}^{n-1} k\, \alpha_k = b_m, \tag{4}$$

будем иметь

$$\sum_1^{m} k^2 \alpha_k = a_m, \qquad \sum_1^{m} k\, \alpha_k = b_m. \tag{5}$$

Так как в (5) указатель k имеет значения, заключающиеся между 0 и m, то отсюда следует

$$\sum_1^{m} k\, \alpha_k \leq \sum_1^{m} k^2 \alpha_k \leq m \sum_1^{m} k\, \alpha_k .$$

Поэтому уравнения (5) могут иметь целые положительные (или нулевые) решения только в том случае, если

$$b_m \leq a_m \leq m\, b_m. \tag{6}$$

Заменяя здесь m через $m-1$, будем иметь при $m > 1$

$$b_m - m\,\alpha_m \leq a_m - m^2 \alpha_m \leq (m-1)(b_m - m\,\alpha_m). \tag{7}$$

Отсюда находим два предела для α_m:

$$\frac{a_m - (m-1)\, b_m}{m} \leq \alpha_m \leq \frac{a_m - b_m}{m(m-1)}. \tag{8}$$

Эти неравенства будут совместимы, если a_m и b_m удовлетворяют неравенствам (6).

Пусть теперь, решая уравнения (3), мы нашли числа $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \ldots \alpha_{m+1}$. Тогда для α_m мы будем брать все значения, удовлетворяющие неравенствам (8). Для каждого из этих значений определяем $a_{m-1} = a_m - m^2 \alpha_m$ и $b_{m-1} = b_m - m\, \alpha_m$, затем находим таким же образом значения α_{m-1} и поступаем таким образом дальше, пока не дойдем до значений чисел a_k и b_k, равных нулю.

Отметим здесь один случай неравенств (6), которым мы будем пользоваться впоследствии. Пусть m обозначает наивысшую кратность основных точек для данной Кремоновой сети. Тогда a_m и b_m будут равны соответственно $n^2 - 1$ и $3(n-1)$, и мы получим из второго неравенства (6)

$$m \geq \frac{n+1}{3}. \tag{9}$$

Это неравенство дает нижний предел наибольшей кратности основных точек для каждой Кремоновой сети.

Изложенный здесь метод может показаться сложным: на самом деле, при некотором навыке, он довольно скоро приводит к результату.

Как было указано выше, методы, основанные на непосредственном решении уравнений (3), имеют тот существенный недостаток, что рядом с „геометрическими“ решениями, приводящими к Кремоновым сетям, они дают и решения „арифметические“, посторонние для нашей задачи. Поэтому, при нахождении Кремоновых сетей более высоких порядков, должна была возникнуть потребность в приемах, устраняющих такие посторонние решения. Насколько мне известно, первый шаг в этом направлении сделан Montesano (Rendiconti dell' Accademia di Napoli (3), t. XI, 1905). Montesano распределяет гомалоидические (Кремоновы) сети не по их порядкам, а по их классам, или указателям, при чем под указателем h сети разумеется разность $n-r$ между порядком сети и кратностью его высшей основной точки. Метод Montesano очень остроумен и основан на последовательном применении преобразований Jonquières'a, или изологических, т.-е. таких Кремоновых преобразований n-го порядка, в которых Кремоновы сети имеют один центр порядка $n-1$ и $2(n-1)$ центров первого порядка. Montesano сводит задачу об определении всех сетей данного класса к определению некоторых особых Кремоновых сетей, которые он называет **простыми**: это такие сети, в которых есть не более двух центров, сумма кратностей которых равна порядку n сети. В свою очередь определение простых сетей приводится к нахождению сетей первичных. Сетью первичной с указателем h в одной из основных точек A_1 называется такая сеть, что в обозначениях равенств (1) 1) $r_1=n-h$, 2) r_k $(k>1)$ равно h или $r_k<\frac{h}{2}$. Если A_1 не есть основная точка в собственном смысле, то мы ее принимаем за основную точку нулевой кратности и тогда $h=n$. Cremona в своей первой работе нашел все сети четырех первых классов. В мемуаре Montesano даны все простые сети первых семи классов и все первичные сети первых девяти классов.

Метод Montesano имеет то достоинство, что он дает прямым вычислением только геометрические решения уравнений, но самые вычисления довольно сложны и получающиеся сети располагаются не в естественном порядке их степеней. Поэтому я предпринял вычисление Кремоновых сетей первых 22 порядка по другому способу, основанному на замечании Clifford'a о разложимости каждого Кремонова преобразования на квадратичные. Этот способ позволяет весьма легко вычислять Кремоновы сети n-го порядка, зная сети всех низших порядков и пользуясь одним замечанием Montesano, сделанным в его упомянутом выше мемуаре. Когда моя работа была уже закончена, я познакомился с работою Montesano I gruppi Cremoniani di numeri (Atti dell'Accademia di Napoli (2) t. 15, 1914), где принятый мною метод применяется к изучению различных свойств Кремоновых сетей. Вместе с тем в этой статье Montesano упоминает, что в 1908—10 гг. **Tummarello** и **Marrazzo** вычислили таблицы Кремоновых сетей, первый— 14 и 15 порядков, второй—16—23 порядков. Так как их работы остались неопубликованными, то я счел полезным напечатать составленные мною таблицы, тем более, что они содержат некоторые дополнительные данные, о которых я скажу ниже.

Пусть мы имеем Кремонову сеть S_n порядка n с основными точками A_1, $A_2 \ldots A_\rho$, представляющими для всех кривых сети кратные точки порядков

$r_1, r_2 \ldots r_\rho$. В случае надобности, мы будем причислять к основным точкам и определенные обыкновенные точки той плоскости, в которой расположена сеть S_n, не являющиеся основными точками в собственном смысле слова; когда это будет нужно, мы будем принимать каждую такую точку за основную точку с кратностью, равною нулю. Если мы подвергнем сеть S_n квадратичному преобразованию, поместив три центра последнего в основных точках A_i, A_k, A_l сети, то получим новую Кремонову сеть $S_{n'}$, при чем ее порядок и кратность сети в трех новых центрах определяется из формул

$$\left.\begin{aligned} n' &= 2n - (r_i + r_k + r_l), \\ r'_i &= n - (r_k + r_l), \\ r'_k &= n - (r_i + r_l), \\ r'_l &= n - (r_i + r_k), \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

или, полагая

$$\left.\begin{gathered} r_i + r_k + r_l - n = d \\ n' = n - d \\ r'_i = r_i - d,\ r'_k = r_k - d,\ r'_l = r_l - d \end{gathered}\right\} \qquad (11)$$

Остальные основные точки сети S_n, не являющиеся центрами указанного выше квадратичного преобразования, превращаются в основные точки новой сети $S_{n'}$ с прежнею кратностью. Таким образом

$$r'_q = r_q, \quad q \neq i, k, l.$$

Формулы (11) показывают, что если сумма указателей $r_i + r_k + r_l$ больше порядка сети n, то порядок преобразованной сети n' будет ниже первоначального порядка n. Известно, что в каждой Кремоновой сети есть по крайней мере одна группа из трех центров, кратности которых удовлетворяют условию

$$r_i + r_k + r_l > n. \qquad (12)$$

Действительно, еще Nöther и Rosanes заметили, что для трех основных точек высшей кратности всегда имеет место неравенство

$$r_1 + r_2 + r_3 > n. \qquad (13)$$

Наиболее простое доказательство этого основного предложения было дано мною в 29 томе „Математического Сборника". В своей статье „I gruppi Cremoniani di numeri" Montesano показал, что при $n > 2$ этим свойством обладает также и сумма $r_1 + r_2 + r_4$.

Таким образом, помещая центры квадратичного преобразования в каких-нибудь трех основных точках сети S_n, удовлетворяющих условию (12), мы получим сеть $S_{n'}$ более низкого порядка, при чем порядок новой сети будет тем ниже, чем больше сумма указателей $r_i + r_k + r_l$, и будет всего ниже, если мы поместим центры квадратичного преобразования в трех высших основных точках сети S_n. Подвергая полученную сеть $S_{n'}$ новому квадратичному преобразованию, мы можем еще понизить ее порядок и, таким образом, можем свести порядок Кремоновой сети с n-го до первого, т.-е. превратить данную сеть в сеть прямых линий. Так как каждой Кремоновой сети соответствует определенное Кремоново преобразование, которым эта сеть преобразуется в сеть прямых, то отсюда следует, что каждое Кремоново преобразование общего характера может быть разложено на ряд квадратичных преобразований. Очевидно, что если мы проделаем в обратном порядке те квадратичные преобразования, которыми сеть S_n превращается в сеть прямых линий, то мы вновь получим из сети прямых нашу сеть S_n. Отсюда мы получаем возможность строить Кремоновы сети высших порядков, зная Кремоновы сети низших порядков. Действительно, из формул (10) видно, что если

$$r_i + r_k + r_l < n,$$

и мы положим

$$n - r_i - r_k - r_l = \varepsilon, \tag{14}$$

то будем иметь

$$n' = n + \varepsilon,$$

$$r'_i = r_i + \varepsilon, \ \ r'_k = r_k + \varepsilon, \ \ r'_l = r_l + \varepsilon, \tag{15}$$

Таким образом, мы имеем следующий способ получения всех Кремоновых сетей данного порядка N, если известны все сети порядков $n < N$. Выбираем в каждой сети S_n три основных точки, кратности которых удовлетворяют условию

$$n - r_i - r_k - r_l = N - n,$$

или

$$r_i + r_k + r_l = 2n - N, \tag{16}$$

Принимая эти три точки за центры квадратичного преобразования, мы получим из сети S_n одну из искомых Кремоновых сетей порядка N.

Этот метод в том виде, как он здесь изложен, имеет тот недостаток, что в нем одна и та же сеть может получиться несколько раз из разных сетей низших порядков. Так, например, сеть восьмого порядка $S_8 = 1\,5,\ 3\,3,\ 2\,2,\ 3\,1$, имеющая одну основную точку кратности 5, три кратности 3, две кратности 2 и три кратности 1, может быть получена при помощи соответствующих квадратичных преобразований из следующих пяти сетей низших порядков:

$S_7 = 1\,5,\ 5\,2,\ 3\,1,\ S_7 = 1\,4,\ 3\,3,\ 5\,1,\ S_7 = 1\,4,\ 2\,3,\ 3\,2,\ 2\,1,\ S_6 = 3\,3,\ 1\,2,\ 4\,1$
$S_5 = 1\,3,\ 3\,2,\ 3\,1.$

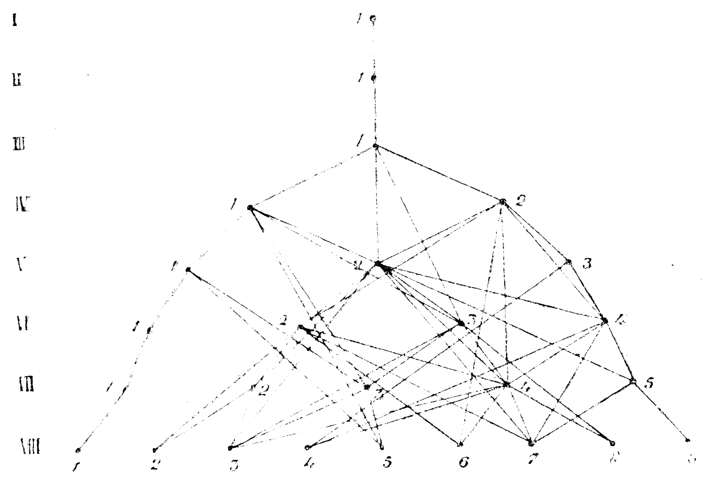
Для этого нужно брать центры этих квадратичных преобразований соответственно в основных точках с кратностями 2, 2, 2; 4, 1, 1; 4, 2, 0; 3, 1, 0; 2, 0, 0.

Чтобы избежать таких повторений, мы воспользуемся следующим замечанием, сделанным Montesano. Мы уже видели, что если мы подвергнем Кремонову сеть квадратическому преобразованию, поместив три его центра в трех ее основных точках высшей кратности, то мы получим одну вполне определенную сеть низшего порядка, при чем порядок этой сети будет самым низким из порядков всех сетей, получающихся из данной сети при помощи одного квадратичного преобразования. Обратно, будем искать Кремонову сеть низшего порядка, из которой двойная Кремонова сеть получается квадратичным преобразованием, при том условии, чтобы те три основные точки искомой сети, которые мы принимаем за центры квадратичного преобразования, превратились после преобразования в высшие основные точки данной сети высшего порядка; тогда такая сеть низшего порядка будет единственная. Таким образом при этом дополнительном условии каждой Кремоновой сети S_N будет соответствовать одна и только одна сеть низшего порядка S_n, из которой данная сеть получается при помощи одного квадратичного преобразования. Так, в приведенном выше примере основные точки пяти сетей, превращающихся в сеть S_8, обращаются, после преобразования, соответственно в точки кратностей 3, 3, 3; 5, 2, 2; 5, 3, 1; 5, 3, 2; 5, 3, 3. Мы видим, что только в последней сети S_5 основные точки кратностей 2, 0, 0, принятые за центры квадратичного преобразования, обращаются в центры наивысшей кратности сети S_8. Следуя Montesano, будем называть описанный здесь процесс получения сети высшего порядка S_{ν} из сети низшего порядка S_n, при котором три центра соответствующего квадратичного преобразования превращаются в три высших основных точки преобразованной сети,—деривацией, а три основных точки преобразуемой сети, принимаемые за центры квадратичного преобразования,—тройкою деривации. При этом сеть низшего порядка S_n называется начальною, а сеть высшего порядка—производною от S_n посредством данной тройки деривации.

Имея какую-нибудь сеть S_n, будем подвергать ее ряду последовательных дериваций. Мы получим ряд сетей.

$$S_n, \; S_{n_1}, \; S_{n_2} \cdots \quad n < n_1 < n_2 \cdots,$$

из которых каждая является производною от предыдущей. Такой ряд мы будем называть рядом Кремоновых сетей производных от сети S_n. Очевидно, что каждая Кремонова сеть будет входить в один, и только один такой ряд производных сетей от сети прямых линий S_1. Насколько замечание Montesano упрощает вычисление Кремоновых сетей, показывает чертеж 1. Здесь точками обозначены Кремоновы сети первых восьми порядков, при чем в каждой строке представлены сети одного и того же порядка, отмеченного сбоку, при каждой точке стоит нумер, соответствующий нумеру этой сети в помещенной ниже таблице Кремоновых чисел. Каждые две Кремоновых сети, могущие быть преобразованными одна в другую посредством одного квадратичного преобразования, соединены прямою линиею. Из чертежа видно, что почти каждая сеть этой таблицы может быть получена из нескольких сетей низших порядков; например, сети VII 4, VIII 3, VIII 7 могут быть получены каждая из пяти различных сетей. Чертеж 2



Черт. 1.

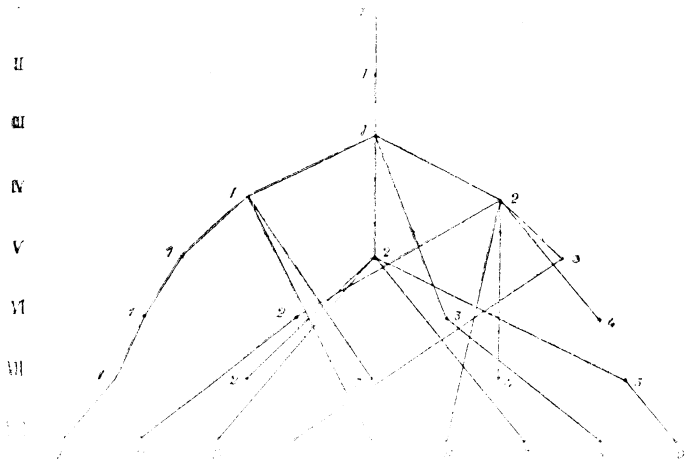
дает, по Montesano, связь между различными сетями, получающимися одна из другой посредством деривации. Здесь от каждой точки идет вверх одна и только одна прямая, соединяющая эту точку с другою, которая соответствует сети, являющейся по отношению к данной начальною. Так, из чертежа 2 видно, что сеть S_8 = VIII 3, принадлежит к следующему производному ряду I 1, II 1, III 1, V 2, VIII 3.

Найдем, при каких условиях три центра квадратичного преобразования, произведенного над данною сетью S_n, дают три высших основных точки новой сети S_N, т.-е. когда это квадратичное преобразование представляет деривацию сети S_N из сети S_n. Так как все остальные основные точки сети S_n сохраняют свою кратность и после квадратичного преобразования, то, обозначая кратность любой из этих основных точек через r_m и полагая, что кратности тех трех основных точек сети S_n, в которых находятся центры квадратичного преобразования, суть $r_i \geqq r_k \geqq r_l$, мы будем иметь условия

$$n - (r_i + r_k) \geqq r_m$$

или

$$r_m + r_i + r_k \leqq n.$$



Черт. 2.

Если в число центров A_i, A_k, A_l не входит основная точка высшей кратности A_1, то все эти условия равносильны одному

$$r_1 + r_i + r_k \leqq n\,. \quad (17)$$

Если же точка A_1 есть сама один из центров A_i, то это условие заменится следующим:

$$r_1 + r_2 + r_k \leqq n. \qquad (18)$$

Но это то же условие (17), при $r_i = r_2$. Следовательно, чтобы получить тройку деривации, в состав которой входит наивысшая основная точка A_1 сети S_n, нужно взять одну из троек деривации, содержащих вторую по старшинству основную точку A_2 и заменить в ней A_2 через A_1. Легко видеть, что не может быть такой тройки деривации, которая содержала бы две высших основных точки A_1, A_2, так как мы имеем

$$r_1 + r_2 + r_3 > n.$$

Так как $r_1 > \frac{n}{3}$, то из последних формул следует, что если A_1 не входит в число центров квадратичного преобразования, то необходимо

$$r_i + r_k < \frac{2n}{3}; \qquad (19)$$

если же A_1 входит в это число, то

$$r_k \leqq n - (r_1 + r_2). \qquad (20)$$

Очевидно, что если в тройки деривации входят основные точки нулевой кратности сети S_n, то такие точки превращаются в сети S_N в основные точки в собственном смысле: таким образом, число основных точек в новой сети увеличивается на столько единиц, сколько точек нулевой кратности входило в состав тройки деривации. Если все три центра были точками нулевой кратности, то порядок новой сети N будет вдвое больше первоначального порядка n, и число основных точек сети увеличится на три.

Такие тройки деривации, у которых по крайней мере два центра суть точки нулевой кратности сети S_n, называются по Montesano **обыкновенными тройками деривации**: в силу соотношения $r_1 + r_2 < n$ такие тройки существуют в каждой Кремоновой сети. Если же в тройку деривации входит не более одной основной точки нулевой кратности сети S_n, то такая тройка называется **особою**. Очевидно, что особые тройки возможны только в таких сетях, в которых

$$r_1 + r_{\rho-1} + r_\rho \leq n,$$

где $r_{\rho-1}$, r_ρ суть кратности двух низших основных точек сети S_n.

Чтобы показать самый способ вычисления, найдем все Кремоновы сети 9-го порядка, пользуясь таблицами сетей первых восьми порядков, напечатанными дальше.

Так как квадратичное преобразование увеличивает порядок сети не более, чем вдвое, то мы начинаем с сетей 5-го порядка. В этом случае $\varepsilon = 9 - 5 = 4$, и поэтому за центры квадратичного преобразования мы должны брать такие основные точки сети, сумма которых была бы по формуле (16) $2n - N = n - \varepsilon = 1$. Система кратностей, удовлетворяющих этому условию, единственная — $1, 0, 0$. Применяя это преобразование к сетям 5-го порядка, получаем следующие сети 9-го порядка, прибавляя, согласно формулам (15) к кратностям выбранных центров по $\varepsilon = 4$ (см. таблицу сетей 5-го порядка):

1. $1\mathbf{5}$, $3\,4$, $7\,1$

2. $1\,5$, $2\,4$, $1\,\mathbf{3}$, $3\,2$, $2\,1$

Третья сеть не допускает рассматриваемого преобразования, так как в ней нет основной точки с кратностью единицы.

