Universidad Nacional de Colombia - Sede Bogotá
Introducción al Análisis Real

Alberto Lara - 153719

Solución al Parcial: 2 - Octubre 19 de 2012

1. Sea (E, d) un espacio métrico. Si $S, T \subset E$ son tales que S es cerrado y T es compacto, entonces demuestre que $S \cap T$ es compacto.

   Solución

   En efecto,
   caso 1. Si S es finito entonces S es compacto.
   caso 2. Si S es infinito, entonces S tiene un punto de acomulación, luego E es un compacto, por otro lado, S es cerrado. Por lo tanto S es compacto.
   En ambos casos, S es un conjunto compacto en E. De esta manera, el conjunto $S \cap T$ está formado por dos conjuntos compactos.
   Sea x un punto de acomulación de $S \cap T$, es decir, x es el límite de una sucesión de puntos de la intersección, diferentes de x. Luego, $x_n \in T$ y $x_n \in S$. Puesto que S y T son cerrados, x pertenece a S y a T, y por lo tanto a la intersección. Así tenemos que $S \cap T$ tiene un punto de acomulacín, es finito y por lo tanto es compacto.

2. Sean C, X subconjuntos de un espacio métrico (E, d). Si C es conexo y tiene puntos en común con X y con $E \setminus X$, entonces muestre que algún punto de C pertenece a la frontera de X en (E, d). (Ayuda: Primero pruebe que $\partial(C \cap X)$ no es vacía en el espacio métrico $(C, d|_{C\times C})$. Luego muestre que estos puntos de C son también puntos frontera de X en (E, d).

   Solución

   Hagamos un dibujo para ver la idea de la demostración

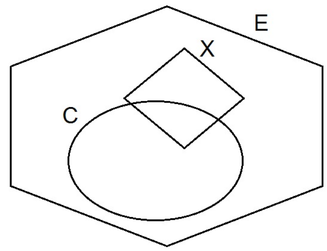

Figure 1: Espacio Métrico (E, d)

Sea C un conjunto conexo, luego, si C es conexo entonces se tiene que si $A \subset C$ tiene frontera vacía entonces $A = E$ ó $A = \emptyset$, en efecto, los únicos conjuntos con frontera vacía son $\emptyset$ y C, además por hipótesis $C \cap X$ no es vacía, pero tampoco es todo C, porque tienen algunos puntos en común, y en consecuenta, $\partial(C \cap X) \neq \emptyset$ (dado que la frontera es el cerrado más pequeña que contiene al conjunto) y en consecuencia existe $y \in C$ que pertenece a $\partial(C \cap X)$ en C, de modo que para todo $r > 0$, existe un punto $x \in (C \cap X) \subset X$ con $x \in B_E(y, r)$ y existe un punto
$p \in (C \setminus (C \cap X)) = (C \setminus X) \subset (E \setminus X)$ tal que $p \in B_E(c, r)$, en conclusión $c \in \partial X$ en E

3. Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos. Si (E_1, d_1) es compacto y $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es una biyección continua, entonces muestre que f es un homeomorfísmo.

   Solución

   Para demostrar que f es un homeomorfísmo, f debe ser biyectiva continua y f^{-1} debe ser continua, pero por hipótesis $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es biyectiva continua, nos falta probar que $f^{-1} : E_2 \longrightarrow E_1$ es continua. Como E_1 es compacto, entonces, por la continuidad de f, $V = f(E_1)$ es compacto en E_2, así V es un conjunto cerrado en E_2, usando el hecho de que f es continua, tenemos que $f^{-1}(V)$ es un conjunto cerrado en E_1, esto significa que, f^{-1} es continua. Por lo tanto, f es homeomorfismo.

4. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Demuestre que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

   Solución

   Como $[0, 1]$ es conexo, $f([0, 1])$ es conexo, suponiendo sin perdida de generalidad, $f(0) < f(1)$, y además $f(1) > 1$ y que $f(0) > 0$. Definamos la función $h(x) = f(x) - x$, claramente h es continua, en $[0, 1]$, evaluemos los extremos del intervalo en $h(x)$ entonces,
   $$h(1) = f(1) - 1 < 0\,,\ h(0) = f(0) - 0 > 0$$

Así por el teorema del valor intermedio, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $h(x_0) = 0$, por lo tanto

$$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0 \Longrightarrow f(x_0) = x_0$$

5. Se dice que una función $f : (E_1, d_1) \longrightarrow (E_2, d_2)$ es *Lipschitz* o *Lipschitziana*, si existe una constante real $c > 0$ tal que $d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x,y)$ para todo $x, y \in E_1$. Muestre que si f es *Lipchitziana*, entonces f es uniformemente continua. Use este hecho para mostrar que para todo $a > 0$, la función $f : ([a,\infty); d_1|_{[a,\infty)\times[a,\infty)}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua.

Solución

Si f es *Lipchitziana* entonces existe una constante real $c > 0$ tal que

$$d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x,y)$$

para todo $x, y \in E_1$

Sea $\epsilon > 0$, y $\delta = \frac{\epsilon}{c}$, tal que

$$d_1(x,y) \leq \delta = \frac{\epsilon}{c}$$

entonces

$$d_2(f(x), f(y)) \leq (c)d_1(x,y) \leq (c)(\delta) = (c)\left(\frac{\epsilon}{c}\right) = \epsilon$$

Con lo que se concluye que f es uniformemente continua.

Para la segunda parte, para todo $a > 0$, la función

$$f : ([a,\infty); d_1|_{[a,\infty)\times[a,\infty)}) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_1)$$

Dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ es uniformemente continua.

Tenemos que

$$\left|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| \leq |y-x| \Longrightarrow \left|\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{y}\right| \leq |y-x|$$

Es decir, $d_1(x,y) \leq (1)d_1(x,y)$, luego f es una funcion *Lipschitziana* con $c = 1$, así f es uniformemente continua.