VII. AREA ELLISSE

AREA DEL SETTORE DELL'ELLISSE

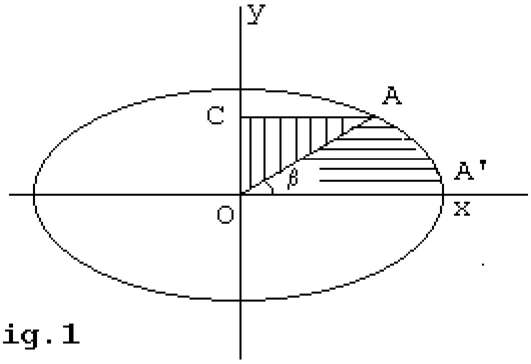


Fig.1

I°) Sia $S(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\,dx$ l’area OCAA’.

La funzione S(x) deve essere tale che $\frac{dS(x)}{dx}=y=\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}$ e poiché è $S(x)=\frac{1}{2}xy+\text{area settore OAA'}$ e l’arco AA’ è tale che il suo coseno vale $\frac{x}{q}$ avremo $\frac{\text{Area settore OAA'}}{S}=\frac{arc\cos\frac{x}{q}}{\frac{\pi}{2}}$

e quindi $S(x)=\frac{1}{2}x\frac{m}{q}\sqrt{q^2-x^2}+\frac{2S}{\pi}arc\cos\frac{x}{q}$ espressione che derivata e semplificata darà la Funzione primitiva:

$$S(x)=\frac{m}{q}\left(\frac{x\sqrt{q^2-x^2}}{2}+\frac{q^2}{2}arc\cos\frac{x}{q}\right)=OCAA'$$

che per x = q cosα; y = m senα diventa:

$$S(x)=OCA+OAA'=\frac{qm}{2}(\cos\alpha sen\alpha+arc\cos\cos\alpha)$$

da cui: $S(x)_{(OAA')}=\frac{qm}{2}arc\cos\cos\alpha=\frac{qm}{2}\frac{\alpha^o\pi}{180}$ (cioè α in radianti)

II°)INTEGRALE DI VAG. In modo più rigoroso possiamo calcolare l’integrale delle uguaglianze parametriche $x=q\cos\alpha;\ y=m\,sen\alpha$

$$S(x)=\int q\cos\alpha\, m(\cos\alpha)\,d\alpha=qm\int\cos^2\alpha\,d\alpha=qm\int\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\,d\alpha=$$

$$=qm\left[\int\frac{d\alpha}{2}+\int\frac{\cos 2\alpha\ d\alpha}{2}\right]=qm\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{sen2\alpha}{4}\right)=\frac{qm}{2}\alpha+\frac{q\cos\alpha\ \ msen\alpha}{2}$$

$$\left(\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha);\quad 2\alpha=t\quad d\alpha=\frac{1}{2}dt;\quad \int\frac{\cos t}{2}dt=\frac{1}{2}sent=\frac{1}{2}sen2\alpha\right)$$

l’ultimo membro dell’espressione <u>S</u> è l’area OCA per cui avremo in radianti l’area $S(x)_{OAA'}=\frac{mq}{2}\alpha$

(Vedere esempi numerici più avanti)

Come si vede l'area dell'Ellisse dipende dall'angolo α legato all'Ellisse dalla relazione: $\tan\beta=\frac{m}{q}\tan\alpha$

AREA ELLISSE E CORONA CIRCOLARE

Essendo α in radianti, da ciò che abbiamo visto l'area di un settore dell'Ellisse e':

$$S = \frac{qm}{2} arc\cos(\cos\alpha) = \frac{qm}{2}\alpha$$

dove per $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\quad S = \frac{qm}{2}\frac{\pi}{2}$ area quadrante Ellisse

