Алгоритм Уоршелла є ефктивним методом побудови транзитивного замкненя на відношенні. Дія цього алгоритму полягає в перетворенні вхідної матриці M_R , яка відображає відношення R, в вихідну транспоновану матрицю M_{R*} на відношенні R*. В свою чергу R* є транзитивним замкненням від відношення R.

Принцип дії алгоритму :

Задано відношення R на n-елементарній множині A={a_1,a_2,a_3,...,a_n}. Алгоритм Уоршелла будує послідовність булевих матриць W^0,W^1, W^2, ... , W^n, де W^0=M_R — матриця відношення R. Елементи матриці $W^{(k)}$ позначимо як $w_{ij}^{(k)}$. Якщо існує шлях із вершини a_i до вершини a_j такий, що всі його внутрішні вершини містяться в множині {a_1,a_2, ... ,a_n}, утвореній першими k вершинами, то $w_{ij}^{(k)}$=1, а ні, то $w_{ij}^{(k)}$=0. Перша й остання вершини такого шляху можуть і не належати множині вершин {a_1,a_2, ... ,a_k}. Зазначимо, що Wn=MR*.

Алгоритм Уоршалла ефективно обчислює матрицю Wk за матрицею W(k-1). Шлях із вершини ai у вершину aj із внутрішніми вершинами в множині {*a1,a2, ... ,ak*} існує лише в двох випадках:

1. Якщо існує шлях із вершини ai у вершину aj із внутрішніми вершинами лише в множині {a_1,a_2, ... ,$a_{(k-1)}$}. (рис. 1).
2. Якщо існує шлях із вершини a_i у вершину a_k та шлях із вершини a_k у вершину a_j, і кожний із цих шляхів має внутрішні вершини лише в множині {a_1,a_2, ... ,$a_{(k-1)}$}(рис.2)

У випадку 1 шлях існує тоді і лише тоді, коли $w_{ij}^{(k-1)}$=1, у випадку 2 — коли обидва елементи $w_{ik}^{(k-1)}$ та $w_{kj}^{(k-1)}$ дорівнюють 1. Отже,

$w_{ij}^{(k)} = w_{ij}^{(k-1)} \square (w_{ik}^{(k-1)} \square w_{kj}^{(k-1)})$, *k=1,2,...,n.*

Формула для практичної реалізації:

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ik}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, якщо\_ w_{kj}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, якщо\_ w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Окрім того очевидно, що в разі i=k дії в першому рядку формули можна не виконувати. Отже,

$$w_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ik}^{(k-1)} \vee w_{kj}^{(k-1)}, \text{якщо } i \neq k \text{ та } w_{kj}^{(k-1)} = 1, \\ w_{ij}^{(k-1)}, \text{якщо } i = k \text{ чи } w_{ik}^{(k-1)} = 0. \end{cases}$$

Остання формуда дає таке правило переходу від матриці $W^{(k-1)}$ до матриці $W^{(k)}$: для значень $i \neq k$ в разі $w_{ik}^{(k-1)}$=1 замінити і-й рядок матриці $W^{(k-1)}$ на диз'юнкцію *i*-го й *j*-го рядків цієї матриці.

Формальний алгоритм Уоршалла:

(i та j змінюються від 1 до n)

1. *Виконати W=M_R, k=0. Ітерація.*
2. *Виконати k=k+1;*
3. *Для всіх $i \neq k$ таких, що w_{ik}=1 і для всіх j виконати операцію* $w_{ij} = w_{ij} \vee w_{kj}$. *Перевірка закінчення.*
4. *Якщо k=n, то зупинитись. Отримано розв'язок W = M_{R*}. Інакще перейти до кроку 2.*

Приклад.

Відношення задано матрицею :

$$M_R=W^{(0)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

За алгоритмом Уоршалла побудуємо транзитивне замкнення цього відношення. Для $k=1$ перший рядок залишаємо без змін $(i=k)$, другий і третій рядки заміняємо на диз'юнкцію кожного з них із першим :

$$W^{(1)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Для $k=2$ отримаємо, що $W^{(2)}=W^{(1)}$, бо всі елементи другого стовпця матриці $W^{(1)}$ нульові.
Далі, для $k=3$ одержимо :

$$W^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$

І, нарешті, коли $k=4$ матимемо остаточний результат — матрицю транзитивного замкнення :

$$M^{R^*}=W^{(4)}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}$$