unbestimmten Coefficienten an, indem wir setzen

$$u_\mu = u_{\mu,1} + u_{\mu,2} + u_{\mu,3} + \dots \qquad 5$$

wo $u_{\mu\nu}$ die homogene Function von $t, \dots$ von der νten Dimension bezeichnen. Setzen wir dies in 4 ein und suchen auf beiden Seiten die Glieder 1ter Dimension auf, so finden wir

$$u_{\mu,1} = v_\mu \qquad 6$$

Um nun die Glieder 2ter Dimension zu finden, können wir uns in 5 auf die Glieder bis zur 1ten Dimension beschränken, also statt u_μ setzen

$$u_{\mu,1} +$$

Dieses in 4 gesetzt ergibt

$$u_{\mu,2} = \left[U_\mu(u_{1,1} \dots u_{n,1})\right]_2 \qquad 7$$

wo die Klammer folgendes bedeutet. Man setze in U_μ, welches in Bezug auf die u's von höherer als der 1ten Dimension ist statt $u_1 \dots u_n$ die Werthe $u_{1,1} \dots u_{n,1}$ oder ein, und reduciren die Glieder nur auf die 2te Dimension.

Die Glieder 3ter Dimension erhält man

$$u_{\mu,3} = \left[U_\mu(u_{1,1} + u_{1,2}, \dots u_{n,1} + u_{n,2})\right]_3 \text{ u. allgem.}$$

$$u_{\mu,\nu} = \left[U_\mu(u_{1,1} + u_{1,2} + \dots + u_{1,2} + \dots + u_{1,\nu-1}) \dots u_{n,1} + u_{n,2} + \dots + u_{n,\nu-1})\right]_\nu \qquad 8$$

Die so bestimmten $u_{\mu\nu}$ ergeben dann

u_μ als Potenzreihen der v's, welche Potenzreihen den Gleichungen formell genügen, indem auf beiden Seiten die entsprechenden Coefficienten identisch dieselben herauskommen nach der Substitution dieser Werthe. Dass es keine anderen Potenzreihen gibt, sieht man ohne Weiteres. Lässt sich nun nachweisen, dass diese Potenzreihen einen gemeinschaftlichen Conv. bezirk haben, so kann ich, wenn ich die v's so beschränke, dass die u_μ's dem Conv. bereiche der U_μ angehören mit denselben die Gleichung befriedigen. Um die Convergenz der Reihen für u_μ zu entscheiden, wenden wir den auf der Seite   bewiesenen Satz an.

Wenn es sich nämlich nachweisen lässt, dass die Reihe, die wir aus der Reihe für u_μ erhalten, indem wir für jeden Coefficienten derselben einen andern setzen, der eine positive Zahl ist, die nicht kleiner ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten, convergent ist, so wird auch die Reihe u_μ es sein. Nun hatten wir auf der Seite   einen Hilfsatz nachgewiesen, der so lautete: Wenn wir mit beliebig vielen in endlicher Anzahl vorkommenden Grössen complexen nur Addition und Multiplication ausführen, und dann dieselben Operationen mit positiven Grössen vornehmen, deren jede nicht kleiner ist als der absolute Betrag der entsprechenden complexen, so wird das Resultat der letzteren Rechnung sicher nicht kleiner als der absolute Betrag der Resultate im 1ten Falle.

Wir ersetzen das Gleichungssystem

$u_\mu = v_\mu + U_\mu$ durch ein anderes, welches wir auf die Weise erhalten, dass wir jeden Coefficienten in dem Gleichungssysteme ersetzen durch eine positive Grösse, die nicht kleiner ist, als der entsprechende Coefficient dem absoluten Betrage nach in dem ursprünglichen System. Nehme ich dann für die u_μ's Potenzreihen von $t_1 \ldots$ an mit unbestimmten Coefficienten und vollziehe dieselben Operationen wie in 8 so erhalten wir Reihen, wo die Coefficienten positive Zahlen sind. Nun ist aus unseren Formeln ersichtlich, dass die Coefficienten der ursprünglichen Reihen für u_μ aus endlicher Anzahl der Coefficienten in U_μ durch Addition und Multiplication zusammengesetzt sind. Wenn ich also dieselben Operationen ausführe mit dem neu erhaltenen Gleichungssysteme, so werden die neu erhaltenen Reihen Coefficienten haben, die positive Zahlen sind und nicht kleiner als der absolute Betrag der entsprechenden Coefficienten in den ursprünglichen Reihen für die u_μ's. Da ich somit die Coefficienten der hergeleiteten (aus 4) Gleichungen willkürlich wählen kann, so kann ich sie so bestimmen, dass die Gleichungen auflösbar sind, also die Coefficienten der neuen u_μ's wirklich bestimmt werden. Dies machen wir auf folgende Weise. Wenn $x_1, \ldots x_n$ ein Werthsystem positiver Grössen ist, für welche $\mathfrak{P}(x_1, \ldots x_n) = \sum c_{\lambda_1 \ldots \lambda_n} x_1^{\lambda_1} \ldots$ convergent ist, und g das maximum des absoluten Betrags

Betrages der Reihe für irgend eine Werthecombination der $x_1 - x_n$ ist, für die sämmtliche $|x_1| = r_1 \dots$ ist, so haben wir

$$|c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}| < g_1 r_1^{-\alpha_1} \dots r_n^{-\alpha_n}$$

Entwickele ich nun $\frac{g_1}{1-\frac{u_1}{r_1} \dots \frac{u_n}{r_n}}$ so erhalte ich

$\frac{g_1}{1-\frac{u_1}{r_1}-\dots-\frac{u_n}{r_n}} = g_1 \sum \left(\frac{u_1}{r_1} \dots \frac{u_n}{r_n}\right)^{\varrho}$; jeder Coefficient in dieser Reihe ist $g_1 r_1^{-\alpha_1} \dots r_n^{-\alpha_n}$ also größer als der absolute Betrag von $c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ in der gegebenen Potenzreihe. Habe ich nun eine beliebige Anzahl von Potenzreihen von $u_1 \dots u_n$ .. z. B. $U_1 \dots U_n$ und sie mögen convergiren für $u_1 = r$, $u_2 = r$, dann kann ich für jede derselben eine solche Reihe aufstellen. Ich kann nämlich g u. r. so wählen, daß aus der Formel

9 $\frac{g}{1-\frac{u_1+u_2+\dots u_n}{r}}$ eine Potenzreihe der u's hervorgeht, so daß jeder Coefficient derselben größer ist, als der entsprechende absolute Betrag der Coeff. in $U_1 \dots U_n$.

Wenden wir dies auf mehrere Potenzreihen U_μ an. Jedes U_μ fängt mit Gliedern 2ter Dimension an, um sie also mit der Reihe 9 vergleichen zu können, ziehen wir von der Reihe 9 die Glieder 0ter u. 1ter Dimension ab.

10 Die Formel $\frac{g}{1-\frac{u_1+\dots+u_n}{r}} - g - \frac{g(u_1+\dots u_n)}{r}$ liefert uns eine Reihe, in welcher jeder Coefficient größer ist als der absolute Betrag des entsprechenden Coefficienten in der Reihe U_μ's. Wir ersetzen nun das Gleichungssystem 4 durch das folgende

$$u_1 = v_1 + \frac{g}{1-\frac{u_1+\dots+u_n}{r}} - g - \frac{g(u_1+\dots+u_n)}{r}$$

$$u_2 = v_2 + \frac{g}{1 - \frac{u_1 + \dots + u_n}{r}} - g - g\frac{u_1 + \dots + u_n}{r} \qquad 11$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = v_n + \frac{g}{1 - \frac{u_1 + u_n}{r}} - g - g\frac{u_1 + \dots + u_n}{r}$$

Wenn sich nun hieraus für die u_μ's ergebenden Potenzreihen von $v_1 \dots v_2$ als convergent ergeben, so werden auch die Reihen für die u's, die sich früher ergaben, convergent sein.

Nun versuchen wir das Gleichungssystem 11 aufzulösen. Addiren wir diese sämmtlichen Gleichungen und setzen

$$u = u_1 + \dots + u_n$$
$$v = v_1 + \dots + v_n$$

so erhalten wir

$$u = v + \frac{ng}{1 - \frac{u}{r}} - ng - ng\frac{u}{r} \qquad 12$$

Läßt sich hieraus für u convergente Reihe in v finden, so werden sich auch die $u_1 \dots u_n$ als conv. Reihen von $v_1 \dots v_n$ ergeben. Nun bemerken wir, daß das Gleichungssystem 4 die Eigenschaft hat, daß für $v_1 = v_2 = \dots = 0$ auch $u_1 = \dots 0$ wird. Wir müssen also auch hier diejenige Reihe für u wählen, welche für $v_1 = \dots 0$ d.h. für $v = 0$ selbst null wird. Nun könnten wir zunächst formell eine Reihe für u suchen, welche der Gleichung 12 genügt und die Coefficienten derselben bestimmen. Das Gesetz der Coefficienten ist aber so complicirt, daß wir daraus schwer die Convergenz nachweisen könnten. Wir wollen deshalb ein anderes Verfahren anwenden. Es folgt zunächst aus 12

$v(1-\frac{u}{r}) - ng\frac{u}{r}(1-\frac{u}{r}) - u(1-\frac{u}{r}) - ng\frac{u}{r} = 0$ oder
$(g+r)u^2 - (r+v)ru + r^2 v = 0$ und aufgelöst gibt dies, wenn man die Wurzel nimmt, welche für $v=0$ auch Null wird

13 $$u = r\,\frac{r+v-\sqrt{(r+v)^2-4v(ng+r)}}{2(ng+r)}$$

Den Ausdruck unter der Quadratwurzel können wir auf die Form bringen

$$r^2 - 2(r+2ng)v + v^2 = (r-kv)(r-\frac{v}{k}) = r^2(1-kv)(1-\frac{v}{k})$$

Es handelt sich also darum, ob sich der Ausdruck $\sqrt{(1-kv)(1-\frac{v}{k})}$ überhaupt in eine convergirende Reihe entwickeln läßt, dies wird aber der Fall sein, wenn $\sqrt{1-x}$ als eine Potenzreihe von x darstellbar ist. Dies könnten wir mittelst der Binomialreihe machen, wollen aber eine andere Methode anwenden gleich auf das allgemeinere Beispiel $\sqrt[n]{1+x}$. Setzen wir $y=(1+x)^{\frac{1}{n}}$, d.h. y soll eine Function Potenzreihe sein, deren n^{te} Potenz gleich ist $1+x$ d.h. $y^n = 1+x$. Setzen wir voraus, daß eine solche Reihe existire, d.h. convergire und sie sei $y = 1 + c_1 x + \dots$
und wir fragen, wie müssen nun, wenn die Reihe existirt, die Coefficienten bestimmt sein, damit die Reihe die verlangte Eigenschaft besitze.
Durch Differentiation folgt

$$ny^{n-1}dy = dx \text{ also hieraus}$$

14 $$n(1+x)\frac{dy}{dx} = y$$

Die Reihe muss also dieser Differentialrechnung genügen. Denken wir nun die Reihe für y hierin gesetzt und bestimmen beiderseits den Coefficienten von x^λ, so erhalten wir

$$(\lambda+1)n\, c_{\lambda+1} + \lambda n\, c_\lambda = c_\lambda \text{ oder} \qquad 15$$

$$c_{\lambda+1} = c_\lambda \frac{1-\lambda n}{(\lambda+1)n}$$

Es sind also die Coefficienten formell bestimmt. Nun zeigen wir, dass die Reihe, welche die obigen Coefficienten hat convergent ist. Es ist

$$c_{\lambda+1} = -c_\lambda \frac{1-\frac{1}{\lambda n}}{1+\frac{1}{\lambda}}$$

Nun ist für Werthe von λ, die über einer gewissen endlichen Grenze liegen. $\frac{1-\frac{1}{\lambda n}}{1+\frac{1}{\lambda}}$ ein echter Bruch

Also ist stets

$$|c_{\lambda+1}| < |c_\lambda|$$

Und hieraus folgt, dass die Reihe für y, für alle Werthe von x, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1 sicher convergent ist. Also hat wirklich die aus der Differentialgleichung entspringende Reihe sicher einen Conv. bezirk; somit ist die Existenz von y nachgewiesen. Nun können wir von der Differentialgleichung 14, zu der Gleichung zurückkehren

$$\frac{d}{dx}\left(y^n - (1+x)\right) = 0$$

Es müssen also aus dem Ausdruck in der Klammer alle Coefficienten (x) gleich Null sein, und es kann nur eine Constante herauskommen. Da aber für $x=0$ $y=1$ sein soll, so ist diese Constante auch Null.

Folglich haben wir

$$y^{n} = 1+x.$$

Es existirt somit $\sqrt{1-x}$ als Potenzreihe von x. Daraus folgt ohne Weiteres, daß aus 13 sich für u eine convergente Reihe von v ergibt und die Reihe ist um so convergenter, je größer r und je kleiner g ist, denn in der Entwickelung von u wird jeder Coefficient eine ganze Function sein von $\frac{1}{r}$ u. g. mit positiven Coefficienten. Nun kehren wir zu dem System 11

$$u_\mu = v_\mu + \frac{g}{1-\frac{u}{r}} - g - g\cdot\frac{u}{r} \quad (\mu = 1 \ldots n)$$

Nun ergibt sich u als convergente Reihe von v und $\frac{g}{1-\frac{u}{r}}$ als convergente Reihe von u, folglich wird sich auch u_μ als convergente Reihe von v ergeben. Nun ist aber $v = v_1 + \ldots + v_n$ also ergibt sich aus dem System 11 jedes u_μ als eine Potenzreihe von $v_1 \ldots v_n$, die convergent ist für Werthe von $v_1 \ldots$ deren absolute Beträge unterhalb einer bestimmten Grenze liegen. Nach den Vorbemerkungen sehen wir, daß sich also ergebende Reihen aus dem Systeme 4 sicher convergent für bestimmte Bezirke der $v_1 \ldots v_n$. Nun waren die v's lineare Function der $(n-m)$ Variablen $t_1 \ldots$; setzen wir diese statt der v's, so erhalten wir für u_μ Potenzreihen von t, und wenn wir die t's auf einen Bereich beschränken, so werden die

Reihen convergent sein und den Gleichungen 1 genügen. Wir können somit in der Umgebung der Nullstelle von $u_1 \dots u_n$ oder was dasselbe ist in der Umgebung der Stelle $a_1 \dots a_n$ von $x_1 \dots x_n$ unendlich viele Werthsysteme $u_1 \dots u_n$ resp. $x_1 \dots x_n$ finden, die den aufgestellten Gleichungen genügen. Die Gesammtheit der Werthsysteme bildet in dem Gebiete der Variablen $u_1 \dots t_1$ ein Gebilde $(n-m)$ter Stufe.

Es bleibt noch die Frage übrig, erhalten wir auf diese Weise alle Werthsysteme der u's? Das heißt, wenn δ die Grenze für die u's ist, ist es möglich das δ so klein zu wählen, daß alle Werthe der u's dem absoluten Betrage $< \delta$, und die den Gleichungen genügen, unter den gefundenen Reihen begriffen sind? Wir nennen alle Werthe von u's, die unterhalb δ liegen, wie klein ich auch δ annehme, unendlich kleine Werthe. Es ist also die Frage, erhalten wir durch unsere gefundenen Reihen alle unendlich kleinen Werthe der u's, die den Gleichungen genügen? Um diese Frage zu erledigen, müssen wir noch einen Lehrsatz entwickeln, der von großer Tragweite ist.

Lehrsatz. Es sei eine Gleichung $G(x, x_1 \dots x_r) = 0$ (als eine gewöhnliche Potenzreihe) gegeben, und sie werde befriedigt für $x = 0$, $x_1 = 0 \dots x_n = 0$. Wenn ich nun $x_1 \dots x_n = 0$ setze, so wird $G(x, 0 0 0 \dots) = G_0(x)$ die Function $G(x\, x_1 \dots)$ reducirt sich auf eine Function von x allein, die sich auch auf

Null reduciren kann. Vorläufig nehmen wir an, dass $G_0(x)$ nicht identisch Null ist. Die Function hat alsdann die Gestalt

2 $$G(x, x_1, \dots x_r) = G_0(x) - G_1(x, x_1, \dots x_r)$$

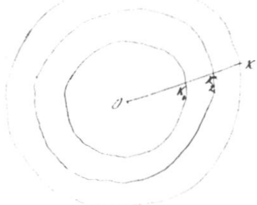
wo $G_0(x)$ für $x = 0$ verschwindet. Es muss also

3 $G_0(x) = x^m \bar{G}(x)$ sein, wo $\bar{G}(x)$ für $x = 0$ nicht mehr verschwindet. Alsdann kann man für $|x|$ eine Grenze h so festsetzen, dass $\bar{G}(x)$ niemals verschwindet wenn $|x| < h$. Es ist alsdann möglich die $x_1 .. x_n$ auf eine Umgebung der Nullstelle so zu beschränken, dass unsere Gleichung $G(x, x_1, .. x_r) = 0$ als Function von x betrachtet, genau m Wurzel hat, deren absoluter Betrag nicht grösser als h ist, und die gleichzeitig mit $x_1, \dots x_r$ unendlich klein werden; d. h. die Gleichung hat genau m unendlich kleine Wurzel x, vorausgesetzt, dass jede einzelne Wurzel so oft gezählt wird, als die Ordnungszahl es angibt. D. h. wenn a eine Wurzel ist, und die Entwickelung von G nach Potenzen von $x - a$ mit einem Gliede $(x-a)^\mu$ anfängt, so ist die Wurzel a μ mal zu rechnen. —

Betrachten wir zu dem Ende den Quotienten

4 $$\frac{1}{G_0(x) - G_1(x, x_1, .. x_r)}$$

und nehmen um den Nullpunkt 2 Kreise mit dem Radius h_1, h_2, die kleiner sind als h und beschränken



die Veränderlichkeit des x auf den Ring zwischen k_1, k_2. Für alle die Werthe wird $\bar{G}(x)$ niemals Null, also ein von Null verschiedenes Minimum haben.

Wir haben nun

$$\frac{1}{G_0 - G_1} = \frac{x^{-m}}{\bar{G} - x^{-m} G_1}$$ 5

Denken wir uns G_1 geordnet nach Potenzen von $x_1 \dots x_r$ so sehen wir unmittelbar, dass wir für die Grössen $x_1 \dots x_r$ gewisse Grenzen festsetzen können, so dass

$|G_1| < |x|^m$ Min $|\bar{G}|$ wird, denn G_1 verschwindet für $x_1 \dots x_r = 0$ und ist eine stetige Function der $x_1 \dots$ Wir können somit für die absoluten Beträge von $x_1 \dots x_r$ Grenzen $\xi_1 \dots \xi_r$ festsetzen, so dass für alle Werthe $x_1 \dots x_r$ deren absoluten Beträge kleiner sind als $\xi_1 \dots \xi_r$

$|x^{-m} G_1| <$ als das Minimum des absoluten Betrages von $\bar{G}$. Für alle diese Werthe wird also der Nenner nicht Null. Betrachten wir ihn als Function von $\frac{1}{x} = x'$, $x, x_1 \dots x_r$, so können wir für alle Werthsysteme der Variablen die folgende Bedingung erfüllen.

