برای مطالعه ی خواص جمله های مثلث کافی هست از تعریف استفاده کنیم

$$\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (۱ \cdot ۳)$$

$$\binom{n+۱}{k} = \binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k}, \qquad (۲ \cdot ۳)$$

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \cdots + \binom{n}{n}b^n. \qquad (۳ \cdot ۳)$$

دنباله های ویژه در داخل مثلث پاسکال:

دنباته *توان ۲:دنباله توان ۲ به صورت زیر می باشد.*

$$۲^{۰} = ۱,\ ۲^{۱} = ۲,\ ۲^{۲} = ۴,\ ۲^{۳} = ۸,\ ۲^{۴} = ۱۶, \ldots$$

الگوی جالبی در داخل مثلث پاسکال برای محاسبه توان ۲ وجود دارد:

$$۲^۰ = ۱$$

$$۲^۱ = ۱ + ۱ = ۲$$

$$۲^۲ = ۱ + ۲ + ۱ = ۴$$

$$۲^۳ = ۱ + ۳ + ۳ + ۱ = ۸$$

$$۲^۴ = ۱ + ۴ + ۶ + ۴ + ۱ = ۱۶$$

$$\vdots$$

جمع عناصر هر سطر به ترتیب توان ۲ ایجاد میکند

با توجه به رابطه (۳,۳)اگر

$$۲^n = \binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n} \qquad (n \geq ۰)$$

اگر a=1وb=-1به رابطه ی زیر میرسیم

$$۰^n = \binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \cdots + (-۱)^n \binom{n}{n} \qquad (n \geq ۰)$$

در رابطه اخیر اگر n=0قرارداد $۰^۰=۱$

با مشتق گیری از طرفین رابطه ی (۳,۳)برای a=xوb=1داریم

$$n(۱ + x)^{n-۱} = \binom{n}{۱} + ۲\binom{n}{۲}x + \cdots + r\binom{n}{r}x^{r-۱} + \cdots + nx^{n-۱}$$

حال اگر x=1یا x=-1باشد

$$\sum_{r=0}^{n} r\binom{n}{r} = n2^{n-1},$$

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r-1} r\binom{n}{r} = 0.$$

با مشتق گرفتن از مراتب بالاتر از رابطه ی (۴,۳)به روابط دیگری دست می یابیم با تعویض عمل مشتق گیری با روابط دیگری به دست می اید.

-دنباله ی توان های عدد ۱۱:

$$11^0 = 1, 11^1 = 11, 11^2 = 121, 11^3 = 1331, 11^4 = 14641, \ldots$$

در حالت کلی اگر جمله های سطر nام مثلث را از راست به چپ از دیدگاه تعداد یکان دهگان ...نگاه‌کنیم وبدین طریق عدد N_nرا