Переходим к сетям 6-го порядка. Здесь $\varepsilon = 9 - 6 = 3$, и сумма кратностей трех центров должна быть $2 \cdot 6 - 9 = 3$. Этому соответствуют три комбинации:

$$3, 0, 0 \; ; \; 2, 1, 0 \; ; \; 1, 1, 1.$$

На основании условий (17), (18), первое преобразование применимо: (a) вообще только к тем сетям, где $r_1 \leq 3$; если же (b) A_1 само входит в число центров, то сумма $r_1 + r_2$ должна быть ≤ 3. Кратности выбранных центров повышаются при преобразовании на $\varepsilon = 3$ единицы. Таким образом получаем из преобразования с центрами кратностей $3, 0, 0$ (см. таблицу сетей 6-го порядка):

3. $1\,\mathbf{6}$, $4\,\mathbf{3}$, $1\,2$, $4\,1$

4. $1\mathbf{6}$, $3\,\mathbf{3}$, $4\,2$, $1\,1$

Для второго преобразования с центрами $(2, 1, 0)$ имеем условие (a) или $r_1 + 2 + 1 \leq 6$, т.-е. $r_1 \leqq 3$, или же (b), при $r_1 = 2$, $2 + r_2 + 1 \leq 6$, т.-е. $r_2 \leq 3$. Это дает

3. $1\,\mathbf{5}$, $1\,\mathbf{4}$, $4\,\mathbf{3}$, $3\,1$

4. $1\,\mathbf{5}$, $1\,\mathbf{4}$, $3\,3$, $3\,2$

Для третьего преобразования с центрами $(1, 1, 1)$ мы имеем или (a) $r_1 + 1 + 1 \leq 6$, т.-е. $r_1 \leqq 4$, или (b) при $r_1 = 1$ мы должны иметь сеть с центрами кратности не выше единицы, что для сети 6-го порядка невозможно. Сети №№ 2 и 3 после преобразования дают

2. $\mathbf{4}\,\mathbf{4}$, $\mathbf{4}\,\mathbf{2}$

3. $3\,\mathbf{4}$, $3\,\mathbf{3}$, $1\,2$, $1\,1$.

Сеть № 4 не допускает преобразований этого вида, так как у нее нет трех основных точек с кратностью 1.

Для сетей 7-го порядка имеем

$$s = 9 - 7 = 2, \; d = r_1 + r_k + r_l = 2\cdot 7 - 9 = 5.$$

Если (a) центр A не входит в число трех центров квадратичного преобразования, то согласно формуле (19) имеем

$$r_l + r_k \leqq \frac{14}{3} < 5.$$

Соответствующие комбинации будут

4, 1, 0 ; 3, 1, 1 ; 2, 2, 1.

Для первого преобразования имеем условие: $r_1 + 4 + 1 \leqq 7$, т.-е. $r_1 \leqq 2$, для второго: $r_1 + 3 + 1 \leqq 7$, т.-е. $r_1 \leqq 3$ и для третьего $r_1 + 2 + 2 \leqq 7$, т.-е. также $r_1 \leqq 3$. Первая комбинация невозможна, так как высшая кратность $r_1 = 2$ меньше кратности $r_l = 4$. Второму и третьему условиям удовлетворяет только сеть № 5; но так как в этой сети нет основных точек с кратностью 1, то к этой сети соответствующие преобразования неприменимы. Если же (b) A_1 входит в число трех центров, то в №№ 1—4 мы имеем $r_1 + r_2 = 7$ и потому, согласно уравнению (20), имеем $r_k = 0$, а следовательно и $r_l = 0$. Так как сумма $r_1 + r_k + r_l$ должна равняться 5, то мы можем взять только комбинацию 5, 0, 0, сети № 2. Это дает

5. 1 7, 7 2, 3 1.

В сети № 5 имеем $r_1 + r_2 = 6$; поэтому возможно положить $r_k = 1$, $r_l = 0$. Но комбинация 4, 1, 0 к этой сети неприложима, так как в этой сети нет основных точек кратности 1.

Таким же образом убеждаемся, что сети 8-го порядка дают единственную допустимую комбинацию

7, 0, 0,

из которой получается сеть 9-го порядка

1 . 1 8, 16 1.

Самое вычисление располагается следующим образом.

9

5

100

1. 1 5 3 4 7 1

2 1 5 2 4 1 3 3 2 2 1

6

300

3. 1 6 4 3 1 2 4 1

4. 1 6 3 3 4 2 1 1

210

3. 1 5 1 4 4 3 3 1

4. 1 5 1 4 3 3 3 2

111

2. 4 4 4 2

Остается только расположить полученные 10 сетей в нормальном порядке, как это и сделано в таблицах.

Таким именно способом были мною вычислены все сети первых двадцати двух порядков. Вычисления производятся легко и быстро, и, как показала проверка, почти совершенно свободны от ошибок и пропусков.

Когда найдены все сети данного порядка, то затем каждой сети нужно найти ей сопряженную, т.-е. такую сеть, которая вместе с данною сетью определяет Кремоново преобразование, в котором сети прямых в одной из двух преобразуемых плоскостей соответствует в другой плоскости одна из двух сопряженных сетей. Решения уравнений (1) и (2), соответствующие двум сопряженным сетям, мы будем называть сопряженными решениями.

3. 34 33 12 11
7
500
2. 17 72 31
8
700
1. 18 161

Чтобы для данной Кремоновой сети найти ей сопряженную, я поступал следующим образом. Рассмотрим на плоскости данную Кремонову сеть и вместе с нею сеть прямых линий. Будем подвергать обе сети одновременно ряду последовательных Кремоновых преобразований, каждое из которых понижало бы все более и более порядок первоначальной Кремоновой сети. После ряда таких преобразований данная Кремонова сеть обратится в прямолинейную, а прямолинейная — в новую Кремонову сеть, которая и будет сопряжена с данною сетью. Самое понижение порядка сети всего проще было бы производить при помощи квадратичных преобразований; но процесс заканчивается быстрее при применении изологических преобразований, или преобразований Jonquières'a, т.-е. таких Кремоновых преобразований m-го порядка, в которых обе Кремоновы сети имеют по одной основной точке $(m-1)$-го порядка и по $2m-2$ простых точек.

Если преобразуемая сеть n-го порядка имеет в этих точках кратные точки порядков

$$r_1, r_2 \ldots r_{2m-1},$$

и если мы обозначим через h_1 указатель сети в точке A_1, т.-е. положим

$$h_1 = n - r_1,$$

то порядок преобразованной сети и кратность ее соответетствующих точек выразятся следующими формулами (см. мою предыдущую статью:

$$\left.\begin{array}{l}
n' = m\,n - (m-1)\,r_1 - \sum\limits_{2}^{2m-1} r_k = m\,h_1 + r_1 - \sum\limits_{2}^{2m-1} r_k, \\
r'_1 = (m-1)\,n - (m-2)\,r_1 - \sum\limits_{2}^{2m-1} r_k = (m-1)\,h_1 + r_1 - \sum\limits_{2}^{2m-1} r_k = n' - h_1 \\
r'_k = n - r_1 - r_k, \quad (k = 2,\ 3, \ldots, 2m-1) \\
r'_k = r_k, \qquad (k = 2m,\ 2m+1, \ldots, p)
\end{array}\right\} \quad (21)$$

или

$$\left.\begin{array}{l}
n' - r'_1 = n - r = h, \\
r'_k = h_1 - r_k, \quad (k = 2,\ 3, \ldots\ 2m-1) \\
r'_k = r_k, \qquad (k = 2m,\ 2m+1, \ldots\ p)
\end{array}\right\} \quad (22)$$

Последние формулы позволяют вычислить весьма просто $r'_1, r'_2 \ldots r'_{2m-1}$, по данным h_1, r_2, $r_3 \ldots r_{2m-1}$ и n.

Если мы заменим в (21) m через $m-1$, то получим, что порядок преобразованной сети будет

$$n'' = (m-1)\,n - (m-2)\,r_1 - \sum_{2}^{2m-3} r_k.$$

Поэтому

$$n' - n'' = h_1 - (r_{2m-2} + r_{2m-1}) = n - (r_1 + r_{2m-2} + r_{2m-1})$$

Отсюда видно, что порядок преобразованной сети будет увеличиваться с возрастанием m до тех пор, пока среди основных точек преобразованной сети, кроме A_1, будут оставаться пары точек, сумма кратностей которых была бы больше класса сети h, или сумма кратностей которых вместе с кратностью старшей точки была бы больше порядка сети. Например, в случае сети 20-го порядка $S_{20} =$ $= 1\ 13, 2\ 7, 5\ 5, 1\ 2, 3\ 1$, где $h = 20 - 13 = 7$, мы достигнем наибольшего понижения порядка сети при помощи изологического преобразования, если возьмем изологическое преобразование 4-го порядка, которого 3-кратная основная точка совпадает с 13-кратной основной точкой A_1 сети S_{20}, а 6 простых основных точек совпадают со следующими по старшинству основными точками $A_2 - A_7$ сети S_{20}, из которых две имеют кратность 7, а 4 — кратность 5. В самом деле, если бы мы вместо изологического преобразования 4-го порядка взяли преобразование 5-го порядка, то кратности двух новых присоединенных точек давали бы в сумме $5+2=7=h$. Поэтому повышение порядка изологического преобразования с 4 до 5 не вело бы за собою дальнейшего понижения порядка преобразованной сети. В нашем примере мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
n' &= 4\,.\,20 - 3\,.\,13 - 2\,.\,7 - 4\,.\,5 = 7,\\
a'_1 &= 7 - 7 = 0,\\
a'_2 &= a'_3 = 7 - 7 = 0,\\
a'_4 &= a'_5 = a'_6 = a'_7 = 7 - 5 = 2.
\end{aligned}
$$

Таким образом преобразованная сеть будет

$$S'_7 = 15.\,5^2.\,3^1.$$

Самое вычисление сопряженной сети располагается следующим образом:

	4		4		2		
20	1	7	4	2	12	1	20
1.13	1.0	1.0	1.3	1.0	1.3	1.0	1.3
2.7	2.0	2.0	2.1	2.0	2.1	2.0	2.1
5.5	5.0	4.2	4.1	4.0	4.3	4.0	4.3
		1.5	1.0	1.0	1.8	1.0	1.8
1.2	1.0	1.2	1.0	1.0	1.4	1.0	1.4
3.1	3.0	3.1	3.0	1.1	1.4	1.0	1.12
				2.1	2.0	2.0	2.8

Первые два столбца представляют числа кратности основных точек для сети 20-го порядка и кратности тех же точек для сети первого порядка, причем последние кратности все равны нулю. Затем мы подвергаем обе сети одновременно изологическому преобразованию четвертого порядка, помещая центры этого преобразования в семи высших основных точках сети S_{20}. Таким образом обе сети превращаются в сети соответственно 7-го и 4-го порядков, причем основные точки приобретают кратности, показанные в двух следующих столбцах. Так, точка 13-го порядка превращается в точку нулевого порядка, 2 точки 7-го — в 2 точки нулевого, четыре точки 5-го — в 4 точки 2-го порядка, а пятая точка пятого порядка, как не входившая в число основных точек изологического преобразования, сохраняет свой прежний порядок. Второе изологическое преобразование, также четвертого порядка, с центрами в высших основных точках полученной сети 7-го порядка, превращает обе сети в сети 2-го и 12-го порядков, и, наконец, третье квадратичное преобразование превращает последние сети в сети 1-го и 20-го порядков. Кратности основных точек этой последней сети показаны в последнем столбце таблицы. Из нее видно, что сеть, сопряженная данной сети

$$S_{20} = 1\ 13,\ 2\ 7,\ 5\ 5,\ 1\ 2,\ 3\ 1 \ (№\ 42),$$

есть

$$S_{20} = 1\ 12,\ 3\ 8,\ 1\ 4,\ 5\ 3,\ 2\ 1 \ (№\ 51).$$

Таким образом были мною определены характеристические числа и сопряженные сети всех сетей первых 22 порядков [1]. В печатаемых ниже таблицах рядом с нумером каждой Кремоновой сети указан и нумер сети ей сопряженной, чего, насколько мне известно, до сих пор не было сделано.

Как показал Кремона, два сопряженных решения уравнений (1) находятся в таком соотношении, что оба имеют одинаковое число основных точек и, кроме того, если мы основные точки одинаковой кратности соединим в группы, то каждой группе одной сети будет соответствовать в другой сети группа основных точек той же численности, но, может быть, другой кратности. В предыдущем примере мы имеем в каждой сети по пяти групп основных точек одинаковой кратности, численностью в одну, две, три и пять основных точек. Мы будем называть характеристическими числами Кремоновой сети числа основных точек сети, принадлежащих к каждой группе точек одинаковой кратности. В нашем примере обе сети имеют характеристические числа 1, 1, 2, 3, 5.

Из сказанного следует, что если среди Кремоновых чисел данного порядка или, что то же, среди геометрических решений уравнений (1) при данном n есть только одно решение, обладающее данными характеристическими числами, то сопряженное ей решение будет такого же характера, т.-е. будет обладать таким же числом основных точек той же кратности; если же среди решений данного порядка есть два или более различных решений, обладающих одинаковыми характеристическими числами, то каждая такая сеть может быть сопряжена или сама себе или же другому решению, но с теми же характеристическими числами. Так, среди решений 12-го порядка с характеристическими числами 1, 3, 3, 4

$$1\ 8,\ 4\ 4,\ 3\ 2,\ 3\ 1\ (№\ 6),\quad 3\ 6,\ 3\ 3,\ 1\ 2,\ 4\ 1\ (№\ 17),$$

$$1\ 7,\ 3\ 5,\ 4\ 2,\ 3\ 1\ (№\ 9),\quad 3\ 6,\ 1\ 4,\ 4\ 2,\ 3\ 1\ (№\ 16),$$

два верхних сопряжены между собою, тогда как каждое из двух нижних сопряжено само себе. Другими словами, Кремоновой сети 12-го порядка, соответствующей первому верхнему решению, сопряжена сеть, соответствующая второму решению, тогда как сеть, соответствующая одному из двух нижних решений, сопряжена сети, соответствующей тому же решению.

По поводу этого примера следует заметить, что Montesano в статье „Sui quadri caratteristici delle corrispondenze birazionali piani" (Napoli. Rendiconti (3), t. 21) ошибочно полагает, что и два нижних решения сопряжены между собою. Приведенный здесь пример представляет частный случай следующей системы геометрических решений уравнений (1)

$$n = 4\,m.$$

1) $1,\ 4m-4;\ \ 2m-2,\ 4;\ 3,\ 2;\ 3,\ 1.$ 2) $3,\ 2m;\ 3,\ m;\ 1,\ m-1;\ 2m-2,\ 1.$
3) $1,\ 2m+1;\ 3,\ 2m-1;\ 2m-2,\ 2;\ 3,\ 1.$ 4) $3,\ 2m;\ 1,\ 2m-2;\ 2m-2,\ 2;\ 3,\ 1.$

[1] Печатаемые ниже таблицы содержат Кремоновы числа для сетей первых 21 порядков. Таблица чисел для 380 сетей 22-го порядка будет напечатана в одном из ближайших выпусков „Математического Сборника".

Все четыре решения имеют одинаковые характеристические числа 1, 3, 3, $2m-2$; но из них первое и второе сопряжены одно другому, тогда как третье и четвертое сопряжены самим себе.

Cayley (Proc. Lond. Math. Soc. vol. III, 1871), рассматривая решения уравнений (1) для сетей первых десяти порядков, заметил, что эти решения таковы, что или каждое из них обладает особою системою характеристических чисел и тогда такое решение, разумеется, сопряжено само себе, или одна и та же система характеристических чисел принадлежит двум, но не более, различным решениям и тогда эти два решения сопряжены одно другому. Cayley высказал предположение, что эти свойства решений уравнений (1) справедливы для сетей всех порядков. Однако, рассмотрение таблиц для сетей более высоких порядков показывает, что предположение Cayley неверно. Прежде всего можно заметить, что с возрастанием порядка сети число различных систем характеристических чисел возрастает значительно медленнее, чем число геометрических решений уравнений (1), вследствие чего, при больших значениях числа n, некоторым системам характеристических чисел соответствует не два, а три и больше различных решений. Прилагаемая таблица дает для различных значений n от 1 до 22: A) порядок сети, B) число различных геометрических решений уравнений (2), C) число различных систем характеристических чисел, D) число сетей, сопряженных самим себе.

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	1	1	1	2	3	4	5	9	10	17	19
C	1	1	1	2	3	3	4	7	7	11	13
D	1	1	1	2	3	2	3	5	4	5	7

(23)

A	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
B	29	34	51	63	88	102	152	171	242	285	380
C	15	21	29	32	36	46	54	61	75	78	90
D	9	10	11	11	14	18	16	21	32	27	24

Легко видеть, что два сопряженных решения, входящих в группу, которая содержит более одного решения, не всегда непременно различны между собою; некоторые из таких решений должны быть сопряжены сами себе. Так будет в тех случаях, когда группа содержит нечетное число решений, 3, 5 и т. д.; здесь, по крайней мере, одно решение должно быть сопряжено само себе. Но и для группы с четным числом решений такие случаи возможны. Именно, в пределах решений первых 21-го порядка мы имеем следующие случаи (см. таблицы) сетей сопряженных самим себе.

1) $n=12$ №№ 8, 19 (2-членная группа)
2) $n=12$ №№ 9, 16 (4-членная группа)
3) $n=16$ №№ 27, 46 (4-членная группа)

4) $n=18$ №№ 78,148 (4-членная группа)
5) $n=19$ №№ 140,167 (12-членная группа)
6) $n=20$ №№ 47,172 (2-членная группа)
7) $n=20$ №№ 82,127 (4-членная группа)
8) $n=20$ №№ 110,184 (6-членная группа)
9) $n=21$ №№ 235,281 (2-членная группа)
10) $n=21$ №№ 47, 74 (8-членная группа).

Сети 2), 3), 7) суть частные случаи приведенных выше общих решений для $n=4\ m$.

Каждая Кремонова сеть имеет, кроме основных точек, еще так называемые **основные кривые**. Это—уникурсальные кривые, которыя встречаются как с линиями сети, так и между собою только в основных точках сети. Число основных кривых в каждой Кремоновой сети равно числу ее основных точек, и их совокупность представляет не что иное, как Якобиеву кривую этой сети. Если мы имеем две сопряженных Кремоновы сети, то в определяемом ими Кремоновом преобразовании каждой основной точке одной плоскости соответствует определенная основная кривая другой плоскости, при чем порядок основной кривой равен кратности соответствующей основной точки на другой плоскости.

Главные свойства основных кривых были указаны еще Кремона. Впоследствии Bertini дополнил эти свойства и распространил их на более общие линейные системы алгебраических кривых.

Мы перечислим здесь главные свойства основных кривых, которые нам будут нужны в дальнейшем.

1. Каждая основная кривая пересекается со всеми кривыми сети только в основных точках.

2. Каждая основная кривая—уникурсальная.

3. Каждая основная кривая вполне определяется своими кратностями в основных точках сети.

4. Каждые две основные кривые пересекаются между собою только в основных точках.

5. Если кратность одной основной точки сети выше кратности другой основной точки, то каждая основная кривая имеет в первой точке кратность большую или равную кратности той-же кривой во второй точке.

6. Если порядок одной основной кривой выше порядка другой основной кривой, то кратность первой кривой в каждой основной точке больше или равна кратности второй кривой в той же точке.

7. Каждой группе нескольких основных точек одинаковой кратности соответствует группа стольких же основных кривых одинакового порядка. Каждые две такие кривые имеют в каждой основной точке сети одинаковую кратность, с тем исключением, что в каждой точке упомянутой группы основных точек, одна из соответствующих основных кривых имеет кратность большую или меньшую на единицу, нежели в остальных.

Весьма важно заметить, что первое свойство вполне определяет основную кривую. Каждая линия, пересекающаяся с кривыми Кремоновой сети только в основных точках, необходимо принадлежит к числу основных кривых сети.