$|x'| < \frac{1}{k_1}$, $|x| < k_2$, $|x_1| = \xi_1 \dots |x_r| = \xi_r$ ihn in eine Potenzreihe von $x', x, x_1 \dots x_r$ entwickeln. Bezeichnen wir nun mit

$\frac{\partial G}{\partial x} = G'(x)$ so wird sich auch

$$\frac{G'(x)}{G_0 - G_1} = \frac{x^{-m} G'(x)}{\bar{G} - x^{-m} G_1}$$ unter denselben Bedingungen ent- 6

wickeln lassen in Potenzreihen von $\frac{1}{x}, x, x_1, \dots x_r$ und zwar kann die Entwickelung auf folgende Weise gemacht werden. Es ist zunächst unter den obigen Bedingungen

7 $$\frac{x^{-m}}{G - x^{-m} G_1} = \frac{x^{-m}}{G}\left(\frac{1}{1 - x^{-m}\frac{G_1}{G}}\right) = \sum \frac{x^{-m(\mu+1)} G_1^{\mu}}{G^{\mu+1}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{x^{-m(\mu+1)} G_1^{\mu}}{G^{\mu+1}} = \frac{G_1^{\mu}}{G_0^{\mu+1}},$$ also haben wir für den Ausdruck

8 $$\frac{G'(n)}{G_0 - G_1} = G'(n) \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{G_1^{\mu}}{G_0^{\mu+1}}$$

Nun kann ich unter den gemachten Voraussetzungen $\frac{1}{G_0}$ entwickeln und erhalte die convergente Reihe

9 $$\frac{1}{G_0} = x^{-m}(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

Setzen wir dies in 8 ein und ordnen das ganze Resultat nach Potenzen von $\frac{1}{x}, x, x_1, \dots x_r$ so sehen wir, daß sich $\frac{G'(n)}{G_0 - G_1}$ in eine convergente Reihe entwickeln läßt, welche nur positive Potenzen von $x_1, \dots x_r$, negative und positive Potenzen von x enthält und für alle Werthsysteme $x\, x_1 \dots x_r$ gilt, die die Bedingung erfüllen

$$\left|\frac{1}{x}\right| < h_1, \quad |x| < h_2, \quad |x_1| < \frac{\varepsilon}{g_1} \dots$$

Nun wollen wir den Coefficienten von x^{-1} in der Entwickelung von $\frac{G'(n)}{G_0 - G_1} = \frac{G'(n)}{G}$ aufsuchen und zeigen, daß derselbe nicht Null ist. Denken wir uns $G'\underset{(x\, x_1 \dots x_n)}{(n\, x_1 \dots x_n)}$ entwickelt als Potenzreihe von $x_1, \dots x_n$ so wird die Entwickelung die Gestalt

10 haben $$\frac{G'(n\, x_1 \dots x_n)}{G(n\, x_1 \dots x_n)} = \frac{G_0'(x)}{G_0(x)} + p(x_1 \dots x_n)$$ wegen 8

wo die Potenzreihe auch negative Potenzen von x in den Coefficienten haben kann, aber nur positive Potenzen von

$x_1 \ldots x_n$ enthält und für $x_1 \ldots x_n = 0$ identisch verschwindet. Suchen wir nun das Glied mit x^{-1} auf, so kommt es heraus $\frac{G_0'(x)}{G_0(x)}$ und aus $p(x_1 \ldots x_n)$. Nun sehen wir aber, daß alle Glieder x^{-1} zu Coefficienten Potenzreihen von $x_1 \ldots x_n$ haben werden. Das Glied $\frac{G_0'(x)}{G_0(x)}$ liefert aber als Coefficienten von $x^{-1}\,m$. Denn es ist
$G_0 = c\,x^{m} + \ldots$
$G_0' = m\,c\,x^{m-1}$ also wird $\frac{G_0'}{G_0}$ das Glied $m\,x^{-1}$ liefern.
Es wird sich also als Coefficienten von x^{-1} ergeben

$$m + p_1(x_1 \ldots x_n)$$

welche letzte Potenzreihe für $x_1 = 0$ verschwindet.
Dieser Coefficient kann nicht identisch verschwinden, denn es müßte p_1 stets gleich $-m$ sein, was aber nicht der Fall sein kann, da es ja auch 0 wird. Die Entwickelung von $\frac{G'(x \ldots)}{G(x \ldots)}$ hat also wenigstens ein Glied mit negativer Potenz, das nicht identisch verschwindet. Nun können wir leicht zeigen, daß $G(x\,x_1 \ldots x_n)$ für irgend ein System $(x_1) \ldots (x_n) < \xi_1 \ldots \xi_n$ innerhalb des Kreises k Werthe von x hat, die $G(x\,x_1 \ldots x_n) = 0$ befriedigen. Denn angenommen es würde $G(x\,x_1 \ldots x_n)$ für irgend ein System $x_1 \ldots x_n$ (von Null verschieden), nirgends innerhalb des Kreises k verschwinden, so würde $\frac{1}{G(x\,x_1 \ldots x_n)}$ nirgends ∞, also auch $\frac{G'(x\,x_1 \ldots x_n)}{G(x\,x_1 \ldots x_n)}$ würde nirgends ∞. Der Quotient ließe sich dann in eine Potenzreihe von x entwickeln, die nur positive Potenzen von $x - x_1 - x_n$ enthielte. Diese Reihe würde offenbar in-

nerhalb des Kreisringes $k_1\ k_2$ mit der 1^ten Entwickelung übereinstimmen müßen. Ziehen wir aber die letzte Entwickelung von der ursprünglichen ab, so müßte die Differenz beider Reihen eine Function liefern, die überall in dem Kreisringe $k_1\ k_2$ Null ist. Daraus können wir schließen nach dem Satze über den Zusammenhang der Coefficienten mit dem absoluten Betragsmaße der Function, daß sämmtliche Coefficienten der Differenz identisch Null sein müßten. Nun aber ist der Coeff. von x^{-1} nicht Null, also ist unsere Voraussetzung falsch. D. h. $G(x\,x_1 \ldots x_n)$ muß für irgend einen Werth von x innerhalb des Kreises k verschwinden. Wenn wir also für $(x_1) \ldots (x_n)$ die Grenzen $\xi_1 \ldots \xi_n$ feststellen, so hat $G(x \ldots x_n)$ stets Wurzel x, die die Gleichung $G(x - x_n) = 0$ befriedigt. Nun nehmen wir an, die Anzahl der Wurzel sei s. Denken wir uns den $x_1 \ldots x_n$ feste Werthe beigelegt, welche den obigen Bedingungen genügen und bezeichnen die Function kurz mit $G(x)$ so können wir setzen

11 $$G(x) = (x - a_1) \ldots (x - a_s)\, H(x)$$ Wir erhalten alsdann

12 $$\frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \ldots + \frac{1}{x - a_s} + \frac{H'(x)}{H(x)}$$

wobei $a_1 \ldots a_s$ die Wurzeln sind, die innerhalb des Kreises k liegen und $H(a)$ eine Function ist, die für keinen Werth von x verschwindet. Da nun $a_1 \ldots a_s$ innerhalb des Kreises k liegen, so können wir $k_1\ k_2$ größer nehmen, als der größte absolute Betrag der Wurzel $\alpha_1 \dots \alpha_s$ und für alle x die innerhalb des Kreisringes k_1 k_2 liegen, können wir jedes $\frac{1}{x-\alpha_r}$ in eine Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ entwickeln und als Resultat ergibt sich.

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = s\,x^{-1} + (\alpha_1)\,x^{-2} + (\alpha_2)_2\,x^{-3} + \dots + \mathfrak{P}(x) \text{ wo} \qquad 13$$

$\mathfrak{P}(x)$ nur positive Potenzen von x enthält. Diese Entwickelung muß mit der Entwickelung 10 übereinstimmen, welche für $x_1 \dots x_n = 0$ als Coefficient von x^{-1} sicher m hat. Diese Reihe hat aber als Coefficient von x^{-1}, s, also muß

$s = m$ sein. D. h. die Anzahl der Wurzeln, die kleiner sind als k ist genau m. Hierbei bemerken wir, daß die Größen $(\alpha)_1$, $(\alpha)_2$ .. resp. die Summen der 1ten 2ten Potenzen der Wurzel sind, so daß wir durch diese Entwickelung gleichzeitig Formel für die 1te 2te Potenzen-Summen der Wurzel erhalten. Diese Ausdrücke $(\alpha)_1 (\alpha)_2$ sind natürlich Potenzreihen von $x_1 \dots x_n$ nur positive Potenzen enthaltend. Hieraus sehen wir, daß die m Wurzeln, die innerhalb des Kreises k liegen, sämmtlich mit $x_1 \dots x_n$ gleichzeitig unendlich klein werden, denn die Coefficienten Potenzreihen der $x_1 \dots x_n$ verschwinden für $x_1 \dots x_n = 0$. Wir haben somit das Resultat: Es sei $G(x\, x_1 \dots x_n)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $(n+1)$ Veränderlichen $x\, x_1 \dots x_n$, dieselben verschwinden für $x = 0$, $x_1 = 0 \dots x_n = 0$, verschwinde, aber nicht, wenn man nur $x_1 \dots x_n$ gleich Null setzt, für jeden Werth von x. Wenn man nun diese Function $G(x, 0 \ldots 0) = G_0(x)$ setzt, so verschwindet sie für $x = 0$, muss also die Form haben $G_0(x) = x^m \bar{G}(x)$ wo $\bar{G}(x)$ für $x = 0$ nicht mehr verschwindet. Man kann nun für $|x|$ $|x_1| \ldots |x_n|$ Grenzen $h, \xi_1 \ldots \xi_n$ festsetzen, sodass

1) die Stelle $(h, \xi_1 \ldots \xi_n)$ innerhalb des Conv. bereiches von $G(x\, x_1 \ldots x_n)$ liegt.

2) die Function $\bar{G}(x)$ nicht gleich null ist, für Werthe von x so lange $|x| \leqq h$ und

3) für alle, den Bedingungen $|x| < h\ |x_1| < \xi_1 \ldots$ entsprechenden Werthsysteme der Veränderlichen der absolute Betrag von $G_0(x)$ den von $G_1(x \ldots x_n) = G(x\, x_1 \ldots x_n) - G_0(x)$ übertrifft. Alsdann gehören zu jedem der angegebenen Werthsysteme $x_1 \ldots x_n$ m Werthe von x die die Gleichung

$$G(x\, x_1 \ldots x_n) = 0$$

befriedigen, und gleichzeitig mit $x_1 \ldots x_n$ unendlich klein werden.

Wie die Entwickelung 13 zeigt, erhalten wir im Falle $m = 1$ direct die Wurzel x als Potenzreihe von $x_1 \ldots x_n$, auch erhalten wir beliebige Potenzen derselben dargestellt. Wenn dagegen $m > 1$ ist, erhalten wir zwar keine directe Formel für die Wurzel, können aber mittelst den Ausdrücken $(\alpha)_1, (\alpha)_2 \ldots$ eine Gleichung m^{ten} Grades aufstellen.

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_m = 0$$

der die Wurzeln genügen müssen, wo die A's Potenzreihen von $x, \ldots x_n$ sind.

Bei dem Satze haben wir die Annahme gemacht, dass die Function $G(x\, x_1, \ldots x_n)$ für $x, \ldots x_n$ nicht identisch verschwindet, welche Bedingung nicht immer erfüllt wird. Wenn dies nicht erfüllt wird, so kann man durch eine einfache lineare Substitution es bewirken, dass die neue Function die verlangte Eigenschaft hat. Fängt nämlich die Function mit Gliedern μ^{ter} Dimension an, so ist

$(x\, x_1 \ldots x_n)_\mu + \cdots = 0$ wo alle Glieder für $x, \ldots x_n = 0$ verschwinden mögen. Nun setzen wir

$$x = \alpha_{00}\, y + \alpha_{01}\, y_1 + \cdots + \alpha_{0n}\, y_n$$
$$x_1 = \alpha_{10}\, y + \alpha_{11}\, y_1 + \cdots + \alpha_{1n}\, y_n \qquad 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \alpha_{n0}\, y + \alpha_{n1}\, y_1 + \cdots + \alpha_{nn}\, y_n$$

wo die α's willkürlich sind, nur die Bedingung erfüllen sollen, dass die Determinante derselben von Null verschieden ist. Macht man diese Substitution, so verwandelt sich die ursprüngliche Function in folgende

$$y^\mu (\alpha_{00}\; \alpha_{10} \ldots \alpha_{n0})_\mu + y^{\mu+1}(\ldots) \ldots = 0 \qquad 2$$

Damit diese Function nicht identisch verschwinde für $y_1 \ldots y_n = 0$ hat man die α's noch der Bedingung zu unterwerfen, dass die homogene Function μ^{ten} Grades $(\alpha_{00}\; \alpha_{10} \ldots)_\mu$ von Null verschieden ist. Alsdann hat die Function die verlangte Eigenschaft und hat man hieraus alle Werthsysteme $y\, y_1 \dots y_n$ unterhalb bestimmter Grenzen gefunden, die der Gleichung 2 genügen, und die gleichzeitig unendlich klein werden, so können wir dann mittelst 1 die Wurzel für x finden. Nun kehren wir zu der ursprünglich gestellten Aufgabe zurück und wollen dieselbe schrittweise vervollständigen.

I Es sei die gegebene Gleichung

3 $$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1r}\, x_r + \dots = 0$$

wo die lineare Function nicht identisch Null ist. Dann muss wenigstens einer der Coefficienten derselben von Null verschieden sein, dieses sei z. B. a_{11} ... Setze ich die übrigen $x_2 \dots x = 0$ so fängt die Function von x_1 an mit $a_{11}\, x_1$ und die ursprüngliche Function reducirt sich also auf folgende

$$x_1 (a_{11} + \dots)$$

Nun setze man eine Grenze g fest, so daſs für alle Werthe von x_1 deren absoluter Betrag kleiner ist als g, die Gröſse in der Klammer nicht verschwindet. Es ist alsdann möglich $x_1 \dots x_1$ so zu beschränken, daſs die Gleichung 3 für alle den Bedingungen genügende Werthesysteme $x_2 \dots x_r$ nur eine Wurzel x_1 hat, deren absoluter Betrag kleiner als g ist und die gleichzeitig mit $x_2 \dots x_r$ unendlich klein wird. Diese Gleichung 3 wird nur durch eine unendlich kleine Wurzel x_1 befriedigt. Es handelt sich nun alle Werthsysteme zu finden, deren absoluter Betrag eine gewisse Grenze nicht überschreitet, und die der Gleichung genügen. Wir können nach dem eben bewiesenen Satze unter den gemachten Voraussetzungen finden.

$$x_1 = f(x_2\, x_3 \dots x_r) \qquad 4$$

eine Potenzreihe von $x_2\, x_3 \dots x_r$, die für $x_1 \dots x_r = 0$ Null wird. Diese Gleichung liefert uns die Wurzel. Wenn ich nun für $x_2 \dots x_r$ Grenzen festgesetzt habe und ebenfalls für x_1, und nehme ich δ kleiner an als sämmtliche diese Grenzen, so liefert die Gleichung 4 alle Wurzeln die kleiner sind als δ, wenn die Größen $x_2 \dots x_r$ ebenfalls unterhalb δ liegen. Wir erhalten alle Werthsysteme $x_1 \dots x_r$, deren absolute Beträge sämtlich unterhalb δ liegen durch die Formel 4. Andere Systeme gibt es nicht, die den Bedingungen genügen, denn für jedes System $x_2 \dots x_r$ deren absoluter Betrag $< \delta$ ist, ergibt sich nur ein einziger Werth für $|x_1| < \delta$. Durch die Formel 4 werden also alle unendlich kleinen Werthsysteme $x_1 \dots x_r$ die der Gleichung 3 genügen, gegeben. Ist $a_{11} = 0$ so muß ein anderer Coefficient von Null verschieden sein, und wir erhalten dasselbe Resultat.

II Nehmen wir jetzt 2 Gleichungen an

$$a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1r}\, x_r + \dots = 0 \qquad 1$$
$$a_{21}\, x_1 + \dots + a_{2r}\, x_r + \dots = 0$$

wobei die linearen Functionen nicht identisch null sein sollen und die Bedingung erfüllen sollen, daß wenn ich setze

$$a_{11}\, x_1 + \cdots + a_{1r}\, x_r = 0$$

2 $$a_{21}\, x_1 + \cdots + a_{2r}\, x_r = 0$$

es möglich ist 2 der Variablen durch die übrigen auszudrücken, nehmen wir an, daß $a_{11} \gtrless 0$, alsdann können wir nach I x_1 als Potenzreihen der übrigen darstellen. $x_1 = f(x_2 \ldots x_r)$ Setzen wir dies in die 2te Gleichung ein, so erhalten wir eine Gleichung zwischen $x_2 \ldots x_r$. Nun sehen wir zunächst daß f_1 mit Gliedern 1ter Dimension anfangen muß, also

3 $$x_1 = b_{12}\, x_2 + \cdots + b_{1r}\, x_r + \cdots$$

Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so müßten in der 1ten Gleichung von 1 alle Coefficienten mit Ausnahme des von x_1 identisch null sein, da 1tens die Gleichung von 1 durch 3 identisch befriedigt war. In diesem Falle würde die 2te Bedingung, die wir von den beiden linearen Functionen 2 verlangen nicht erfüllt. Setzen wir nun dies in die 2te Gleichung von 1 an, so muß das Resultat mit linearen Gliedern anfangen, denn wenn die Glieder 1ter Dimension verschwänden, so würde das heißen, die 2te Gleichung in 2 wäre eine Folge von der 1ten Gleichung in 2, was gegen die Voraussetzung ist.

Nach der Einsetzung kann man nun nach I eine der Variablen, welche linear vorkommt, durch die andern aus.

drücken, z. B.

$x_2 = f_2(x_3 \dots x_r)$ und wenn wir dies in 4

$x_1 = f(x_2 \dots x_r)$ einsetzen, so erhalten wir

$$x_1 = f_1(x_3 \dots x_r) \qquad 5$$
$$x_2 = f_2(x_3 \dots x_r)$$

und die Gleichungen liefern alle unendlich kleinen Werthsysteme $x_1 \dots x_r$, die den Gleichungen 1 genügen

III Wir wollen nun allgemein den Satz aufstellen: Es seien gegeben m Gleichungen zwischen r Variablen von der Form.

$$\begin{aligned}
&a_{11} x_1 + \dots + a_{1r} x_r + \dots = 0 \\
&a_{21} x_1 + \dots + a_{2r} x_r + \dots = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&a_{m-1,1} x_1 + \dots + a_{m-1,r} x_r + \dots = 0 \\
&a_{m,1} x_1 + \dots + a_{m,r} x_r + \dots = 0 \qquad m < r
\end{aligned} \qquad 1.$$

Reduciren wir die Gleichungen auf die Linearfunction und bezeichnen diese mit $y_1 = 0 \dots y_m = 0$. Wenn es möglich ist aus dieser Gleichung $y_1 = 0 \dots y_m = 0$ m der Variablen z. B. $x_1 \dots x_m$ durch die anderen auszudrücken, so ist es möglich für $x_1 \dots x_m$ Potenzreihen der übrigen x's zu finden, sodass sie die Gleichungen 1 befriedigen, und alle Werthsysteme der Variablen liefern, deren absoluten Beträge unterhalb einer Grenze δ liegen. Wir nehmen an, der Satz sei unter den gemachten Bedingungen für $(m-1)$ Gleichungen bewiesen, so dass wir finden können.

$$x_1 = f_1(x_m \cdots x_r)$$

$$x_2 = f_2(x_m \cdots x_r)$$

2 $$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{m-1} = f_{m-1}(x_m, \cdots x_r)$$

welche Potenzreihen in der $(m-1)$ Gleichung von 1 gesetzt die Gleichungen befriedigen. Daß dies unter den gemachten Bedingungen geht, folgt unmittelbar daraus, daß wenn sich aus $y_1 = 0 .. y_m = 0$ m der Variablen ausdrücken lassen, sich nothwendig auch aus $y_1 = 0 .. y_{n-1} = 0$ $(m-1)$ Variablen werden ausdrücken lassen. Auch folgt durch dieselben Schlüße wie in II, daß die Function $f_1 .. f_{m-1}$ mit linearen Gliedern anfangen. Setzen wir nun diese Werthe 2 in die m^{te} Gleichung von 1, so erhalten wir eine Gleichung zwischen den Variablen $x_m .. x_r$. Diese Gleichung muß wegen der Voraussetzung mit Gliedern linearer Dimension anfangen, man kann sodann die Variable, welche linear vorkommt z. B. x_{m+2} durch die übrigen $x_{m+1} .. x_r$ ausdrücken nach I und wenn man diese Potenzreihe in 2 einsetzt erhält man

$$x_1 = f_1(x_{m+1} \cdots x_r)$$

3 $$x_r = f_2(x_{m+1} \cdots x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_m = f_m(x_{m+1} \cdots x_r)$$

Diese Gleichungen liefern uns alsdann alle unendlich kleinen

Werthsysteme, die der Gleichung 1 genügen. Wenn also der Satz für $m-1$ bewiesen ist, so besteht es auch für m. Nun ist es für $m = 1, 2$, gezeigt, also gilt er allgemein. Hierbei muss natürlich $m \neq r$ sein. Wenn $m = r$ ist, dann würden die Gleichungen nur für $x_1 \dots x_r = 0$ erfüllbar sein.