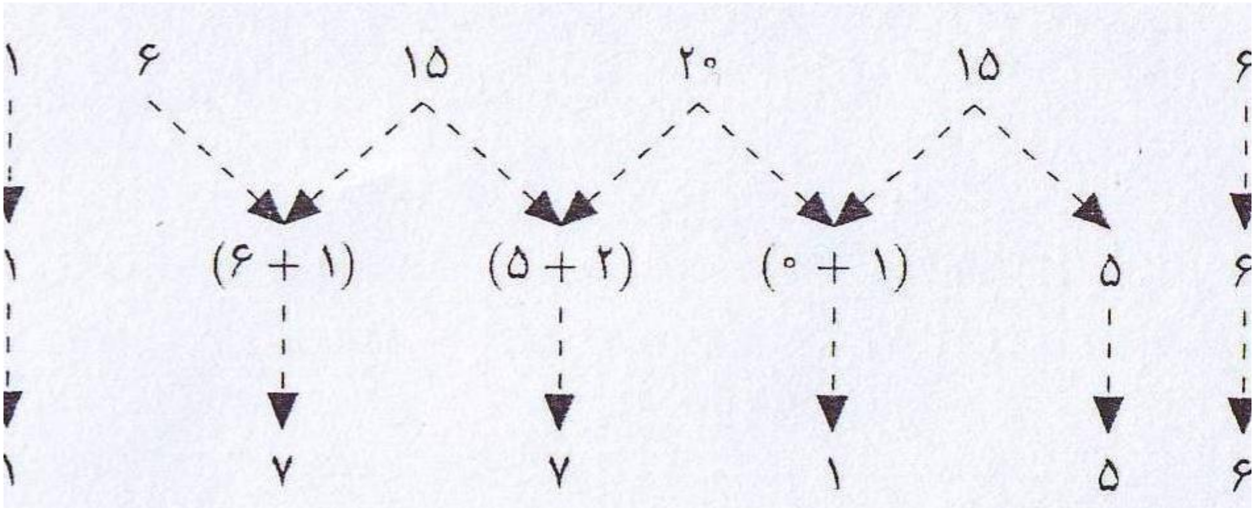
$$11^{n-1} = (1 + 10)^{n-1}$$

بسازیم طبق اتحاد دو جمله ای خیام عدد N_nتوانی از ۱۱ است.

مثلا:

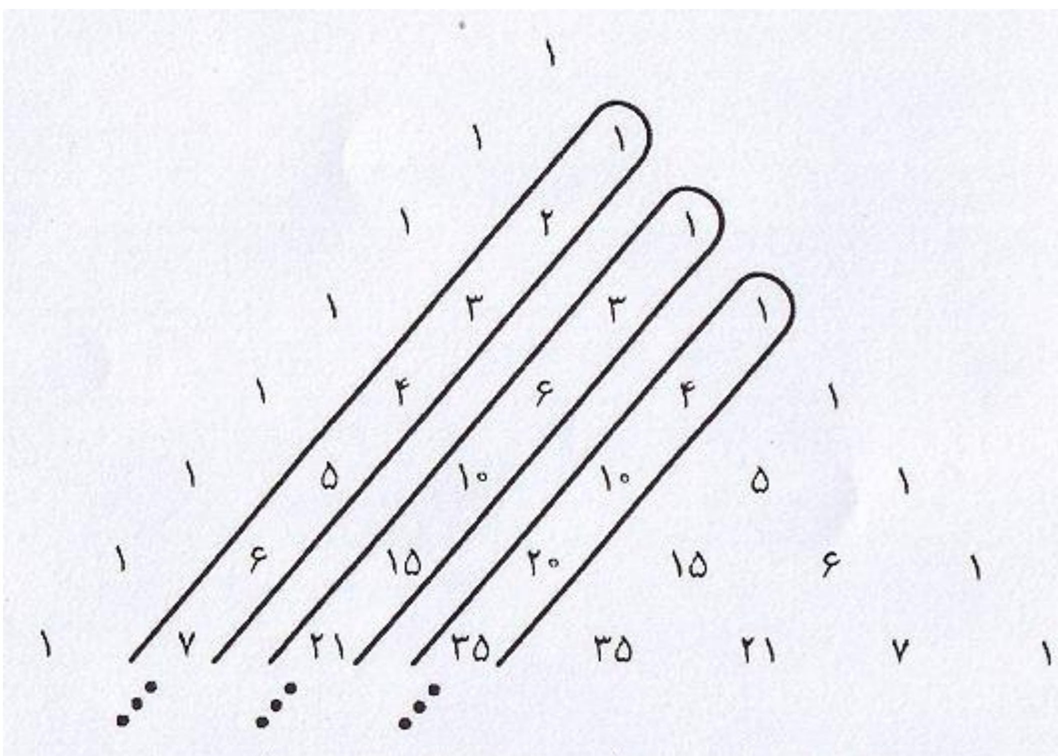
$$\begin{aligned} 11^6 &= 1 \times 10^6 + 6 \times 10^5 + 15 \times 10^4 + 20 \times 10^3 + 15 \times 10^2 + 6 \\ &= 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1 \\ &= 1771561 \end{aligned}$$

در مورد سطر ۷ام دقت کنید .الگوی زیر رعایت شده.



--دنباله اعداد مصور :

در مثلث پاسکال قطر از اعداد طبیعی ,قطر ۲ از اعداد مثلثی وقطر۳ از اعداد ۴وجهی تشکیل شده اند.