Пусть мы имеем две сопряженные Кремоновы сети, устанавливающие некоторое Кремоново преобразование. Сохраняя обозначения предыдущей статьи, будем обозначать через $A_1, A_2, \ldots A_\rho$ основные точки первой сети, через

a_1, $a_2 \ldots a_\rho$—соответствующие им основные кривые второй сети, через r_1, $r_2 \ldots r_\rho$ —кратности этих точек и, вместе с тем, порядки соответствующих им кривых. Точно так же обозначим через B_1, $B_2 \ldots B_\rho$ основные точки второй плоскости, через b_1, $b_2 \ldots b_\rho$—соответствующие им основные кривые первой плоскости и через s_1, $s_2 \ldots s_\rho$—их кратности и порядки. Если на второй плоскости кривая a_k имеет в точке B_l кратную точку порядка α_{kl}, то и в первой плоскости кривая b_l имеет в точке A_k кратную точку тоже порядка α_{kl}.

Числа α_{kl} удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_k r_k \alpha_{kl} = n s_l, & \sum\limits_l s_l \alpha_{kl} = n r_k, \\ \sum\limits_k \alpha_{kl}{}^2 = s_l{}^2 + 1, & \sum\limits_l \alpha_{kl}{}^2 = r_k{}^2 - 1, \\ \sum\limits_k \alpha_{kl}\, \alpha_{kl'} = s_l s_{l'}, & \sum\limits_l \alpha_{kl}\, \alpha_{k'l} = r_k r_{k'}, \\ \sum\limits_k \alpha_{kl} = 3 s_l - 1, & \sum\limits_l \alpha_{kl} = 3 r_k - 1. \end{array}\right\} \qquad (24)$$

(см. мою статью „К теории Кремоновых преобразований“).

Если нам даны две сопряженные системы Кремоновых чисел, то нам известны числа $n, r_1, \ldots r_\rho, s_1, \ldots s_\rho$, и мы найдем все числа α_{kl}, решая в целых числах уравнения (24) и даже, как было указано выше, только первые два из них. Однако, до сих пор мы не знаем общего приема решения этих уравнений. Обыкновенно делают так: при помощи квадратичного или изологического преобразования превращают данную Кремонову сеть в другую, низшего порядка, для которой основные кривые известны; тогда обратное преобразование превратит эти основные кривые в основные кривые данной первоначальной сети и таким образом будут известны и эти кривые. Этот способ имеет тот недостаток, что для него необходимо знать основные кривые для сетей низших порядков. Я предлагаю здесь другой более прямой способ нахождения чисел α_{kl}, основанный непосредственно на свойствах основных кривых, перечисленных выше.

Для того, чтобы, имея данную пару сопряженных Кремоновых сетей, найти соответствующие этим сетям основные кривые, нам нужно найти значение чисел α_{kl} удовлетворяющие уравнениям (24). Как было указано выше, геометрически это значит, что мы должны найти такие кривые, которые уникурсальны, вполне определяются своею кратностью в основных точках сети, не имеют кратных точек вне основных точек сети и пересекаются с кривыми сети только в основных точках. Таким образом, чтобы найти основные кривые, нам прежде всего нужно знать, каковы могут быть уникурсальные кривые данного порядка, которые могут вполне определяться своими кратными точками с присоединением, может быть, некоторого числа простых точек. Когда все такие кривые будут найдены, то затем из них мы выберем те, которые удовлетворяют последнему условию, т.-е. пересекаются с кривыми Кремоновой сети только в основных точках. Таким образом мы прежде всего должны найти все геометрические решения уравнений

$$\sum_k \alpha_{kl}{}^2 = s_l{}^2 + 1, \quad \sum_k \alpha_{kl} = 3 s_l - 1 \qquad (25)$$

и затем выбрать те из них, которые удовлетворяют условию

$$\sum_k r_k \alpha_{kl} = n s_l \qquad (26)$$

[см. уравнения (24)].

Ответ на первую часть вопроса дают отчасти самые таблицы. В самом деле, они содержат кратности основных точек Кремоновых сетей различных порядков, при чем каждая сеть состоит также из уникурсальных кривых с независимыми кратными точками. Поэтому, если мы прибавим к основным точкам сети еще две простых точки, то мы получим число кратных и простых точек, вполне определяющих уникурсальную кривую n-го порядка, т.-е. получим числа, удовлетворяющие двум уравнениям (25), (26), если мы заменим n через s_l, а r_k через a_{kl}. Этим способом определяются все уникурсальные кривые этого рода, в определение которых входят, кроме кратных, еще не менее двух простых точек. Чтобы найти те уникурсальные кривые, которые определяются вполне одними своими кратными точками, или этими точками с присоединением только одной простой, необходимо иметь таблицы, дающие число кратных точек этих кривых. Поэтому в моих таблицах даны, кроме Кремоновых чисел, еще число и кратность точек, определяющих уникурсальные кривые первых одиннадцати порядков для тех случаев, когда среди этих точек входит не более одной однократной точки. Так, например, из таблицы видно, что число различных видов уникурсальных кривых 8-го порядка равно 11. Из них 9 определяются вполне сверх своих кратных точек еще некоторым числом простых точек; отбрасывая две простые точки, мы определяем уже не отдельные кривые, а целые Кремоновы сети кривых, кратные точки которых указаны в таблице. Две последние кривые определяются: первая своими кратными точками, вторая — кратными точками с присоединением одной простой. Эти две кривые не могут принадлежать Кремоновой сети, так как из данных, определяющих эти кривые, нельзя выбросить двух простых точек. Но они могут входить в число основных линий сетей высших порядков. Так, кривая 8-го порядка № 10 входит, как основная кривая, в сеть 14-го порядка № 36. Имея все геометрические решения двух уравнений (25), (26), мы, для получения основных кривых, будем затем искать те из них, которые при данных n и s удовлетворяют третьему уравнению (26).

Bertini (Istituto Lombardo, Rendiconti, t. 13, 1880 и Circolo Matematico di Palermo, t. 3, 1889) указал одно свойство геометрических решений уравнений (25) (26), весьма облегчающее их нахождение. Именно, он показал, что если $r_k > r_{k'}$, то $a_{kl} \geqq a_{k'l}$ и точно так же, если $s_l > s_{l'}$, то $a_{kl} \geqq a_{kl'}$.

Предлагаемый мною способ всего лучше выяснится на примерах. Пусть мы имеем Кремонову сеть 17-го порядка (№ 36 таблицы) $s = 1\,10, 2\,7, 5\,4, 1\,3, 1\,1$. Из таблиц находим, что ей сопряжена сеть № 65 $s' = 1\,9, 1\,8, 5\,5, 1\,4, 2\,1$ с общими характеристическими числами 1, 1, 1, 2, 5. Расположим эти числа в следующую таблицу:

1 7	1 10	2 7	5 4	1 3	1 1
1 9	5	4	2	2	1
1 8	5	3	2	1	1
5 5	3	2	1+	1	0
1 4	2	2	1	0	0
2 1	1	0+	0	0	0

Первая строка содержит порядок сети n и числа основных точек различных кратностей для первой сети; первый столбец содержит порядок сети n и числа основных точек различных кратностей для сопряженной сети. На пересечении каждого столбца и каждой строки стоят числа α_{kl}, указывающие, сколько раз основная кривая первой сети порядка, указываемого строкою, проходит через основную точку той же сети кратности, указываемой столбцом, и вместе с тем, сколько раз кривая второй сети, порядка, указываемого столбцом, проходит через основную точку той же сети, кратности указываемой строкою. Например, из таблицы видно, что каждая из пяти основных кривых 5-го порядка первой сети имеет в каждой из двух основных точек 7-й кратности по двойной точке.

Эти числа α_{kl} нужно найти.

Приступаем к разысканию чисел α_{kl}. Так как во второй сети есть две простых основных точки, то в первой сети будут две основных прямых. Этой группе из двух основных линий одинакового порядка соответствует в первой сети группа двух основных точек 7-го порядка. Каждая из двух основных прямых определяется двумя точками, которые должны лежать в двух высших основных точках сети; одна из них будет лежать в единственной 10-кратной точке, а другая в одной из двух 7-кратных. Таким образом, каждая из двух основных прямых будет иметь простую точку в 10-кратном центре, совсем не будет проходить через центры 4-кратные, 3-кратный и простой и будет проходить через один из двух 7-микратных центров, одна через один, другая через другой. Это выражается числами последней строки 1, 0+, 0, 0, 0. Знак 0+ показывает, что каждая основная прямая не проходит, вообще, через 7-кратные точки, но через одну из них проходит. Так как 7-микратных точек только две, то здесь то же свойство было бы можно выразить также символом 1—, показывающим, что каждая основная прямая проходит по разу через все семикратные точки кроме одной. Точно так же, так как первая сеть имеет одну простую основную точку, то вторая сеть имеет одну основную прямую, проходящую через 9-тикратную и 8-микратную точки и не проходящую через остальные основные точки второй сети. Далее, так как первая сеть содержит одну тройную точку, то вторая сеть имеет основную кривую третьего порядка. Из таблиц видно, что основные кривые третьего порядка могут быть только одного вида—с одною 2-кратною и $4+2=$ шестью простыми точками. Первая помещается в 9-тикратной точке второй сети, а остальные в 8-кратных и в 5-тикратных точках. Далее, так как во второй сети есть одна четырехкратная точка, то в первой должна быть одна основная кривая 4-го порядка. Из таблиц видно, что таких кривых может быть две, одна с $7+2=9$ центрами, из которых один тройной и 8 простых, и другая с $6+2=8$ центрами, из которых 3 двойных и 5 простых. Но в нашей сети всего 10 основных точек, и мы уже нашли, что в двух из них искомая основная кривая имеет кратность 0, т.-е. она не проходит через эти основные точки. Таким образом наша кривая должна определиться 8-ю основными точками, т.-е. это кривая второго вида. Поэтому наша основная кривая 4-го порядка проходит по два раза через 10-кратную и через две 7-кратных основных точек первой сети и по одному разу через пять 4 х-кратных точек. Затем, так как в первой сети есть пять 4-хкратных точек, то во второй должно быть пять основных кривых 4-го порядка: они соответствуют пяти основным точкам 5-го порядка. Подобно предыдущему, мы убеждаемся, что каждая из этих кривых проходит через 8 основных точек сети, по два раза через 9-кратную, 8-кратную и одну из 5-кратных и по одному разу через четыре 5-кратные и одну 4-кратную. Здесь мы видим, что все пять кривых 4-го порядка проходят по одинаковому числу раз через 9-кратную, 8-кратную и 4-кратную точки; но из пяти 5-кратных точек каждая кривая проходит по одному разу через четыре точки и по два раза через пятую — каждая через свою; это и выражено символом $1+$, где знак $+$ выражает, что каждая кривая проходит через одну из 5-кратных точек на один раз больше, чем через каждую из четырех остальных.

Мы имеем затем во второй сети пять 5-икратных точек. Значит, в первой сети должно быть пять основных кривых 5-го порядка. Из уже найденной части таблицы видно, что каждая из этих кривых определяется 9 точками, из которых $4+1=5$ простых. Таблица Кремоновых сетей показывает, что этим свойством обладает кривая 5-го порядка № 2, определяемая одною тройною точкою, тремя двойными и $3+2=5$-ю простыми. Следовательно, каждая из основных кривых 5-го порядка имеет тройную точку в 10-кратной основной точке сети, две двукратных в двух 7-кратных точках, одну 2-кратную в 4-кратной, четыре простых в четырех остальных 4-кратных и одну простую в тройной точке.

Затем мы имеем в первой сети две 7-кратных точки. Соответствующие кривые 7-го порядка второй сети совсем не проходят через одну из простых точек второй сети и имеют только по одной простой точке в другой основной точке, как это видно из уже составленной части таблицы. Единственная кривая 7-го порядка, удовлетворяющая этим условиям, т.-е. определяемая 9-ю точками, из которых только одна простая, есть кривая № 6, она имеет одну 4-кратную точку, одну тройную, 6 двойных и одну простую: первая помещается в 9-кратной точке сети, вторая в 8-кратной, третьи в 5-и 4-кратных и последняя в одной из двух простых.

Чтобы закончить таблицу, остается найти кратные точки основных кривых 9-го и 10-го порядков первой сети. Но, на основании уравнения (25) сумма кратности точек основной кривой на единицу меньше ее утроенного порядка. Составляя сумму уже найденных кратностей для основной кривой 8-го порядка, получим

$$2.3+5.2+1.1+1.1=18.$$

Вычитая это число из $3.8-1=23$, найдем что кратность кривой в последней основной точке равна 5. Точно так же для кривой 9-го порядка имеем

$$2.4+5.2+1.2+1.1=21$$

и затем $3.9-1=26$. Отсюда кратность кривой 9-го порядка в последней основной точке равна 5. Нетрудно убедиться, что найденные числа удовлетворяют всем уравнениям (26).

Если порядок s_l основной кривой высок, то определение ее кратных точек несколько труднее потому, что чем выше порядок кривой, тем более различных видов уникурсальных кривых этого порядка. Поэтому здесь можно поступать еще следующим образом. Каждой основной кривой порядка s_l соответствует пучок дополнительных кривых порядка $n-s_l$, имеющий в каждой основной точке A_k первой плоскости точку кратности $r_k-\alpha_{kl}$. Легко убедиться, что эти числа удовлетворяют следующим уравнениям

$$\sum_k r_k(r_k-\alpha_{kl})=n(n-s_l)-1 \tag{27}$$

$$\sum_k (r_k-\alpha_{kl})^2=(n-s_l)^2,\ \sum_k (r_k-\alpha_{kl})=3(n-s_l)-2 \tag{28}$$

Сравнивая эти уравнения с (25), (26) мы видим, что последние получаются из первых, если мы заменим s_l через $n-s_l$, α_{kl} через $r_k-\alpha_{kl}$ и уменьшим правые части на единицу. Поэтому, вместо того, чтобы искать кратности точек основной кривой порядка s_l, мы будем искать кратности точек кривой более низкого порядка $n-s_l$, уменьшая числа основных точек, взятые из таблицы, на одну однократную точку и подыскивая решения, удовлетворяющие уравнению (27). Так, в предыдущем примере вместо того, чтобы искать основные точки кривой 10-го порядка, мы будем искать основные точки кривой порядка $17-10=7$, уменьшив число основных точек, даваемое таблицею, на единицу. Положим, что мы уже нашли, что кривая 10-го порядка имеет в 5-кратных основных точках кратность 3, в 4-кратных— кратность 2 и в 1-кратных—кратность 1. Согласно предыдущему, дополнительная кривая 7-го порядка должна иметь в тех же точках кратные точки с кратностью $5-3=2$, $4-2=2$ и $1-1=0$, и, кроме того, две точки высшей кратности в 8-микратной и 9-кратной точках сети. Этим условиям удовлетворяет кривая 7-го порядка № 6, если мы отбросим в ней одну простую точку. Так как кратности этой кривой в двух высших точках равны 4, то для кривой 10-го порядка мы находим кратности $9-4=5$ в 9-кратной точке и $8-4=4$ в 8-кратной.

Изложенный здесь способ весьма удобен и позволяет быстро находить кратности основных кривых в основных точках сети. Этим способом я нашел числа α_{kl} для всех Кремоновых сетей первых 17-ти порядков.

Основные линии Кремоновых сетей определили для сетей первых 6-ти порядков Cayley (Proceedings of the London Mathematical Society vol. III, 1869), для 7—10 порядков S. Roberts (Ibid. vol. IV, 1872) и 11-го порядка Montesano (Rendiconti dell' Accademia di Napoli (3 vol. XI, 1905). В 1916 г. я определил по изложенному выше методу основные кривые всех Кремоновых сетей первых 17-ти порядков. Полученные мною числа пока еще не напечатаны.

A propos des tables des nombres Crémoniens des 21 premiers ordres.

B. Mlodziejowski.

(Resumé)

La détermination des nombres Crémoniens peut être faite de deux manières différentes. D'abord on peut chercher toutes les solutions des équations (1) en nombres entiers non négatifs et prendre celles de ces solutions qui correspondent aux réseaux homaloïdes. Secondement on peut former tous les nombres Crémoniens d'un ordre donné en soumettant à des transformations quadratiques les réseaux Crémoniens d'ordres inférieurs. La première méthode fut employée par Crémona, Jonquières et Ruffini. Elle a le défaut d'introduire des solutions étrangères, mais, comme elle ne demande que des calculs très simples, je m'en suis servi comme de méthode de vérification. Si nous désignons par x_k le nombre des solutions $r_1 \dots r_p$ égales à k, les équations (1) prendront la forme (2). Supposons qu'on connaisse les valeurs des inconnues $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \dots \alpha_{m+1}$. En portant ces valeurs dans (3) et en transportant les termes correspondants on obtient les équations (5) où a_m, b_m ont les significations (4). Comme dans ces équations l'indice k est contenu entre 0 et m, on obtient pour a_m les limites (8) valables pour $m > 0$. Après avoir trouvé les valeurs de a_m, on passe pour chaque valeur de a_m aux valeurs correspondantes de a_{m-1} jusqu'à ce que l'on arrive à un nombre $m \geq 1$ pour lequel l'on ait $a_m = b_m = 0$.

En pratique les solutions étrangères aux réseaux Crémoniens s'aperçoivent aisement et ne compliquent pas beaucoup le calcul. Néanmoins pour les solutions d'ordres élevés ce défaut devient de plus en plus sensible. C'est pourqui M. Montesano a proposé une méthode fondée sur l'application de la transformation de Jonquières et sur la considération des classes particulières de réseaux Crémoniens. La méthode de M. Montesano fournit exclusivement les réseaux géometriques, mais les calculs sont assez compliqués et les solutions obtenues ne sont pas rangées d'après l'ordre des réseaux correspondants. C'est pourquoi j'ai enterpris la détermination des réseaux Crémoniens par l'application directe des transformations quadratiques. Quand mon travail était déjà achevé j'eus connaissance du Mémoire de M. Montesano „I gruppi Cremoniani di numeri", 1914, où la même méthode se trouve appliquée à l'étude des différentes propriétés des réseaux Crémoniens. M. Montesano dit dans son Mémoire que MM. Tummarello et Marrazzo avaient calculé en 1908—10 les tables Crémoniennes des ordres 14—23. Comme ce travail ne parait pas avoir été publié, j'ai crû utile de publier mes Tables, d'autant plus qu'elles contiennent des données complémen-

aires. Comme chaque réseau Crémonien peut être déduit par une transformation quadratique de plusieurs manières différentes, j'ai employé, comme M. Montesano, pour éviter les répétitions la méthode suivante. Ayant un réseau d'ordre n dont les centres ont respectivement les multiplicités $r_1 \geq r_2 \geq r_3 \ldots \geq r_p$, je prends pour centres de la transformation quadratique trois centres A_i, A_k, A_l, dont les multiplicités $r_i \geq r_k \geq r_l$ satisfont aux relations (17), (18). De cette manière les nombres relatifs à chaque réseau Crémoniens ne sont obtenus qu'une seule fois, tandis que sous cette précaution ces nombres s'obtiennent de plusieurs manieres différentes. Les figures 1, 2, tirées du mémoire de M. Montesano, montrent la simplification que la méthode de M. Montesano apporte dans le calcul.

Mes tables donnent pour chaque réseau le numéro du réseau conjugué. Pour l'obtenir je considère en même temps, que le réseau donné le réseau des droites du même plan. En soumettant simultanement les deux réseaux à une série de transformations isologiques, je transforme le premier réseau en un réseau de droites; alors le second réseau se transforme en le réseau conjugué au premier. Chaque réseau Crémonien est caractérisé par le nombre et la multiplicité de ses points fondamentaux. Ainsi le réseau du 20-ème ordre № 42 possède un centre du 13-ème ordre, deux du 7-me, cinq du 5-me, un du 2-me et trois du premier, ce qui est exprimé par le symbole

$$S_{20} = 1\,\mathbf{13},\ 2\,\mathbf{7},\ 5\,\mathbf{5},\ 1\,\mathbf{2},\ 3\,\mathbf{1}.$$

J'appelle les nombres 1, 1, 2, 3, 5 des centres d'égale multiplicité, nombres caractéristiques du réseau. Deux réseaux conjugués ont les mêmes nombres caractéristiques. Si parmi les réseaux d'un ordre donné il y a plusieurs réseaux possédant les mêmes nombres caractéristiques, ces réseaux peuvent être conjugués avec un réseau correspondant de la même nature. Ainsi, parmi les réseaux du 12-me ordre avec les nombres caractéristiques 1, 2, 3, 4 les réseaux relatifs aux solutions № 6 et № 7 sont conjugués entre eux, tandis que les réseaux № 9 et № 16 sont conjugués à eux-mêmes.