Nun können wir unsere Aufgabe Seite 399 vervollständigen: Wir hatten dort das Gleichungssystem 1, 2.

$$A_{\lambda,1}\, u_1 + \dots + A_{\lambda,n}\, u_n + \dots = 0 \; (\lambda = 1 \dots, m)$$

$$A_{m+\lambda,1}\, u_1 + \dots + A_{m+\lambda,n}\, u_n - t_\lambda = 0 \; (\lambda = 1, \dots n-m)$$

wobei die $A'_{m+\lambda}s$ so gewählt sind, dass man aus den linearen Gliedern der u's ohne die t's ausdrücken kann. Wir haben hier n Gleichungen zwischen $2n-m$ Variablen $(n > m)$. Wir können nach dem Satz III alle u's ausdrücken als Potenzreihen der t's

$$u_\mu = \mathfrak{P}_\mu(t_1, \dots t_{n-m}) \; (\mu = 1, \dots n) \qquad 4$$

und diese Potenzreihen werden uns alle Werthsysteme der u's liefern, die den Gleichungen genügen und deren absoluter Betrag innerhalb einer Grenze δ liegt und zwar alle diese Systeme. Wir sind also in Bezug auf die Aufgabe Seite 399 zu folgendem Resultate gelangt.

Wenn wir Gleichungen von der betrachteten Form 1 haben, und wollen alle Systeme der x finden, die unterhalb einer Grenze liegen und den Gleichungen genügen, oder was dasselbe ist: wollen wir alle unendlich kleinen

Wurzeln der Gleichung 1 finden, so nehmen wir noch lineare Functionen mit hinzu, mit der Bedingung, dass die oben erwähnte Determinante nicht verschwindet. Alsdann lassen sich die Variablen $x_1, \dots x_n$ als Potenzreihen der Grössen t ausdrücken, so dass hierdurch die Gleichungen zunächst formell befriedigt werden, diese Potenzreihen haben ein Conv: bezirk, und man kann die Grössen t so beschränken dass

1, diese Potenzreihen den Gleichungen genügen und

2, sie alle Werthsysteme $x_1, \dots x_n$ für die $(x_1, \dots a_1) \dots$ eine gewisse Grenze δ nicht überschreitet, darstellen.

Die wirkliche Herstellung dieser Potenzreihen gelingt am besten, nach der hier gezeigten Methode.

<u>Definition</u>. Wenn wir eine Potenzreihe haben, $G(x_1, \dots x_n | a_1, \dots a_n)$ die mit Gliedern l^{ter} Dimension anfängt, so sagen wir die Potenzreihe sei von der l^{ten} Ordnung

Aus dem Vorigen ist klar, dass die Methode nur dann anwendbar ist, wenn die Potenzreihen von der 1^{ten} Ordnung sind. Sind sie von einer höheren Ordnung, so ist die Untersuchung schwieriger, und kann an dieser Stelle nicht erledigt werden.

Die eben entwickelten Sätze bilden die Grundlage der sogenannten Umkehrung der Reihen. Haben wir nämlich eine Potenzreihe

$$G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$$ und bezeichnen ihren Werth

für $x_1 \dots x_n = a_1 = a_n$ mit a_{n+1}, so haben wir die Gleichung

$$x_{n+1} - a_{n+1} = G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$$ oder auch

$$G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n) - (x_{n+1} - a_{n+1}) = 0$$

Ist nun eine Potenzreihe in Bezug auf $x_1 - a_1$ z.B. von der 1ten Ordnung, so können wir nach den vorigen Sätzen aus der Gleichung herleiten

$$x_1 - a_1 = G_1(x_2 \dots x_n\, x_{n+1} | a_1 \dots a_{n+1})$$

Ehe wir weitergehen, wollen wir noch Beispiele zu der Anwendung der entwickelten Sätze erwähnen.

1) Nehmen wir eine algebraische Gleichung zwischen $x\, y$, die wir reell voraussetzen und als Coordinaten einer Curve auffassen. Angenommen es sei $a\, b$ ein Punkt der Curve so daß $F(a\, b) = 0$ ist.

Wir können nun $F(xy)$ nach Potenzen von $x - a = u$ $y - b = v$ entwickeln und erhalten

$$\mathfrak{P}(x-a, y-b) = 0$$

Wenn die Entwickelung anfängt mit Gliedern 1ter Dimension, so sagen wir der Punkt ab ist ein regulärer Punkt der Curve, wenn es nicht der Fall ist, so wird er ein singulär Punkt genannt. Daß die Anzahl der singulär Punkte bei den algebraischen Curven eine endliche ist, werden wir aus den späteren Untersuchungen erkennen. Wir setzen nun an ab sei kein sing. Punkt, so daß wir haben

$$\mathfrak{F}(x-a,\ y-b) = \mathfrak{F}(u,\ v) = \alpha u + \beta v + \dots = 0.$$

wo α u. β nicht gleichzeitig Null sein dürfen. Nehmen wir nun eine Gleichung hinzu

$$\alpha' u + \beta' v - t = 0, \text{ so daß } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

so können wir aus dem Vorigen aus den Gleichungen

$$\alpha u + \beta v + \dots = 0$$

$$\alpha' u + \beta' v - t = 0$$

u und v als Potenzreihen von t darstellen, so wird hierdurch die Gleichung $F(xy) = 0$ befriedigt, und in einer gewissen Umgebung von ab hierdurch alle Punkte dargestellt werden. Diese Darstellungsweise der Punkte der Curven sind eben dadurch charakteristisch, daß sie sich auf die obige Weise analytisch darstellen lassen.

2) Es sei eine Fläche gegeben $G(xyz) = 0$ und abc ein Punkt derselben. Wir können $x - a = u$, $y - b = v$, $z - c = w$ setzen und hieraus

$$\mathfrak{F}(u,\ v,\ w) = \alpha u + \beta v + \gamma w + \dots = 0$$

entwickeln, wo abc ein nicht singulär Punkt sein soll. Nehmen wir hinzu die beiden Gleichungen

$$\alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w - t_1 = 0$$

$$\alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w - t_2 = 0$$

so daß

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \gtrless 0$$ so finden wir

$$x = a + \varphi(t_1 t_2)$$
$$y = b + \psi(t_1 t_2)$$
$$z = c + \chi(t_1 t_2)$$

3, Raumcurve $F_1(xyz) = 0$ $F_2(xyz) = 0$
nehmen wir hinzu zu den Gleichungen

$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \dots = 0$$
$$\alpha' u + \beta' v + \gamma' w + \dots = 0$$ die Gleichung
$$\alpha'' u + \beta'' v + \gamma'' w + = t$$

den Bedingungen gemäß, so können wir u, v, w als Potenzreihen von t darstellen, also auch

$$x = a + \mathfrak{P}_1(t)$$
$$y = b + \mathfrak{P}_2(s)$$
$$z = c + \mathfrak{P}_3(s)$$

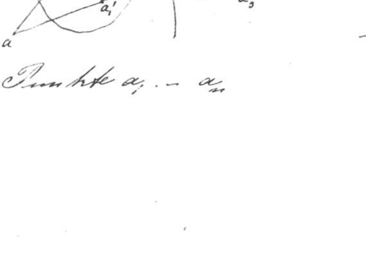
wenn $a\,b\,c$ ein Punkt der Curve ist.

Schließlich bemerken wir noch, daß diese Ausdrücke der x'e in t die Bedingung erfüllen, daß zu 2 verschiedenen Werthsystemen der t's auch verschiedene x gehören, dies wäre nicht der Fall, wenn z. B für t eine gerade Function $t = c_1 \tau^2 + c_1 \tau^n + \dots$ einsetzen. Alsdann würden wir jeden Punkt doppelt erhalten.

Nun kehren wir zu der 3ten auf Seite 380 erwähnten

Hauptfrage zurück. Vorher wollen wir noch einige Hilfsätze entwickeln, die selbst für die Theorie wichtig sind, auf denen sich aber die 3te Untersuchung unmittelbar stützt.

Lehrsatz. Wenn man aus einem Elemente $G(n/a)$ für die Umgebung einer andern Stelle a' durch Vermittelung von Punkten $a_1\, a_2 \ldots a_n$, die so gewählt werden müssen, daß a_1 in dem conv. bereiche von $G(n/a)$, a_2 im conv. bereiche von $G(n/a_1)$ u. s. w. liegt, die Reihe $G(n/a')$ herleitet, so kann man bei der Herleitung die Punkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ durch andere $a_1'\, a_2'\, a_n'$ ersetzen, die vollständig außerhalb der Strecken $(aa_1,\ a_1a_2 \ldots$ liegen, und zwar kann man stets für die Verrückung $a_1 a_1',\ a_2 a_2' \ldots$ eine Grenze δ feststellen, so daß wenn die Grenze δ nicht überschritten wird, man durch Vermittelung dieser Punkte aus $G(n/a)$ auch dieselbe Reihe $G(n/a')$ herleiten kann.



Es seien die Punkte ursprünglich $a\, a_1 \ldots a_n\, a'$ und die Punkte $a_1 \ldots a_n$ ersetzen wir durch $a_1' \ldots a_n'$ und untersuchen wann wir durch Vermittelung derselben aus $G(n/a)$ dasselbe $G(n/a')$ herleiten kann, wie mittelst der ursprünglichen Punkte $a_1 \ldots a_n$

Zunächst sehen wir, daß damit wir aus $\mathfrak{P}(x|a)$ überhaupt direct $\mathfrak{P}(x|a_1')$ herleiten können, muß a_1' im conv. bereiche von $\mathfrak{P}(x|a)$ liegen; damit wir auch aus $\mathfrak{P}(x|a_1)$ direct $\mathfrak{P}(x|a_1')$ bekommen, muß auch a_1' im conv. Ber. von $\mathfrak{P}(x|a_1)$ liegen. Dies wird aber offenbar erreicht, wenn wir die Strecke $a_1 a_1' <$ nehmen, als der kleinste Abstand des a_1 von der Peripherie des Kreises um a, welchen wir mit δ bezeichnen. D. h. alle Punkt a_1', welche liegen innerhalb eines um a_1 mit dem Radius δ beschriebenen Kreises genügen der Bedingung, und wir haben dann, daß die Reihe $\mathfrak{P}(x|a_1')$ welche durch Vermittelung von a_1 aus $\mathfrak{P}(x|a)$ hergeleitet wird, identisch ist mit der direkt aus $\mathfrak{P}(x|a)$ hergeleiteten. Nun sei der Cov. Radius von $\mathfrak{P}(x|a_1)$ gleich ϱ_1 und die Verschiebung $a' a_1' \leqq \varepsilon$, und die kleinste Entfernung von a_2 von der Peripherie des conv. kreises um a_1 gleich δ_2. Nun wählen wir a_2' so, daß es im conv. Bereiche von $\mathfrak{P}(x|a_2)$ und gleichzeitig im conv. bereiche von $\mathfrak{P}(x|a_1')$ liege. Die Verschiebung $a_2 a_2'$ sei wiederum $\leqq \varepsilon$, die erste Bedingung wird erfüllt, wenn man a_2' in dem Kreise wählt, der um a_2 mit dem Radius δ_2 beschrieben ist; d. h. wenn wir $\varepsilon = a_2 a_2' < \delta_2$ wählen. Die Strecke $a_1' a_2'$ soll aber so sein daß sie im conv. bereiche von $\mathfrak{P}(x|a_1')$ liegt. Nun haben wir den conv. radius von $\mathfrak{P}(x|a_1')$ ist sicher nicht kleiner als $\varrho_1 - \varepsilon$. Nun ist

$$a_1'a_2' \leqq a_1a_2 + 2\varepsilon \leqq \varrho_1 - \delta_2 + 2\varepsilon$$

damit die Bedingung erfüllt wird, muss

$$\varrho_1 - \delta_2 + 2\varepsilon < \varrho_1 - \varepsilon \text{ und hieraus folgt}$$

$$\varepsilon < \frac{\delta_2}{3}$$

Der conv. kreis von $G(x|a_2)$ sei $\varrho_2 = a_2a_3 + \delta_3$

Alsdann wird der conv. kreis von $G(x|a_2')$ sicher nicht kleiner sein als $\varrho_2 - \varepsilon$. Nun sei wiederum die Verschiebung von a_3 $a_3a_3' \leqq \varepsilon_1$, damit a_3' im conv. bezirk von $G(x|a_3)$ liegt, nur $\varepsilon < \delta_3$, damit a_3' im conv. kreise von $G(x|a_2')$ liegt und

$$2\varepsilon + \varrho_2 - \delta_3 < \varrho_2 - \varepsilon \text{ oder}$$

$$\varepsilon < \frac{\delta_n}{3} \text{ u.s.w.}$$

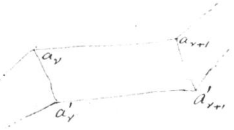
Wenn wir also mit δ den kleinsten Werth aller $\delta_1, \delta_2 \ldots$ bezeichnen, und die Verschiebungen so nehmen, dass sie $\leqq \frac{\delta}{3}$ sind, so wird a_ν' im conv. kreise von $G(x|a_\nu)$ und auch im conv kreis von $G(x|a_{\nu-1}')$ liegen. Nun wollen wir zeigen, dass, wenn man aus $G(x|a)$ durch Vermittelung der neuen Punkte $a_1' a_2' \ldots a_n'$, die den obigen Bedingungen genügen, eine Reihe für die Umgebungen von a' herleitet $G(x|a')$ diese identisch ist mit der, die wir durch die Vermittelung der ursprünglichen Punkte $a_1 a_2 \ldots$ hergeleitet haben. Wir wollen aus beidem Beweise folgender Abkürzungen bilden. Eine Reihe $G(x|a_\nu)$ die durch Vermittelung von $a'a'' \ldots$ aus $G(x|a_{\nu-1})$ hergeleitet wird, wollen wir kurz mit $(a_{\nu-1}, a'a'' \ldots a_\nu)$ bezeichnen. Dieses vorausgesetzt haben wir zunächst folgendes.

$$(a\, a_1\, a_1') \equiv (a\, a_1')$$

Nun nehmen wir an, daß bis zu einem gewissen Punkte a_ν' bereits nachgewiesen ist, daß

$$(a\, a_1 a_2 \dots a_\nu) \equiv (a\, a_1' a_2' \dots a_\nu')$$

und wollen zeigen, daß dies unter den obigen Bedingungen auch weiter gilt für den $a_{\nu+1}'$ ten Punkt.



Zunächst liegt a_ν' im konv. bereiche von $G(n|a_\nu)$ und umgekehrt a_ν liegt im konv. bereiche von $G(n|a_\nu')$ denn der konv. Radius von $G(n|a_\nu')$ ist sicher nicht kleiner als δ_ν, nun ist $a_\nu a_\nu' < \frac{\delta_\nu}{3}$, also fällt a_ν in den Kreis mit dem Radius δ_ν; ferner liegt auch $a_{\nu+1}$ im konv. bereiche von a_ν', denn im schlimmsten Falle wäre $a_\nu a_{\nu+1} = \varepsilon + \varrho_\nu - \delta_\nu$. Nun ist

$$2\varepsilon + \varrho_\nu - \delta_\nu < \varrho_\nu - \varepsilon \text{ also umso mehr}$$
$$\varepsilon + \varrho_\nu - \delta_\nu < \varrho_\nu - \varepsilon$$

Wir haben somit folgendes. Es ist

$$(a_\nu'\, a_\nu\, a_{\nu+1}) \equiv (a_\nu'\, a_{\nu+1}) \text{ und}$$
$$(a_\nu'\, a_{\nu+1}\, a_{\nu+1}') \equiv (a_\nu'\, a_{\nu+1}')$$

Also $(a_\nu'\, a_\nu\, a_{\nu+1}\, a_{\nu+1}') \equiv (a_\nu'\, a_{\nu+1}')$ Nun ist der Annahme nach

$(a\, a_1\, a_2 \dots a_\nu\, a_\nu') \equiv (a\, a_1'\, a_2' \dots a_{\nu-1}'\, a_\nu')$ Daraus folgt zunächst

$(a\, a_1\, a_2 \dots a_\nu\, a_\nu'\, a_{\nu+1}) \equiv (a\, a_1\, a_2 \dots a_\nu\, a_{\nu+1})$ und

$(a\, a_1\, a_2 \dots a_\nu\, a_\nu'\, a_{\nu+1}\, a_{\nu+1}') \equiv (a\, a_1\, a_2 \dots a_\nu\, a_{\nu+1}\, a_{\nu+1}')$ da nun

$(a_\nu'\, a_{\nu+1}\, a_{\nu+1}') \equiv (a_\nu'\, a_{\nu+1}')$ wie auch

$$(a\, a_1\, a_2 \ldots a_\nu\, a_\nu\, a'_\nu\, a_{\nu+1}\, a'_{\nu+1}) \equiv (a\, a_1 \ldots a_\nu\, a'_\nu\, a'_{\nu+1})$$

und nach der Voraussetzung ist

$$(a\, a_1 \ldots a_\nu\, a'_\nu) \equiv (a\, a'_1 \ldots a'_{\nu-1}\, a'_\nu) \text{ also ist}$$

$$(a\, a_1\, a_2 \ldots a_\nu\, a'_\nu\, a_{\nu+1}\, a'_{\nu+1}) \equiv (a\, a'_1 \ldots a'_{\nu}\, a'_{\nu+1}) \text{ demnach}$$

ist $(a\, a_1\, a_2 \ldots a_\nu\, a'_\nu\, a_{\nu+1}\, a'_{\nu+1} \equiv (a\, a'_1 \ldots a'_\nu\, a''_{\nu+1})$.

Wenn nun x_n a'_n die vorletzten (von a') Punkte sind, so haben wir unter der obigen Annahme

$$(a\, a_1 \ldots a_n\, a') \equiv (a\, a'_1 \ldots a'_n\, a')$$

Nun haben wir schon gezeigt, daß

$$(a\, a_1\, a'_1) \equiv (a\, a'_1)$$

Also ist, wenn wir die Punkte $a'_1 \ldots a'_n$ den Bedingungen gemäß verschieben, wirklich

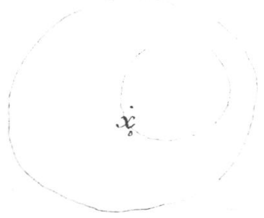
$$(a\, a_1\, a_2 \ldots a_n\, a') \equiv (a\, a'_1\, a'_2 \ldots a'_n\, a') \text{ w. z. b. w.}$$

Dieser Satz zeigt nun die Möglichkeit solcher Verschiebungen der Punkte $a_1 \ldots a_n$ er gibt uns aber nicht alle möglichen Arten der Variation derselben. Alle mögliche Variationen der Punkte zu finden, sodaß man durch Vermittelung der varierten Punkte für die Umgebung von a' dieselbe Reihe erhalten, wie durch Vermittelung der ursprünglichen, ist hiermit nicht erledigt und die letzte Untersuchung ist sehr schwer.

Für unsern Zweck reicht der obige Satz, welcher uns aus den unendlich vielen Arten der erlaubten Variationen eine Art zeigt, vollständig aus.

<u>Lehrsatz.</u> Wenn ich innerhalb des Conv. bereiches einer Potenzreihe

$G(x|x_0)$ einen beliebigen Kreis zeichne, so kann $G(n|x_0)$ nur an einigen Stellen in diesem Kreise Null werden, d. h. die Anzahl der Stellen, an denen die Potenzreihe $G(n|x_0)$ innerhalb dieses Kreises Null wird, kann nicht unendlich groß werden.



Denn angenommen, es gäbe innerhalb des durch den Kreis beschränkten Bereiches unendlich viele solche Punkte, für welche $G(n|x_0)$ verschwindet, so müßte es entweder innerhalb, oder an der Grenze des Bereiches wenigstens einen Punkt x' geben, in dessen jeder noch so kleiner Umgebung es unendlich viele Punkte der Art vorhanden wären. Nun liegt x' jedenfalls noch innerhalb des Conv. bereiches von $G(n|x_0)$, ich kann also aus $G(n|x_0)$ herleiten $G(n|x')$, welche Reihe die Gestalt haben möge.