Se sostituiamo q = R + r e m =R - r, l'area del settore dell'Ellisse sarà:

$$S = \frac{qm}{2}\alpha = \frac{R^2 - r^2}{2}\alpha$$

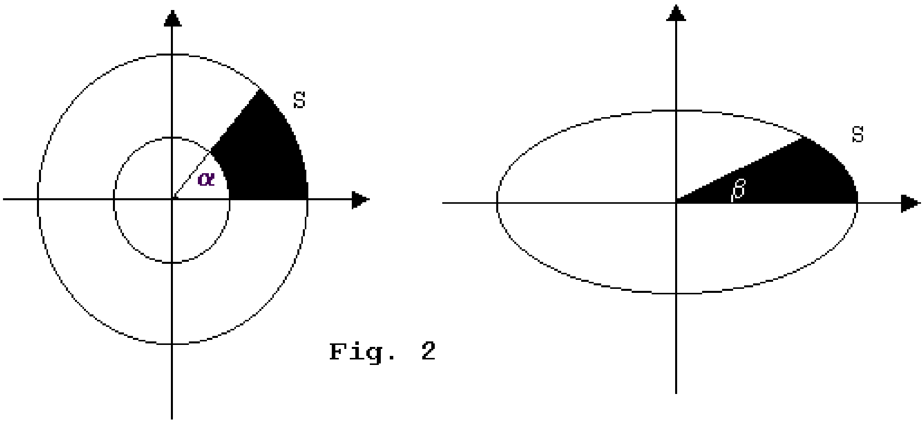


Fig. 2

E poichè α e' l'angolo delle circonferenze R ed r (Cap. V° ELLISSE), quest'ultima formula oltre che a rappresentare l'area di un settore dell'Ellisse rappresenta anche l'area di un settore della corona circolare di raggio (R-r) di uguale valore:

L'area di un settore di Ellisse di angolo β e' uguale all'area di un settore di corona circolare di angolo α corrispondente a β mediante la formula $\alpha = arc\tan(\frac{q}{m}\tan\beta)$.

Possiamo anche aggiungere che l’area di un settore di Ellisse è proporzionale all’angolo che forma l’area del settore della corona circolare $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{qm}{2} = \frac{R^2 - r^2}{2} = \text{costante}$. Si tenga presente che l’angolo dell’area del settore dell’Ellisse va preso iniziando da zero,cioè dall’asse delle ascisse con movimento antiorario.

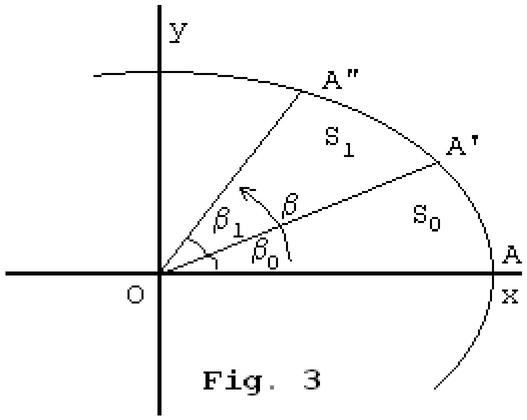


Fig. 3

Nell’Ellisse in figura si ha che $\beta = \beta_1 + \beta_0$ e $S = S_1 + S_0$ dove S è l’area del settore relativo a β. In realtà i due angoli calcolabili sono β e β_0 perché partono dall’ascissa ed essi danno luogo ai due angoli del settore corona-circolare α e α_0, tramite $\tan\alpha = \frac{q}{m}\tan\beta$ e $\tan\alpha_0 = \frac{q}{m}\tan\beta_0$; mentre β_1 non può dare il valore di α_1 non partendo dal valore zero dell’ascissa. Questo perché gli angoli dell’ellisse non sono proporzionali alle aree, mentre le aree della corona-circolare (uguali alle aree dell’ Ellisse) sono proporzionali ai propri angoli, quindi $\frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S}{\alpha}$ ma dove si deve tener presente che nel rapporto $\frac{S_1}{\alpha_1}$, α_1 non ha un corrispettivo βeta nella Ellisse, perché l’area S_1 assume un valore posizionale in quanto l’integrale che la determina vale a partire dall’ascissa.
Noti β e β_0 si calcolerà S e S_0 e poi $S_1 = S - S_0$ e mediante la proporzione sopra indicata si troverà $\alpha_1 = \frac{S_1\alpha_0}{S_0}$ *].