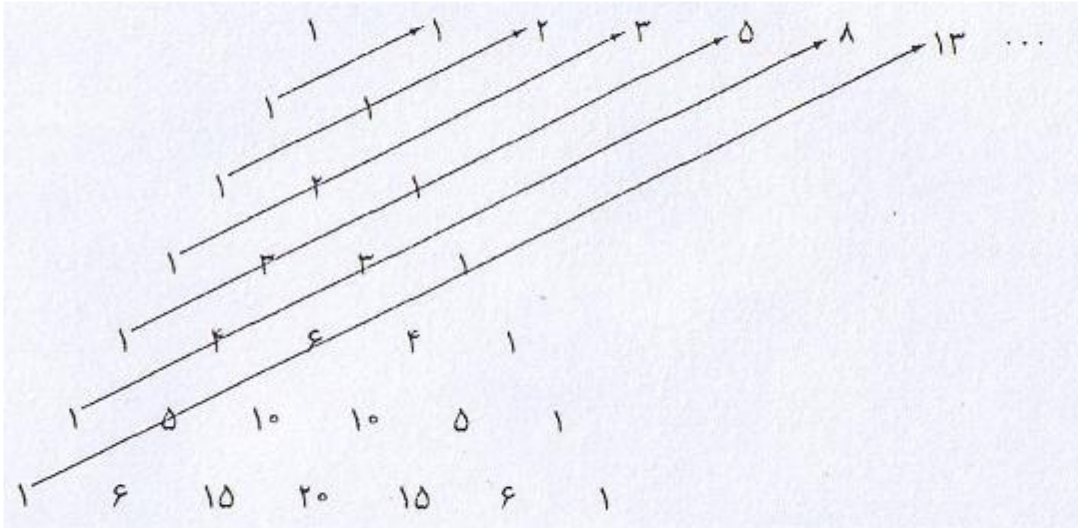
شکل ۳.۳ دنباله‌ی اعداد طبیعی، اعداد مثلثی و اعداد چهار وجهی.

با نگاه به قطرهای مثلث ملاحظه می شود که هر عدد مثلثی مجموع چند عدد طبیعی وهر عدد ۴ وجهی مجموع چند عدد مثلثی است.به طور کلی می توان گفت که قطر kام از اعداد مصور kبعدی تشکیل شده اند که به صورت c(n,k) می باشد.در ضمن داریم:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{k-1}{k-1}$$

--دنباله فیبوناچی:

اگر قطرها را با شیب بیشتر انتخاب کنیم.داریم:



شکل ۴.۳ انتهای پیکان‌ها نشانگر دنباله‌ی اعداد فیبوناتچی است.

مجموعه اعداد روی قطر ها دنباله ی :

...و۱۳و۸و۵و۳و۱و۱

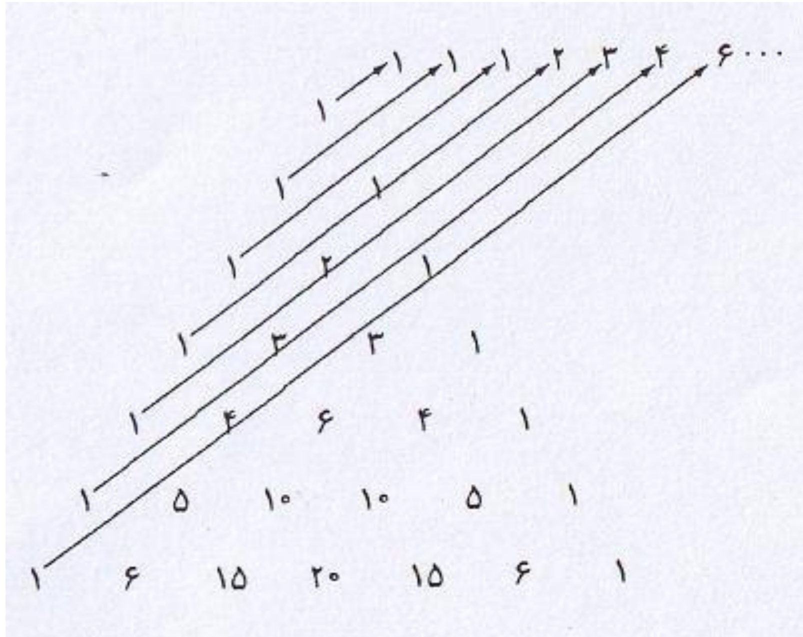
تشکیل می دهد.در این دنباله جمله اول ودوم ۱ است بقیه جملات جمع دو جمله قبلی اش می شوند

$F_1=F_2=1$

$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

اثبات این خاصیت به وسیله مثلث به راحتی قابل مشاهده است.