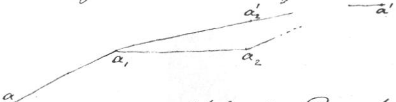
$$(x-x')^{\mu}\{c_{\mu}+c_{\mu+1}(x-x')+\dots\}$$

Alsdann kann ich eine Umgebung von x' angeben, so daß die Reihe für alle Werthe von x innerhalb der Umgebung (mit Ausnahme von $x=x'$) von Null verschieden ist. Oder auch ich kann eine Umgebung von x' angeben, so daß für alle Werthe von x innerhalb der Umgebung $c_{\mu}+c_{\mu+1}(x-x')+\dots$ von Null verschieden ist. Dies wäre unmöglich, wenn die Voraussetzung richtig wäre.

Denn da in der Umgebung von x', $G(n|x_0)=G(n|x')$ so

müßte $P(x|x')$ in der Umgebung von x' für unendlich viele Werthe Null sein. Die Annahme ist also falsch.
Als unmittelbare Folgerung aus den beiden Sätzen ergibt sich folgender Satz.

Satz. Wenn $P(x|a)$ eine Potenzreihe ist, die für $x = a$ nicht verschwindet und $P(x|a')$ eine aus ihr hergeleitete mit derselben Eigenschaft, daß $P(x'|a') \gtrless 0$, so können wir stets von a nach a' einen Weg angeben, für dessen Punkte die Function $P(x|a)$ nirgends Null wird, und man auf demselben aus $P(x|a)$ auch $P(x|a')$ herleiten kann.



Es seien $a_1, a_2 \dots$ die vermittelnden Punkte. Angenommen, daß für irgend einen Punkt der Strecke z. B. $a_1 a_2$ die Function, welche definirt wird durch $P(x|a_1)$ Null wäre, so wissen wir nach dem letzten Satze, daß es in dem Bereiche, in welchem $a_1 a_2$ liegt, nur einige Stellen geben kann, für die es der Fall ist. Nun können wir auf unendlich viele Arten den Punkt a_2 variiren, und auf diese Weise können wir eine Strecke $a_1 a_2'$ finden, für die die Function nicht Null ist.
Dies machen wir mit allen Strecken, auf welchen die Function Null ist, und die Variationen der Punkte können wir nach dem 1ten Satze stets so machen, daß wir auf

dem neuen Wege aus $\mathfrak{P}(x|a)$ ebenfalls $\mathfrak{P}(x|a')$ herleiten können.

<u>Haupt-Lehrsatz</u>: Es sei ein Gebilde 1ter Stufe im Gebiete der 2 Variablen $x\,y$ definirt durch das Functionselement $y = \mathfrak{P}(x|a)$, von dem wir voraussetzen wollen, dass in der Entwickelung 1

$$y = b + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots \qquad 2$$

der Coefficient des linearen Gliedes b_1 von Null verschieden ist. Unter dieser Voraussetzung können wir nun $x-a$ (nach dem Satze I) ausdrücken durch eine Potenzreihe von $y-b$ in der Form

$$x - a = \alpha_1(y-b) + \alpha_2(y-b)^2 + \dots \qquad 3$$

wodurch wir ein Functionselement

$$x = \mathfrak{P}(y|b) \text{ erhalten.} \qquad 4$$

Durch dieses Functionselement wird ebenfalls ein Gebilde 1ter Stufe im Gebiete der 2 Variablen $x\,y$ definirt. Man soll beweisen, dass beide Gebilde identisch sind.

Betrachten wir die Gleichung

$$y - b + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots = 0 \qquad 5$$

so wissen wir, dass wir hieraus

$$x - a = \mathfrak{P}(y-b) \text{ finden, diese Potenzreihe} \qquad 6$$

uns alle Werthepaare $x-a$, $y-b$, gibt, die die Gleichung befriedigen und unterhalb einer Grenze liegen.

Oder die Potenzreihe $x = \mathfrak{P}(y|b)$ gibt uns alle Wurzeln der Gleichung 5, die in einer Umgebung von a liegen, oder sie gibt uns alle unendlich kleinen Wurzeln $x-a$. Wenn wir also für $(x-a, y-b$ Grenze δ, festsetzen, so gibt uns 6 dieselben Werthepaare $x-a$, $y-b$, wie die Gleichung 5. D. h. In einer gewissen Umgebung der Stelle $a\,b$ stimmen die beiden Gebilde

7 $$y = G(x|a)$$

8 $$x = H(y|b)$$ identisch überein.

Nun nehmen wir an, wir leiten für die Umgebung einer Stelle a' aus $y = G(x|a)$ das Element

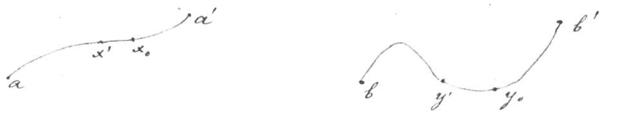
9 $$y = G(x|a')$$ und nehmen an, daß in der Entwickelung das lineare Glied $x-a'$ nicht fehlt, daß also die Reihe umkehrbar ist. Daraus können wir demnach durch Umkehrung finden

10 $$x = H(y|b')$$ wo b' der Werth von y für $x = a'$ ist. Nach dem eben Gesagten stimmen die beiden Elemente

$$y - G(x|a')$$
$$x = H(y|b')$$ in einer gewissen Umgebung von $a'b'$. Wenn wir also nachweisen können daß $x = H(y|b')$ aus $x = H(y|b)$ ableitbar ist, so wird unser Satz bewiesen, denn alsdann wird man von der Stelle $a\,b$ des 2ten Gebildes zu jeder Stelle $a'b'$ des 1ten Gebildes gelangen können.

Es sollen zunächst beide Reihen $y = G(x|a)$ $y = G(x|a')$

umkehrbar sein, d. h. b_1 u b_1' der Coeff. des Gliedes $x - a$, $x - a'$ müssen von Null verschieden sein. Nehmen wir an, dass wir uns aus $G(x|a)$ $G(x|a')$ herzuleiten, einen bestimmten Weg gewählt haben. Jedem Punkte dieser Linie $a\,a'$ entspricht ein Punkt im Gebiete der Variablen y, sodass dem ganzen Wege $a\,a'$ ein ganz bestimmter Weg für y, bb' entspricht.



Nun können wir schon im Voraus sehen, dass nicht auf jedem den x en entsprechenden Wege bb' die Function $H(y|b)$ fortsetzbar ist. Denn wenn das richtig sein soll was wir nachweisen wollen, so muss das Element $x = H(x|y')$ für jeden Punkt von bb' identisch sein mit dem Elemente, was wir durch Umkehrung der entsprechenden Reihe $y = G(x|x')$ erhalten. Nun ist die Reihe $y = G(x|x')$ nur dann umkehrbar, wenn der Coefficient des linearen Gliedes oder was dasselbe ist $\frac{dy}{dx}$ für den Punkt $x = x'$ nicht Null sein. Wenn also auf dem durch die x ganz bestimmten Wege bb' die Function $H(y|b)$ fortsetzbar sein soll, so muss für keinen Punkt der Linie $a\,a'$ die Function $\frac{dy}{dx}$ gleich Null sein. Nun wissen wir nach dem 3ten Hilfsatze, dass wenn wir eine durch ein Element definirte Function haben, die für a und a' von Null verschieden, so können wir stets den Weg aa' so variiren, dass wir aus dem Elemente $G_1(x|a)$ auf diesem neuen Wege dasselbe Element $G_1(x|a')$ herleiten können und die Function für keinen Punkt des Weges Null wird. Nun ist $\frac{dy}{dx}$ eine solche Function die definirt ist durch das Element $G'(x|a)$ und die der Voraussetzung gemäss weder für $x=a$, noch für $x=a'$ Null wird, da ja die Coeff. b_1 $b_1' \gtrless 0$ und die ebenso weit fortgesetzt werden kann, wie die Function $G(x|a)$ selbst. Wir können also zwischen a u. a' einen solchen Weg finden, dass auf ihm $\frac{dy}{dx}$ nirgends Null wird, und gleichzeitig das Element $G'(x|a)$ in dasselbe $G'(x|a')$ übergeführt werden kann, wie auf dem ursprünglichen Wege. Es sei der Weg aa' ein solcher, und der hierdurch bestimmte Weg für y sei bb' und nun wollen wir zeigen, dass das aus $H(y|b)$ ableitbare Element $H(y|b)$ mit demjenigen übereinstimmt, welches aus $G(x|a)$ durch Umkehrung entsteht. Es sei also

11 $$y = b_1 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \dots$$ und die Um-

12 kehrung $$x = a + a_1(y-b) + a_2(y-b)^2 + \dots$$

Das Element $x = H(y|b)$ kann jedenfalls bis zu einem gewissen Punkte auf der Linie bb' fortgesetzt werden, da die Reihe einen C. Bereich hat. Wir nehmen an, dass aus $H(y|b)$ ausgehend man bis zu y' ableiten kann

$H(y|y')$ | wo $x_0 y_0$ die Grenzstelle sein möge) Wir können auch annehmen, daß bis zu diesem Punkte hin ebenso wie $H(y|b)$ aus $G(x|a)$ aus $H(y|y')$ aus $G(x|x')$ entspringt, d. h. daß das aus dem Elemente $H(y|b)$ hergeleitete Element $x = H(y|y')$ in einer gewissen Umgebung von $x'y'$ mit dem Elemente $y = G(x|x')$ identisch ist. Denn ich brauche nur x' in der Nähe von a wählen. Alsdann habe ich Folgendes: Ich leite aus

$y = G(x|a)$, $y = G(x|x')$ und hieraus durch Umkehrung $x = H(y|y')$. Ferner leite ich aus

$y = G(x|a)$ durch Umkehrung

$x = H(y|b)$ und hieraus

$x = H(y|y')$

Wenn ich nun x' innerhalb der Umgebung von a genommen habe, in welcher $y = G(x|a)$ u. $x = H(y|b)$ dieselben Werthepaare xy liefern, so habe ich in der Nähe von x'; stimmt

$y = G(x|x')$ mit $y = G(x|a)$ überein und

$x = H(y|y')$ mit $x = H(y|b)$

in der Nähe von ab stimmt aber $xy = G(x|a)$ mit $x = H(y|b)$ überein, also muß auch für eine Umgebung von x'

$y = G(x|x')$ mit $x = H(y|y')$ übereinstimmen.

Nun stimmt aber $x = H(y|y')$ in einer Nähe von $x'y'$ mit $y = G(x|x')$ überein, also muß auch

$x = H(y|y')$ mit.

$x = H(y|y')$ übereinstimmen, d. h. beide Reihen sind identisch. Also haben wir für die Umgebung der Stelle $x'y'$ daß die beiden Elemente

$$y = G(n|x')$$

$$x = H(y|y')$$ letzteres aus $H(y|b)$ hergeleitet, dieselben Punkte darstellen und daß die Fortsetzung von $H(y|b)$ für diesen Punkt identisch ist mit der Umkehrung von $G(n|x')$. Wir nehmen nun in der Nähe von $x'y'$ eine Stelle $x''y''$ und können so weiter schließen.

Angenommen also daß dies stattfindet bis zu einem Punkte y_0 exclusive, so wollen wir nachweisen, daß dies auch für den Punkt y_0 und noch weiter gilt, bis wir zu b gelangen. Will ich nämlich den Zweig des Gebildes in $y = G(n|x_0)$ in der Nähe von x_0 finden, so habe ich hierzu

$$y = G_1(n|x_0)$$

Der Annahme nach ist nun $\frac{dy}{dx} \gtrless 0$, also kann ich durch Umkehrung erhalten.

$$x = \overline{H}(y|y_0)$$

Nun ist der Annahme nach für Punkte x' in der Nähe von x_0 aus $y = G(n|x')$ direct durch Umkehrung das Element des Gebildes $H(y|b)$, nämlich $x = H(y|y')$ herzuleiten. Nun weiß ich, daß wenn ich x' hinlänglich nahe an x_0 nehme, ich aus $y = G(n|x')$ direct herleiten kann, $y = G(n|x_0)$ und in einer gewissen Umgebung von x_0 elimmen beide Reihen überein. Nun kann ich für eine gewisse Umgebung von x_0, das Element

$y = G(n/x_0)$ ersetzen durch

$x = H(y/y_0)$; folglich kann ich auch für eine gewisse Umgebung von x_0, das Element $y = G(n/x')$ ersetzen durch

$x = \bar{H}(y/y_0)$

Wenn ich also x' hinlänglich nahe an x_0 also auch y' nahe an y_0 annehme, so werden in einer gewissen Umgebung von y_0 die Elemente $x = \bar{H}(y/y_0)$ und $x = H(y/y')$ dasselbe Gebilde darstellen. Das ist nur dann möglich, wenn $\bar{H}(y/y_0)$ aus $H(y/y')$ ableitbar ist. Denn wenn ich wie vorausgesetzt den Punkt y' hinreichend nahe an y_0 wähle, kann ich aus $x = \bar{H}(y/y_0)$ herleiten $x = \bar{H}(y/y')$ und wenn der Punkt y' so gewählt wird, dass auch umgekehrt aus $x = \bar{H}(y/y')$. $x = \bar{H}(y/y_0)$ ableitbar ist, so werden die beiden Elemente

$\bar{H}(y/y')$. $\bar{H}(y/y_0)$ in einer gewissen Umgebung von y_0 übereinstimmen, daraus folgt, dass aus $\bar{H}(y/y')$ mit $H(y/y')$ in einer gewissen Umgebung von y_0 übereinstimmen d.h. $\bar{H}(y/y') \equiv H(y/y')$.

Nun ist aus $\bar{H}(y/y')$ ableitbar $\bar{H}(y/y_0)$ also auch aus $H(y/y')$ ist ableitbar $H(y/y_0) = \bar{H}(y/y_0)$ und beide Elemente

$y = G(n/x_0)$

$x = H(y/y_0)$ stellen in einer gewissen Umgebung von x_0 y_0 dasselbe Glied dar.

Wenn also bis zu einem gewissen Punkte x_0 und y_0 und $x = H(y/b), x = H(y/y')$ ableitbar ist und in einer gewissen Umgebung von $x'y'$ mit $y = G(x/n')$ übereinstimmt, so gilt dies auch weiter über den Punkt $x_0 y_0$ hinaus und man kann dies so weit fortsetzen, bis zu a' resp. b'. Wenn wir nun $x'y'$ in der Nähe von ab wählen, so gelten die Annahmen, also haben wir hiermit bewiesen, dass unter den gemachten Voraussetzungen, dass $\frac{dy}{dx}$ weder für $x = a$, noch für $x = a'$ verschwindet, man aus dem Elemente $y = G(n/a)$, die Umkehrung $x = H(y/b)$ herstellen kann und hieraus $x = H(y/b')$ herleiten, welches mit $y = G(n/a')$ in einer gewissen Umgebung übereinstimmt.

Die beiden Gebilde $y = G(n/a)$, $x = H(y/b)$ stimmen also in der Umgebung aller Punkte $a'b'$, für die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind vollständig überein. Nun brauchen wir nur noch Grenzstellen zu betrachten. Es sei $y = G(n/a)$ gegeben und $a'b'$ sei irgend eine Stelle des durch dieses Element definirten Gebildes, die keine Grenzstelle des 1ten Gebildes ist; wir wollen zeigen, dass diese Stelle stets auch dem 2ten Gebilde angehört, sei es als eine wirkliche, oder Grenzstelle. Nehmen wir zunächst an $a'b'$ sei eine Stelle, so dass wir für die Umgebung von a' die umkehrbare Reihe

$$y = G(n/a')$$

erhalten, alsdann läßt sich $x = H(y/b')$ herleiten, die Stelle $a'b'$ gehört somit dem 2ten Gebilde. Zweitens sei $y = G(n/a')$ nicht umkehrbar, d.h. es sei $\frac{dy}{dx}_{x=a} = 0$ alsdann kann ich zwar nicht $x = H(y/b')$ herleiten, aber ich kann beliebig nahe an a' einen Punkt a'' wählen, und $y = G(n/a'')$ herleiten, wo die Reihe umkehrbar sein wird und $x = H(y/b'')$ liefert. Während d. 1te Element die Stelle $a'b'$ wirklich liefert, liefert nur das 2te Element die Stelle $a''b''$, die ich der Stelle $a'b'$ beliebig nahe bringen kann. Die Stelle $a'b'$ ist also im 2ten Gebilde als Grenzstelle zu betrachten. Nun existirt aber für die Umgebung dieser Stelle die Gleichung

$$(y - b') - [a_\mu(x - a')^\mu + a_{\mu+1}(x - a')^{\mu+1} + \cdots] = 0$$

Wenn wir a'' hinlänglich nahe an a' wählen, so wird diese Gleichung durch $y = G(n/a'')$ identisch befriedigt, d.h. in der Nähe von $a'b'$ finden wir Stellen, die der Gleichung genügen. Dieselben Stellen können wir aber auch aus $x = H(y/b'')$ erhalten. Die Stelle $a'b'$ als Stelle des 2ten Gebildes betrachtet ist eine Grenzstelle, und zwar gilt für die Umgebung derselben die obige Gleichung, die durch unendlich viele Werthepaare $a''b''$ in der Nähe von $a'b'$ befriedigt wird. Diese Grenzstelle des 2ten Gebildes ist also als eine eigentliche Stelle dem 2ten Gebilde zuzuordnen. Alle Stellen, des durch das Element $y = G(n/a)$ definirten Gebildes, die keine Grenzstellen sind, sind auch Stellen des 2ten Gebildes, das durch das Element $x = H(y|b)$ definirt wird. Dies gilt offenbar auch umgekehrt, und wir können sagen, dass alle Stellen des Gebildes $x = H(y|b)$ nicht Grenzstellen sind; sind auch Stellen des 1ten Gebildes $y = G(x|a)$. Es kann nun der Fall eintreten, dass das Gebilde $x = H(y|b)$ bis zu einer Stelle $a'b'$ fortgesetzt werden kann, was bei dem 1ten Gebilde $y = G(x|a)$ nicht der Fall zu sein braucht. Hieraus sehen wir die Rechtfertigung der Zuordnung der Grenzstellen eines Gebildes, zu der wir nicht direct aus dem Elemente $y = G(x|a)$ gelangen können, für deren Umgebung sich aber eine Gleichung abgebraisch

$$F(x-a', y-b') = 0$$ ergibt, so dass man, wenn sich x, dem a' nähert auch y dem b' beliebig nahe bringen kann, und dabei in jeder Umgebung noch Stellen $a''b''$ findet, so dass $y = G(x|a'')$ herleitbar ist, in der Gleichung genügen. Es kann möglicherweise, wie wir es gesehen haben $a'b'$ eine Stelle sein, zu der man aus $y = G(x|a)$ nicht wohl aber aus $x = G(y|b)$ gelangen kann. Es kann aber drittens möglicherweise auch Stellen $a'b'$ geben, zu dem wir weder im 1ten noch im 2ten Gebilde direct gelangen können. Wir haben aber alle Stellen $a'b'$ zu dem durch das Element $y = G(x|a)$ definir-

dem Gebilde zugerechnet, sobald für die Umgebung desselben eine Gleichung besteht $F(x-a', y-b')=0$ mag $a'b'$ eine Grenzstelle sein oder nicht, insofern man sich dem $a'b'$ beliebig nähern kann und in jeder Umgebung derselben Reihe

$y = G(x/a'')$ findet, die der Gleichung genügen, d. h. es muss noch im Innern des Gebildes Stellen geben, welche die Gleichung befriedigen. Es sei nun $a'b'$ eine solche Stelle, so können wir zeigen, dass sie auch eine Stelle des durch $x = H(y/b)$ definirten Gebildes allgemein ist. Der Voraussetzung gemäss können wir in jeder Nähe von $a'b'$ ein Paar $a''b''$ finden, so dass wir haben

$y-b'' = c_1(x-a'')+\dots$ und dieses muss die Gleichung identisch befriedigen, d. h. alle Werthepaare in einer gewissen Umgebung von $a''b''$ genügen der Gleichung $F=0$, wie nahe man auch $a''b''$ an $a'b'$ wählt. Nun kann ich aber a'' so wählen, dass $c_1 \gtrless 0$, alsdann bekomme ich

$$x-a'' = \frac{1}{c_1}(y-b'')+\dots$$

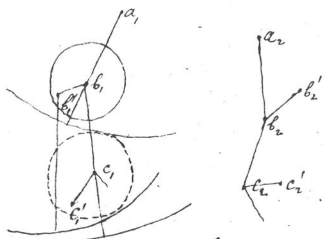
und in einer gewissen Umgebung von $a''b''$ stellt uns dieses Element dieselben Werthepaare xy, wie das ursprüngliche $y-b'' = c_1(x-a'')+\dots$

Die aus der Gleichung

$$x-a'' = \frac{1}{c_1}(y-b'')+\dots$$

sich ergebenen Stellen genügen, wenn sie in einer gewissen Umgebung von $a''b''$ genommen werden der Gleichung lung von Punkten $b_1 c_1 d_1 \ldots, b_2 c_2 d_2, \ldots$ eine Reihe herleiten für die Umgebung von $a_1 a_2' \ldots a_n'$, $G(x_1 \ldots x_n | a_1' \ldots a_n')$, so können wir stets die Punkte $b_1 c_1 d_1 \ldots, b_2 c_2 d_2$ variiren und zwar so, daß wir durch Vermittelung derselben aus $G(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_n)$ dieselbe Reihe $G(x_1 \ldots x_n | a_1' \ldots a_n')$ erhalten.