Le tableau (23) donne: A) l'ordre des réseaux Crémoniens, B) le nombre des solutions géometriques des equations, C) le nombre des différents systèmes des nombres caractéristiques, D) le nombre des solutions conjuguées à elles-mêmes.

A chaque réseau Crémonien correspond un système de lignes fondamentales. Ces lignes ont aux points fondamentaux du réseau des points de multiplicités déterminées. En m'appuyant sur les propriétés connues de ces lignes j'indique une méthode simple pour déterminer directement la multiplicité de ces points sans recourir à l'abaissement de l'ordre n du réseau donné au moyen d'une transformation quadratique. Pour cette méthode il est necessaire de connaitre les caractères des familles de lignes unicursales jusqu' à l'ordre $\frac{n}{2}$, définies par leurs points fondamentaux. C'est pourquoi dans mes Tables je donne les nombres caractéristiques de ces courbes jusqu'à $n = 11$. Si parmi les points fondamentaux il y a au moins deux points simples, ces nombres s'obtiennent en ajoutant au nombres fondamentaux du réseau Crémonien deux unités simples. Mais si le nombre des points fondamentaux simples est inférieur à deux, les nombres caractéristiques correspondants doivent être déterminés à part. Les tables montrent par exemple qu'il y a un système de ces nombres pour $n = 8$, dix pour $n = 11$. Ainsi pour les réseaux du 15-ème ordre №№ 26—36 conjugué à lui même, nous avons le tableau.

15	19	16	15	54	21
18	5	3	3	2	1
27	4	3	2	2	1
14	2	2	2	1	0
53	2	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0

J'ai calculé par cette méthode les nombres caractéristiques des lignes fondamentales pour tous les réseaux des premiers 17 ordres.

En se rapportant aux Tables, on voit que les lignes fondamentales des ordres 8, 7, 4, 3, 1 ont respéctivement les numéros 4, 6, 2, 1, 1; de même les lignes des ordres 9, 6, 5, 4, 1 ont les numéros 12, 3, 2, 2, 1. De ces lignes celles du 9-me et du 7-me ordre n'ont qu'un seul point fondamental du premier ordre et ne peuvent pas faire part d'un réseau Crémonien.

Таблицы Кремоновых чисел первых 21 порядков.

Б. К. Млодзеевский.

Эти таблицы дают Кремоновы числа, т.-е. кратности в основных точках, для всех Кремоновых сетей первых 21 порядков. Эти числа распределены в группы соответственно порядкам сетей. Число, стоящее в заголовке группы, указывает порядок сетей. В следующей затем таблице первое число каждой строки дает нумер сети по порядку; второе дает нумер сопряженной ей сети; третье — общее число основных точек сети. Следующие числа дают числа основных точек сети для каждого порядка кратности отдельно. Например, из таблиц видно, что сети 9-го порядка № 4 сопряжена сеть того же порядка № 7, что эта сеть имеет всего 9 основных точек, из которых одна 6-кратная, три 3-кратных, 4 двукратных и одна простая.

Tables des nombres B. Mlodzijowski des 21 premiers ordres.

Ces tables donnent les multiplicités des points fondamentaux des réseaux Crémoniens. Les nombres correspondants sont distribués en groupes d'après les ordres des courbes du réseau. Le nombre en tête de chaque groupe est l'ordre des réseaux du groupe. Dans la table qui vient après de nombre de la première colonne est le numéro d'ordre du réseau; le nombre suivant est le numéro du réseau conjugué au premier; le troisième nombre est le nombre total des points fondamentaux du réseau. Les nombres suivants donnent les nombres des points fondamentaux pour chaque multiplicité en particulier.

1

1	1	0

2

1	1	3	3	1

3

1	1	5	1	2	4	1

4

1	1	7	1	3	6	1
2	2	6	3	2	3	1

5

1	1	9	1	4	8	1		
2	2	7	1	3	3	2	3	1
3	3	6	6	2				

6

1	1	11	1	5	10	1		
2	3	8	1	4	4	2	3	1
3	2	8	3	3	1	2	4	1
4	4	7	2	3	4	2	1	1
5	–	8	1	3	7	2		

7

1	1	13	1	6	12	1				
2	3	9	1	5	5	2	3	1		
3	2	9	1	4	3	3	5	1		
4	4	8	1	4	2	3	3	2	2	1
5	5	7	4	3	3	2				
6	—	9	1	4	1	3	6	2	1	1

8

1	1	15	1	7	14	1				
2	5	10	1	6	6	2	3	1		
3	3	9	1	5	3	3	2	2	3	1
4	8	8	1	5	2	3	5	2		
5	2	10	3	4	1	3	6	1		
6	6	9	3	4	3	2	3	1		
7	7	8	2	4	2	3	3	2	1	1
8	4	8	1	4	5	3	2	1		
9	9	7	7	3						
10	—	9	2	4	1	3	6	2		
11	—	9	1	4	4	3	3	2	1	1

9

1	1	17	1	8	16	1				
2	5	11	1	7	7	2	3	1		
3	3	10	1	6	4	3	1	2	4	1
4	7	9	1	6	3	3	4	2	1	1

9

5	2	11	1 5	3 4	7 1		
6	6	9	1 5	2 4	1 3	3 2	2 1
7	4	9	1 5	1 4	4 3	3 1	
8	10	8	1 5	1 4	3 3	3 2	
9	9	8	4 4	4 2			
10	8	8	3 4	3 3	1 2	1 1	
11	—	10	1 6	2 3	7 2		
12	—	10	1 5	2 4	6 2	1 1	
13	—	9	1 5	5 3	3 2		
14	—	9	3 4	2 3	4 2		
15	—	9	2 4	5 3	1 2	1 1	

10

1	1	19	1 9	18 1			
2	9	12	1 8	8 2	3 1		
3	3	11	1 7	5 3	5 1		
4	6	10	1 7	4 3	3 2	2 1	
5	10	10	1 6	3 4	3 2	3 1	
6	4	10	1 6	2 4	3 3	4 1	
7	13	9	1 6	2 4	2 3	3 2	1 1
8	8	8	1 6	7 3			
9	2	12	3 5	1 4	8 1		
10	5	10	3 5	1 3	3 2	3 1	
11	16	9	3 5	6 2			
12	12	9	2 5	2 4	4 2	1 1	
13	7	9	2 5	1 4	3 3	1 2	2 1
14	17	8	2 5	5 3	1 2		
15	15	8	1 5	3 4	2 3	2 2	
16	11	9	6 4	3 1			
17	14	8	5 4	2 3	1 1		
18	—	11	1 7	3 3	6 2	1 1	
19	—	10	1 6	2 4	1 3	6 2	
20	—	10	1 6	1 4	4 3	3 2	1 1
21	—	10	2 5	1 4	2 3	4 2	1 1
22	—	9	1 5	2 4	4 3	2 2	
23	—	9	5 4	1 3	3 2		
24	—	9	4 4	4 3	1 1		

11

1	1	—	1 10	20 1				
2	[illegible]	[illegible]	1 9	8 2	3 1			
3	[illegible]	[illegible]	1 8	5 3	2 2	3 1		
4	[illegible]	[illegible]	1 8	4 3	5 2			
5	[illegible]	[illegible]	1 7	3 4	2 3	5 1		
6	11	10	1 7	3 4	1 3	3 2	2 1	
7	17	9	1 7	2 4	3 3	3 2		
8	8	9	1 7	1 4	6 3	1 1		
9	2	15	1 6	3 5	9 1			
10	10	10	1 6	2 5	1 4	4 2	2 1	
11	6	10	1 6	2 5	3 3	1 2	3 1	
12	18	9	1 6	2 5	2 3	4 2		
13	13	9	1 6	1 5	2 4	2 3	2 2	1 1
14	4	10	1 6	5 4	4 1			
15	15	8	1 6	3 4	4 3			
16	16	9	4 5	5 2				
17	7	9	3 5	1 4	3 3	2 1		
18	12	9	2 5	4 4	1 2	2 1		
19	19	8	2 5	3 4	2 3	1 2		
20	—	11	1 7	3 4	6 2	1 1		
21	—	10	1 7	1 4	5 3	3 2		
22	—	10	1 6	1 5	2 4	1 3	5 2	
23	—	10	1 6	1 5	1 4	4 3	2 2	1 1
24		10	1 6	4 4	1 3	3 2	1 1	
25	—	9	1 6	2 4	6 3			
26	—	10	3 5	1 4	2 3	3 2	1 1	
27		9	2 5	2 4	4 3	1 2		
28	—	9	1 5	5 4	1 3	2 2		
29	—	9	7 4	1 3	1 1			

12

1	1	23	1 11	22 1			
2	15	14	1 10	10 2	3 1		
3	5	12	1 9	6 3	1 2	4 1	
4	12	11	1 9	5 3	4 2	1 1	

12

5	3	12	1	8	4	4	1	3	6	1				
6	17	11	1	8	4	4	3	2	3	1				
7	20	10	1	8	3	4	2	3	3	2	1	1		
8	8	10	1	8	2	4	5	3	2	1				
9	9	11	1	7	3	5	4	2	3	1				
10	10	10	1	7	2	5	1	4	2	3	2	2	2	1
11	27	9	1	7	2	5	4	3	2	2				
12	4	11	1	7	1	5	4	4	5	1				
13	24	9	1	7	1	5	3	4	1	3	3	2		
14	14	9	1	7	1	5	2	4	4	3	1	1		
15	2	14	3	6	1	5	10	1						
16	16	11	3	6	1	4	4	2	3	1				
17	6	11	3	6	3	3	1	2	4	1				
18	22	10	3	6	2	3	4	2	1	1				
19	19	10	2	6	2	5	5	2	1	1				
20	7	10	2	6	1	5	1	4	3	3	3	1		
21	25	9	2	6	1	5	1	4	2	3	3	2		
22	18	10	2	6	4	4	[illegible]	2	3	1				
23	23	9	2	6	3	4	2	3	1	2	1	1		
24	13	9	1	6	3	5	3	3	1	2	1	1		
25	21	9	1	6	2	5	3	4	2	2	1	1		
26	26	8	1	6	1	5	4	4	2	3				
27	11	9	4	5	2	4	1	3	2	1				
28	29	8	4	5	1	4	3	3						
29	28	8	3	5	4	4	1	2						

13

1	1	25	1	12	24	1						
2	16	15	1	11	11	2	3	1				
3	5	13	1	10	7	3	5	1				
4	11	12	1	10	6	3	3	2	2	1		
5	3	13	1	9	5	4	7	1				
6	18	11	1	9	4	4	1	3	3	2	2	1
7	7	11	1	9	3	4	4	3	3	1		

8	28	10	1	9	3	4	3	3	3	2				
9	9	11	1	8	3	5	2	3	2	2	3	1		
10	32	10	1	8	3	5	1	3	5	2				
11	4	12	1	8	2	5	3	4	6	1				
12	20	10	1	8	2	5	2	4	1	3	3	2	1	1
13	13	10	1	8	2	5	1	4	4	3	2	1		
14	34	9	1	8	2	5	6	3						
15	25	9	1	8	1	5	3	4	3	3	1	2		
16	2	15	1	7	3	6	11	1						
17	17	11	1	7	2	6	1	5	5	2	2	1		
18	6	11	1	7	2	6	1	4	3	3	4	1		
19	21	10	1	7	2	6	1	4	2	3	3	2	1	1
20	12	10	1	7	1	6	2	5	3	3	1	2	2	1
21	19	10	1	7	1	6	1	5	3	4	2	2	2	1
22	30	9	1	7	1	6	1	5	2	4	2	3	2	2
23	23	9	1	7	1	6	4	4	2	3	1	1		
24	27	9	1	7	3	5	2	4	3	2				
25	15	9		17	3	5	1	4	3	3	1	1		
26	26	10	4	6	6	2								
27	24	9	3	6	1	5	3	3	2	2				
28	8	10	3	6	3	4	1	3	3	1				
29	29	9	3	6	3	4	3	2						
30	22	9	2	6	2	5	2	4	1	3	1	2	1	1
31	31	8	2	6	6	4								
32	10	10	1	6	5	5	1	2	3	1				
33	33	8	1	6	3	5	3	4	1	3				
34	14	9	6	5	1	4	2	1						

14

1	1	27	1	13	26	1				
2	27	16	1	12	12	2	3	1		
3	9	13	1	11	7	3	2	2	3	1
4	24	12	1	11	6	3	5	2		
5	29	12	1	10	5	4	3	2	3	1

14

6	6	12	1	10	4	4	3	3	4	1				
7	34	11	1	10	4	4	2	3	3	2	1	1		
8	15	10	1	10	2	4	7	3						
9	3	13	1	9	3	5	2	4	7	1				
10	17	11	1	9	3	5	1	4	1	3	3	2	2	1
11	11	11	1	9	3	5	4	3	3	1				
12	47	10	1	9	3	5	3	3	3	2				
13	41	10	1	9	2	5	3	4	4	2				
14	22	10	1	9	2	5	2	4	3	3	1	2	1	1
15	8	10	1	9	7	4	2	1						
16	28	12	1	8	3	6	5	2	3	1				
17	10	11	1	8	2	6	1	5	3	3	1	2	3	1
18	43	10	1	8	2	6	1	5	2	3	4	2		
19	30	11	1	8	2	6	3	4	2	2	3	1		
20	37	10	1	8	2	6	2	4	2	3	2	2	1	1
21	33	10	1	8	1	6	2	5	2	4	3	2	1	1
22	44	10	1	8	1	6	2	5	1	4	3	3	2	1
23	14	9	1	8	1	6	1	5	3	4	2	3	1	2
24	4	12	1	8	5	5	6	1						
25	25	9	1	8	4	5	3	3	1	2				
26	36	9	1	8	2	5	5	4	1	1				
27	2	16	3	7	1	6	12	1						
28	16	12	3	7	1	5	5	2	3	1				
29	5	12	3	7	1	4	3	3	5	1				
30	19	11	3	7	1	4	2	3	3	2	2	1		
31	45	10	3	7	4	3	3	2						
32	32	11	2	7	2	6	6	2	1	1				
33	21	10	2	7	1	6	1	5	3	3	2	2	1	1
34	7	11	2	7	1	6	3	4	1	3	4	1		
35	35	10	2	7	1	6	3	4	3	2	1	1		
36	26	9	2	7	1	6	1	4	5	3				
37	20	10	2	7	2	5	2	4	1	3	1	2	2	1
38	49	9	2	7	2	5	1	4	3	3	1	2		
39	46	9	2	7	1	5	4	4	2	2				
40	40	9	2	7	6	4	1	1						
41	13	10	1	7	3	6	4	3	2	1				
42	42	9	1	7	2	6	1	5	2	4	1	3	2	2
43	18	10	1	7	1	6	4	5	2	2	2	1		
44	23	9	1	7	1	6	3	5	1	4	2	3	1	1
45	31	10	4	6	3	4	3	1						
46	39	9	4	6	2	4	2	3	1	1				
47	12	10	3	6	3	5	1	3	3	1				
48	48	9	3	6	3	5	3	2						
49	38	9	3	6	2	5	2	4	1	2	1	1		
50	50	8	2	6	3	5	3	4						
51	51	8	1	6	6	5	1	3						

15

1	1	29	1	14	28	1								
2	30	17	1	13	13	2	3	1						
3	9	14	1	12	8	3	1	2	4	1				
4	23	13	1	12	7	3	4	2	1	1				
5	5	13	1	11	5	4	2	3	5	1				
6	33	12	1	11	5	4	1	3	3	2	2	1		
7	51	11	1	11	4	4	3	3	3	2				
8	16	11	1	11	3	4	6	3	1	1				
9	3	14	1	10	4	5	1	4	8	1				
10	17	12	1	10	4	5	1	3	3	2	3	1		
11	60	11	1	10	4	5	6	2						
12	37	11	1	10	3	5	2	4	4	2	1	1		
13	20	11	1	10	3	5	1	4	3	3	1	2	2	1
14	61	10	1	10	3	5	5	3	1	2				
15	45	10	1	10	2	5	3	4	2	3	2	2		
16	8	11	1	10	1	5	6	4	3	1				
17	10	12	1	9	3	6	3	3	1	2	4	1		
18	41	11	1	9	3	6	2	3	4	2	1	1		
19	32	11	1	9	2	6	1	5	2	4	3	2	2	1
20	13	11	1	9	2	6	1	5	1	4	3	3	3	1
21	55	10	1	9	2	6	1	5	1	4	2	3	3	2
22	42	10	1	9	2	6	3	4	2	3	1	2	1	1

15

23	4	15	1 9	1 6	4 5	7 1				
24	50	10	1 9	1 6	3 5	1 4	4 2			
25	25	10	1 9	1 6	3 5	3 3	1 2	1 1		
26	36	10	1 9	1 6	1 5	5 4	2 1			
27	57	9	1 9	1 6	1 5	4 4	2 3			
28	28	9	1 9	4 5	1 4	3 3				
29	52	9	1 9	3 5	4 4	1 2				
30	2	17	1 8	3 7	13 1					
31	31	12	1 8	2 7	1 6	6 2	2 1			
32	19	11	1 8	2 7	1 5	3 3	2 2	2 1		
33	6	12	1 8	2 7	3 4	1 3	5 1			
34	34	11	1 8	2 7	3 4	3 2	2 1			
35	53	10	1 8	2 7	2 4	2 3	3 2			
36	26	10	1 8	2 7	1 4	5 3	1 1			
37	12	11	1 8	1 7	2 6	4 3	3 1			
38	46	10	1 8	1 7	2 6	3 3	3 2			
39	39	10	1 8	1 7	1 6	1 5	2 4	1 3	2 2	1 1
40	48	9	1 8	1 7	1 6	3 4	3 3			
41	18	11	1 8	1 7	4 5	2 2	3 1			
42	22	10	1 8	1 7	3 5	1 4	2 3	2 1		
43	62	9	1 8	1 7	3 5	4 3				
44	59	9	1 8	1 7	2 5	3 4	1 3	1 2		
45	15	10	1 8	3 6	2 4	2 3	2 1			
46	38	10	1 8	2 6	3 5	3 2	1 1			
47	47	9	1 8	2 6	2 5	1 4	2 3	1 2		
48	40	9	1 8	1 6	3 5	3 4	1 1			
49	49	11	4 7	7 2						
50	24	10	3 7	1 6	4 3	1 2	1 1			
51	7	11	3 7	1 5	3 4	4 1				
52	29	9	3 7	1 5	1 4	4 3				
53	35	10	2 7	2 6	3 4	1 2	2 1			
54	56	9	2 7	2 6	2 4	2 3	1 2			
55	21	10	2 7	1 6	3 5	1 3	1 2	2 1		
56	54	9	2 7	1 6	2 5	2 4	2 2			
57	27	9	2 7	4 5	1 4	1 3	1 1			
58	58	9	1 7	3 6	2 5	1 3	2 2			
59	44	9	1 7	3 6	1 5	2 4	1 3	1 1		
60	11	11	6 6	1 2	4 1					
61	14	10	5 6	1 5	1 4	3 1				
62	43	9	4 6	3 5	1 2	1 1				
63	63	8	3 6	4 5	1 4					

16

1	1	31	1 15	30 1					
2	45	18	1 14	14 2	3 1				
3	9	15	1 13	9 3	5 1				
4	19	14	1 13	8 3	3 2	2 1			
5	5	14	1 12	6 4	1 3	6 1			
6	49	13	1 12	6 4	3 2	3 1			
7	56	12	1 12	5 4	2 3	3 2	1 1		
8	14	12	1 12	4 4	5 3	2 1			
9	3	15	1 11	5 5	9 1				
10	28	12	1 11	4 5	1 4	4 2	2 1		
11	17	12	1 11	4 5	3 3	1 2	3 1		
12	82	11	1 11	4 5	2 3	4 2			
13	34	11	1 11	3 5	2 4	2 3	2 2	1 1	
14	8	12	1 11	2 5	5 4	4 1			
15	42	10	1 11	2 5	3 4	4 3			
16	47	12	1 10	3 6	2 4	3 2	3 1		
17	11	12	1 10	3 6	1 4	3 3	4 1		
18	61	11	1 10	3 6	1 4	2 3	3 2	1 1	
19	4	14	1 10	2 6	3 5	8 1			
20	55	11	1 10	2 6	2 5	1 4	4 2	1 1	
21	21	11	1 10	2 6	2 5	3 3	1 2	2 1	
22	71	10	1 10	2 6	1 5	2 4	2 3	2 2	
23	52	11	1 10	2 6	5 4	3 1			
24	65	10	1 10	2 6	4 4	2 3	1 1		
25	25	10	1 10	1 6	3 5	1 4	3 3	1 1	
26	58	10	1 10	1 6	2 5	4 4	1 2	1 1	
27	27	13	1 9	3 7	6 2	3 1			