[**ESEMPIO 1**: dell’Ellisse in Fig. 3 siano i semi-assi q=3, m=2 ed i punti A’(2,320424812; 1,267653772) A”(0,589580871; 1,960996844)e i rispettivi angoli al centro:

$$\beta_0 = \arctan\frac{1{,}267653772}{2{,}320424812} = 28{,}64788823 \quad \text{e} \quad \beta = \arctan\frac{1{,}960996844}{0{,}589580871} = 73{,}266403°$$

mentre avremo gli angoli parametrici:

$$\alpha_0 = \arctan\frac{q}{m}\tan\beta_0 = 39{,}333031° = 0{,}686490895^{Rad}$$

$$\alpha = \arctan\frac{3}{2}\tan 73{,}266403 = 78{,}66606232° = 1{,}372981797^{Rad}$$

(entrambe anche con la formula parametrica $x = q\cos\alpha$ o $y = m\sin\alpha$)
e le rispettive aree ellittiche:

$$S_0 = 1.5 \cdot 0{,}686490895^{Rad} = 1{,}029736343 \qquad S = \frac{mq}{2}\alpha = 1{,}5 \cdot 1{,}372981797^{Rad} = 2{,}059472696$$

$$S_1 = S - S_0 = 2{,}059472696 - 1{,}029736343 = 1{,}029736353$$

Come vediamo l’Area S è doppia dell’Area S_0, quindi se $S_0 = S_1$, poiché sappiamo che $\frac{S}{\alpha} = \frac{S_0}{\alpha_0} = \frac{S_1}{\alpha_1} = \frac{mq}{2}$ dovrà essere $\alpha_0 = \alpha_1$, ma α_1 non è determinabile dalle formule di calcolo viste in quanto l’area S_1 non è adiacente all’ascissa quindi da α_1 non possiamo calcolare l’angolo al centro β_1 che va calcolato per differenza:

$$\beta_1 = \beta - \beta_0 = 73{,}266403° - 28{,}6478664° = 44{,}6185366°$$

Tale angolo se fosse adiacente all’ascissa avrebbe come ipotetico angolo parametrico $\alpha_1^{'} = arc\tan\frac{q}{m}\tan 44{,}6185366° = 55{,}95690767°$ anziché $\alpha_1 = \alpha_0 = 39{,}333031°$.]

AREA PARZIALE DELL’ELLISSE

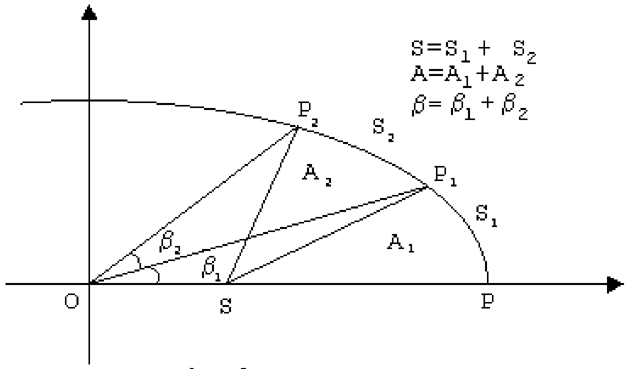


Fig.4

Sia (vedi Fig.4) **S_1** l’area ed **E_1** il relativo angolo parametrico in radianti di una Ellisse (di semiassi q > m); inoltre sia l’area $POP_2 = S = (S_1 + S_2)$ ed **E** l’angolo parametrico relativo in radianti, abbiamo visto che $\frac{S}{E} = \frac{S_1}{E_1} = \frac{qm}{2}$. Ed osservando la Fig.4 vediamo:

$$A = S - area\,SOP_2 = S - \frac{\overline{OS}\, m \sin E}{2}$$

e sostituendo S: $A = \frac{mq}{2}E - \frac{OS\,m}{2}\sin E = \frac{mq}{2}\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right)$.

Si consideri che essendo il punto S tra O e P è sempre $\mathbf{\frac{OS}{q} < 1}$, dove OS è una qualunque distanza dal centro Ellisse.
Volendo il valore dell’area A_2 con A_2=A-A_1, sempre <u>a partire dall’ ascissa</u> come per le aree S_1 e S, si avrà:

$$A_1 = \frac{mq}{2}\left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)$$

pertanto $A_2 = A - A_1 = \frac{mq}{2}\left[\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)\right]$.

Cioè $$\frac{A}{E - \frac{OS}{q}\sin E} = \frac{A_1}{E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1} = \frac{A_2}{\left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right) - \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)}$$

Posto $M = \left(E - \frac{OS}{q}\sin E\right)$ e $M_1 = \left(E_1 - \frac{OS}{q}\sin E_1\right)$ (M e M_1 sono valori in Rad)

avremo $\frac{A}{M} = \frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M - M_1}$ posto M_2=M-M_1 avremo $\frac{A_1}{M_1} = \frac{A_2}{M_2}$

e se A_1=A_2 dovrà essere $M_2 = M_1$: analogamente a quanto visto precedentemente per l’area S_1 e α_1, l’angolo M_2 (proporzionale a A_2) non ha un corrispettivo **β**eta nella ellisse, ma dovrà essere ricavato per differenza.