اگرشیب قطر های فیبوناچی را بیشتر کنیم.به تعمیمی از این دنباله دست خواهیم یافت



اگر ان را با G_nنمایش دهیم داریم $G_1=G_2=G_3=1$

$$G_{n+2}=G_{n+1}+G_{n-1}$$

تعمیم های مختلف از دنباله فیبوناچی داریم.

---دنباله c(2n,n):

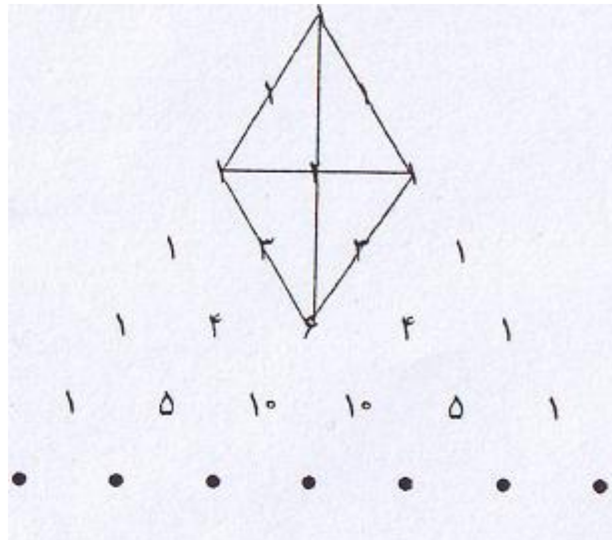
دنباله واقع بر عمود منصف مثلث را به صورت زیر در نظر می گیریم....و۲۵۲و۷۰و۲۰و۶و۲و۱

$$1 = 1^2$$
$$2 = 1^2 + 1^2$$
$$6 = 1^2 + 2^2 + 1^2$$
$$20 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2$$
$$70 = 1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2$$
$$\cdots$$

تعمیم دنباله بالا به صورت زیر است

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 \qquad (n \geq 0)$$

به عبارت دیگر مجموع مربعات جمله های سطر nام برابر است با رآس تحتانی یک لوزی که این سطر یکی از قطرهای ان می باشد.



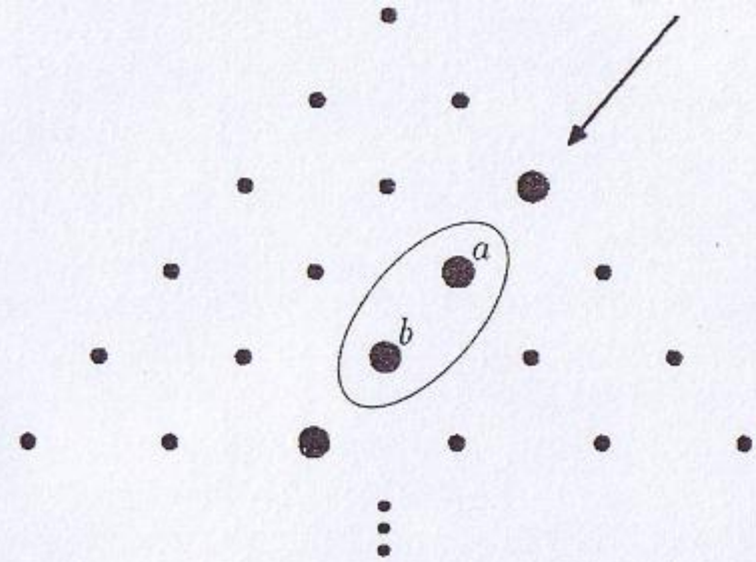
شکل ۷.۳ $\binom{2}{2}^2+\binom{2}{1}^2+\binom{2}{0}^2=\binom{4}{2}$.