16

28	10	12	1 9 2 7 1 6 4 3 4 1
29	36	11	1 9 2 7 1 6 3 3 3 2 1 1
30	30	11	1 9 2 7 1 5 2 4 1 3 2 2 2 1
31	79	16	1 9 2 7 1 5 1 4 3 3 2 2
32	77	10	1 9 2 7 4 4 3 2
33	39	10	1 9 2 7 3 4 3 3 1 1
34	13	11	1 9 1 7 2 6 2 4 2 3 3 1
35	69	10	1 9 1 7 2 6 2 4 1 3 3 2
36	29	11	1 9 1 7 1 6 3 5 3 2 2 1
37	37	10	1 9 1 7 1 6 2 5 1 4 2 3 1 2 1 1
38	73	9	1 9 1 7 1 6 5 4 1 3
39	33	10	1 9 1 7 3 5 3 4 2 1
40	86	9	1 9 1 7 3 5 2 4 2 3
41	67	10	1 9 3 6 2 5 4 2
42	15	10	1 9 3 6 1 4 2 1
43	43	9	1 9 2 6 3 5 3 3
44	70	9	1 9 2 6 2 5 3 4 1 2
45	2	18	3 8 1 7 14 1
46	46	13	3 8 1 6 6 2 3 1
47	16	12	3 8 1 5 3 3 2 2 3 1
48	74	11	3 8 1 5 2 3 5 2
49	6	13	3 8 5 4 1 3 6 1
50	50	12	3 8 3 4 3 2 3 1
51	59	11	3 8 2 4 2 3 3 2 1 1
52	23	11	3 8 1 4 5 3 2 1
53	87	10	3 8 7 3
54	54	12	2 8 2 7 7 2 1 1
55	20	11	2 8 1 7 1 6 4 3 1 2 2 1
56	7	12	2 8 1 7 1 5 3 5 5 1
57	68	10	2 8 1 7 1 5 2 4 1 3 3 2
58	26	10	2 8 1 7 1 5 1 4 4 3 1 1
59	51	11	2 8 2 6 3 4 1 2 3 1
60	63	10	2 8 2 6 2 4 2 3 1 2 1 1
61	18	11	2 8 1 6 3 5 1 3 1 2 3 1
62	83	10	2 8 1 6 3 5 4 2

63	60	10	2 8 1 6 2 5 2 4 2 2 1 1
64	76	9	2 8 1 6 1 5 3 4 2 3
65	24	10	2 8 4 5 1 4 1 3 2 1
66	85	9	2 8 3 5 3 4 1 2
67	41	10	1 8 3 7 4 3 2 2
68	57	10	1 8 2 7 1 6 3 4 2 2 1 1
69	35	10	1 8 2 7 3 5 1 3 2 2 1 1
70	44	9	1 8 2 7 2 5 1 4 3 3
71	22	10	1 8 1 7 2 6 2 5 2 3 2 1
72	72	9	1 8 1 7 2 6 1 5 2 4 1 3 1 2
73	38	9	1 8 1 7 5 5 1 4 1 1
74	48	11	1 8 5 6 2 2 3 1
75	75	9	1 8 4 6 1 5 2 3 1 2
76	64	9	1 8 3 6 2 5 2 4 1 1
77	32	10	4 7 3 4 1 3 2 1
78	81	9	4 7 2 4 3 3
79	31	10	3 7 1 6 2 5 1 4 1 2 2 1
80	84	9	3 7 1 6 2 5 2 3 1 2
81	78	9	3 7 4 5 2 2
82	12	11	2 7 4 6 1 3 4 1
83	62	10	2 7 4 6 3 2 1 1
84	80	9	2 7 3 6 1 5 1 4 2 2
85	66	9	2 7 3 6 3 4 1 1
86	40	9	2 7 2 6 3 5 1 3 1 1
87	53	10	7 6 3 1
88	88	8	5 6 3 5

17

1	1	33	1 16 32 1
2	47	19	1 15 15 2 3 1
3	16	15	1 14 9 3 2 2 3 1
4	43	14	1 14 8 3 5 2
5	5	15	1 13 7 4 7 1
6	51	13	1 13 6 4 1 3 3 2 2 1
7	12	13	1 13 5 4 4 3 3 1

17

8	80	12	1 13 5 4 3 3 3 2
9	27	13	1 12 5 5 4 2 3 1
10	29	12	1 12 4 5 1 4 2 3 2 2 2 1
11	97	11	1 12 4 5 4 3 2 2
12	7	13	1 12 3 5 4 4 5 1
13	67	11	1 12 3 5 3 4 1 3 3 2
14	39	11	1 12 3 5 2 4 4 3 1 1
15	15	10	1 12 9 4
16	3	15	1 11 3 6 2 5 9 1
17	49	12	1 11 3 6 1 5 1 4 4 2 2 1
18	18	12	1 11 3 6 1 5 3 3 1 2 3 1
19	86	11	1 11 3 6 1 5 2 3 4 2
20	61	11	1 11 3 6 2 4 2 3 2 2 1 1
21	77	11	1 11 2 6 3 5 5 2
22	22	11	1 11 2 6 2 5 1 4 3 3 2 1
23	53	11	1 11 2 6 1 5 4 4 1 2 2 1
24	88	10	1 11 2 6 1 5 3 4 2 3 1 2
25	44	10	1 11 1 6 4 5 3 3 1 2
26	79	10	1 11 1 6 3 5 3 4 2 2
27	9	13	1 10 3 7 4 3 5 1
28	32	12	1 10 3 7 3 3 3 2 2 1
29	10	12	1 10 2 7 1 6 2 4 2 3 4 1
30	58	11	1 10 2 7 1 6 2 4 1 3 3 2 1 1
31	46	10	1 10 2 7 1 6 6 3
32	28	12	1 10 2 7 3 5 3 2 3 1
33	33	11	1 10 2 7 2 5 1 4 2 3 1 2 2 1
34	98	10	1 10 2 7 2 5 4 3 1 2
35	91	10	1 10 2 7 1 5 3 4 1 3 2 2
36	65	10	1 10 2 7 5 4 1 3 1 1
37	55	11	1 10 1 7 2 6 2 5 4 2 1 1
38	69	10	1 10 1 7 2 6 1 5 1 4 2 3 2 2
39	14	11	1 10 1 7 2 6 4 4 3 1
40	40	10	1 10 1 7 1 6 3 5 3 3 1 1
41	60	10	1 10 1 7 1 6 2 5 3 4 1 2 1 1
42	99	9	1 10 1 7 3 5 4 4
43	4	14	1 10 5 6 8 1
44	25	10	1 10 4 6 1 4 3 3 1 1
45	70	9	1 10 2 6 3 5 2 4 1 3
46	31	10	1 10 1 6 6 5 2 1
47	2	19	1 9 3 8 15 1
48	48	13	1 9 2 8 1 7 7 2 2 1
49	17	12	1 9 2 8 1 6 4 3 1 2 3 1
50	71	11	1 9 2 8 1 6 3 3 4 2
51	6	13	1 9 2 8 1 5 3 4 6 1
52	56	11	1 9 2 8 1 5 2 4 1 3 3 2 1 1
53	23	11	1 9 2 8 1 5 1 4 4 3 2 1
54	72	10	1 9 2 8 3 4 3 3 1 2
55	37	11	1 9 1 8 2 7 4 3 2 2 1 1
56	52	11	1 9 1 8 1 7 1 6 3 4 2 2 2 1
57	84	10	1 9 1 8 1 7 1 6 2 4 2 3 2 2
58	30	11	1 9 1 8 1 7 3 5 1 3 2 2 2 1
59	83	10	1 9 1 8 1 7 2 5 2 4 3 2
60	41	10	1 9 1 8 1 7 2 5 1 4 3 3 1 1
61	20	11	1 9 1 8 2 6 2 5 2 3 3 1
62	94	10	1 9 1 8 2 6 2 5 1 3 3 2
63	63	10	1 9 1 8 2 6 1 5 2 4 1 3 1 2 1 1
64	96	9	1 9 1 8 1 6 2 5 3 4 1 3
65	36	10	1 9 1 8 5 5 1 4 2 1
66	101	9	1 9 1 8 5 5 2 3
67	13	11	1 9 3 7 3 4 1 3 3 1
68	81	10	1 9 3 7 3 4 3 2
69	38	10	1 9 2 7 1 6 2 5 2 3 1 2 1 1
70	45	9	1 9 2 7 3 5 1 4 2 3
71	50	11	1 9 1 7 4 6 3 2 2 1
72	54	10	1 9 1 7 3 6 3 4 2 1
73	90	9	1 9 1 7 3 6 2 4 2 3
74	85	9	1 9 1 7 2 6 2 5 2 4 1 2
75	75	9	1 9 5 6 3 3
76	76	12	1 8 8 2
77	21	11	3 8 1 7 5 3 2 1

17

78	78	10		3 8	1 6	3 4	3 2			
79	26	10		3 8	1 6	2 4	3 3	1 1		
80	8	12		3 8	3 5	1 4	5 1			
81	68	10		3 8	3 5	1 3	3 2			
82	82	9		3 8	6 4					
83	59	10		2 8	2 7	3 4	1 3	1 2	1 1	
84	57	10		2 8	1 7	1 6	2 5	1 4	2 2	1 1
85	74	9		2 8	1 7	1 6	1 5	2 4	2 3	
86	19	11		2 8	4 6	1 3	1 2	3 1		
87	87	10		2 8	4 6	4 2				
88	24	10		2 8	3 6	1 5	1 4	1 3	2 1	
89	89	9		2 8	3 6	3 4	1 2			
90	73	9		2 8	2 6	3 5	1 3	1 2		
91	35	10		1 8	3 7	2 5	1 4	1 3	2 1	
92	100	9		1 8	3 7	2 5	3 3			
93	93	9		1 8	3 7	1 5	3 4	1 2		
94	62	10		1 8	2 7	3 6	1 3	2 2	1 1	
95	95	9		1 8	2 7	2 6	1 5	1 4	1 3	1 2
96	64	9		1 8	1 7	3 6	2 5	1 4	1 1	
97	11	11		4 7	2 6	1 4	4 1			
98	34	10		4 7	1 6	2 5	1 2	2 1		
99	42	9		4 7	3 5	1 4	1 1			
100	92	9		3 7	3 6	1 5	2 2			
101	66	9		2 7	5 6	1 3	1 1			
102	102	8		8 6						

18

1	1	35		1 17	34 1						
2	82	20		1 16	16 2	3 1					
3	17	16		1 15	10 3	1 2	4 1				
4	42	15		1 15	9 3	4 2	1 1				
5	86	14		1 14	7 4	3 2	3 1				
6	11	14		1 14	6 4	3 3	4 1				
7	97	13		1 14	6 4	2 3	3 2	1 1			
8	30	12		1 14	4 4	7 3					
9	31	13		1 13	5 5	2 3	2 2	3 1			
10	145	12		1 13	5 5	1 3	5 2				
11	6	14		1 13	4 5	3 4	6 1				
12	61	12		1 13	4 5	2 4	1 3	3 2	1 1		
13	37	12		1 13	4 5	1 4	4 3	2 1			
14	151	11		1 13	4 5	6 3					
15	74	11		1 13	3 5	3 4	3 3	1 2			
16	16	11		1 13	1 5	8 4	1 1				
17	3	16		1 12	4 6	1 5	10 1				
18	84	13		1 12	4 6	1 4	4 2	3 1			
19	19	13		1 12	4 6	3 3	1 2	4 1			
20	107	12		1 12	4 6	2 3	4 2	1 1			
21	93	12		1 12	3 6	2 5	5 2	1 1			
22	22	12		1 12	3 6	1 5	1 4	3 3	3 1		
23	121	11		1 12	3 6	1 5	1 4	2 3	3 2		
24	88	12		1 12	3 6	4 4	1 2	3 1			
25	109	11		1 12	3 6	3 4	2 3	1 2	1 1		
26	44	11		1 12	2 6	3 5	3 3	1 2	1 1		
27	96	11		1 12	2 6	2 5	3 4	2 2	1 1		
28	125	10		1 12	2 6	1 5	4 4	2 3			
29	49	10		1 12	1 6	4 5	1 4	3 3			
30	8	12		1 12	7 5	4 1					
31	9	13		1 11	3 7	2 4	2 3	5 1			
32	55	12		1 11	3 7	2 4	1 3	3 2	2 1		
33	134	11		1 11	3 7	1 4	3 3	3 2			
34	48	11		1 11	3 7	6 3	1 1				
35	52	12		1 11	2 7	1 6	2 5	4 2	2 1		
36	64	11		1 11	2 7	1 6	1 5	1 4	2 3	2 2	1 1
37	13	12		1 11	2 7	1 6	4 4	4 1			
38	80	10		1 11	2 7	1 6	2 4	4 3			
39	39	11		1 11	2 7	3 5	3 3	2 1			
40	58	11		1 11	2 7	2 5	3 4	1 2	2 1		
41	141	10		1 11	2 7	2 5	2 4	2 3	1 2		
42	4	15		1 11	1 7	4 6	9 1				

18

43	115	11	1 11	1 7	3 6	1 5	5 2			
44	26	11	1 11	1 7	3 6	1 4	3 3	2 1		
45	76	10	1 11	1 7	2 6	2 5	3 3	1 2		
46	118	10	1 11	1 7	2 6	1 5	3 4	2 2		
47	66	10	1 11	1 7	1 6	3 5	2 4	1 3	1 1	
48	34	11	1 11	1 7	6 5	3 1				
49	29	10	1 11	4 6	3 4	1 3	1 1			
50	63	10	1 11	2 6	5 5	1 2	1 1			
51	83	14	1 10	3 8	7 2	3 1				
52	35	12	1 10	2 8	1 7	4 3	2 2	2 1		
53	87	12	1 10	2 8	1 6	3 4	2 2	3 1		
54	103	11	1 10	2 8	1 6	2 4	2 3	2 2	1 1	
55	32	12	1 10	2 8	3 5	1 3	2 2	3 1		
56	146	11	1 10	2 8	3 5	5 2				
57	101	11	1 10	2 8	2 5	2 4	3 2	1 1		
58	40	11	1 10	2 8	2 5	1 4	3 3	2 1		
59	152	10	1 10	2 8	2 5	5 3				
60	128	10	1 10	2 8	1 5	3 4	2 3	1 2		
61	12	12	1 10	1 8	2 7	3 4	1 3	4 1		
62	98	11	1 10	1 8	2 7	3 4	3 2	1 1		
63	50	10	1 10	1 8	2 7	1 4	5 3			
64	36	11	1 10	1 8	1 7	1 6	2 5	2 3	1 2	2 1
65	120	10	1 10	1 8	1 7	1 6	1 5	2 4	1 3	2 2
66	47	10	1 10	1 8	1 7	3 5	1 4	2 3	1 1	
67	85	12	1 10	1 8	4 6	3 2	3 1			
68	127	10	1 10	1 8	3 6	1 5	2 3	2 2		
69	91	11	1 10	1 8	3 6	3 4	3 1			
70	112	10	1 10	1 8	3 6	2 4	2 3	1 1		
71	105	10	1 10	1 8	2 6	2 5	2 4	1 2	1 1	
72	149	9	1 10	1 8	1 6	3 5	3 4			
73	73	10	1 10	3 7	2 5	2 3	2 2			
74	15	11	1 10	3 7	1 5	3 4	3 1			
75	94	11	1 10	2 7	3 6	4 2	1 1			
76	45	10	1 10	2 7	2 6	1 5	3 3	1 1		
77	99	10	1 10	2 7	2 6	3 4	1 2	1 1		
78	78	9	1 10	2 7	4 5	1 4	1 3			
79	124	9	1 10	1 7	3 6	1 5	2 4	1 3		
80	38	10	1 10	1 7	2 6	4 5	2 1			
81	147	9	1 10	4 6	3 5	1 2				
82	2	20	3 9	1 8	16 1					
83	51	14	3 9	1 7	7 2	3 1				
84	18	13	3 9	1 6	4 3	1 2	4 1			
85	67	12	3 9	1 6	3 3	4 2	1 1			
86	5	14	3 9	1 5	3 4	7 1				
87	53	12	3 9	1 5	2 4	1 3	3 2	2 1		
88	24	12	3 9	1 5	1 4	4 3	3 1			
89	136	11	3 9	1 5	1 4	3 3	3 2			
90	132	11	3 9	4 4	4 2					
91	69	11	3 9	3 4	3 3	1 2	1 1			
92	92	13	2 9	2 8	8 2	1 1				
93	21	12	2 9	1 8	1 7	5 3	3 1			
94	75	11	2 9	1 8	1 7	4 3	3 2			
95	95	11	2 9	1 8	1 6	3 4	3 2	1 1		
96	27	11	2 9	1 8	1 6	2 4	3 3	2 1		
97	7	13	2 9	1 8	3 5	1 4	6 1			
98	62	11	2 9	1 8	3 5	1 3	3 2	1 1		
99	77	10	2 9	1 8	2 5	1 4	3 3	1 2		
100	100	10	2 9	1 8	6 4	1 1				
101	57	11	2 9	2 7	3 4	1 3	1 2	2 1		
102	138	10	2 9	2 7	2 4	3 3	1 2			
103	54	11	2 9	1 7	1 6	2 5	1 4	2 2	2 1	
104	140	10	2 9	1 7	1 6	2 5	2 3	2 2		
105	71	10	2 9	1 7	1 6	1 5	2 4	2 3	1 1	
106	133	10	2 9	1 7	4 5	3 2				
107	20	12	2 9	4 6	1 3	1 2	4 1			
108	108	11	2 9	4 6	4 2	1 1				
109	25	11	2 9	3 6	1 5	1 4	1 3	3 1		
110	137	10	2 9	3 6	1 5	1 4	3 2			
111	111	10	2 9	3 6	3 4	1 2	1 1			
112	70	10	2 9	2 6	3 5	1 3	1 2	1 1		

18

113	144	9	2 9	2 6	1 5	4 4				
114	150	9	2 9	1 6	4 5	1 4	1 3			
115	43	11	1 9	3 8	5 3	1 2	1 1			
116	117	10	1 9	2 8	1 7	3 4	1 3	2 2		
117	116	10	1 9	2 8	1 6	2 5	1 4	3 2		
118	46	10	1 9	2 8	1 6	2 5	3 3	1 1		
119	119	9	1 9	2 8	2 5	4 4				
120	65	10	1 9	1 8	2 7	2 5	1 4	1 3	1 2	1 1
121	23	11	1 9	1 8	1 7	3 6	2 3	3 1		
122	122	10	1 9	1 8	1 7	3 6	1 3	3 2		
123	126	9	1 9	1 8	1 7	2 6	3 4	1 3		
124	79	9	1 9	1 8	1 7	1 6	3 5	2 3		
125	28	10	1 9	1 8	4 6	2 4	2 1			
126	123	9	1 9	1 8	3 6	2 5	1 4	1 2		
127	68	10	1 9	3 7	2 6	2 3	1 2	1 1		
128	60	10	1 9	3 7	1 6	1 5	2 4	2 1		
129	143	9	1 9	3 7	1 6	1 5	1 4	2 3		
130	135	9	1 9	3 7	3 5	1 4	1 2			
131	139	9	1 9	2 7	3 6	2 4	1 2			
132	90	11	4 8	4 4	3 1					
133	106	10	4 8	3 4	2 3	1 1				
134	33	11	3 8	1 7	3 5	1 2	3 1			
135	130	9	3 8	1 7	1 5	3 4	1 3			
136	89	11	3 8	3 6	1 4	1 2	3 1			
137	110	10	3 8	3 6	2 3	1 2	1 1			
138	102	10	3 8	2 6	2 5	2 2	1 1			
139	131	9	3 8	2 6	1 5	1 4	2 3			
140	104	10	2 8	2 7	2 6	1 4	2 2	1 1		
141	41	10	2 8	2 7	1 6	2 5	1 3	2 1		
142	142	9	2 8	2 7	1 6	1 5	2 4	1 2		
143	129	9	2 8	1 7	3 6	1 5	1 3	1 2		
144	113	9	2 8	4 6	2 5	1 1				
145	10	12	1 8	5 7	1 3	5 1				
146	56	11	1 8	5 7	3 2	2 1				
147	81	9	1 8	4 7	1 6	3 3				
148	148	9	1 8	4 7	2 5	1 3	1 2			
149	72	9	1 8	3 7	1 6	3 5	1 1			
150	114	9	1 8	2 7	4 6	1 4	1 1			
151	14	11	6 7	1 5	4 1					
152	59	10	5 7	2 6	1 2	2 1				