Es mögen die Punkte, auf denen wir zuerst die Reihe herleiteten sein $a_1 b_1 c_1 \ldots a'$, $a_2 b_2 c_2 \ldots a_2'$, … natürlich müssen



die Punkte $b_1 c_1 \ldots, b_2 c_2$ so gewählt sein, dass b_1 im Conv.kreis von $G(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_2)$ in Bezug auf x_1, c_1 im Conv.Kr. von $G(x_1 \ldots | a_1 \ldots)$ in Bezug auf x_1 u. b_2 in Bezug auf x_2 u.s.w. liegt.

Nun verschieben wir $b_1 b_2 \ldots$ so daß sie zu $b_1' b_2' \ldots$ werden, und zwar können wir diese neuen Punkte stets so nahe an $b_1 \ldots$ wählen, daß sie im Conv.kreise $(a_1)(a_2)$ wie auch im Conv.kreise $(b_1)(b_2)$ liegen. Wir brauchen nämlich nur um $b_1 b_2 \ldots$ kleine Kreise zu beschreiben, die vollständig innerhalb der Kreise $(a_1)(a_2)\ldots$ liegen, und alle Punkte dieser kleinen Kreise werden den Bedingungen genügen. Alsdann haben wir mit Beibehaltung der früher angewandten Bezeichnung $(ab') \equiv (a\, b\, b')$. Wenn wir nun b' hinreichend nahe an b nehmen, so können wir bewirken, daß die Stelle c im Conv.bereiche der Reihe $G(x|b')$ liegt, da ja c innerhalb des Conv.bereiches von $G(x|b)$ liegt. Nun beschreiben wir um $c_1 c_2 \ldots$ kleine

Kreise, die vollständig innerhalb des conv. Kreises $(b_1)(b_2)$ .. und gleichzeitig $(b_1')(b_2')$ .. liegen und verschieben die Punkte $c_1\, c_2$ .. sodass die neuen $c_1'\, c_2'$ .. innerhalb dieser kleinen Kreise liegen; alsdann liegt c' im conv. bereiche sowohl von $G(n)(b)$ als auch $G(n)(b')$ und $G(n)(c')$. Alsdann haben wir

$(b'cc') \equiv (b'c')$. Nun war

$(ab') \equiv (abb')$ also ist auch

$(abb'cc') \equiv (ab'c')$ da aber auch

$(b'c) \equiv (b'bc)$ somit

$(bb'c) \equiv (bc)$ so ist auch

$(abcc') \equiv (ab'c')$

Auf diese Weise kann man fortfahren und erhält schliesslich

$(abcd .. a') \equiv (ab'c'd' .. a')$ u.z.b.w.

Der Beweis könnte auch so geschehen. Es seien die ursprünglichen Vermittelungsstellen $a\,b\,c\,d\,e$ und x nun verrücke man $b\,c\,d$ in $b'c'd'$. Man kann sich nun denken, dass b' eingeschaltet ist

zwischen ab, c' zwischen bc u.s.w. Es bleibt dann nur zu zeigen, dass es möglich ist, b' so nahe an b gewählt, dass der Uebergang von a nach b über b' möglich ist u.s.w. und zwar so, dass man immer $(abb') \equiv (ab)$. $(bc'c) \equiv (bc)$ erhält. Dazu ist aber nur nöthig, dass die ganze Strecke abb inner-

$S = 0$, wie nahe ich auch $a''b''$ an $a'b'$ wähle. Wir sehen also daß wir die Stelle $a'b'$ mit demselben Rechte dem Gebilde $x = H(y/b)$ zuordnen müßen, wie dem ursprünglichen. Also sehen wir, daß allgemein alle Stellen, des durch das Element $y = G(x/a)$ definirten Gebildes, auch in dem durch das, durch Umkehrung erhaltene Element $x = H(y/b)$ definirten Gebilde vorhanden sind und umgekehrt. Also beide Gebilde sind identisch.

Wir sind ausgegangen von einem Elemente

$$y = G(x/a)$$

das umkehrbar ist. Wenn aber das gegebene Element nicht umkehrbar ist, so können wir in der Nähe von a eine Stelle a_1 finden, daß

$$y = G(x/a_1)$$ umkehrbar ist. Leiten wir hieraus

$$x = H(y/b_1)$$ so ist das Gebilde

$$y = G(x/a_1)$$ mit

$$x = H(y/b_1)$$ identisch. Nun ist aber auch

$y = G(x/a_1)$ identisch mit dem Gebilde

$y = G(x/a)$. Also wird auch durch das Element

$y = G(x/a)$ und das durch $x = H(y/b_1)$ definirte Gebilde identisch sein.

Hiermit is unser Hauptsatz vollständig nachgewiesen.

<u>Definition</u>: Wenn wir ein analytisches Gebilde definiren und für die Umgebung einer beliebigen Stelle $a\,b$ für das.

selbe eine Gleichung zwischen $x-a$, $y-b$ $(x-a, y-b) = 0$ aufstellen können, so nennen wir das Gebilde an der Stelle $a\,b$ regulär. Wenn in der Gleichung die Coeff. von $x-a$, $y-b$ nicht Null sind, oder was dasselbe ist, wenn weder $\frac{dy}{dx}$ noch $\frac{dx}{dy}$ an der betreffenden Stelle Null ist. Wenn dies dagegen an der Stelle $a\,b$ nicht erfüllt ist, so sagen wir, die Stelle $a\,b$ ist eine singular Stelle des Gebildes. Ebenso sprechen wir von regulären Elementen.

Aus den vorigen Untersuchungen folgt unmittelbar, daß in jeder Nähe einer singular Stelle des Gebildes es Stellen gibt, an denen das Gebilde regulär ist. Die bis jetzt entwickelten Sätze erklären uns auch die sogenannten Paradoxen der Reihenumkehrung wie z. B. $y = \sin x$, $x = \arcsin y$.

Es bleibt uns noch übrig, den analogen Hauptsatz für jedes Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete von $(n+r)$ Variablen nachzuweisen. Die B̆ vermittelst deren wir den Hauptsatz beim Gebilde 1^{ter} Stufe im Gebiete von 2 Variablen nachgewiesen haben, bleiben auch hier bestehen. Wir wollen deshalb nur die Hauptpunkte der Beweise in's Auge fassen, da die Ausführung derselben vollständig analog ist, der bei 2 Variablen. Wir wollen hier der Kürze wegen eine Stelle $a_1 \dots a_n$ kurz mit a, und $G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ mit $G(x|a)$ bezeichnen.

1. Lehrsatz. Wenn wir aus $G(x_1 \dots x_n | a_1 \dots a_n)$ durch Vermitt.

halb des Conv. kreises (a) liegt und b' gleichzeitig im Conv. kreis (b), dazu c' im Conv. b. von (b), (c). (b) liegt u. s. w. Alsdann können wir uns die Reihe auf folgendem Wege hergeleitet denken.

$$a\, b'\, b\, c'\, c\, d'\, d \,\ldots\ldots$$

und dann kann man den Weg nach einem der früheren Sätze nachweisen. auf $a\,b\,c\,d$.. sind dann $a'\,b'\,c'\,d'$.. und beide Wege liefern dasselbe.

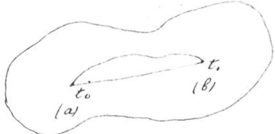
<u>2 Lehrsatz</u> Es sei eine Function definirt von n Veränderlichen durch das Element $F(n(a)$ von der wir voraussetzen, daß sie für $x = a$ nicht verschwindet. Nun setzen wir dieses Element auf einer vorgeschriebenen regulären oder aus regulären Stücken zusammengesetzten Linie von a nach a' fort, und es sei der Punkt a' so gewählt, daß auch hier die Function nicht den Werth Null erhält.

Nun kann möglicherweise die Function für einige Punkte des Weges den Werth Null annehmen. Es ist zu zeigen, daß man stets die Linie von a nach a' so variiren kann, daß auf der Linie die Function nirgends Null wird und auf ihr aus $F(n(a)$ daßelbe Element $F(n(a')$ hergeleitet wird, wie auf der ursprünglichen. Dabei kann man die neuen Linie beliebig nahe an der ursprünglichen Linie wählen.

Es seien dies vermittelnde Stellen auf dem ursprünglichen Wege. $b\,c\,d$. ... Setze ich nun

$$x_1 = \varphi_1(t)$$
$$x_2 = \varphi_2(t)$$
$$\dots\dots$$

$x_n = \varphi_n(t)$ reguläre Functionen von t und zwar so, dass für $t = t_0$, $x_1 \dots x_n = a$ und für $t = t_1$ gleich b so verwandelt sich $F(n(a))$ in eine Function von t, welche für die ganze Linie ab den Charakter einer ganzen Function hat. Wenn ich t auf einen Bereich beschränke, so gilt von dieser Function von t, dass sie innerhalb eines endlichen Bereiches nur an einigen Stellen Null werden kann. Nehmen wir zunächst an, dass $F(b(a)) \gtrless 0$ ist, dass sie aber auf der Strecke $t_0 t_1$ irgendwo Null wird. Setzen wir



$t = \psi_1(\tau)$ wo ψ eine reguläre Function von τ ist, so beschränkt t eine Linie, wenn sich τ ändert diese Linie kann man so wählen, dass sie durch t_0 u. t_1 hindurchgeht. Setzen wir z. B. $t = t_0(1-\varepsilon) + t_1\varepsilon$, so wird wenn das ε reelle Werthe durchläuft t eine gerade beschreiben, die für $\varepsilon = 0$ durch t_0 und für $\varepsilon = 1$ durch t_1 geht. Setzen wir nun

$$\varepsilon = \frac{(1+\beta i)\tau}{1+\beta i \tau} \quad (\text{wo } \beta \text{ reell ist})$$

so erhalten wir

$$t = t_0\left(1 - \frac{(1+\beta i)\tau}{1+\beta i \tau}\right) + t_1 \frac{(1+\beta i)\tau}{1+\beta i \tau}$$

und wenn τ reelle Werthe durchläuft, so durchläuft t einen Kreis und zwar geht der Kreis durch t_0 u. t_1, da ja für $\tau = 0$, $t = t_0$ wird, u für $\tau = 1$, $t = t_1$. Wenn ich nun dies in $F(n/a)$ einsetze, so verwandelt sich F in eine Function von τ. Sollte nun F als Function von t betrachtet an irgend einer Stelle des ursprünglichen Weges $t_0 t_1$ null werden, so können wir statt des ursprünglichen Weges $t_0 t_1$ den neuen Kreisbogen nehmen, und zwar so, daß er durch keinen der Nullwerthe von $F(t)$ hindurchgeht. Auch sehen wir, daß wir durch die Werthe der β den Kreisbogen an der Linie $t_0 t_1$ so nahe bringen können, wie wir nur wollen, wenn wir β hinreichend klein nehmen; wir können den Kreisbogen so wählen, daß man auf ihm aus $F(n/a)$ dasselbe Element $F(n/b)$ herleitet, wie auf dem ursprünglichen Wege. Sollte nun $F(n/a)$ für $x=b$ null werden, so verrücken wir zunächst b unendlich wenig, was nach dem Vorigen möglich ist und wenden nachher dasselbe Verfahren an. Wir können also den ursprünglichen Weg stets durch einen andern ersetzen, so daß für die Punkte der neuen Linie die Function nirgends null wird und daß auf dieser neuen Linie $F(n/a)$ ebenso in $F(n/a')$ übergeführt wird, wie auf der ursprünglichen.

<u>Hauptlehrsatz</u>. Im Gebiete der $(n+r)$ Variablen $x_1 \ldots x_n \ldots x_{n+r}$ sei ein Gebilde $n$ter Stufe definirt durch die Elemente

$$x_{n+1} = G_1(x_1 \ldots x_n / a_1 \ldots a_n)$$
$$x_{n+2} = G_2(x_1 \ldots x_n / a_1 \ldots a_n)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n+r} = G_r(x_1 \ldots x_n / a_1 \ldots a_n)$$

Nun denken wir uns beliebige aus den $(n+r)$ Variablen ausgewählt z. B. $x_\alpha\ x_\beta\ x_\gamma \dots x_\mu$ deren Anzahl r sein möge. Nun setzen wir voraus, daß indem wir das obige Gleichungssystem auf die linearen Glieder reduciren, die Coefficienten der linearen Glieder so beschaffen sind, daß die Determinante der Coefficienten von $x_\alpha\ x_\beta \dots x_\mu$ nicht verschwindet, oder was dasselbe ist, daß die partiellen Ableitungen von $x_{n+1} \dots x_{n+r}$ in Bezug auf $x_\alpha \dots x_\mu$ für resp $x_\alpha \dots x_\mu = x_\alpha \dots a_\mu$ nicht verschwinden. Alsdann können wir die r Variablen $x_\alpha \dots x_\mu$ durch die übrigen n nach dem Satze III Seite   ausdrücken und erhalten auf diese Weise die Elemente

$$x_\alpha = \bar{G}_1(x_1 \dots x_{\alpha-1}\ x_{\alpha+1}\ x_{\beta+1}\ x_{\gamma+1} \,|\, a_1 \dots a_{\alpha-1}, a_{\alpha+1} \dots a_n)$$
$$x_\beta = \bar{G}_2(x_1 \dots x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \,|\, a_1 \dots \quad)$$
$$\dots \dots \dots \dots$$
$$x_\mu = G_r(x_1\ x_{\alpha-1}\ x_{\alpha+1}, \dots x_{\beta-1}\ x_{\beta+1} \,|\, a_1 \quad)$$

welche uns wiederum ein Gebilde n^{ter} Stufe im Gebiete der $(n+r)$ Variablen definiren. Es soll bewiesen werden, daß beide Gebilde identisch sind.

Um dies nachzuweisen, fassen wir zunächst einen speciellen Fall in's Auge. Ich will annehmen, daß ich x_1 mit x_{n+1} vertausche, die übrigen Variablen aber lasse. Dazu ist nun nöthig, daß in einer der Gleichungen der Coefficient von $x_1 - a_1$ von Null verschieden ist.

Wir wollen annehmen, daß dies in der 1^{ten} Gleichung der Fall ist. Ich kann alsdann durch Umkehrung von

1 $$x_{n+1} = G_1(x_1\, x_2 \dots x_n)\, a_1 \dots a_n) \text{ erhalten}$$

2 $$x_1 = H_1(x_{n+1},\, x_2 \dots x_n \mid a_{n+1} \dots a_n)$$

Setze ich dies in die 2te Gleichung, so erhalte ich

3 $$x_{n+2} = H_2(x_{n+1}),\, x_2 \dots x_n) a_{n+1},\, a_n) \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise erhalte ich die beiden Gebilde, welche durch folgende Functionselemente in der Umgebung von $a_1 \dots a_{n+1}$ definirt sind.

$$x_{n+1} = G_1(x_1\, x_2 \dots x_n \mid a_1 \dots a_n) \qquad x = H_1(x_{n+1}\, x_2 \dots x_n) a_{n+1}\, a_2 \dots a_n)$$

4 $$x_{n+2} - G_2(x_1\, x_2 \dots x_n)\, a_1 \dots a_n) \text{ und } x_{n+2} = H_2(x_{n+1},\, x_2 \dots x_n (a_{n+1} \dots a_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n+r} = G_r(x_1\, x_2 \dots x_n \mid a_1 \dots a_n) \qquad x_{n+1} = H_2(x_{n+1}\, x_2 \dots x_n \mid a_{n+1} \dots x_n)$$

Nun leiten wir aus dem ersten Gleichungssystem für die Umgebung einer Stelle $a_1' \dots a_{n+1}'$ die Elemente

$$x_{n+1} = G_1(x_1 \dots x_n \mid a_1' \dots a_n')$$

5 $$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n+r} = G_r(x_1 \dots x_n \mid a_1' \dots a_n')$$

und wählen die Stelle $a_1' \dots a_n'$ so, daß auch hier man x_1 ausdrücken kann durch die übrigen Variablen. Wir kehren alsdann die Gleichung um und erhalten

$$x_1 = \overline{H}_1(x_{n+1}\, x_2 \dots x_n \mid a_{n+1}',\, a_2' \dots a_n')$$

6 $$x_{n+2} = \overline{H}_2(x_{n+1} \dots x_n \mid a_{n+1}' \dots a_n')$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n+r} = \overline{H}_r(x_{n+1} \dots x_n \mid a_{n+1}' \dots a_n')$$

und nun beweisen wir auf dieselbe Weise wie bei 2 Vari.

ablen, daſs dieses Gleichungssystem identisch ist mit dem welches man direct aus dem 2ten System in 4 ableiten kann, nämlich mit

$$x_1 = H_1(x_{n+1} \dots x_n / a_{n+1} \dots a_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n+1} = H_r(x_{n+r} \dots x_n / a_{n+1} \dots a_n)$$ was sich mittelst 7

der beiden Hilfsätze leicht zeigen läſst. Die Grenzfälle untersucht man auf dieselbe Weise wie bei 2 Variablen und komt schlieſslich zu dem Resultate, daſs das 2te Gebilde, welches definirt wird dadurch, daſs man an Stelle der Variablen x_1 die x_{n+1} setzt identisch ist mit dem 1ten Gebilde. Wir haben die Voraussetzung gemacht, daſs die Elemente

$$x_{n+1} = G_1$$
$$x_{n+1} = G_r$$ die Eigenschaft haben, daſs der Coeffi-

cient von $x_1 - a_1$ in der 1ten Gleichung nicht null ist. Wenn dies nicht der Fall ist, so wähle man in der Nähe von $a_1 \dots a_{n+1}$ eine andere Stelle $a_1'' \dots a_{n+1}''$, leite die Elemente

$$x_{n+1} = G_1(x_1 \dots x_n / a_1'' \dots a_{n+1}'')$$ ab, in welchen

die Bedingung erfüllt ist, was nach dem 1ten Satze zu erreichen stets möglich ist. Alsdann stimmt dieses Gebilde mit dem ursprünglichen überein, also auch mit dem 2ten

$$x \quad = H_1$$

Indem ich nun dieses Verfahren wiederum auf das Gebilde

$$x = H_1(x_{n+1} \dots x_n / a_1 \dots a_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_{n+r} = H_1(x_{n+1} \dots x_n / a_1 \dots a_n)$$

anwende; indem ich z. B. die Variable $x_{n+\varrho}$ durch x_λ ersetze, erhalte ich wiederum ein Gebilde, welches mit dem letzteren, also auch mit dem ursprünglichen identisch ist. Auf diese Weise schliessend kann ich beliebig viele der Variablen $x_{n+1}, \ldots x_{n+r}$ durch andere der übrigen ersetzen, und ich erhalte stets dasselbe Gebilde womit der Satz vollständig nachgewiesen wird. Man kann also in einem monogenen Gebilde erster Stufe im Gebiete von $(n+r)$ Variablen beliebige n der $(n+r)$ Variablen als unabhängige Variablen ansehen, und die übrigen sind dann analytische Functionen derselben, und man erhält stets dieselben Werthesysteme, welche man auch n Variablen als die unabhängigen annimmt. Jetzt hat es auch seinen bestimmten Sinn, wenn man spricht von den partiellen Differentialcoefficienten der Functionen $x_{n+1}, \ldots x_{n+r}$ an einer bestimmten Stelle. Ich weiss jetzt genau durch welches Functionselement die Function an der betreffenden Stelle bestimmt wird und aus der Potenzreihe folgt so gleich der partielle Differentialquotient für die betreffende Stelle.