--ویژگی هندسی فانگ:

ایا دو عدددر مثلث پاسکال می توان یافت که مجموع یا تفاضلشان مربع کامل باشد؟

عناصر واقع در قطر ۳,اعداد مثلثی هستندو نیز مجموع ۲ عدد مثلثی متوالی یک مربع کامل است.اگر T_nنشان دهنده nامین عدد مثلثی باشد.داریم: $T_n+T_{n+1}=n^2$

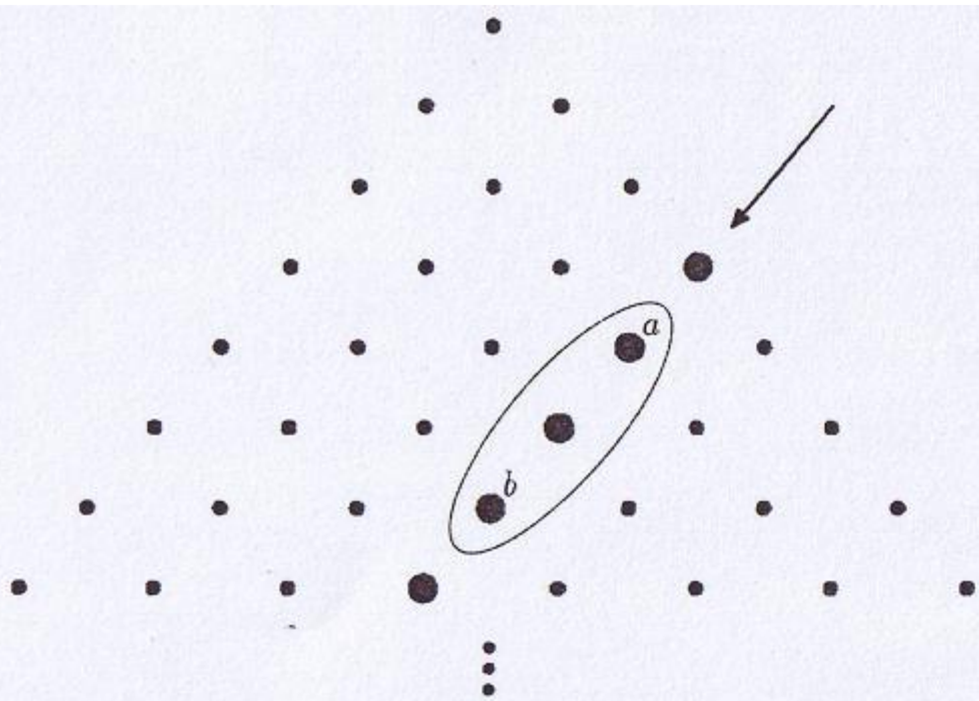
واین نتیجه می دهد.



شکل ۸.۳ $a + b$ یک مربع کامل است.