Possiamo allora scrivere la relazione geometrica che lega le aree dell’ellisse agli angoli di riferimento: $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{qm}{2}$ e $\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ per cui $\frac{S_1}{E_1}=\frac{S_0}{E_0}=\frac{A_1}{M_1}=\frac{A_2}{M_2}=\frac{qm}{2}$ con i relativi significati visti per S,A,E,M.

ESEMPIO 2: Sia una ellisse di semiassi q=3 e m=2 (vedi **Fig.4**) e sia l’angolo di riferimento in radianti

$\alpha_1 = 39{,}333031°\frac{\pi}{180} = 0{,}686490895^{Rad}$ la distanza OS=1,5 (per cui $\frac{\overline{OS}}{q}=0{,}5$).

Sappiamo essere $\beta_1 = \arctan\frac{2}{3}\tan 39{,}333031° = 28{,}647888°$

$$M_1 = (0{,}686490895^R - 0{,}5\sin 0{,}686490895^R) = 0{,}369577452$$

M_1 è necessariamente in Rad perché proviene da α^R

e quindi l’area $A_1 = \frac{3\cdot 2}{2}M_1 = 1{,}108732356$

Posto $A=A_1+A_2$ e $A_1=A_2$ sappiamo $\frac{A_1}{M_1}=\frac{1{,}108732356}{0{,}369577452}$ quindi $\frac{A}{M}=\frac{2A_1}{2M_1}=\frac{2{,}217464712}{0{,}739154904}$

dovrà allora essere $M=\alpha-0{,}5\sin\alpha=0{,}739154904$ dove α è l’angolo di riferimento del settore A. Risolvendo α rispetto a M abbiamo α=1,206308053 infatti:

$M=1{,}206308053-0{,}5\sin 1{,}206308053=0{,}739154903$ sufficientemente vicino al valore M di partenza.

Il valore $\frac{A_2}{M_2}$ è dato da $M_2=M_1$ ma in realtà M_2 non ha corrispondenza con l’area A_2 segnata in **Fig.4** in quanto l’area non è adiacente all’ ascissa; esso è un valore proporzionale.

PROPRIETA’ DELLE AREE DELL’ELLISSE

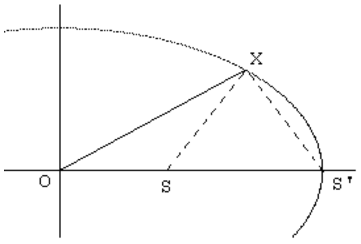


Fig. 5

L’espressione $M = (E - \frac{OS}{q}\sin E)$ determina l’area di un qualunque settore di ellisse; infatti ogni punto dell’ellisse è determinato dall’angolo parametrico E mentre la posizione del punto S lungo l’ascissa ne determina l’area (vedi Fig.5).

per $OS = 0$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}E$ area $OS'\widehat{X}O$

per $OS < q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}(E - \frac{OS'}{q}\sin E)$ area $SS'\widehat{X}S$

per $OS = q$ avremo $S_x = \frac{mq}{2}(E - \sin E)$ area $S'\widehat{X}S'$

Dato il rapporto $\frac{OS}{q} = \varepsilon$ potremo scrivere per qualsivoglia area

$$S_x = \frac{mq}{2}(E - \varepsilon \sin E) = \frac{mq}{2}M\ .$$

Possiamo anche considerare il valore $\sqrt{qm} = R$ come raggio di una

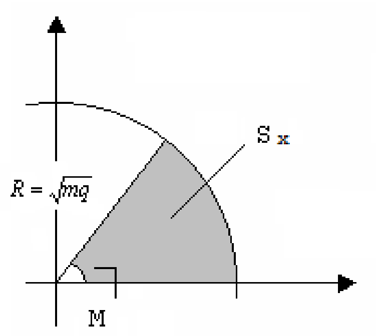
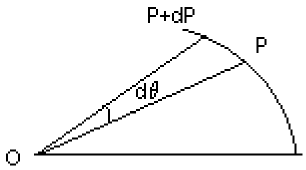