Hiermit ist auch das Wesentliche der Einleitung in die Theorie vollständig erschöpft. Wir haben den Begriff der analytischen Abhängigkeit vollständig entwickelt und die Definition der analytischen Function festgestellt.

Das Wesen der analytischen Function ist nach unserem Begriffe eben das, dass eine solche Function vollständig bestimmt wird, sobald sie in irgend einem Theile der Ebene definirt wird. Für die Umgebung einer jeden Stelle der Ebene, wo überhaupt die Function existirt, kann man Potenzreihen finden, die die Function in diesem Theile darstellen, und den Grenzstellen kann man sich beliebig nähern. Alle diese Potenzreihen werden durch eine einzige bestimmt und haben in einer einzigen ihren Ursprung. Dies ist die charakteristische Eigenschaft der analytischen Functionen, durch die sie sich von den Functionen im weiteren Sinne unterscheiden. Man kann sich nämlich auch zwischen mehreren Variablen einen Zusammenhang denken, so dass zu jedem Werthsysteme der Variablen eine oder mehrere Werthe der Function gehören, man kann sich sogar denken, dass für jede Stelle es Potenzreihen gibt, die die Werthe der Function in der Umgebung der Stelle angeben, ohne dass alle diese Potenzreihen ein Ganzes bilden; jede kann für sich selbst bestehen. Nimmt man z. B. eine reducible Gleichung zwischen x y, so wird hierdurch y als Function von x definirt, zu jedem Werthe von x gehört ein oder mehrere Werthe von y und man kann sogar Potenzreihen finden, die die Werthe der Function für bestimmte Umgebungen darstellen. Alle so gefundenen Reihen werden aber kein in sich geschlossenes Ganze bilden, sie werden nicht durch eine einzige bestimmt. Ja es wird Reihen geben, die aus einer Reihe gar nicht ableitbar sind. Durch eine Reihe wird die Function nicht vollständig definirt. In diesem Falle ist y eine Function von x im weiteren Sinne des Wortes. Ferner haben wir den Begriff eines monogenen analytischen Gebildes entwickelt und die charakteristischen Eigenschaften desselben gezeigt. Man kann von jeder Stelle eines monogenen analytischen Gebildes zu jeder andern durch einen stetigen Uebergang gelangen.

Man könnte auch bei der Theorie der Functionen von der Definition des Gebildes ausgehen, wobei man keine der Variablen bevorzugt. Alsdann hätte man zu zeigen, dass man für die Umgebung nicht singul. Stellen die Variablen auf die Weise ausdrückt, dass man beliebige derselben als Potenzreihen der übrigen ausdrückt; und dass diese Potenzreihen die Stellen des Gebildes wirklich ergeben. Der hier gewählte Weg scheint jedoch angemessener zu sein, weil er sich an die elementare Vorstellung einer Function am innigsten anschliesst, wo man abhängige und unabhängige Variablen unterscheidet und von einander trennt.

Die in dieser Theorie vorgetragenen Sätze, welche hier als ein Ganzes erscheinen, das zur Entwickelung des Begriffs einer analytischen Function nöthig ist, sind an und für sich wichtige Sätze für die Theorie der Functionen, und können als Grundlage bei den analytischen Functionen dienen. Ihre Bedeutung zeigt sich bei Untersuchung specieller Gattungen von Functionen.

Eindeutige Functionen.

Die sich zunächst darbietenden analytischen Functionen sind die eindeutigen. Wir haben sie bereits auf folgende Weise definirt. Wenn wir ein Element haben, und leiten aus demselben für jede Stelle auf allen möglichen Wegen neue Functionselemente ab, und sich zeigt, daß wir für die Umgebung einer jeden Stelle stets nur ein Element erhalten, so nennen wir die durch das Element definirte Function eindeutig.

Die Functionen, welche durch beständig convergirende Reihen definirt werden sind eindeutige, analytische Functionen. Es handelt sich nicht darum, daß die Reihe für jede Stelle nur einen Werth liefert, als vielmehr darum, daß die Function, welche aus derselben entspringt, an jeder Stelle nur ein Element hat. Dies können wir folgendermaßen zeigen. Es sei $y = G(x)$ die beständig convergirende Reihe, und wir wählen nur irgend einen Punkt

a für dessen Umgebung wir das Element herleiten wollen. Wie wir auch die Wege von der Nullstelle nach a wählen, so bleiben wir stets im Conv.-bereiche von $G(x)$ und nach einem bewiesenen Satze liefern alle Wege, welche innerhalb des Conv.-bereiches eines Functionselementes liegen, stets dasselbe Resultat. Alle für die Umgebung von a ableitbaren Reihen sind identisch, also die Function ist eindeutig.

Auch der Quotient zweier beständig convergirenden Potenzreihen ist eine eindeutige Function, oder exacter gesprochen, durch einen solchen Quotienten wird eine eindeutige Function definirt. Denn es sei der Quotient

$$\frac{G_1(x)}{G_2(x)}$$

Zunächst leiten wir hieraus für eine Stelle a, wofür G_2 nicht Null ist

$$\frac{G_1(x|a)}{G_2(x|a)}$$

und dies können wir entwickeln in eine Potenzreihe von $x-a$, sodass wir haben

$$\frac{G_1(x|a)}{G_2(x|a)} = G(x|a)$$

gültig für einen Kreis um a innerhalb dessen $G_2(x|a)$ nicht Null ist. Dies ist ein Element der durch den Quotienten definirten Function, und es ist nachzuweisen, dass wir von diesem Elemente ausgehend für jede Stelle nur ein einziges Functionselement finden können. Leiten wir z. B. $G(x|a')$ ab, so ist zu zeigen, dass wie wir auch den Weg aa' wählen, wir stets nur zu $G(x|a')$ gelangen können.

Die vermittelnden Punkte seien $b\,c\,d\ldots$ so daß b im Conv. kreise von $G(x/a)$ c im Conv. kr. von $G(x/b)$ u. s. w. liegt. Wir leiten zunächst für b die Reihe $G(x/b)$ ab, und alsdann leiten wir aus

$$\frac{G_1(x/a)}{G_2(x/a)} \text{ die Reihe } \frac{G_1(x/b)}{G_2(x/b)} = \bar{G}(x/b)$$

Nun stimmt in der Umgebung von b, $G(x/b)$ mit $\frac{G_1(x/b)}{G_2(x/b)}$ also auch mit $\frac{G_1(x/a)}{G_2(x/a)}$ überein, d. h. mit $G(x/a)$. In der Umgebung von b stimmt aber auch $\bar{G}(x/b)$ mit $G(x/a)$ überein, und hieraus folgt daß

$$G(x/b) = \bar{G}(x/b). \text{ Auf dieselbe Weise zeigen wir}$$

daß

$$G(x/c) = \bar{G}(x/c)$$

$$G(x/a') = \bar{G}(x/a') \text{ ist.}$$

Nun aber ist klar, daß wie wir auch den Weg

$a\,b\,c\,d\ldots a'$ wählen mögen, wir stets zu demselben $\bar{G}(x/a')$ gelangen. Denn es wird erhalten, indem wir aus

$$\frac{G_1(x/a)}{G_2(x/a)}, \quad \frac{G_1(x/a')}{G_2(x/a')}$$

herleiten und dann den letzteren Quotienten in Potenzreihe von $x - a'$ verwandeln. Nun erhält man aber wegen der beständigen Convergenz von G_1 u. G_2 stets dasselbe $G_1(x/a')$ $G_2(x/a')$ wie man auch den Weg wählen mag, da man ja stets im Conv. bereiche der ursprünglichen Reihe bleibt. Es folgt also, daß man aus $G(x/a)$ für die Umgebung einer andern Stelle a' stets dieselbe Reihe $G(x/a')$ erhält, wie man auch den Weg wählen mag, d. h. die durch dasselbe ment $G\,n/a)$, welches aus dem Quotienten entspringt, definirte Function hat in der Umgebung einer jeden Stelle nur ein Element: d. h. sie ist eindeutig.

Man kann nun die Frage aufwerfen, wodurch unterscheiden sich die, durch beständig convergirende Reihen definirten Functionen, d. h. Functionen die überall im Endlichen den Charakter ganzer Functionen haben, von den ganzen rationalen Functionen und ebenso die durch einen Quotienten zweier beständig convergirenden Reihen definirten Functionen von den gebrochenen rationalen Functionen? Diese Fragen wollen wir jetzt beantworten. Die ganzen rationalen Functionen haben die Eigenschaft, daß wenn man eine beliebige positive Größe g festsetzt, man in der X Ebene stets einen Kreis mit einem bestimmten Radius so ziehen kann, daß für alle Werthe von x, die innerhalb dieses Kreises liegen, der absolute Betrag der Function größer ist, als die Größe g. Oder mit andern Worten, man kann stets einen Kreis in der X Ebene ziehen, daß für alle Werthe von x außerhalb dieses Kreises der absolute Betrag der Function größer ist, als eine gegebene noch so große Zahl g. Jede ganze Function, die rational ist, wird zwar für $x = \infty$ auch unendlich groß, aber der Werth ist vollkommen bestimmt. Wenn man in solche Function statt x, $\frac{1}{x}$ einführt, so verwandelt sich die Function in eine reguläre Function, die für x_0 einen bestimmten Werth annimmt.

Ganz anders verhält es sich mit Functionen, die durch beständig convergirende Reihen definirt werden.

Lehrsatz. Die Function, welche durch eine beständig convergirende Reihe definirt wird, kann im Unendlichen jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden. Oder mit anderen Worten: Wie groß man auch den Kreis um einen Punkt der x Ebene nimmt, so gibt es stets außerhalb dieses Kreises noch Werthe von x, in deren Nähe eine durch beständig convergirende Reihe definirte Function jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden kann.

Zunächst zeigen wir, daß wenn wir eine beliebig große positive Zahl g festsetzen, wir einen Kreis ziehen können, so daß man außerhalb des Kreises Punkte finden kann, für die die Function größer ist, als die gegebene Grenze g. Wir hatten den Satz, daß wenn wir innerhalb des Conv. kreises einer Potenzreihe einen ~~Kreis~~ mit dem Radius r wählen, und den größten absoluten Betrag der Potenzreihe für Punkte dieses Kreises mit g' bezeichnen, wir stets haben

$$|c_\nu| r^\nu \leqq g'$$

für jedes ν. Da nun der Conv. kreis einer beständig convergirenden Reihe unendlich gross ist, so kann man r beliebig gross wählen. Da nun c_ν nicht für jedes ν unendlich klein wird, so können wir

$|c_\nu| r^\nu$ beliebig gross machen und es muss stets

$g \geqq |c_\nu| r^\nu$ d. h. Wie gross wir auch r wählen, so gibt es stets unterhalb des Kreises mit dem Radius r noch Punkte für die der absolute Betrag der Function grösser ist als g. Um nun zu zeigen, dass eine solche Function im Unendlichen jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden kann, sei $F(x)$ die beständig convergirende Reihe, und a ein beliebiger Werth, den wir aber so annehmen, dass $F(0) \gtrless a$ und nun betrachten wir den Quotienten $\frac{1}{F(x) - a}$

Da für $x = 0$ der Nenner nicht verschwindet, so kann der Quotient in eine Potenzreihe von x umgewandelt werden, so dass wir erhalten

$$\frac{1}{F(x) - a} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

Diese Reihe kann entweder beständig convergent sein, oder sie kann einen beschränkten Conv. kreis haben. Im ersten Falle kann sie für grosse Werthe von x beliebig gross, also $F(x) - a$ beliebig klein gemacht werden, d. h. es kann $F(x)$ für hinreichend grosse Werthe von x dem Werthe a beliebig nahe gebracht werden. Im zweiten Falle geht der Conv. kreis durch den um 0 Punkt nächst liegendem Punkt, für welchen $\frac{1}{F(x)-a}$ unendlich gross wird. Nun denken wir uns um den Nullpunkt einen beliebig grossen Kreis gezeichnet, und ausserhalb desselben einen Punkt a' gewählt, so dass $F(a') \gtrless a$ ist. Alsdann können wir $\frac{1}{F(x)-a}$ umwandeln in eine Potenzreihe von $x-a'$. Diese Potenzreihe kann wiederum entweder beständig convergent sein, alsdann kann $F(x)$ dem Werthe a beliebig nahe gebracht werden für x, die ausserhalb des Kreises liegen, oder sie hat einen beschränkten Conv. kreis. In dem letzten Falle muss es ausserhalb des angenommenen Kreises wenigstens eine Stelle geben wofür $\frac{1}{F(x)-a}$ unendlich gross, d. h. $F(x)-a$ unendlich klein wird.

Auf diese Weise schliessend sehen wir, dass man wirklich im Unendlichen die Function $F(x)$ dem Werthe a beliebig nahe bringen kann. Wenn $F(0)=a$, so können wir einen Punkt L wählen, den Quotienten $\frac{1}{F(x)-a}$ nach Potenzen von $x-L$ ordnen und die Schlüsse wiederholen.

Jede durch eine beständig convergirende Reihe definirte Function kann im Unendlichen jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden. Dies ist auch der wesentliche Unterschied zwischen dieser Gattung der Functionen und von ganzen rationalen Functionen. Man muss entweder sagen, die Functionen, welche durch beständig convergirende Reihen definirt werden, hören auf im Unendlichen eindeutig zu sein, oder sie existiren dort gar nicht und die letztere Anschauung ist die richtigere. Dasselbe gilt für Functionen, die durch beständig convergirende Reihen mehrerer Variablen definirt werden, was man leicht auf dieselbe Weise nachweisen kann.

<u>Lehrsatz.</u> Eine Function welche durch den Quotienten zweier beständig convergirenden Reihen definirt wird, kann im Unendlichen jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden.

Die Function sei $\frac{F(x)}{G(x)}$ wo $F(x)$ und $G(x)$ beständig convergirende Reihen sind. Wollen wir nun diese Function in der Nähe von $x=a$ untersuchen, so entwickeln wir sowohl den Zähler als auch den Nenner nach Potenzen von $x-a$ und erhalten das Resultat.

$$\frac{c(x-a)^m+\dots}{c'(x-a)^n+\dots};$$ hierbei können 3 Fälle eintreten.

1) $m=n$, alsdann ist der Werth der Function für $x=a$, $\frac{c}{c'}$;

2) $m>n$, dann kann die Function in der Nähe von a beliebig klein gemacht werden.

3) $m<n$ dann kann sie beliebig groß gemacht werden.

Im ersten und zweiten Falle kann man den Quotienten nach Potenzen von $x-a$ entwickeln, und die

Reihe wird nur positive ganze Potenzen von $x-a$ enthalten, im dritten Falle läßt sich der Quotient in eine Reihe von $(x-a)$ entwickeln, die aber auch negative Potenzen von $x-a$ in endlicher Anzahl enthält. Wir sagen dann, die Function habe im Endlichen den Charakter einer gebrochenen rationalen Function.

Nun sei zunächst die Anzahl der Werthe, für welche die Function $\frac{F(x)}{G(x)}$ unendlich groß wird, endlich, und sie seien $a_1\ a_2 \ldots a_m$. Setzen wir $\frac{F(x)}{G(x)} = H x$ so wird $H(x)$ für die Umgebung von $x = a_1$ sich entwickeln lassen in der Form

$$H(x) = A_0 (x-a_1)^{-\nu} + A_1 (x-a_1)^{-\nu-1} + \ldots + A_{\nu-1} (x-a)^{-1} + \ldots \qquad 1$$

Den Aggregat der Glieder mit negativen Potenzen sei mit $H(x, a_1)$ bezeichnet. Die Function $H(x) - H(x, a_1)$ wird an der Stelle $x = a$ nicht mehr unendlich groß.

Machen wir dies auch für die andern Stellen, so wird die Function

$$H(x) - H(x, a_1) - H(x, a_2) - \ldots - H(x, a_m) \text{ eine Function} \qquad 2$$

sein, die nirgends unendlich groß wird. Nun läßt sich $H(x)$ als Quotient zweier beständig convergirenden Reihen darstellen, $H(x, a_1) \ldots H(x, a_m)$ sind aber rationale gebrochene Functionen, der Ausdruck 2 läßt sich also auch als Quotient, zweier beständig convergirender Reihen darstellen. Wandelt man diesen Quotienten in eine Potenzreihe von

x, so wird auch die Reihe beständig convergent sein, und wir erhalten

3 $H(x) = H(x, a_1) + H(x, a_2) + \dots + H(x, a_n) + \bar{H}(x)$ wo $\bar{H}(x)$ eine beständig convergirende Reihe ist. Nun können wir hinreichend große Werthe von x der Functionen $H(x, a_1) \dots$ unendlich klein gemacht werden, $\bar{H}(x)$ im Unendlichen jedem beliebigen Werthe nahe gebracht werden, nach dem vorigen Satze, also kann $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ im Unendlichen jedem Werthe beliebig nahe gebracht werden.

Nun nehmen wir zweitens an, daß es unendlich viele Stellen gibt, wofür $\frac{F(x)}{G(x)} = \infty$ wird. Alsdann muß es in einem endlichen Conv. bereiche nur eine endliche Anzahl solcher Stellen geben. Denn ich kann für die Umgebung einer solchen Stelle setzen

4 $$(x-a)^{-n}\{C' + C'_1(x-a) + \dots\}$$

Man kann also immer eine Umgebung von a angeben innerhalb deren die Klammer endlich ist, der Ausdruck 4 aber innerhalb dieser Umgebung nur für $x = a$ unendlich groß werden kann. Gäbe es aber in einem endlichen Bereiche unendlich viele solcher Stellen, so müßte es entweder an der Grenze, oder innerhalb des Bereiches wenigstens eine Stelle geben, in deren jeder noch so kleiner Umgebung es solche Stellen gibt, für die die Function (4) unendlich groß würde, was wegen des Obigen nicht möglich ist. Hieraus folgt, daß die Unendlichheitsstellen, so vertheilt sein müssen, dass es ausserhalb jeden noch so grossen Bereiches noch Stellen dieser Art gibt. Demnach kann die Function im Unendlichen beliebig gross gemacht werden.

Nun kann man auf dieselbe Weise wie beim vorigen Satze nachweisen, dass die Function $\frac{F(x)}{G(x)}$ auch in diesem Falle im Unendlichen jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden kann.

Die einfachsten Transcendenten unterscheiden sich also von den ganzen rationalen und gebrochenen rationalen Functionen dadurch dass sie im Unendlichen eine Grenzstelle haben. Man könnte die Transcendenten, die durch beständig convergirende Reihen definirt werden, bezeichnen als eindeutige Functionen mit einer Grenzstelle. Haben wir eine solche Function $F(x)$ welche im Unendlichen die Grenzstelle besitzt, so kann ich leicht eine transcendente Function herstellen, welche im Endlichen solche Eigenthümlichkeit zeigt; denn substituiren wir in $F(x)$ statt $\frac{1}{x}$, $x - x_0$ so verwandelt sich $F(x^1 - x_0) = F_1(x)$ in eine Function, welche für $x = x_0$ das unbestimmte Verhalten zeigt. Durch Addition mehrerer solcher Functionen erhalten wir leicht Functionen die beliebig viele solcher Grenzstellen haben. Man kann auch leicht Functionen bilden, die unendlich viele Grenzstellen haben. Die Function tang x wird an unendlich vielen Stellen unendlich gross, betrachten wir

$e^{t\xi\, x}$, so hat diese Funktion die Eigenschaft an unendlich vielen Stellen unbestimmt zu sein.

Setzen wir z. B. $x = \frac{\pi}{2} + u$, dann ist $t\xi\left(\frac{\pi}{2} + u\right) = -\frac{\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{u} + \mathfrak{P}(u)$; wenn ich also in der Nähe von $\frac{\pi}{2}$ annehme, so haben wir

$$e^{t\xi\, x} = e^{-\frac{1}{u}} e^{\mathfrak{P}(u)}$$

Lasse ich u unendlich klein werden, so nähert sich $e^{t\xi\, x}$ keinem bestimmten Werthe. Die Function $e^{t\xi\, x}$ hat die Eigenschaft, daß jedes $x = (2n \pm 1)\frac{\pi}{2}$, wo n ganze positive oder negative Zahl bedeutet, eine Grenzstelle derselben ist; sie hat also unendlich viele Grenzstellen. Man hat sogar Functionen, deren Grenzstellen ein Continuum z. B. ganze Strecken, Flächen bilden.