19

1	1	37	1 18	36 1				
2	81	21	1 17	17 2	3 1			
3	16	17	1 16	11 3	5 1			
4	34	16	1 16	10 3	3 2	2 1		
5	9	15	1 15	7 4	2 3	5 1		
6	88	14	1 15	7 4	1 3	3 2	2 1	
7	130	13	1 15	6 4	3 3	3 2		
8	26	13	1 15	5 4	6 3	1 1		
9	5	15	1 14	5 5	2 4	7 1		
10	51	13	1 14	5 5	1 4	1 3	3 2	2 1
11	31	13	1 14	5 5	4 3	3 1		
12	163	12	1 14	5 5	3 3	3 2		
13	111	12	1 14	4 5	3 4	4 2		
14	62	12	1 14	4 5	2 4	3 3	1 2	1 1
15	15	12	1 14	2 5	7 4	2 1		
16	3	17	1 13	5 6	11 1			
17	83	13	1 13	4 6	1 5	5 2	2 1	
18	18	13	1 13	4 6	1 4	3 3	4 1	
19	103	12	1 13	4 6	1 4	2 3	3 2	1 1
20	36	12	1 13	3 6	2 5	3 3	1 2	2 1
21	86	12	1 13	3 6	1 5	3 4	2 2	2 1
22	141	11	1 13	3 6	1 5	2 4	2 3	2 2
23	108	11	1 13	3 6	4 4	2 3	1 1	
24	129	11	1 13	2 6	3 5	2 4	3 2	
25	44	11	1 13	2 6	3 5	1 4	3 3	1 1
26	8	13	1 13	1 6	6 5	5 1		
27	132	10	1 13	1 6	3 5	5 4		
28	49	13	1 12	3 7	2 5	4 2	3 1	

19

29	55	12	1 12	3 7	1 5	1 4	2 3	2 2	2 1	
30	160	11	1 12	3 7	1 5	4 3	2 2			
31	11	13	1 12	3 7	4 4	5 1				
32	149	11	1 12	3 7	3 4	1 3	3 2			
33	72	11	1 12	3 7	2 4	4 3	1 1			
34	4	16	1 12	2 7	3 6	10 1				
35	94	12	1 12	2 7	2 6	1 5	5 2	1 1		
36	20	12	1 12	2 7	2 6	1 4	3 3	3 1		
37	114	11	1 12	2 7	2 6	1 4	2 3	3 2		
38	65	11	1 12	2 7	1 6	2 5	3 3	1 2	1 1	
39	97	11	1 12	2 7	1 6	1 5	3 4	2 2	1 1	
40	120	10	1 12	2 7	1 6	4 4	2 3			
41	59	11	1 12	2 7	3 5	2 4	1 3	2 1		
42	168	10	1 12	2 7	3 5	1 4	3 3			
43	161	10	1 12	2 7	2 5	4 4	1 2			
44	25	11	1 12	1 7	3 6	3 4	1 3	2 1		
45	115	10	1 12	1 7	2 6	2 5	2 4	1 3	1 2	
46	54	11	1 12	1 7	1 6	5 5	1 2	2 1		
47	47	10	1 12	5 6	4 3					
48	112	10	1 12	3 6	4 5	2 2				
49	28	13	1 11	3 8	4 3	2 2	3 1			
50	121	12	1 11	3 8	3 3	5 2				
51	10	13	1 11	2 8	1 7	3 4	1 3	5 1		
52	89	12	1 11	2 8	1 7	3 4	3 2	2 1		
53	135	11	1 11	2 8	1 7	2 4	2 3	3 2		
54	46	11	1 11	2 8	1 7	1 4	5 3	1 1		
55	29	12	1 11	2 8	1 6	2 5	2 3	1 2	3 1	
56	155	11	1 11	2 8	1 6	2 5	1 3	4 2		
57	100	11	1 11	2 8	1 6	1 5	2 4	1 3	2 2	1 1
58	125	10	1 11	2 8	1 6	3 4	3 3			
59	41	11	1 11	2 8	3 5	1 4	2 3	2 1		
60	156	10	1 11	2 8	2 5	3 4	1 3	1 2		
61	61	11	1 11	1 8	2 7	2 5	2 3	2 2	1 1	
62	14	12	1 11	1 8	2 7	1 5	3 4	4 1		
63	77	10	1 11	1 8	2 7	1 5	1 4	4 3		

64	84	12	1 11	1 8	1 7	3 6	4 2	2 1		
65	38	11	1 11	1 8	1 7	2 6	1 5	3 3	2 1	
66	91	11	1 11	1 8	1 7	2 6	3 4	1 2	2 1	
67	143	10	1 11	1 8	1 7	2 6	2 4	2 3	1 2	
68	136	10	1 11	1 8	1 7	1 6	2 5	2 4	2 2	
69	69	10	1 11	1 8	1 7	4 5	1 4	1 3	1 1	
70	122	10	1 11	1 8	4 6	3 3	1 2			
71	107	10	1 11	1 8	3 6	1 5	2 4	1 3	1 1	
72	33	11	1 11	1 8	2 6	4 5	3 1			
73	171	9	1 11	1 8	7 5					
74	128	11	1 11	3 7	2 6	5 2				
75	75	10	1 11	3 7	1 6	1 5	3 3	1 2		
76	131	10	1 11	3 7	1 6	3 4	2 2			
77	63	10	1 11	2 7	1 6	4 5	1 2	1 1		
78	78	9	1 11	2 7	5 5	1 4				
79	145	9	1 11	1 7	3 6	2 5	2 4			
80	159	9	1 11	5 6	2 5	1 3				
81	2	21	1 10	3 9	17 1					
82	82	14	1 10	2 9	1 8	8 2	2 1			
83	17	13	1 10	2 9	1 7	5 3	4 1			
84	64	12	1 10	2 9	1 7	4 3	3 2	1 1		
85	85	12	1 10	2 9	1 6	3 4	3 2	2 1		
86	21	12	1 10	2 9	1 6	2 4	3 3	3 1		
87	137	11	1 10	2 9	1 6	2 4	2 3	3 2		
88	6	14	1 10	2 9	3 5	1 4	7 1			
89	52	12	1 10	2 9	3 5	1 3	3 2	2 1		
90	133	11	1 10	2 9	2 5	2 4	4 2			
91	66	11	1 10	2 9	2 5	1 4	3 3	1 2	1 1	
92	92	11	1 10	2 9	6 4	2 1				
93	146	10	1 10	2 9	5 4	2 3				
94	35	12	1 10	1 9	2 8	5 3	1 2	2 1		
95	96	11	1 10	1 9	1 8	1 7	3 4	1 3	2 2	1 1
96	95	11	1 10	1 9	1 8	1 6	2 5	1 4	3 2	1 1
97	39	11	1 10	1 9	1 8	1 6	2 5	3 3	2 1	
98	118	10	1 10	1 9	1 8	1 6	1 5	2 4	2 3	1 2

19

99	99	10	1 10	1 9	1 8	2 5	4 4	1 1		
100	57	11	1 10	1 9	2 7	2 5	1 4	1 3	1 2	2 1
101	165	10	1 10	1 9	2 7	2 5	3 3	1 2		
102	151	10	1 10	1 9	2 7	1 5	3 4	2 2		
103	19	12	1 10	1 9	1 7	3 6	2 3	4 1		
104	104	11	1 10	1 9	1 7	3 6	1 3	3 2	1 1	
105	152	10	1 10	1 9	1 7	2 6	1 5	1 4	1 3	2 2
106	109	10	1 10	1 9	1 7	2 6	3 4	1 3	1 1	
107	71	10	1 10	1 9	1 7	1 6	3 5	2 3	1 1	
108	23	11	1 10	1 9	4 6	2 4	3 1			
109	106	10	1 10	1 9	3 6	2 5	1 4	1 2	1 1	
110	170	9	1 10	1 9	2 6	3 5	2 4			
111	13	12	1 10	3 8	4 4	4 1				
112	48	10	1 10	3 8	2 4	4 3				
113	113	10	1 10	2 8	1 7	2 5	1 4	1 3	2 2	
114	37	11	1 10	2 8	3 6	2 3	1 2	2 1		
115	45	10	1 10	2 8	2 6	1 5	1 4	2 3	1 1	
116	116	9	1 10	2 8	4 5	2 4				
117	117	10	1 10	1 8	2 7	2 6	2 3	2 2		
118	98	10	1 10	1 8	2 7	1 6	1 5	2 4	1 2	1 1
119	119	9	1 10	1 8	1 7	2 6	2 5	1 4	1 3	
120	40	10	1 10	1 8	4 6	2 5	2 1			
121	50	12	1 10	5 7	3 2	3 1				
122	70	10	1 10	4 7	1 6	3 3	1 1			
123	162	9	1 10	4 7	4 4					
124	154	9	1 10	3 7	2 6	2 4	1 3			
125	58	10	1 10	3 7	1 6	3 5	2 1			
126	166	9	1 10	2 7	3 6	2 5	1 2			
127	127	13	4 9	9 2						
128	74	11	3 9	1 8	5 3	2 2				
129	24	11	3 9	1 7	3 4	2 3	2 1			
130	7	13	3 9	1 6	3 5	6 1				
131	76	10	3 9	1 6	2 5	3 3	1 2			
132	27	10	3 9	1 6	5 4	1 1				
133	90	11	2 9	2 8	4 4	1 2	2 1			

134	139	10	2 9	2 8	3 4	2 3	1 2			
135	53	11	2 9	1 8	1 7	3 5	2 2	2 1		
136	68	10	2 9	1 8	1 7	2 5	1 4	2 3	1 1	
137	87	11	2 9	1 8	3 6	1 4	2 2	2 1		
138	142	10	2 9	1 8	3 6	2 3	2 2			
139	134	10	2 9	1 8	2 6	2 5	3 2			
140	140	9	2 9	1 8	1 6	2 5	3 4			
141	22	11	2 9	2 7	2 6	1 4	1 3	3 1		
142	138	10	2 9	2 7	2 6	1 4	3 2			
143	67	10	2 9	2 7	1 6	2 5	1 3	1 2	1 1	
144	148	9	2 9	2 7	1 6	4 4				
145	79	9	2 9	2 7	3 5	1 4	1 3			
146	93	10	2 9	5 6	1 4	2 1				
147	147	9	2 9	5 6	2 3					
148	144	9	2 9	4 6	2 5	1 2				
149	32	11	1 9	3 8	3 5	1 3	3 1			
150	164	10	1 9	3 8	3 5	3 2				
151	102	10	1 9	3 8	2 5	2 4	1 2	1 1		
152	105	10	1 9	2 8	1 7	2 6	1 4	1 3	1 2	1 1
153	158	9	1 9	2 8	1 7	1 6	1 5	2 4	1 3	
154	124	9	1 9	2 8	3 6	1 5	2 3			
155	56	11	1 9	1 8	4 7	1 3	2 2	2 1		
156	60	10	1 9	1 8	3 7	2 5	1 4	2 1		
157	169	9	1 9	1 8	3 7	2 5	2 3			
158	153	9	1 9	1 8	2 7	2 6	1 5	1 4	1 2	
159	80	9	1 9	5 7	1 4	2 3				
160	30	11	4 8	2 6	1 5	1 2	3 1			
161	43	10	4 8	1 6	2 5	1 4	2 1			
162	123	9	4 8	4 5	1 2					
163	12	12	3 8	3 7	1 4	5 1				
164	150	10	3 8	3 7	1 3	3 2				
165	101	10	3 8	2 7	1 6	1 5	2 2	1 1		
166	126	9	3 8	2 7	1 6	1 4	2 3			
167	167	9	3 8	2 7	2 5	1 4	1 2			
168	42	10	3 8	1 7	3 6	1 3	2 1			

19

169	157	9	2 8	3 7	2 6	1 3	1 2
170	110	9	2 8	2 7	3 6	1 5	1 1
171	73	9	7 7	1 4	1 1		

20

1	1	39	1 19	38 1						
2	126	22	1 18	18 2	3 1					
3	28	17	1 17	11 3	2 2	3 1				
4	75	16	1 17	10 3	5 2					
5	9	16	1 16	8 4	1 3	6 1				
6	134	15	1 16	8 4	3 2	3 1				
7	147	14	1 16	7 4	2 3	3 2	1 1			
8	25	14	1 16	6 4	5 3	2 1				
9	5	16	1 15	6 5	1 4	8 1				
10	48	14	1 15	6 5	1 3	3 2	3 1			
11	233	13	1 15	6 5	6 2					
12	94	13	1 15	5 5	2 4	4 2	1 1			
13	53	13	1 15	5 5	1 4	3 3	1 2	2 1		
14	235	12	1 15	5 5	5 3	1 2				
15	113	12	1 15	4 5	3 4	2 3	2 2			
16	16	13	1 15	3 5	6 4	3 1				
17	128	14	1 14	5 6	5 2	3 1				
18	30	13	1 14	4 6	1 5	3 3	1 2	3 1		
19	187	12	1 14	4 6	1 5	2 3	4 2			
20	131	13	1 14	4 6	3 4	2 2	3 1			
21	164	12	1 14	4 6	2 4	2 3	2 2	1 1		
22	145	12	1 14	3 6	2 5	2 4	3 2	1 1		
23	38	12	1 14	3 6	2 5	1 4	3 3	2 1		
24	189	11	1 14	3 6	1 5	3 4	2 3	1 2		
25	8	14	1 14	2 6	5 5	6 1				
26	76	11	1 14	2 6	4 5	3 3	1 2			
27	150	11	1 14	2 6	2 5	5 4	1 1			
28	3	17	1 13	3 7	2 6	11 1				
29	83	13	1 13	3 7	1 6	1 5	5 2	2 1		
30	18	13	1 13	3 7	1 6	1 4	3 3	4 1		
31	99	12	1 13	3 7	1 6	1 4	2 3	3 2	1 1	
32	57	12	1 13	3 7	2 5	3 3	1 2	2 1		
33	88	12	1 13	3 7	1 5	3 4	2 2	2 1		
34	213	11	1 13	3 7	1 5	2 4	2 3	2 2		
35	111	11	1 13	3 7	4 4	2 3	1 1			
36	175	12	1 13	2 7	3 6	6 2				
37	115	11	1 13	2 7	2 6	1 5	3 3	2 2		
38	23	12	1 13	2 7	2 6	3 4	1 3	3 1		
39	180	11	1 13	2 7	2 6	3 4	3 2			
40	101	11	1 13	2 7	1 6	2 5	2 4	1 3	1 2	1 1
41	193	10	1 13	2 7	1 6	6 4				
42	51	12	1 13	2 7	5 5	1 2	3 1			
43	229	10	1 13	2 7	3 5	3 4	1 3			
44	44	11	1 13	1 7	4 6	4 3	1 1			
45	96	11	1 13	1 7	2 6	4 5	2 2	1 1		
46	117	10	1 13	1 7	2 6	3 5	1 4	2 3		
47	47	10	1 13	5 6	2 4	2 3				
48	10	14	1 12	3 8	3 4	1 3	6 1			
49	135	13	1 12	3 8	3 4	3 2	3 1			
50	155	12	1 12	3 8	2 4	2 3	3 2	1 1		
51	42	12	1 12	3 8	1 4	5 3	2 1			
52	52	12	1 12	2 8	1 7	2 5	2 3	2 2	2 1	
53	13	13	1 12	2 8	1 7	1 5	3 4	5 1		
54	182	11	1 12	2 8	1 7	1 5	2 4	1 3	3 2	
55	71	11	1 12	2 8	1 7	1 5	1 4	4 3	1 1	
56	129	13	1 12	2 8	3 6	4 2	3 1			
57	32	12	1 12	2 8	2 6	1 5	3 3	3 1		
58	197	11	1 12	2 8	2 6	1 5	2 3	3 2		
59	138	12	1 12	2 8	2 6	3 4	1 2	3 1		
60	166	11	1 12	2 8	2 6	2 4	2 3	1 2	1 1	
61	156	11	1 12	2 8	1 6	2 5	2 4	2 2	1 1	
62	201	10	1 12	2 8	1 6	1 5	3 4	2 3		
63	63	11	1 12	2 8	4 5	1 4	1 3	2 1		
64	240	10	1 12	2 8	4 5	3 3				
65	228	10	1 12	2 8	3 5	3 4	1 2			

20

66	144	12	1 12	1 8	2 7	2 6	5 2	1 1			
67	67	11	1 12	1 8	2 7	1 6	1 5	3 3	1 2	1 1	
68	149	11	1 12	1 8	2 7	1 6	3 4	2 2	1 1		
69	80	10	1 12	1 8	2 7	2 5	1 4	3 3			
70	185	10	1 12	1 8	1 7	2 6	1 5	2 4	1 3	1 2	
71	55	11	1 12	1 8	1 7	1 6	4 5	1 2	2 1		
72	72	10	1 12	1 8	1 7	5 5	1 4	1 1			
73	226	10	1 12	1 8	3 6	3 5	2 2				
74	169	10	1 12	1 8	3 6	2 5	2 4	1 1			
75	4	16	1 12	5 7	10 1						
76	26	11	1 12	4 7	3 4	1 3	2 1				
77	77	10	1 12	3 7	2 6	4 3					
78	114	10	1 12	3 7	4 5	2 2					
79	151	10	1 12	2 7	3 6	3 4	1 1				
80	69	10	1 12	2 7	2 6	3 5	1 3	1 1			
81	133	11	1 12	7 6	3 1						
82	82	15	1 11	3 9	8 2	3 1					
83	29	13	1 11	2 9	1 8	5 3	1 2	3 1			
84	119	12	1 11	2 9	1 8	4 3	4 2				
85	87	12	1 11	2 9	1 7	3 4	1 3	2 2	2 1		
86	208	11	1 11	2 9	1 7	2 4	3 3	2 2			
87	85	12	1 11	2 9	1 6	2 5	1 4	3 2	2 1		
88	33	12	1 11	2 9	1 6	2 5	3 3	3 1			
89	218	11	1 11	2 9	1 6	2 5	2 3	3 2			
90	106	11	1 11	2 9	1 6	1 5	2 4	2 3	1 2	1 1	
91	204	11	1 11	2 9	4 5	4 2					
92	92	11	1 11	2 9	2 5	4 4	2 1				
93	222	10	1 11	2 9	2 5	3 4	2 3				
94	12	13	1 11	1 9	2 8	4 4	5 1				
95	177	11	1 11	1 9	2 8	3 4	1 3	3 2			
96	45	11	1 11	1 9	2 8	2 4	4 3	1 1			
97	97	11	1 11	1 9	1 8	1 7	2 5	1 4	1 3	2 2	1 1
98	122	10	1 11	1 9	1 8	1 7	1 5	2 4	3 3		
99	31	12	1 11	1 9	1 8	3 6	2 3	1 2	3 1		
100	188	11	1 11	1 9	1 8	3 6	1 3	4 2			
101	40	11	1 11	1 9	1 8	2 6	1 5	1 4	2 3	2 1	
102	190	10	1 11	1 9	1 8	2 6	3 4	1 3	1 2		
103	121	10	1 11	1 9	1 8	1 6	3 5	2 3	1 2		
104	104	10	1 11	1 9	1 8	4 5	2 4	1 1			
105	105	11	1 11	1 9	2 7	2 6	2 3	2 2	1 1		
106	90	11	1 11	1 9	2 7	1 6	1 5	2 4	1 2	2 1	
107	220	10	1 11	1 9	2 7	1 6	1 5	1 4	2 3	1 2	
108	207	10	1 11	1 9	2 7	3 5	1 4	2 2			
109	209	10	1 11	1 9	1 7	3 6	2 4	2 2			
110	110	10	1 11	1 9	1 7	2 6	2 5	1 4	1 3	1 1	
111	35	11	1 11	1 9	4 6	2 5	3 1				
112	242	9	1 11	1 9	2 6	5 5					
113	15	12	1 11	3 8	2 5	2 4	4 1				
114	78	10	1 11	3 8	2 5	4 3					
115	37	11	1 11	2 8	1 7	2 6	3 3	2 1			
116	178	10	1 11	2 8	1 7	1 6	1 5	2 4	2 2		
117	46	10	1 11	2 8	3 6	2 4	1 3	1 1			
118	118	9	1 11	2 8	6 5						
119	84	12	1 11	1 8	4 7	4 2	2 1				
120	120	10	1 11	1 8	3 7	1 6	3 3	1 2			
121	103	10	1 11	1 8	3 7	1 5	2 4	1 3	1 1		
122	98	10	1 11	1 8	2 7	1 6	3 5	1 2	1 1		
123	191	9	1 11	1 8	1 7	3 6	1 5	2 4			
124	217	9	1 11	4 7	2 5	2 4					
125	231	9	1 11	3 7	2 6	2 5	1 3				
126	2	22	3 10	1 9	18 1						
127	127	15	3 10	1 8	8 2	3 1					
128	17	14	3 10	1 7	5 3	5 1					
129	56	13	3 10	1 7	4 3	3 2	2 1				
130	130	13	3 10	1 6	3 4	3 2	3 1				
131	20	13	3 10	1 6	2 4	3 3	4 1				
132	159	12	3 10	1 6	2 4	2 3	3 2	1 1			
133	81	11	3 10	1 6	7 3						
134	6	15	3 10	3 5	1 4	8 1					
135	49	13	3 10	3 5	1 3	3 2	3 1				