Fig. 5bis

circonferenza, che darà sempre $S_x = \frac{qm}{2}M = \frac{R^2}{2}M$ per cui l’area della circonferenza vale la relativa area dell’ ellisse e se il suo tempo di percorrenza o Rivoluzione è P, esso varrà sia per l’ellisse sia per la circonferenza. Ora se P è un valore medio possiamo ipotizzare che l’arco della circonferenza verrà spazzata a velocità costante e quindi ad ogni tempuscolo t corrisponda un angolo al centro ed a questi la relativa area della circonferenza che a sua volta rappresenta un’area dell’ellisse. Inoltre per valori di t uguali si avranno nella circonferenza angoli al centro ed aree uguali, corrispondenti ad aree $\mathbf{S_x}$ dell’Ellisse uguali e percorse nello stesso tempo.
Da tutte queste considerazioni possiamo dire che nella circonferenza di riferimento di una ellisse, per la legge temporale, le aree S_x, sono lineari in un intervallo di tempo ed i punti del perimetro che le determinano possono essere animati da un moto di velocità angolare costante nella circonferenza ma diversa nella ellisse: questo ci permette di definire la proprietà dell’ Ellisse, relativa ad una qualunque area $\mathbf{S_x}$:

AREE UGUALI SONO PERCORSE IN TEMPI UGUALI

Si consideri che la Fig.5 bis ci richiama, dal punto di vista geometrico, il concetto di



velocità areale: «intenderemo per velocità areolare $\frac{dS}{dt}$ *il rapporto fra l’area dS descritta nell’intervallo infinitesimo (t,t+dt) dal raggio vettore e lo stesso dt. L’area dS descritta da P-O nel tempo dt vale a meno di infinitesimi di ordine superiore, un settore circolare di raggio uguale a* ρ *(valore del raggio vettore all’istante t) e di angolo al centro d*θ*, incremento di* θ *nell’intervallo (t,t+dt). Si ha allora* $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$ *. Quindi la velocità areale è* $S' = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2 \frac{d\theta}{dt}$

“Dario Graffi-MECCANICA RAZIONALE- C.Editrice Prof.R.Pàtron”.

L’ultima espressione è la stessa vista per $\rho^2 = \left(\sqrt{mq}\right)^2$, quando si sia preso per angolo al centro gli angoli del vettore dell’ellisse, la relazione che lega questi agli angoli M e le rispettive aree S_x.

In **ASTRONOMIA** il valore E è detto **Anomalia Eccentrica** e quando il valore OS è uguale alla semidistanza focale (c) per cui $\frac{OS}{q} = \frac{c}{q} = e$ (eccentricità) il valore $M = (E - e\sin E)$ è chiamato **Anomalia Media** (Mean Anomaly), inoltre la proprietà di uguaglianza tra le aree, per uno stesso tempo è chiamata *Seconda Legge Sperimentale di Keplero*.