برای تفریق داریم

$$\binom{n+۲}{۳} - \binom{n}{۳} = n^{۲}.$$

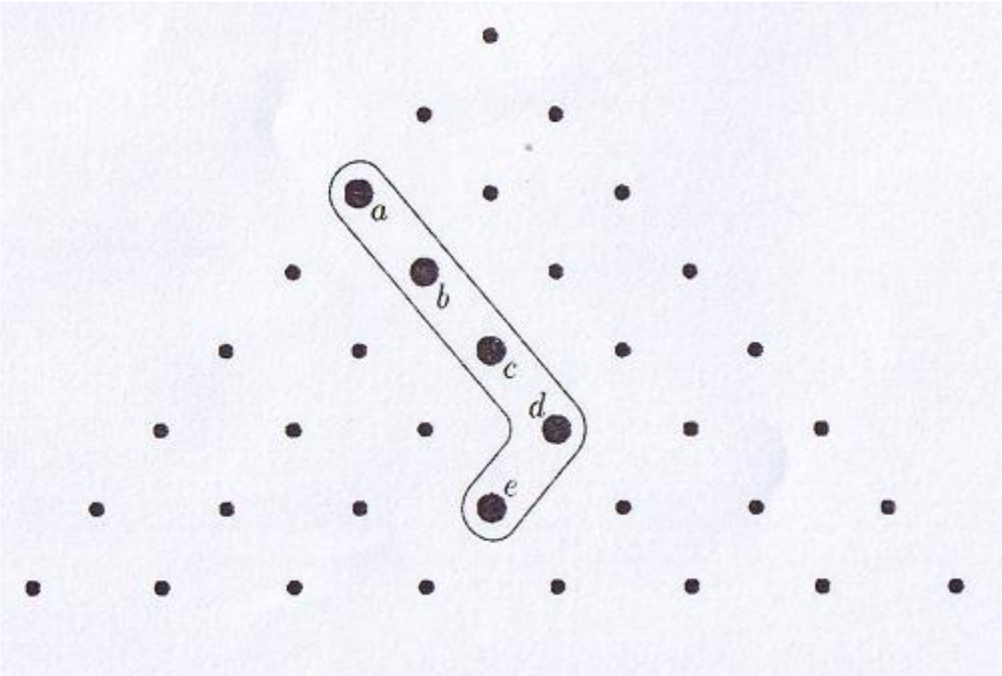


شکل ۹.۳ $a - b$ یک مربع کامل است.

--**ویژگی چوب چوگان:**تساوی زیر را در نظر بگیرید.

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}=\binom{n+4}{4} \qquad (n \geq 0)$$

اگر هر کدام از عناصر دو طرف تساوی را به صورت نقاط هندسی در نظر بگیرید



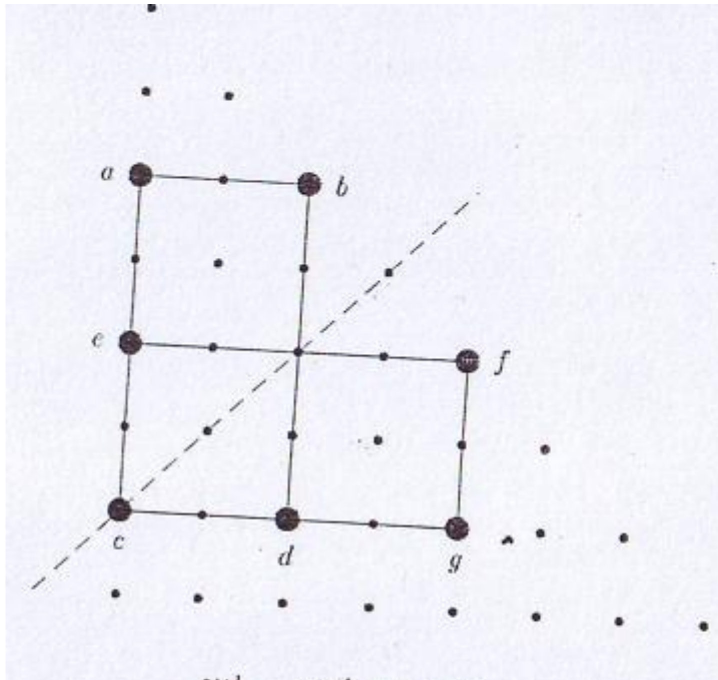
شکل ۱۰.۳ اعداد روی چوب چوگان در تساوی $a+b+c+d=e$ صدق می‌کنند.

اگر طول چوب چوگان را kدر نظر بگیریم(رابطه بالا را تعمیم دهید)

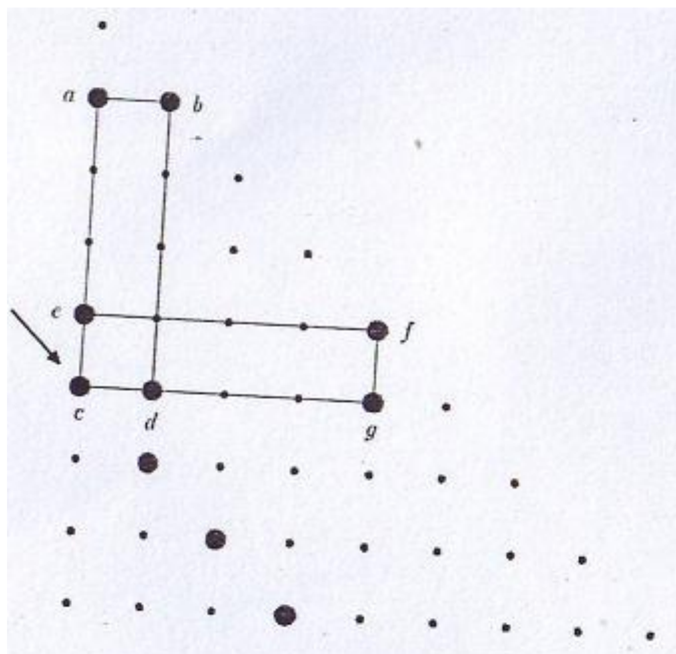
$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1} \qquad (n,k \geq 0).$$