Man kann leicht nachweisen, daß, wenn man mit eindeutigen, analytischen Functionen (in endlicher Anzahl) rationale Rechnungen in endlicher Anzahl vornimmt, das Resultat wiederum eine eindeutige, analytische Function ist. Hieran knüpft sich nun die Frage, ob der Satz auch aufrecht erhalten wird, wenn die Anzahl der Rechenoperationen unendlich groß ist. Die Frage muß man mit Nein beantworten, wie wir an dem einfachen Beispiele

$$f(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \quad \text{siehe Seite} \qquad \text{sehen.}$$

können. Wir haben bis jetzt nur unterschieden, daß durch beständig convergirende Reihen, als auch durch den Quotienten zweier solcher Reihen eindeutige, analytische Functionen dargestellt werden. Hiermit ist aber noch die Darstellungsweise nicht erschöpft. Ein allgemeines Kriterium der Eindeutigkeit der durch analytische Ausdrücke darstellbaren Functionen aufzustellen, ist aber sehr schwer. Wir wollen aber eine verwandte Aufgabe behandeln. Wir haben die Definition einer analytischen Function so aufgestellt, so dass wir eine Function im weiteren Sinne, einen Ausdruck, dann eine analytische Function nennen, wenn man die Werthe des Ausdrucks für jede Stelle, wo er existirt aus einem Functionselemente herleiten kann. Nun kann man nachweisen, dass wenn man mit analytischen Functionen rationale Rechnungen in endlicher Anzahl vornimmt, das Resultat wiederum eine analytische Function ist. Nun knüpft sich hieran die Frage, ob der Satz auf bestehen bleibt für unendlich viele Functionen, oder unendlich vielen Rechenoperationen. Dass dies auch nicht immer bestehen bleibt, zeigt sich an der Function, die definirt wird durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$$

Diese Reihe ist convergent für alle Punkte der Ebene mit Ausnahme von unendlich vielen aequidistanten Punkten auf einem Kreise mit dem Radius 1 um den Nullpunkt. Wenn man sich nun ein Functionselement für das Innere des Kreises bildet, so kann man daraus die Werthe der Function ausserhalb des Kreises nicht herleiten. Wollen wir unsere Definition einer analytischen Function beibehalten, so müssen wir sagen, daß der Ausdruck zwei verschiedene analytische Functionen darstellt. Auch hat Weierstraß gezeigt, daß der obige Ausdruck 2 verschiedene Eigenschaften zeigt, je nachdem man ihn im Innern, oder Äusseren des Kreises untersucht. So bekommt man z. B. 2 verschiedene Differentialgleichungen, denen der Ausdruck genügt. Man kann also nicht sagen, der analytische Ausdruck stelle eine analytische Function dar, obgleich die Summanden desselben analytische Functionen sind. Es stellt vielmehr 2 verschiedene analytische Functionen dar. Die Beantwortung der Frage, wann man durch unendlich viele rationale Operationen mit analytischen Functionen wiederum zum Ausdrucke <u>einer</u> analytischen Function ist sehr schwer, und die Frage ist bis jetzt in der Allgemeinheit nicht beantwortet worden.

Wir wollen hier auch nur den einfachsten Fall durchnehmen, der aber besonders häufig vorkommt, wenn nämlich der analytische Ausdruck gebildet wird durch eine unendliche Summe von eindeutigen, analytischen Functionen $\varphi_n(x)$ d. h. durch $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \varphi_n(x)$ Wir werden hierbei auch nur einen Fall nehmen, wo $\sum \varphi_n(x)$ man sicher für eine analytische Function erkennen wird.

Diese Darstellung der Function durch unendliche Reihen von eindeutigen Functionen ist auch sehr wichtig, weil man hierdurch oft analytische Ausdrücke von analytischen Functionen bekommt, die öfter weitere Bedeutung haben als die Potenzreihen, die Darstellung gilt manchmal für die ganze Ebene mit Ausnahme bestimmter Linien u. s. w. Um das Kennzeichen zu finden, wann $\Sigma\, \Psi_n(n)$ eine analytische Function darstellt, entwickeln wir vorher einige Hilfsätze, die an und für sich schon wichtig sind.

1. Lehrsatz Nehmen wir an, wir hätten irgend einen analytischen Ausdruck zwischen $x\, y$, von dem wir wüssten, dass so lange x innerhalb eines Bereiches liegt, der aber continuirlich ist, zu jedem x ein bestimmter Werth von y gehört, dass sich ferner die Werthe von y für die Umgebung einer beliebigen Stelle x_0 dieses Bereiches nach Potenzen von $x - x_0$ entwickeln lässt, es soll nachgewiesenen werden, dass jede solche Potenzreihe, ein Func. Element aus einer beliebigen der Potenzreihen ableitbar ist. d. h. dass die durch den analytischen Ausdruck definirte Function (y) im weitern Sinne, eine analytische Function im Sinne unserer Definition für den continuirlichen Bereich ist.

Nehmen wir an $P(x|x_0)$ und $P(x|x_1)$ seien 2 Potenzreihen, die aus dem analytischen Ausdruck entspringen, und es möge zunächst x_1 im Conv. bereiche von $P(x|x_0)$ liegen. Alsdann muss für die Umgebung von x_1 die Gleichung bestehen $P(x|x_0) = P(x|x_1)$ denn sonst müssten sich für die Umgebung von x_1 mehrere Werthe von y ergeben, was gegen die Voraussetzung ist, denn y soll eine eindeutige Function von x im weiteren Sinne sein. Nun kann ich aber aus $P(x|x_0)$ für die Umgebung der Stelle x_1

die Reihe herleiten $\bar{\varphi}(x|x_1)$ und für eine gewisse Umgebung von x_1 muss sein $\varphi(x|x_0) = \bar{\varphi}(x|x_1)$; hieraus folgt, dass in der Umgebung von x_1 die Gleichung besteht.

$$\bar{\varphi}(x|x_1) = \varphi(x|x_1) \text{ d.h.}$$

$$\varphi(x|x_1) \equiv \varphi(x|x_1)$$ mit andern Worten $\varphi(x|x_1)$ ist aus $\varphi(x|x_0)$ ableitbar. Nun muss bewiesen werden, dass man auf diese Weise von x_0 ausgehend zu jeder andern Stelle x' des Bereiches gelangen kann. Unser Bereich ist ein Continuum, also kann ich von x_0 nach x' eine Linie ziehen, die vollständig innerhalb des Bereiches liegt. Diese Linie sei $x_0\,x'$.

Für jeden Punkt dieser Linie gibt es der Annahme nach eine Darstellung $\varphi(x|x_1)$ und der zugehörige Conv. Radius sei ϱ_1. Dieser Radius ändert sich mit der Lage von x_1 stetig. Denn wenn ich übergehe von x_1 nach x_2 und nehme x_2 so nahe an x_1, dass $\varphi(x|x_2)$ aus $\varphi(x|x_1)$ ableitbar ist, so ist

$$\varrho_1 - d_2 < \varrho_2 < \varrho_1 + d_2$$

Ich kann also d_2 so klein nehmen, dass die Veränderung von ϱ_1 kleiner ist als δ, d.h. ϱ_1 ändert sich mit x_1 stetig. Die Grösse ϱ_1 muss auch eine untere Grenze ϱ haben, und diese ist von Null verschieden, da es ja für jeden Punkt des Bereiches eine Reihe $\varphi(x|x')$ gibt, also auch für die Punkte der Linie $x_0\,x'$! Nun nehmen wir auf der Linie eine Reihe von Punkten an, so dass $x_1\,x_2 < \varrho$ alsdann kann ich jedes $\varphi(x|x_1)$ welches mir der analytische Ausdruck direkt gibt, aus dem Vorangehenden herleiten. Wenn wir die Reihe von Punkten mit $x_0\ x_1\ x_2 \dots x_n\ x'$ bezeichnen, und die Reihen, die aus dem analytischen Ausdrucke hervorgehen

$$\varphi(x|x_0),\ \varphi(x|x_1),\ \varphi(x|x_2) \cdots \varphi(x|x_n)\ \varphi(x|x')$$

sind, so ist jedes $\varphi(x|x)$ aus dem vorangehenden ableitbar, also auch $\varphi(x|x')$ aus $\varphi(x|x_0)$ ableitbar, und dies gilt für jeden Punkt x' innerhalb des Bereiches. Folglich ist die durch den analytischen Ausdruck definirte Function im weitern Sinne eine analytische Function im Sinne unserer Definition.

Bei Functionen mehrerer Variablen kann man den analytischen Satz nachweisen, wenn man den engeren Conv. bezirk zur Hülfe nimmt.

Begriff der gleichmäßigen Convergenz der Reihen $\sum \varphi_n(x)$

Wir sagen eine Reihe ist gleichmäßig convergent (oder convergent in gleichem Grade) innerhalb eines Bereiches, wenn es möglich ist, nach Annahme einer beliebigen kleinen Größe δ aus der Reihe $\sum \varphi_n(x)$ mehrere φ so auszuscheiden, daß der absolute Betrag des Restes der Glieder für alle Werthe von x innerhalb eines Kreises kleiner ist als δ. Die Benennung der Convergenz in gleichem Grade ist dabei genommen, daß man aus dem endlichen Werthe der Reihe für die Werthe x innerhalb des bestimmten Kreises mit gleicher Genauigkeit zu berechnen, man immer dieselbe Gliederzahl der Reihe zu nehmen nöthig hat.

2. Lehrsatz. Wenn $\sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(x)$ eine gleichmäßig convergirende Reihe ist, so können wir die Glieder der Reihe beliebig ordnen und die neuen Reihen sind wiederum convergent und der ursprünglichen gleich (Vergleiche Seite

Es sei $\sum_{n=0}^{n=\infty} \varphi_n(x)$ die zu untersuchende Reihe; da sie gleichmäßig convergent sein soll, so muß, wenn wir aus derselben eine bestimmte Anzahl herausheben es möglich sein, diese so zu wählen, daß die Differenz zwischen der ganzen Summe $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ und der Summe der herausgehobenen ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als eine beliebig angenommene Größe δ für alle Werthe von x innerhalb eines bestimmten Kreises, und dies muß auch noch dann gelten, wenn wir zu der Summe der herausgehobenen Glieder noch beliebig viele Glieder des Restes hinzufügen. Der Kreis muß aber hierbei so klein gewählt sein, daß er in dem Bereiche liegt in dem alle φ's Gültigkeit haben. Nun setzen wir zunächst voraus, daß die φ's sämmtlich Potenzreihen von x sind. Der Kreis muß in diesem Falle so gewählt werden, daß innerhalb desselben sämmtliche φ's convergent bleiben. Der Radius des Kreises sei ϱ; wir wollen ihn aber schon so wählen, daß die Bedingung der gleichmäßigen Convergenz noch für den Umfang des Kreises feststehen bleibt. Nun sei $c_{\mu,\nu}$ der Coefficient von x^ν in der μten Function $\varphi_\mu(x)$, bezeichnen wir nun mit g_μ das Maximum des absoluten Betrages der Function $\varphi_\mu(x)$ auf dem Umfange des Kreises; so ist bekanntlich

$$|c_{\mu,\nu}|\,\varrho^\nu \leqq g_\mu \qquad 1$$

Da nun die Reihe $\sum \varphi_n(x)$ gleichmäßig convergent ist, so muß für alle Werthe von x innerhalb und auf dem Umfange des Kreises mit dem Radius ϱ

$\sum\limits_{n=0}^{n=m} \varphi_n(x)$ durch eine bestimmte Wahl von m von der ganzen Summe $\sum\limits_0^\infty \varphi_n(x)$ so wenig verschieden gemacht werden können, als man will, so daß der Rest

$\varphi_{m+1}(x) + \varphi_{m+2}(x) + \ldots$ dem absoluten Betrage nach kleiner ist als δ. Betrachten wir nun die Potenzreihen

$$\varphi_{m+1}(x) = c_{m+1,0} + c_{m+1,2}\,x + \cdots + c_{m+0,\nu}\,x^\nu + \ldots$$

$$\varphi_{m+2}(x) = c_{m+2,0} + c_{m+2,1}\,x + \ldots + c_{m+2,\nu}\,x^\nu + \ldots$$

. . . .

so ist der Annahme nach die Summe von beliebig vielen Gliedern des Restes kleiner als δ; daraus folgt, daß wenn wir die Glieder in's Auge fassen, welche x^ν enthalten

$|(c_{m+1\nu} + c_{m+2,\nu} + \cdots)\,x^\nu| \leqq \delta$ für alle Werthe von x innerhalb des Conv. Kreises, da nun ϱ ein Werth ist, der die Bedingung genügt, so ist

$$|c_{m+1,\nu} + c_{m+2,\nu} + \cdots|\,\varrho^\nu \leqq \delta \text{ oder} \qquad 2$$

$$|c_{m+1,\nu} + c_{m+2,\nu} + \cdots| \leqq \delta\,\varrho^{-\nu}.$$

Daraus läßt beweisen, dass die unendliche Reihe $c_{1,\nu} + c_{2,\nu} + c_{3,\nu} + \ldots + c_{\mu,\nu} + \ldots$ convergent ist. Theilen wir sie nämlich in 2

Theile, indem wir zunächst alle Glieder absondern in denen $\mu < m+1$ ist, dann ist die Summe der übrigen dem absoluten Betrage nach endlich, siehe (2) also da m auch endlich ist, so ist die ganze Summe $c_{1,\nu} + c_{2,\nu} + \dots$ endlich. Wir setzen nun

$c_\nu = c_{1,\nu} + c_{2,\nu} + c_{3,\nu} + \dots$ Hiernach können wir aus der Reihe $\sum \varphi_n(x)$ die Reihe von der Form bilden

$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ indem wir die Glieder mit gleichen Potenzen zusammenfassen. Wir wollen nun zeigen dass die neue gebildete Reihe $\sum c_\nu x^\nu$ convergent ist für alle hier betrachteten Werthe von x: Ich zerlege die Reihe $\sum c_\nu x^\nu$ in 2 Theile

$$\sum_{\left(\substack{\mu = 0, \dots m \\ \nu = 0, \dots \infty}\right)} c_{\mu,\nu} x^\nu + \sum_{\left(\substack{\mu = m+1, \dots \infty \\ \nu = 0 \dots \infty}\right)} c_{\mu,\nu} x^\nu = \sum_{\mu = 1, \nu = 0}^{m, \infty} c_{\mu,\nu} x^\nu + \sum c'_\nu x^\nu$$

wo $c'_\nu = c_{m+1,\nu} + c_{m+2,\nu} + \dots$ Der erste Theil ist für alle x die endlich sind, und innerhalb des Conv. bereiches der Reihen $\varphi_n(x)$ liegen auch endlich. Nun ist ferner wegen (2)

$|c'_\nu| \leqq \delta \varrho^{-\nu}$. Nehme ich also $|x| < \varrho$ dann ist, wenn ich mit ξ diesen Werth bezeichne

$|\sum c'_\nu x^\nu| < \delta \left\{ 1 + \frac{\xi}{\varrho} + \dots \right\} < \delta \frac{1}{1 - \frac{\xi}{\varrho}}$. Da das ϱ so groß gewählt werde, daß es im Conv. bereiche aller Reihen liegt, so gilt, wenn man diesen Radius ϱ etwas erweitert, dieser Schluß auch für $|x| = \varrho$. Wir erhalten also folgendes Resultat. Ich kann für alle Werthe von x, die innerhalb des Conv. bereiches als $\varphi(x)$ liegen, die Reihe $\sum \varphi_n(x)$ so in Gruppen theilen, dass ich hieraus für die betrachteten Werthe von x convergente Potenzreihen bekomme. Nun wollen wir zeigen, dass diese Potenzreihe innerhalb des Conv.-bereiches gleich ist $S = \sum \varphi_n(x)$. Zu dem Zwecke theilen S in 2 Theile.

$$S = \sum_1^m \varphi_n(x) + \bar{\varphi}(x) \text{ und die Potenzreihe } S' \text{ sei}$$

$$S' = \sum_1^m \varphi_\mu(x) + \sum c_\nu' x^\nu \text{ also}$$

$$S - S' = \varphi'(x) - \sum c_\nu' x^\nu$$

Nun kann ich $|\bar{\varphi}(x)| < \delta$ machen und $|\sum c_\nu' x^\nu| < \frac{\delta}{1-\frac{\varrho}{\varsigma}}$ also kann die Differenz beliebig klein gemacht werden. Nun ist S u. S' von δ unabhängig, also muss $S - S' = 0$ d. h. $S = S'$. Wenn nun die φ's keine Potenzreihen sind, sondern innerhalb eines cont. Bereiches endliche, eindeutige Functionen, so können wir sie in Potenzreihen umwandeln und können durch dieselben Schlüsse zu demselben Resultat.

3) <u>Lehrsatz</u> Wenn $\varphi_n(x)$ innerhalb eines cont. Bereiches eindeutige analytische Functionen sind und $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ gleichmässig convergent ist innerhalb eines Bereiches, so wird durch den Ausdruck $y = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$ innerhalb des Bereiches eine analytische Function definirt mit dem Charakter einer ganzen Function

Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem 1. u. 2. Satze. Siehe Seite . Durch den Ausdruck $y = \sum \varphi_n(x)$ ist nämlich zwischen x u. y ein Zusammenhang definirt und zwar so, dass innerhalb eines bestimmten Bereiches zu einem Werthe von x sich nur ein Werth von y

ergibt, anwenden kann für die Umgebung jeder Stelle x_0 des continuirlichen Bereiches y als Potenzreihe von $x - x_0$ dargestellt werden (wegen Satz 2) und hieraus folgt nach Satz 1, daß $y = \sum \varphi_n(x)$ innerhalb des Bereiches eine analytische Function darstellt.

Zusatz 1 Ist $y = \sum \varphi_n(x)$ eine innerhalb eines Bereiches gleichmäßig convergirende Reihe, so kann man die Ableitung von y finden, indem man jedes Glied der Reihe differenciirt.

2) Die Potenzreihen sind immer gleichmäßig convergent die Reihe $\sum \frac{\sin nx}{n}$ aber nicht, die letztere darf auch nicht differenciirt werden.

Ebenso interessant ist die Frage, wann ein Punkt von unendlich vielen eindeutigen, analytischen Functionen wiederum eine analytische Function darstellt.

Diese Untersuchungen lassen sich auch auf Functionen mehrerer Variablen ausdehnen.

Anwendung der allgemeinen Theorie auf einige specielle Functionen.

Wir haben im Vorigen eine analytische Function definirt, und das Wesen solcher Functionen im Gegensatze zu den Functionen im weiteren Sinne des Wortes gezeigt. Gleichzeitig ist ein Verfahren gegeben, wie man bei der Untersuchung specieller Functionen zu verfahren hat. Es wird bei jeder Untersuchung einer analytischen Function zunächst nötig sein zu zeigen, wie man das Functions-Element herstellen kann. Alsdann beherrscht man die besondere Function dem Begriffe nach vollständig. Wir wollen nun zum Schlusse einige analytische Functionen behandeln, um eine Anwendung der allgemeinen Grundsätze zu zeigen.

Zunächst könnte man die Functionen untersuchen, welche durch algebraische Gleichungen definirt werden. Wenn wir nämlich z. B. eine alg. Gleichung zwischen xy $G(xy)=0$ haben, so wird hierdurch y als eine Function (im weiteren Sinne) definirt; indem man stets für die Umgebung aller nicht singulär Stellen Potenzreihen von $x-x_0$ für y finden kann, die der Gleichung genügen. Es ist möglich, dass alle diese Potenzreihen aus einer ableitbar sind, alsdann wird durch die Gleichung ein monogenes Gebilde definirt, es wird y als eine analytische Function von x gegeben, es kann aber auch vorkommen, dass man nicht alle Potenzreihen, die der Gleichung genügen, aus einer herleiten kann, alsdann wird kein einheitliches monogenes definirt, sondern mehrere.