SUL TEOREMA DEI PIANETI E L'AREA DELL'ELLISSE

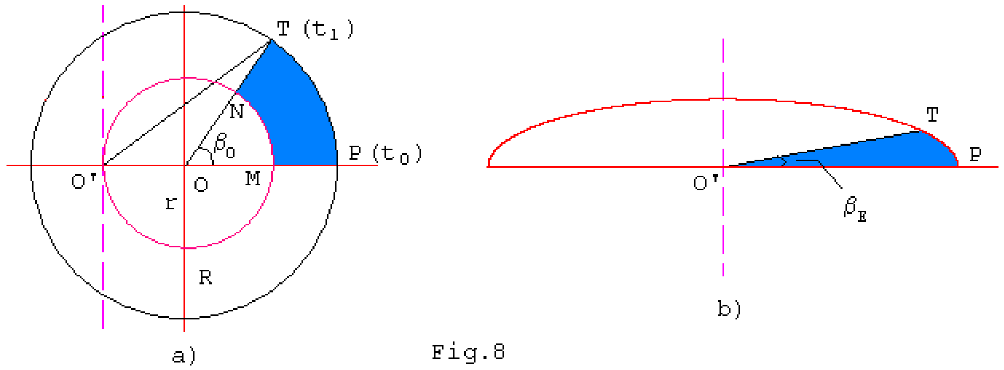


Fig.8

- Per effetto del Teorema dei Pianeti (fig.8) la circonferenza a) di raggio R dà luogo all'ellisse b)(vedi Cap.VI Pag.25-26) di semi assi q=R+r e m=R-r tramite il vettore $\left|\overline{O'T}\right| = q\cos\frac{\beta_0}{2}\cos\beta_E + m\sin\frac{\beta_0}{2}\sin\beta_E$ di angolo $\tan\beta_E = \frac{m}{q}\tan\frac{\beta_0}{2}$ e con T di coordinate $\left(q\cos\frac{\beta_0}{2};m\sin\frac{\beta_0}{2}\right)$.
- Ora volendo calcolare l'area della ellisse così tracciata, (per quanto visto nel paragrafo precedente) tale area risulta essere $\overline{PO'TP} = \frac{mq}{2}\frac{\beta_0}{2} = \frac{R^2-r^2}{2}\frac{\beta_0}{2}$ cioè l'area $\overline{PMNT} = \frac{R^2-r^2}{2}\beta_0$ è il doppio dell' area PO'TP, come indicato dalla velocità areale.
- Se il tracciamento di questa area avviene nel tempo $t=(t_1-t_0)$ vuol dire che l'arco PT della circonferenza e dell' ellisse sono percorsi nello stesso tempo e il punto T con le nuove coordinate dà la effettiva posizione nell'ellisse del punto T della circonferenza. Ma, si tenga conto che il tempo di percorrenza del perimetro nella ellisse vale t/2.

Con $\frac{\beta_0}{2}$ abbiamo tutte le considerazioni viste nel calcolo dell'area dell' ellisse, per cui è possibile calcolare direttamente $M = \left(\frac{\beta_0^R}{2} - \varepsilon\sin\frac{\beta_0}{2}\right)$ partendo da un tempo medio t della circonferenza.

ESEMPIO 3 Sia l'ellisse di semiassi q=3 e m=2 e la circonferenza R=2,5 e r=0,5 e nel tempo t (43,59111827 gg) si abbia $\beta_0 = \frac{360°}{P}t = 42°,96572823$ (P=365,24 gg periodo di rivoluzione)

$\frac{\beta_0}{2} = 21°,48286412$

Dalla circonferenza abbiamo:

$\overline{O'T}^2 = (2{,}5)^2 + (0{,}5)^2 + 2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot \cos 42{,}96572823 = 8{,}329403779$

$\overline{O'T} = 2{,}886070647$

****

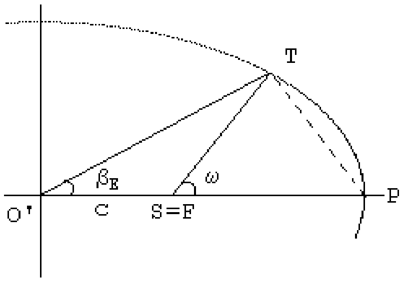


Fig. 9

Tenendo conto del Teorema dei Pianeti applichiamo alla relativa ellisse Fig.9 i dati calcolati nella circonferenza.
Coordinate del punto

$$T \begin{cases} x = 3\cos 21{,}48286412 = 2{,}791581416 \\ y = 2\sin 21{,}48286412 = 0{,}732445886 \end{cases}$$

quadrando e sommando

$$\overline{O'T} = \sqrt{8{,}329403779} = 2{,}886070647$$

Oppure:

$$\beta_E = \arctan\frac{2}{3}\tan 21{,}48286412 = \arctan 0{,}262376648 = 14°{,}70169181$$

$\begin{cases} 2{,}886070647\cos\beta_E = x = 2{,}791581443 \\ 2{,}886070647\sin\beta_E = y = 0{,}732445784 \end{cases}$ da cui $\overline{O'T} = 2{,}886071588$

gli O'T sono uguali al quinto decimale.
Per avere la distanza ST sarà:
$c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ ed eccentricità $e = 0.745355992$

$$\overline{ST} = q(1 - e\cos 21{,}48286412) = 3(0{,}306426021) = 0{,}919278064$$

oppure $\begin{cases} \overline{ST}\cos\omega = x = (2{,}791581443 - \sqrt{5}) = 0{,}555513465 \\ \overline{ST}\sin\omega = y = 0{,}732445784 \end{cases}$ che quadrato e sommato darà ancora 0,919277997 giusto al quinto decimale.

Infine l'angolo $\omega = \arctan\frac{0{,}732445784}{0{,}55513465} = 52°{,}82200003$.