--**ضرب صلیبی:**در اینجا مستطیل هایی را به صورت قائم الزاویه و افقی در داخل مثلث خیام در نظر می گیریم.رئوس این مستطیل ها که بر روی درایه های این مثلث واقع شده اند در اینجا رابطه ای بر حسب درایه های واقع بر رئوس این مستطیل به دست می اوریم.

نکته جالب این است که با لغزاندن مستطیل به نحوی که نقطه ی cدر طول قطر (در امتداد پیکان)جا به جا شود همواره نسبت (c*b)/(a*d)یک مقدار ثابت خواهد بوذ



شکل ۱۱.۳ $\frac{c\times b}{a\times d}=\frac{c\times f}{e\times g}$.



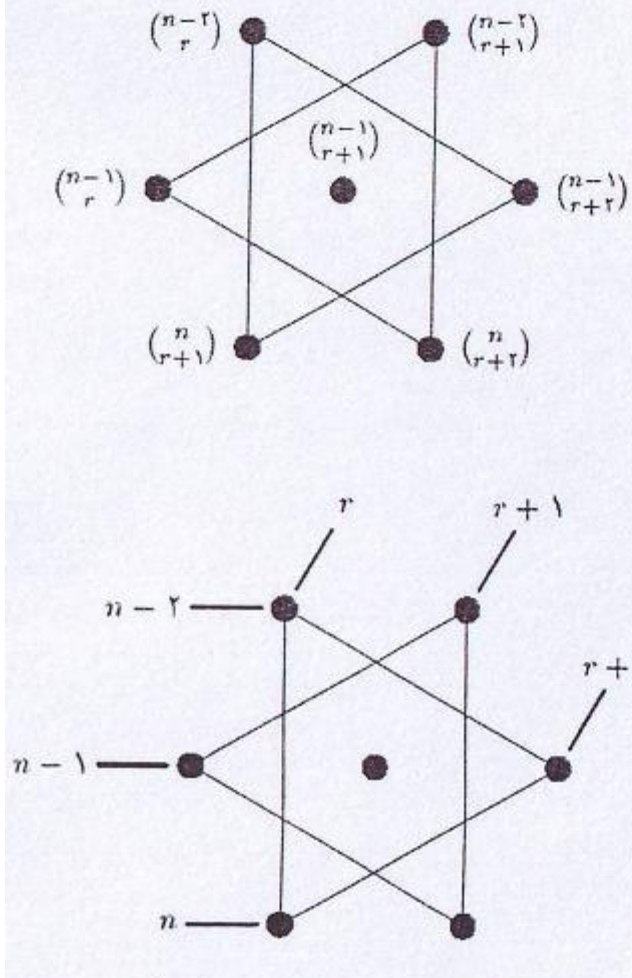
شکل ۱۲.۳ $\frac{c\times b}{a\times d}=\frac{c\times f}{e\times g}$.

--ستاره داوود:

در خاصیت ضرب صلیبی اگر به جای مسطتیل ها یک ستاره به صورت زیر در نظر بگیریم به قسمتی که رئوس ان بر درایه های مثلث خیام قرار گیرند.به تساوی زیر میرسیم.

$$\binom{n-2}{r+1}\binom{n-1}{r}\binom{n}{r+2} = \binom{n-2}{r}\binom{n}{r+1}\binom{n-1}{r+2},$$

در مرکز این ستاره عنصر $\binom{n-1}{r+1}$ قرار دارد.



شکل ۱۴.۳ ستاره‌ی داوود به مرکز $\binom{n-1}{r+1}$.