20

136	234	12		3 10	3 5	6 2				
137	153	12		3 10	2 5	2 4	4 2	1 1		
138	59	12		3 10	2 5	1 4	3 3	1 2	2 1	
139	236	11		3 10	2 5	5 3	1 2			
140	194	11		3 10	1 5	3 4	2 3	2 2		
141	141	12		3 10	6 4	3 1				
142	171	11		3 10	5 4	2 3	1 1			
143	143	14		2 10	2 9	9 2	1 1			
144	66	12		2 10	1 9	1 8	5 3	2 2	1 1	
145	22	12		2 10	1 9	1 7	3 4	2 3	3 1	
146	179	11		2 10	1 9	1 7	3 4	1 3	3 2	
147	7	14		2 10	1 9	1 6	3 5	7 1		
148	176	11		2 10	1 9	1 6	2 5	1 4	4 2	
149	68	11		2 10	1 9	1 6	2 5	3 3	1 2	1 1
150	27	11		2 10	1 9	1 6	5 4	2 1		
151	79	10		2 10	1 9	3 5	1 4	3 3		
152	181	10		2 10	1 9	2 5	4 4	1 2		
153	137	12		2 10	2 8	4 4	1 2	3 1		
154	161	11		2 10	2 8	3 4	2 3	1 2	1 1	
155	50	12		2 10	1 8	1 7	3 5	2 2	3 1	
156	61	11		2 10	1 8	1 7	2 5	1 4	2 3	2 1
157	239	10		2 10	1 8	1 7	2 5	4 3		
158	196	10		2 10	1 8	1 7	1 5	3 4	1 3	1 2
159	132	12		2 10	1 8	3 6	1 4	2 2	3 1	
160	165	11		2 10	1 8	3 6	2 3	2 2	1 1	
161	154	11		2 10	1 8	2 6	2 5	3 2	1 1	
162	198	10		2 10	1 8	2 6	1 5	1 4	2 3	1 2
163	163	10		2 10	1 8	1 6	2 5	3 4	1 1	
164	21	12		2 10	2 7	2 6	1 4	1 3	4 1	
165	160	11		2 10	2 7	2 6	1 4	3 2	1 1	
166	60	11		2 10	2 7	1 6	2 5	1 3	1 2	2 1
167	215	10		2 10	2 7	1 6	1 5	2 4	2 2	
168	173	10		2 10	2 7	1 6	4 4	1 1		
169	74	10		2 10	2 7	3 5	1 4	1 3	1 1	
170	195	10		2 10	1 7	3 6	1 5	1 3	2 2	

171	142	11		2 10	5 6	1 4	3 1				
172	172	10		2 10	5 6	2 3	1 1				
173	168	10		2 10	4 6	2 5	1 2	1 1			
174	241	9		2 10	3 6	3 5	1 4				
175	36	12		1 10	3 9	6 3	2 1				
176	148	11		1 10	2 9	1 8	4 4	2 2	1 1		
177	95	11		1 10	2 9	1 7	3 5	3 2	1 1		
178	116	10		1 10	2 9	1 7	2 5	1 4	2 3	1 2	
179	146	11		1 10	2 9	3 6	1 4	3 2	1 1		
180	39	11		1 10	2 9	3 6	3 3	2 1			
181	152	10		1 10	2 9	2 6	4 4	1 1			
182	54	11		1 10	1 9	2 8	3 5	1 3	1 2	2 1	
183	183	10		1 10	1 9	2 8	2 5	2 4	2 2		
184	184	10		1 10	1 9	1 8	1 7	2 6	1 4	1 3	2 2
185	70	10		1 10	1 9	1 8	1 7	1 6	2 5	2 3	1 1
186	186	9		1 10	1 9	1 8	2 6	2 5	2 4		
187	19	12		1 10	1 9	4 7	2 3	4 1			
188	100	11		1 10	1 9	4 7	1 3	3 2	1 1		
189	24	11		1 10	1 9	3 7	1 6	2 4	3 1		
190	102	10		1 10	1 9	3 7	2 5	1 4	1 2	1 1	
191	123	9		1 10	1 9	2 7	1 6	3 5	1 3		
192	192	9		1 10	1 9	1 7	4 6	1 4	1 3		
193	41	10		1 10	1 9	6 6	2 1				
194	140	11		1 10	3 8	2 6	2 4	3 1			
195	170	10		1 10	3 8	2 6	1 4	2 3	1 1		
196	158	10		1 10	3 8	1 6	2 5	1 4	1 2	1 1	
197	58	11		1 10	2 8	3 7	2 3	1 2	2 1		
198	162	10		1 10	2 8	2 7	1 6	2 4	1 2	1 1	
199	230	9		1 10	2 8	2 7	1 5	3 4			
200	200	9		1 10	2 8	1 7	2 6	1 5	1 4	1 3	
201	62	10		1 10	1 8	3 7	1 6	2 5	2 1		
202	227	9		1 10	1 8	2 7	3 6	1 5	1 2		
203	237	9		1 10	5 7	2 5	1 2				
204	91	11		4 9	4 4	1 3	2 1				
205	211	10		4 9	3 4	3 3					

20

206	225	10	3 9	1 8	3 5	1 3	2 2			
207	108	10	3 9	1 8	2 5	2 4	1 3	1 1		
208	86	11	3 9	1 7	2 6	1 5	2 2	2 1		
209	109	10	3 9	1 7	2 6	1 4	2 3	1 1		
210	210	9	3 9	1 7	3 5	2 4				
211	205	10	3 9	4 6	3 2					
212	212	9	3 9	3 6	3 4					
213	34	11	2 9	2 8	2 6	1 5	1 3	3 1		
214	219	10	2 9	2 8	2 6	1 5	3 2			
215	167	10	2 9	2 8	2 6	2 4	1 2	1 1		
216	224	9	2 9	2 8	1 6	1 5	3 4			
217	124	9	2 9	2 8	4 5	1 3				
218	89	11	2 9	1 8	3 7	1 4	2 2	2 1		
219	214	10	2 9	1 8	3 7	2 3	2 2			
220	107	10	2 9	1 8	2 7	1 6	1 5	1 3	1 2	1 1
221	232	9	2 9	1 8	2 7	2 5	1 4	1 3		
222	93	10	2 9	3 7	2 6	1 4	2 1			
223	223	9	2 9	3 7	2 6	2 3				
224	216	9	2 9	3 7	1 6	2 5	1 2			
225	206	10	1 9	3 8	2 7	1 4	3 2			
226	73	10	1 9	3 8	2 7	3 3	1 1			
227	202	9	1 9	3 8	1 7	1 6	2 4	1 3		
228	65	10	1 9	3 8	1 7	3 5	2 1			
229	43	10	1 9	3 8	3 6	1 4	2 1			
230	199	9	1 9	3 8	2 6	2 5	1 2			
231	125	9	1 9	2 8	3 7	1 5	2 3			
232	221	9	1 9	2 8	2 7	2 6	1 4	1 2		
233	11	13	6 8	1 3	6 1					
234	136	12	6 8	3 2	3 1					
235	14	12	5 8	1 7	1 5	5 1				
236	139	11	5 8	2 6	1 2	3 1				
237	203	9	5 8	1 6	1 5	2 3				
238	238	9	5 8	3 5	1 2					
239	157	10	4 8	2 7	1 6	2 2	1 1			
240	64	10	3 8	4 7	1 3	2 1				
241	174	9	3 8	2 7	3 6	1 1				
242	112	9	2 8	5 7	1 5	1 1				

21

1	1	41	1 20	40 1				
2	139	23	1 19	19 2	3 1			
3	29	18	1 18	12 3	1 1	4 1		
4	69	17	1 18	11 3	4 2	1 1		
5	9	17	1 17	9 4	7 1			
6	145	15	1 17	8 4	1 3	3 2	2 1	
7	22	15	1 17	7 4	4 3	3 1		
8	216	14	1 17	7 4	3 3	3 2		
9	5	17	1 16	7 5	9 1			
10	88	14	1 16	6 5	1 4	4 2	2 1	
11	53	14	1 16	6 5	3 3	1 2	3 1	
12	274	13	1 16	6 5	2 3	4 2		
13	104	13	1 16	5 5	2 4	2 3	2 2	1 1
14	14	14	1 16	4 5	5 4	4 1		
15	126	12	1 16	4 5	3 4	4 3		
16	31	14	1 15	5 6	3 5	1 2	4 1	
17	175	13	1 15	5 6	2 3	4 2	1 1	
18	142	13	1 15	4 6	1 5	2 4	3 2	2 1
19	36	13	1 15	4 6	1 5	1 4	3 3	3 1
20	230	12	1 15	4 6	1 5	1 4	2 3	3 2
21	177	12	1 15	4 6	3 4	2 3	1 2	1 1
22	7	15	1 15	3 6	4 5	7 1		
23	212	12	1 15	3 6	3 5	1 4	4 2	
24	72	12	1 15	3 6	3 5	3 3	1 2	1 1
25	149	12	1 15	3 6	1 5	5 4	2 1	
26	236	11	1 15	3 6	1 5	4 4	2 3	
27	82	11	1 15	2 6	4 5	1 4	3 3	
28	215	11	1 15	2 6	3 5	4 4	1 2	
29	3	18	1 14	4 7	1 6	12 1		
30	86	14	1 14	4 7	1 5	5 2	3 1	
31	16	14	1 14	4 7	1 4	3 3	5 1	
32	95	13	1 14	4 7	1 4	2 3	3 2	2 1

21

33	262	12	1 14	4 7	4 3	3 2				
34	152	13	1 14	3 7	2 6	6 2	1 1			
35	107	12	1 14	3 7	1 6	1 5	3 3	2 2	1 1	
36	19	13	1 14	3 7	1 6	3 4	1 3	4 1		
37	159	12	1 14	3 7	1 6	3 4	3 2	1 1		
38	134	11	1 14	3 7	1 6	1 4	5 3			
39	97	12	1 14	3 7	2 5	2 4	1 3	1 2	2 1	
40	268	11	1 14	3 7	2 5	1 4	3 3	1 2		
41	263	11	1 14	3 7	1 5	4 4	2 2			
42	184	11	1 14	3 7	6 4	1 1				
43	43	12	1 14	2 7	3 6	4 3	2 1			
44	190	11	1 14	2 7	2 6	1 5	2 4	1 3	2 2	
45	90	12	1 14	2 7	1 6	4 5	2 2	2 1		
46	112	11	1 14	2 7	1 6	3 5	1 4	2 3	1 1	
47	47	11	1 14	1 7	4 6	2 4	2 3	1 1		
48	187	11	1 14	1 7	3 6	3 5	3 2			
49	192	10	1 14	1 7	2 6	3 5	3 4			
50	50	10	1 14	5 6	4 4					
51	51	13	1 13	3 8	2 5	2 3	2 2	3 1		
52	254	12	1 13	3 8	2 5	1 3	5 2			
53	11	14	1 13	3 8	1 5	3 4	6 1			
54	166	12	1 13	3 8	1 5	2 4	1 3	3 2	1 1	
55	66	12	1 13	3 8	1 5	1 4	4 3	2 1		
56	284	11	1 13	3 8	1 5	6 3				
57	205	11	1 13	3 8	3 4	3 3	1 2			
58	141	13	1 13	2 8	1 7	2 6	5 2	2 1		
59	59	12	1 13	2 8	1 7	1 6	1 5	3 3	1 2	2 1
60	147	12	1 13	2 8	1 7	1 6	3 4	2 2	2 1	
61	227	11	1 13	2 8	1 7	1 6	2 4	2 3	2 2	
62	222	11	1 13	2 8	1 7	2 5	2 4	3 2		
63	79	11	1 13	2 8	1 7	2 5	1 4	3 3	1 1	
64	203	11	1 13	2 8	3 6	3 3	2 2			
65	171	11	1 13	2 8	2 6	1 5	2 4	1 3	1 2	1 1
66	55	13	1 13	2 8	1 6	4 5	1 2	3 1		
67	259	13	1 13	2 8	1 6	2 5	3 4	1 3		
68	68	11	1 13	2 8	5 5	1 4	2 1			
69	4	17	1 13	1 8	4 7	11 1				
70	211	12	1 13	1 8	3 7	1 6	6 2			
71	124	11	1 13	1 8	3 7	1 5	3 3	2 2		
72	24	12	1 13	1 8	3 7	3 4	1 3	3 1		
73	218	11	1 13	1 8	3 7	3 4	3 2			
74	74	11	1 13	1 8	2 7	2 6	4 3	1 1		
75	106	11	1 13	1 8	2 7	4 5	2 2	1 1		
76	130	10	1 13	1 8	2 7	3 5	1 4	2 3		
77	150	11	1 13	1 8	1 7	3 6	3 4	2 1		
78	233	10	1 13	1 8	1 7	3 6	2 4	2 3		
79	63	11	1 13	1 8	1 7	2 6	3 5	1 3	2 1	
80	229	10	1 13	1 8	1 7	2 6	2 5	2 4	1 2	
81	256	10	1 13	1 8	4 6	2 5	1 3	1 2		
82	27	11	1 13	4 7	1 5	3 4	2 1			
83	219	10	1 13	3 7	2 6	3 4	1 2			
84	125	10	1 13	3 7	1 6	3 5	1 3	1 2		
85	144	11	1 13	1 7	6 6	1 2	2 1			
86	30	14	1 12	3 9	5 3	1 2	4 1			
87	115	13	1 12	3 9	4 3	4 2	1 1			
88	10	14	1 12	2 9	1 8	4 4	6 1			
89	156	12	1 12	2 9	1 8	3 4	1 3	3 2	1 1	
90	45	12	1 12	2 9	1 8	2 4	4 3	2 1		
91	91	12	1 12	2 9	1 7	2 5	1 4	1 3	2 2	2 1
92	266	11	1 12	2 9	1 7	2 5	3 3	2 2		
93	239	11	1 12	2 9	1 7	1 5	3 4	3 2		
94	121	11	1 12	2 9	1 7	1 5	2 4	3 3	1 1	
95	32	13	1 12	2 9	3 6	2 3	1 2	4 1		
96	176	12	1 12	2 9	3 6	1 3	4 2	1 1		
97	39	12	1 12	2 9	2 6	1 5	1 4	2 3	3 1	
98	243	11	1 12	2 9	2 6	1 5	1 4	1 3	3 2	
99	179	11	1 12	2 9	2 6	3 4	1 3	1 2	1 1	
100	117	11	1 12	2 9	1 6	3 5	2 3	1 2	1 1	
101	252	10	1 12	2 9	1 6	1 5	4 4	1 3		
102	102	11	1 12	2 9	4 5	2 4	2 1			

21

103	280	10	1 12	2 9	4 5	1 4	2 3				
104	13	13	1 12	1 9	2 8	2 5	2 4	5 1			
105	188	11	1 12	1 9	2 8	2 5	1 4	1 3	3 2		
106	75	11	1 12	1 9	2 8	2 5	4 3	1 1			
107	35	12	1 12	1 9	1 8	1 7	2 6	3 3	3 1		
108	196	11	1 12	1 9	1 8	1 7	2 6	2 3	3 2		
109	157	11	1 12	1 9	1 8	1 7	1 6	1 5	2 4	2 2	1 1
110	200	10	1 12	1 9	1 8	1 7	1 6	3 4	2 3		
111	133	10	1 12	1 9	1 8	1 7	3 5	3 3			
112	46	11	1 12	1 9	1 8	3 6	2 4	1 3	2 1		
113	198	10	1 12	1 9	1 8	2 6	2 5	1 4	1 3	1 2	
114	114	10	1 12	1 9	1 8	6 5	1 1				
115	87	13	1 12	1 9	4 7	4 2	3 1				
116	116	11	1 12	1 9	3 7	1 6	3 3	1 2	1 1		
117	100	11	1 12	1 9	3 7	1 5	2 4	1 3	2 1		
118	272	10	1 12	1 9	3 7	1 5	1 4	3 3			
119	264	10	1 12	1 9	3 7	4 4	1 2				
120	245	10	1 12	1 9	2 7	2 6	2 4	1 3	1 2		
121	94	11	1 12	1 9	2 7	1 6	3 5	1 2	2 1		
122	267	10	1 12	1 9	1 7	3 6	2 5	2 2			
123	182	10	1 12	1 9	1 7	3 6	1 5	2 4	1 1		
124	71	11	1 12	3 8	2 6	3 3	1 2	1 1			
125	84	10	1 12	3 8	1 6	1 5	1 4	3 3			
126	15	12	1 12	3 8	4 5	4 1					
127	153	12	1 12	2 8	3 7	5 2	1 1				
128	191	10	1 12	2 8	2 7	1 5	2 4	1 3	1 2		
129	189	10	1 12	2 8	1 7	1 6	3 5	2 2			
130	76	10	1 12	2 8	3 6	2 5	1 3	1 1			
131	131	10	1 12	1 8	4 7	4 3					
132	164	10	1 12	1 8	3 7	1 6	3 4	1 1			
133	111	10	1 12	1 8	3 7	3 5	1 3	1 1			
134	38	11	1 12	1 8	1 7	5 6	3 1				
135	201	9	1 12	1 8	1 7	3 6	3 5				
136	265	9	1 12	4 7	4 5						
137	178	10	1 12	3 7	4 6	1 2	1 1				
138	273	9	1 12	3 7	3 6	1 5	1 4				
139	2	23	1 11	3 10	19 1						
140	140	15	1 11	2 10	1 9	9 2	2 1				
141	58	13	1 11	2 10	1 8	5 3	2 2	2 1			
142	18	13	1 11	2 10	1 7	3 4	2 3	4 1			
143	158	12	1 11	2 10	1 7	3 4	1 3	3 2	1 1		
144	85	11	1 11	2 10	1 7	1 4	6 3				
145	6	15	1 11	2 10	1 6	3 5	8 1				
146	154	12	1 11	2 10	1 6	2 5	1 4	4 2	1 1		
147	60	12	1 11	2 10	1 6	2 5	3 3	1 2	2 1		
148	193	11	1 11	2 10	1 6	1 5	2 4	2 3	2 2		
149	25	12	1 11	2 10	1 6	5 4	3 1				
150	77	11	1 11	2 10	3 5	1 4	3 3	1 1			
151	162	11	1 11	2 10	2 5	4 4	1 2	1 1			
152	34	13	1 11	1 10	2 9	6 3	3 1				
153	127	12	1 11	1 10	2 9	5 3	3 2				
154	146	12	1 11	1 10	1 9	1 8	4 4	2 2	2 1		
155	224	11	1 11	1 10	1 9	1 8	3 4	2 3	2 2		
156	89	12	1 11	1 10	1 9	1 7	3 5	3 2	2 1		
157	109	11	1 11	1 10	1 9	1 7	2 5	1 4	2 3	1 2	1 1
158	143	12	1 11	1 10	1 9	3 6	1 4	3 2	2 1		
159	37	12	1 11	1 10	1 9	3 6	3 3	3 1			
160	231	11	1 11	1 10	1 9	3 6	2 3	3 2			
161	221	11	1 11	1 10	1 9	2 6	2 5	4 2			
162	151	11	1 11	1 10	1 9	2 6	4 4	2 1			
163	237	10	1 11	1 10	1 9	2 6	3 4	2 3			
164	132	10	1 11	1 10	1 9	1 6	3 5	3 3			
165	226	10	1 11	1 10	1 9	1 6	2 5	3 4	1 2		
166	54	12	1 11	1 10	2 8	3 5	1 3	1 2	3 1		
167	275	11	1 11	1 10	2 8	3 5	4 2				
168	168	11	1 11	1 10	2 8	2 5	2 4	2 2	1 1		
169	206	10	1 11	1 10	2 8	1 5	3 4	2 3			
170	170	11	1 11	1 10	1 8	1 7	2 6	1 4	1 3	2 2	1 1
171	65	11	1 11	1 10	1 8	1 7	1 6	2 5	2 3	2 1	
172	248	10	1 11	1 10	1 8	1 7	1 6	1 5	2 4	1 3	1 2

21

173	204	10	1 11	1 10	1 8	3 6	1 5	2 3	1 2	
174	174	10	1 11	1 10	1 8	2 6	2 5	2 4	1 1	
175	17	13	1 11	1 10	4 7	2 3	5 1			
176	96	12	1 11	1 10	4 7	1 3	3 2	2 1		
177	21	12	1 11	1 10	3 7	1 6	2 4	4 1		
178	137	10	1 11	1 10	3 7	1 6	4 3			
179	99	11	1 11	1 10	3 7	2 5	1 4	1 2	2 1	
180	277	10	1 11	1 10	3 7	2 5	2 3	1 2		
181	242	10	1 11	1 10	2 7	2 6	1 5	1 4	2 2	
182	123	10	1 11	1 10	2 7	1 6	3 5	1 3	1 1	
183	183	10	1 11	1 10	1 7	4 6	1 4	1 3	1 1	
184	42	11	1 11	1 10	6 6	3 1				
185	285	9	1 11	1 10	4 6	3 5				
186	214	11	1 11	3 9	4 4	3 2				
187	48	11	1 11	3 9	3 4	3 3	1 1			
188	105	11	1 11	2 9	1 8	3 5	1 3	2 2	1 1	
189	129	10	1 11	2 9	1 8	2 5	1 4	3 3		
190	44	11	1 11	2 9	1 7	2 6	1 4	2 3	2 1	
191	128	10	1 11	2 9	1 7	1 6	2 5	2 3	1 2	
192	49	10	1 11	2 9	3 6	3 4	1 1			
193	148	11	1 11	1 9	2 8	2 6	2 4	1 2	2 1	
194	232	10	1 11	1 9	2 8	2 6	1 4	2 3	1 2	
195	223	10	1 11	1 9	2 8	1 6	2 5	1 4	2 2	
196	108	11	1 11	1 9	1 8	3 7	2 3	2 2	1 1	
197	225	10	1 11	1 9	1 8	2 7	1 6	2 4	2 2	
198	113	10	1 11	1 9	1 8	2 7	2 5	1 4	1 3	1 1
199	234	9	1 11	1 9	1 8	3 6	2 5	1 4		
200	110	10	1 11	1 9	3 7	1 6	2 5	1 2	1 1	
201	135	9	1 11	1 9	3 7	3 5	1 4			
202	238	9	1 11	1 9	2 7	3 6	2 4			
203	64	10	1 11	3 8	2 7	3 3	2 1			
204	173	10	1 11	3 8	1 7	1 6	2 4	1 3	1 1	
205	57	11	1 11	3 8	1 7	3 5	3 1			
206	169	10	1 11	3 8	2 6	2 5	1 2	1 1		
207	250	9	1 11	2 8	2 7	1 6	1 5	2 4		

208	258	9	1 11	2 8	1 7	3 6	1 5	1 3	
209	282	9	1 11	1 8	4 7	2 5	1 3		
210	210	14	4 10	10 2					
211	70	12	3 10	1 9	6 3	1 2	1 1		
212	23	12	3 10	1 8	4 4	1 3	3 1		
213	217	11	3 10	1 8	4 4	3 2			
214	186	11	3 10	1 7	3 5	4 2			
215	28	11	3 10	1 7	1 5	4 4	2 1		
216	8	14	3 10	3 6	1 5	7 1			
217	213	11	3 10	3 6	1 4	4 2			
218	73	11	3 10	3 6	3 3	1 2	1 1		
219	83	10	3 10	2 6	1 5	1 4	3 3		
220	220	10	3 10	2 6	4 4	1 2			
221	161	11	2 10	2 9	4 4	1 3	1 2	1 1	
222	62	11	2 10	1 9	1 8	3 5	2 3	2 1	
223	195	10	2 10	1 9	1 8	2 5	2 4	1 3	1 2
224	155	11	2 10	1 9	1 7	2 6	1 5	3 2	1 1
225	197	10	2 10	1 9	1 7	2 6	1 4	2 3	1 2
226	165	10	2 10	1 9	1 7	1 6	1 5	3 4	1 1
227	61	11	2 10	2 8	2 6	1 5	1 3	1 2	2 1
228	228	10	2 10	2 8	2 6	2 4	2 2		
229	80	10	2 10	2 8	1 6	2 5	1 4	1 3	1 1
230	20	12	2 10	1 8	3 7	1 4	1 3	4 1	
231	160	11	2 10	1 8	3 7	1 4	3 2	1 1	
232	194	10	2 10	1 8	2 7	1 6	1 5	1 3	2 2
233	78	10	2 10	1 8	1 7	3 6	2 3	1 1	
234	199	9	2 10	1 8	1 7	1 6	3 5	1 4	
235	235	9	2 10	1 8	4 6	2 4			
236	26	10	2 10	4 7	1 5	1 4	3 1		
237	163	10	2 10	3 7	2 6	1 4	1 2	1 1	
238	202	9	2 10	2 7	3 6	1 5	1 3		
239	93	11	1 10	3 9	3 5	1 4	1 2	2 1	
240	276	10	1 10	3 9	3 5	2 3	1 2		
241	247	10	1 10	2 9	1 8	2 6	1 5	1 3	2 2
242	181	10	1 10	2 9	1 8	2 6	2 4	1 3	1 1

21

243	98	11	1 10	2 9	3 7	1 4	1 3	1 2	2 1		
244	269	10	1 10	2 9	3 7	3 3	1 2				
245	120	10	1 10	2 9	2 7	1 6	1 5	2 3	1 1		
246	246	9	1 10	2 9	1 7	2 6	1 5	2 4			
247	241	10	1 10	1 9	2 8	2 7	1 4	1 3	2 2		
248	172	10	1 10	1 9	2 8	1 7	1 6	1 5	1 4	1 2	1 1
249	279	9	1 10	1 9	2 8	1 7	2 5	2 4			
250	207	9	1 10	1 9	2 8	2 6	2 5	1 3			
251	251	9	1 10	1 9	1 8	2 7	2 6	1 4	1 3		
252	101	10	1 10	1 9	4 7	1 6	1 5	2 1			
253	270	9	1 10	1 9	3 7	3 6	1 2				
254	52	12	1 10	5 8	1 3	2 2	3 1				
255	255	11	1 10	5 8	5 2						
256	81	10	1 10	4 8	1 7	1 4	2 3	1 1			
257	260	9	1 10	4 8	1 6	3 4					
258	208	9	1 10	3 8	2 7	1 5	1 4	1 3			
259	67	10	1 10	3 8	1 7	2 6	1 5	2 1			
260	257	9	1 10	3 8	4 6	1 2					
261	278	9	1 10	2 8	3 7	1 6	1 5	1 8			
262	33	12	4 9	3 6	1 2	4 1					
263	41	11	4 9	2 6	1 5	1 4	3 1				
264	119	10	4 9	1 6	3 5	1 2	1 1				

265	136	9	4 9	4 5	1 4			
266	92	11	3 9	1 8	2 7	1 5	2 2	2 1
267	122	10	3 9	1 8	2 7	1 4	2 3	1 1
268	40	11	3 9	1 8	1 7	2 6	1 3	3 1
269	244	10	3 9	1 8	1 7	2 6	3 2	
270	253	9	3 9	1 8	1 7	1 6	3 4	
271	283	9	3 9	1 8	1 7	3 5	1 3	
272	118	10	3 9	3 7	1 6	1 3	1 2	1 1
273	138	9	3 9	3 7	1 5	1 4	1 3	
274	12	13	2 9	4 8	1 4	6 1		
275	167	11	2 9	4 8	1 3	3 2	1 1	
276	240	10	2 9	3 8	1 7	1 5	3 2	
277	180	9	2 9	3 8	2 6	1 3	1 2	1 1
278	261	10	2 9	3 8	1 6	1 5	1 4	1 3
279	249	9	2 9	2 8	1 7	2 6	1 5	1 2
280	103	10	2 9	1 8	4 7	1 4	2 1	
281	281	9	2 9	1 8	4 7	2 3		
282	209	9	1 9	4 8	1 7	1 6	2 3	
283	271	9	1 9	3 8	3 7	1 4	1 2	
284	56	11	6 8	1 7	1 2	3 1		
285	185	9	4 8	3 7	1 6	1 1		

Линейные системы кривых, связанных с арифметическими решениями Кремоновых уравнений.

Б. К. Млодзеевский (Москва).

Известно, что так называемые арифметические решения Кремоновых уравнений соответствуют линейным системам распадающихся кривых, не пригодным для Кремоновых преобразований. Такое распадение всегда сводится к тому, что от всех кривых системы отделяются одна или несколько определенных уникурсальных кривых, пересекающихся как с остающимися частями кривых системы, так и между собою только в основных точках. Эти выделяющиеся кривые суть основные кривые остающейся системы. Если мы обозначим через (C) систему распадающихся кривых, через $M_1, M_2, \ldots M_s$ выпадающие уникурсальные кривые и через (C') систему линий, остающуюся после выделения кривых, то $M_1, M_2, \ldots M_s$ будут основными кривыми для системы (C'). В моей стать «К теории Кремоновых преобразований» я остановился на том случае, когда в «арифметическом» семействе выпадает только одна кривая, простая или кратная. В настоящей статье я рассматриваю общий случай, когда в арифметической линейной системе выпадает несколько кривых с произвольною кратностью. В соответствии с получающимися результатами должны быть исправлены выводы второй части § 15 предыдущей статьи, вытекавшие из неправильного обобщения равенства (27) на случай кратной выпадающей кривой.

Положим, что мы имеем правильную распадающуюся Кремонову систему $(C$ кривых n-го порядка, из которой выпали уникурсальные кривые $M_1, M_2, \ldots M$ порядков $m_1, m_2, \ldots m_s$ каждая соответственно $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s$ раз. Обозначим систему оставшихся нераспадающихся кривых порядка n через (C'). Пусть будет r_k кратность кривых системы (C), в k-ой основной точке, r'_k — кратность в той же точке кривых системы (C') и $q_{1k}, q_{2k} \ldots q_{sk}$ кратности в этой точке кривых $M_1, M_2, \ldots M_s$. Мы будем иметь:

$$n = n' + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l m_l,$$

$$r_k = r'_k + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l q_{lk} \qquad (k = 1, 2, \ldots p).$$

Подставляя эти выражения в Кремоновы уравнения

$$\sum_{k=1}^{k=p} r_k = 3(n-1), \quad \sum_{k=1}^{k=p} r_k^2 = n^2 - 1,$$

получим:

$$\sum_k (r'_k + \sum_l \mu_l q_{lk}) = 3(n' + \sum_l \mu_l m_l) - 3 \tag{1}$$

$$\sum_k (r'_k + \sum_l \mu_l q_{lk})^2 = (n' + \sum_l \mu_l m_l)^2 - 1. \tag{2}$$

Так как каждая из выпадающих кривых — уникурсальная и вполне определяется своими основными точками, то мы имеем:

$$\sum_k q_{lk} = 3m_l - 1 \tag{3}$$

$$\sum_k q_{lk}^2 = m_l^2 + 1 \qquad (l = 1, 2, \ldots s) \tag{4}$$

Так как кривые системы (C') пересекаются с каждою из выпадающих кривых M_l только в основных точках, то

$$\sum_k r_k' \, q_{lk} = n'm_l \qquad (l = 1, 2, \ldots s) \tag{5}$$

Наконец, так как выпадающие кривые пересекаются между собою тоже только в основных точках, то

$$\sum_k q_{lk} \, q_{l'k} = m_l \, m_{l'} \qquad (l, l' = 1, 2, \ldots s) \tag{6}$$

Из уравнений (1), (3) находим:

$$\sum_k r'_k = 3n' - 3 + \sum_l \mu_l \tag{7}$$

$$\sum_k r'^2_k = n'^2 - 1 - \sum_l \mu_l^2 \tag{8}$$

Отсюда находим для системы (C') следующие выражения измерения или ступени h' и рода g'

$$h' = \frac{1}{2} n'(n' + 3) - \frac{1}{2} \sum_k r_k (r_k + 1) = 2 + \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \, (\mu_l - 1) \tag{9}$$

$$g' = \frac{1}{2} (n' - 1)(n' - 2) - \frac{1}{2} \sum_k r_k (r_k - 1) = \frac{1}{2} \sum_l \mu_l \, (\mu_l + 1). \tag{10}$$

Эти выражения показывают, что если все выпадающие кривые — однократные, то система (C'') остается двух измерений, но что кривые (C') не могут быть уникурсальными.

Выражения (7) — (10) имеют ту особенность, что они зависят только от кратностей выпадающих кривых, а не от их порядков.

Так и должно быть, так как мы можем превратить выпадающие кривые в другие уникурсальные кривые любых порядков, не нарушая последних соотношений.

Поэтому мы всего проще составим арифметические Кремоновы сети с данными выпадающими кривыми, если примем порядки всех этих кривых равными нулю и затем, составив соответствующую сеть, квадратичными преобразованиями превратим эти кривые нулевого порядка в уникурсальные кривые соответствующих порядков.

В случае одной выпадающей кривой, имеем:

$$h' = 2 + \frac{1}{2} \mu \, (\mu - 1), \quad g' = \frac{1}{2} \mu \, (\mu - 1).$$

Эти формулы должно поставить на место последних формул § 15 предыдущей статьи. Выражения (7), (8) показывают, что Кремоновы системы могут быть с любым числом выпадающих кривых, если только порядок системы достаточно высок.

Найдем, например, распадающиеся системы, содержащие одну простую и одну двукратную выпадающую кривую, полагая в формулах (7), (8) $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, получим:

$$\sum_k r_k = 3n, \quad \sum_k r_k^2 = n^2 - 6, \quad h' = 3, \quad g' = 4.$$

Мы можем здесь заменить n' и r' через n и r, если условимся не считать точек кратности -1 и -2, так как отбрасывая выпадающие линии нулевого порядка, мы не меняем ни порядка системы, ни кратности ее остальных основных точек, и потому $n' = n$, $r_k = r'_k$. Мы будем искать только те решения уравнений

$$\sum_k r_k = 3n, \quad \sum_k r_k^2 = n^2 - 6,$$

которые удовлетворяют условию

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqslant n,$$

так как остальные решения могут быть приведены к этим посредством Кремоновых преобразований.

Таких систем существует шесть:

1) $n = 5$; 2**2**, 11 **1**, 2) $n = 6$; 1**4**, 14 **1**, 3) $n = 6$; 6**2**, 6**1**,
4) $n = 7$; **13**, 8**2**, 2**1**, 5) $n = 9$; 8**3**, 3**1**, 6) $n = 12$; 8**4**, **13**, 1 **1**. (11)

Sur les systèmes linéaires de courbes liées aux solutions arithmétiques des équations Crémoniennes.

B. Mlodzieiowski.

(*Résumé*).

Nous appelerons système Crémonien arithmétique tout système linéaire de courbes dont les multiplicités aux points fondamentaux forment des solutions arithmétiques des équations de Crémona. On sait que dans ce cas les lignes du système contiennent une partie commune composée de lignes unicursales de différents ordres.

Dans mon Mémoire «Sur la théorie des transformations Crémoniennes» (p. 7 de ce Recueil) j'ai consideré le cas où la partie commune qui se détache du système Crémonien arithmétique ne contient qu'une seule ligne simple ou multiple. Ici je discute le cas général, où cette partie commune est d'une composition quelconque; cette discussion conduit en particulier à corriger une conclusion inexacte qui se trouve à la fin du § 15 du Mémoire précédent.

Soit (C) un système Crémonien arithmétique régulier de coubres (C) d'ordre n ayant p points fondamentaux de multiplicités $r_1, r_2, \cdots r_p$. Cette famille est formée d'une famille de courbes indécomposables (C') d'ordre n', ayant aux points fondamentaux les multiplicités $r'_1, r'_2, \cdots r'_p$ et de lignes unicursales $M_1, M_2, \cdots M_s$

d'ordres m_1, $m_2, \cdots m_s$ et de multiplicités μ_1, $\mu_2, \cdots \mu_s$, possédant en chaque poin fondamental A_k du système (C) les multiplicités q_{1k}, $q_{2k}, \cdots q_{sk}$. Ces lignes (M) forment la partie commune de toutes les courbes de la famille (C). Comme on a

$$n = n' + \sum_{l=1}^{l=s} \mu_l m_l, \quad r_k = r'_k + \sum_l \mu_l q_{lk}, \quad (k = 1, 2, \cdots p)$$

les équations de Crémona prennent la forme (1), (2); ensuite, les équations (3), (4) expriment que chaque ligne M est unicursale et est determinée par les points fondamentaux; quant aux équations (5), (6), elles découlent de ce que les lignes (M) ne se rencontrent entre elles et avec les courbes (C') qu'aux points fondamentaux. Ces systèmes de relations conduisent aux équations (7) — (10). Les deux équations (9), (10) donnent la dimension h' et le genre g' de la famille (C') qui forme avec les lignes (M) un système Crémonien arithmétique (C). Si l'on pose en particulier $s = 1$, on a les formules

$$h' = 2\,\frac{\mu_1(\mu_1 - 1)}{2}, \quad g' = \frac{\mu_1(\mu_1 + 1)}{2},$$

qui doivent remplacer celles de la fin du § 15 du mémoire rappelé plus haut. Les équations (9), (10) montrent qu'on peut former des systèmes Crémoniens arithmétiques ayant un nombre arbitraire de lignes M avec des multiplicités égalemant arbitraires.

On observe que dans les équations (7) — (10) n'interviennent pas les ordres des lignes M mais seulement leurs multiplicités. D'après cela si l'on veut avoir un système arithmétique (C) contenant un nombre déterminé de lignes M d'ordres et de multiplicités données, il suffit de former un tel systéme du même caractère, mais où toutes les lignes M seraient de l'ordre nul, c'est à dire se reduiraient à des points. En soumettant une telle famille à une transformation Crémonienne convenable on obtient une famille (C) où les lignes M sont des courbes des ordres demandés.

Les formules (11) donnent les ordres et les multiplicités aux points principaux des six familles (C') qui avec deux lignes de l'ordre nul, dont une simple et l'autre double forment ce système arithmétique (C). En appliquant à ses systèmes des transformations Crémoniennes on peut obtenir tous les systèmes arithmétiques ayant une ligne simple et une autre double. Ici l'on a

$$h' = 3, \quad g' = 4.$$