In diesem Falle definirt auch die Gleichung nicht eine sondern mehrere analytische Functionen. Dies entspricht in der analytischen Geometrie der monogenen und nicht monogenen zusammengesetzten Curven. (Reductible und irreductible Gleichungen) Bei der Untersuchung dieser Functionen hat man sich stets ein Funct.-Element herzustellen.

Diese Untersuchung ist schwer und kann an dieser Stelle nicht erledigt werden. Auf dieselbe Weise schreitet man zu den Differentialgleichungen. Zunächst hat man zu zeigen, daß es überhaupt möglich ist Ausdrücke zu finden, die den Diff. gleichungen genügen und dann hat man zu untersuchen, ob die durch die Diff. gleichungen definirte Function eine analytische Function ist. Auch diese Untersuchungen gehören nicht hierher, sondern müssen in der Integrialrechnung speciell bei der Theorie der Diff. gleichungen erledigt werden. Wir wollen daher eine andere Untersuchung vornehmen, nämlich die der Functionen, welche durch beständig convergirende Reihe definirt werden: hierdurch werden wir auf die einfach periodischen Functionen geführt, die Exponentialfunction und trigon. Functionen als deren Umkehrungen sich die unendlich vieldeutigen Functionen, Logarithmen und die cyklometr. Functionen ergeben werden.

1. Exponentialfunction.

Der Begriff einer Potenz hat sich allmählich gebildet. Er hat seine Entstehung dem Bedürfnis der Kürze zu verdanken. Man schrieb anfangs als Abkürzung $a.a = a^2$; $a.a.a. = a^3$; $a.a.a.$ (n mal $= a^n$. Alsdann erkannte man, daß für a^n das Gesetz besteht daß

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

Die Folge hiervon war das Gesetz: Wenn die Exponenten, welche ganzen, positiven Zahlen vorangesetzt werden, eine arithmethische Reihe bilden, so bilden die Werthe der Potenz eine geometrische Reihe. Von dieser Eigenschaft der Potenz ausgehend musste man alsbald auf den Gedanken kommen, Potenzen mit negativen, ganzen Exponenten einzuführen. Man ging nämlich von der arithmetischen Reihe 1, 2, 3 ... denen die geometrische Reihe $a^1, a^2, a^3 \ldots$ entspricht, auch rückwärts und erhielt die Reihenfolge der negativen Exponenten $0, -1, -2, \ldots$ denen die geometrische Progression $a^0, a^{-1}, a^{-2} \ldots$ entspricht. Hieraus ergab sich sofort die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten. Man erhielt auf diese Weise die beiden entsprechenden Reihen

$$
\begin{array}{cccccccccc}
-n \ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\
\frac{1}{a^n} \ldots & \frac{1}{a^3} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 1 & a & a^2 & a^3 & \ldots & a^n
\end{array}
$$

Der nächste Fortschritt war zu den Bruchexponenten, denn in der Reihe $1, a, a^2 \ldots$ können Glieder eingeschaltet werden, die wiederum mit den ursprünglichen eine geometrische Reihe bilden. So wenn wir z. B.

$\sqrt[n]{a} = \alpha$ setzen, die Reihe bilden

$1, \alpha\ \alpha^2, \ldots \alpha^n = a, \ldots$

Man bildete eine entsprechende Reihe für die Exponenten

$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \frac{n}{n} = 1.$

Es war noch der Schritt zu machen, die Potenz so zu definiren, dass sie für eine stetige Folge der Exponenten gültig bleibt. Als die Definition ergibt sich sofort Folgendes. Wenn $x_1\ x_2\ x_3$ 3 aufeinanderfolgende Exponenten sind, u. $y_1, y_2\ y_3$ die entsprechenden Werthe der Potenz, so soll, wenn $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$ ist $y_2^2 = y_1 y_3$. Man könnte dies auch aus der Definition der Potenz mit einem Bruchexponenten durch eine Grenzbetrachtung herleiten. Alsdann ging man zu den complexen Exponenten über, nachdem man vorher diese Function für reelle Werthe in einer analytischen Function darzustellen verstand. Wir wollen nun zunächst zeigen, wie man von dem Begriffe der Potenz zu einer analytischen Function gelangt, die sich leicht in einer analytischen Form darstellen läßt. Bezeichnen wir die zu definirende Function mit $\varphi(x)$, so soll, wenn x_1, x_2 beliebig ist

1 $$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = \varphi^2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Angenommen, daß eine solche Function existirt, so folgt

2 $$\varphi(x_1')\,\varphi(x_2') = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2) \text{ wenn}$$
$$x_1' + x_2' = x_1 + x_2$$

Setzen wir x_1' willkürlich an, so können wir unter der Annahme der Existenz einer solchen anal. Function, dieselbe differenciiren. Setzen wir $x_1' = a$ so erhalten wir zunächst

$\varphi(a)\,\varphi(x_1 + x_2 - a) = \varphi(x_1)\,\varphi(x_2)$ und da x_1, x_2 von einander vollständig unabhängig sind, so erhalten wir durch Differentiation nach x_1

$$\varphi(a)\,\varphi'(x_1+x_2-a)=\varphi'(x_1)\,\varphi(x_2) \qquad 3$$

Setzen wir nun $x_1=a$ so ergibt sich

$$\varphi(a)\,\varphi'(x_2)=\varphi'(a)\,\varphi(x_2) \text{ d.h.} \qquad 4$$

$$\frac{\varphi'(x_2)}{\varphi(x_2)}=\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}$$ oder da x_2 ganz willkürlich ist

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a)}=c \text{ oder} \qquad 5$$

$$\varphi'(x)=C.\,\varphi(x) \qquad 6$$

Hieraus folgt, daß die Ableitungen aller Ordnungen existiren, denn es ist

$$\varphi''(x)=C\varphi'(x)=C^2\varphi(x) \qquad 7$$

. . . .

$$\varphi^{(m)}(x)=C^m\varphi(x)$$

Wählen wir nun irgend eine Stelle a, so wird das Element der Function desselben lauten

$$\varphi(x)=\varphi(a)\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}c^\nu\frac{(x-a)^\nu}{\nu!} \qquad 8$$

Setzen wir nun als Definition

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\nu!}=\mathcal{E}(x) \text{ so ist alsdann} \qquad 9$$

$$\varphi(x)=\varphi(a).\,\mathcal{E}(c(x-a))$$

Wir haben somit die Function $\mathcal{E}(x)$ zu untersuchen. Diese Function hat die Eigenschaft, daß ihre Ableitung ihr selbst gleich ist. Nun betrachten wir $\mathcal{E}(x+y)$ als Function von x und differencieren nach x; alsdann ist

$$\mathcal{E}'(x+y)=\mathcal{E}(x+y) \text{ und}$$

$$\mathcal{E}'(x)=\mathcal{E}(x) \text{ und hieraus}$$

$$\mathcal{E}(x)\,\mathcal{E}'(x+y)-\mathcal{E}(x+y)\,\mathcal{E}'(x)=0 \text{ oder} \qquad 11$$

12 $$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{E(x+y)}{E(x)}\right\} = 0$$

Nun ist $E(x)$ also auch $E(x+y)$ eine eindeutige Function, da sie durch eine beständig convergirende Reihe definirt ist; der Quotient $\frac{E(x+y)}{E(x)}$ ist ebenfalls eine eindeutige analytische Function. Wegen 12 muss sie aber eine Constante sein, d. h. eine von x unabhängige Grösse:

13 $$\frac{E(x+y)}{E(x)} = C$$

Diese Constante muss überall dieselbe sein, denn sonst würde man für den Quotienten an verschiedenen Stellen verschiedene Werthe erhalten, was wegen der Eindeutigkeit nicht möglich ist. Wir erhalten also

$E(x+y) = C\,E(x)$ Nun besteht die Gleichung überall, also für $x = 0$ folgt $E(y) = C\,E(0) = C$

Wir haben somit die Eigenschaft der Function $E(x)$

14 $$E(x+y) = E(x)\,E(y)$$

Nun erhalten wir aus 10

15 $\varphi(0) = \varphi(a) . E(-ca)$ und wenn wir für $\varphi(a)$ den Werth aus dieser Gleichung in 10 einsetzen, so erhalten wir

16 $$\varphi(x) = \varphi(0)\,\frac{E(c(x-a))}{E(-ca)}$$

Da nun wegen 14

$$E(c(x-a)) = E(cx-ca) = E(cx)\,E(-ca)$$

so folgt aus 16

17 $$\varphi(x) = \varphi(0) . E(cx)$$

Da nun die Function $E(cx)$ existirt, so existirt auch $\varphi(x)$ und wegen 17 u. 14 erhält man leicht die verlangte Eigenschaft von $\varphi(x)$, daß nämlich

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = \varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \text{ ist.}$$

Also die Betrachtung der Potenz einer Größe mit reellen Exponenten hat uns geführt zu der Aufgabe eine eindeutige analytische Function mit der verlangten Eigenschaft zu bilden. In der Annahme, die uns zu

$$\varphi(x) = \varphi(a) \sum \frac{c^\nu (x-a)^\nu}{\nu!}$$ geführt hat, ist gar nicht vorausgesetzt, daß die Function überall existirt. Wir haben die Stelle a allgemein angenommen. Nachher zeigt sich aber daß die Function $\varphi(x)$ überall existirt, da sie durch eine beständig convergirende Reihe dargestellt wird. Man kann auch aus der Eigenschaft $E(x+y) = E(x)E(y)$, ohne die Gestalt der Reihe für $E(x)$ zu kennen, leicht zeigen, daß die Reihe, welche sich für $E(x)$ ergibt, beständig convergent ist. Denn zunächst folgt, daß $E(x)$ einen Conv. kreis hat. Wählen wir innerhalb desselben $y = x_1, a$. so haben wir

$$E(x_1+y) = E(x_1)\,E(y)$$ wenn wir das x_1 so nahe an der Grenze nehmen, daß x_1+y außerhalb des Kreises liegt, so gilt noch dieselbe Reihe. Wie weit sich also der Conv. kreis von $E(x)$ erstrecke, kann ich stets noch weiter gehen; d. h. die Reihe für $E(x)$ ist beständig convergent. Auch folgt leicht, daß die Function $E(x)$ nirgends im Endlichen Null sein kann,

denn angenommen es wäre

$\mathcal{E}(a)=0$ so haben wir

$\mathcal{E}(x+a)=\mathcal{E}(x)\,\mathcal{E}(a)=\mathcal{E}(x).0$

da aber $\mathcal{E}(x)$ überall endlich ist, so müßte

$\mathcal{E}(n+a)=0$ .. d. h. die Function müßte überall Null sein, was nicht der Fall ist. Man kann auch leicht nachweisen, daß die Eigenschaft von $\mathcal{E}(x)$ vollständig mit denen der Potenz übereinstimmen. Wir können alsdann setzen

18 $$\mathcal{E}(x)=e^{x}$$

Nun stellen wir uns die Aufgabe alle Werthe von x zu finden, die denselben Werth von $y=e^{x}$ liefern. Es möge der Werth von y für x gleich sein $y=e^{x}$, wenn es noch einen weitern Werth von x gibt x' für den $y=e^{x'}$ so können wir $x'=x+h$ setzen, dies gibt $e^{x+h}=e^{h}e^{x}$.

19 Da nun $e^{x+h}=e^{x}$ sein soll

und die Function für keinen endlichen Werth von x weder Null noch unendlich groß ist, so folgt aus 19 daß

20 $e^{h}=1$ sein muß.

Nun sieht man leicht, daß diese Gleichung für keinen reellen Werth von h befriedigt werden kann; es kann also h nur complex sein.

Setzen wir demnach $h=k+li$, so ist

21 $$e^{k+li}=e^{k}\cdot e^{li} \text{ und auch}$$

$$e^{h-li} = e^{h} e^{-li}$$

und wenn r der absolute Betrag von e^{h+li} ist, so folgt

$r^2 = e^{2h}$, da aber $r=1$ sein soll, so muss $h=0$ sein. Wenn es also einen Werth für h gibt, so dass

$e^{x+h} = e^{x}$, so kann h nur rein imaginär sein.

Setzen wir $h = \lambda i$, so erhalten wir

$$e^{\lambda i} = 1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} - \dots + i\left\{\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^3}{3!} + \dots\right\} \qquad 22$$

Nun kann man für λ eine Grenze finden, so dass der reelle Theil von 22 verschwindet. Es sei λ_0 der kleinste Werth, wofür dies der Fall ist; dann ist

$$e^{\lambda_0 i} e^{-\lambda_0 i} = 1 = \left(\frac{\lambda_0}{1} - \frac{\lambda_0^3}{3!} + \dots\right)^2 \qquad 23$$

Für solchen Werth λ_0 wird der 2te Theil = 1 u. s. w. demnach haben wir

$e^{\lambda_0 i} = i$ und

$e^{4\lambda_0 i} = 1$ Bezeichnen wir nun die Constante λ_0 mit $\frac{\pi}{2}$, so haben wir den kleinsten Werth für h, wofür $e^{h} = 1$ $h = 2\pi i$. Wir sehen auch, dass allgemein $e^{2n\pi i} = 1$.

Dass aber $2\pi i$ auch der kleinste Werth ist, wofür dies stattfindet, kann man auf folgende Weise schliessen. Gäbe es noch einen 2ten kleineren Werth h', so müsste $e^{2n\pi i + h'} = 1$ und hieraus $e^{h'} = 1$ d. h. $h' = 0$.

Man sieht demnach, dass die Exponentialfunction eine periodische Function ist, mit der Periode $2\pi i$

Besonders charakteristisch ist aber für sie die Gleichung

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2) = \varphi^2\frac{(x_1+x_2)}{2}$$

Betrachtet man die Functionen, welche sich rational aus der Exponentialfunction $z = e^{cx}$ ausdrücken lassen, so haben sie ein bestimmtes Gepräge. Wenn wir eine beliebige Function haben, und dem Argumente die Werthe a, $a+\alpha$, $a+2\alpha$, beilegen, so muß zwischen den entsprechenden Functionswerthen $b_1\, b_2\, b_3$ eine bestimmte Relation stattfinden. Bei der Exp. function ist diese Relation algebraisch. Dies gilt auch für alle aus der Exp. function rational zusammengesetzten Functionen. Denn setzen wir

24
$$\begin{aligned} y_1 &= F(e^{cx_1}) = F(z_1) \\ y_2 &= F(e^{cx_2}) = F(z_2) \\ y_3 &= F(e^{cx_3}) = F(z_3) \end{aligned}$$

wo $F(z)$ eine rationale Function von z ist, und nehmen wir an $x_1 + x_3 = 2x_2$ z. B.

$x_1 + x_2 - h$

$x_3 = x_2 + h$ so folgt zunächst

25 $z_2^2 = z_1\, z_3$ Eliminiren wir nun aus den 4 Gleichungen 24 u. 25 die z's, so erhalten wir zwischen $y_1\, y_2\, y_3$ eine Relation, die sich als algebraische Gleichung zwischen $y_1\, y_2\, y_3$ ergibt. Durch die Forderung, daß zwischen den Functionswerthen eine algebraische Gleichung bestehe, wenn zwischen den Argumenten die obige Relation besteht, wird eine ganze Claße von Functionen charakterisirt. Man kann sich nun

die Aufgabe stellen, alle die Functionen zu finden, welche die obige charakteristische Eigenschaft besitzen. Diese Untersuchung führt uns auf die Theorie der elliptischen Functionen.

2. Logarithmus

Die Untersuchung der Exponentialfunction

$$y = e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad 1,$$

führt sogleich auf den Logarithmus. Betrachten wir nämlich x als Function von y, so kommen wir zu einer neuen (mehrdeutigen) Function. Aus 1 folgt nun zunächst

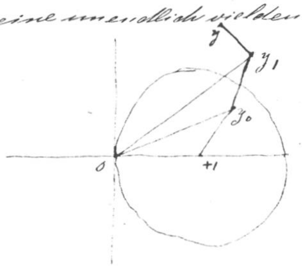
$$\frac{dy}{dx} = y \qquad 2,$$

Wenn wird noch die Bedingung hinzufügen, dass für $x = 0$ $y = 1$ sein soll, so erhalten wir für die Umgebung der Stelle 1, das Functions-Element

$$x = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 + \ldots \text{ ; denn es ist} \qquad 3$$

$$dx = \{1 - (y-1) + (y-1)^2 - \ldots\}\, dy = \frac{dy}{y} \qquad 4$$

Die Reihe 3 convergirt, sobald $|y-1| < 1$. Durch die Gleichung 1 wird ein Gebilde definirt, die Gleichung 3 definirt uns nach der allgemeinen Theorie dasselbe Gebilde. Da nun unendlich viele Werthe von x gibt, die dasselbe liefern, so sieht man schon hieraus, dass das Element 3 eine unendlich vieldeutige Function definirt. Um das Element 3 fortzusetzen, kann man entweder direkt aus 3 für die Umgebung von y_0, das innerhalb des Conv. bereiches von 3



liegt eine Potenzreihe herleiten, oder auch man kann die Ableitung $\frac{1}{y}$ umgestaltet nach Potenzen von $y - y_0$. Dies ergibt man

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_0+(y-y_0)} = \frac{1}{y_0} + \frac{1}{y_0^2}(y-y_0) + \frac{1}{y_0^3}(y-y_0)^2 + \dots$$ und durch Integration

5 $$l.\, y = \log_{\xi} y_0 + \frac{y-y_0}{y_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{y-y_0}{y_0}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y-y_0}{y_0}\right)^3 - \dots$$ wo

6 $$\log_{\xi} y_0 = (y_0 - 1) - \frac{1}{2}(y_0-1)^2 + \frac{1}{3}(y_0-1)^3 \dots$$

Diese Reihe 5 convergirt sobald $\left|\frac{y-y_0}{y_0}\right| < 1$ ist, oder.

$|y-y_0| < |y_0|$ d.h. wenn y näher an y_0 als y_0 am Nullpunkt liegt. Wollen wir weiter gehen, so wählen y_1 so, daß $\overline{y_1 y_0} < \overline{y_0\, 0}$ und bestimmen

7 $$\log_{\xi} y_1 = \log_{\xi} y_0 + \frac{y_0-y_0}{y_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{y_1-y_0}{y_0}\right)^2 + \dots$$ und alsdann folgt

8 $$\log_{\xi} y = \log_{\xi} y_1 + \frac{y-y_1}{y_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{y-y_1}{y_1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{y-y_1}{y_1}\right)^3 - \dots$$

Auf diese Weise gelangen wir zu jedem Punkte mit Ausnahme des Null- und Unendlichkeitspunktes, dafür ist die Function nicht definirt, was auch schon aus der Exponentialfunction folgt, dafür ja niergends Null und unendlich gross werden kann. Wenn wir

$z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 -$ mit $L(z)$ bezeichnen, dann ist

$$x_0 = \log y_0 = L(y_0 - 1)$$
$$x_1 = \log y_1 = \log y_0 + L\left(\frac{y_1-y_0}{y_0}\right)$$
$$x_2 = \log y_2 = \log y_1 + L\left(\frac{y_2-y_1}{y_1}\right)$$

. . . .

Die Unendlichvieldeutigkeit von $\log y$ kann man auch direkt aus dem Functions-Elemente zeigen, wenn man die Function von dieser Stelle $x=1$ des Conv. kreises von 3 auf einem Kreise mit dem Radius um den Nullpunkt fortsetzt. (siehe Seite) Man überzeugt sich leicht, dass man aus dem Elemente (3) neue und wieder neue Reihen herleiten kann, die sich um $2n\pi i$ unterscheiden, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist. Hieraus fliesst mit Leichtigkeit, dass für jede Stelle der Werth der Function ist $\lg x \pm 2n\pi i$. Alle andern Eigenschaften des Logarithmus kann man mit Leichtigkeit herleiten. Auch kommt man leicht dazu, dass $\lg x = \int_1^x \frac{dx}{x}$ woraus sich dann die Exponentialfunction als Umkehrung von $\lg x$ ergeben würde.

[Erklärung von $u = \int_1^{+1} \frac{dz}{z}$; $\log(x)$ ist nicht dasselbe was $\log(-x)$. Auch wird durch $\log(x^2)$ nicht dasselbe Functionselement definirt, wie durch $\log(x)$

3 Allgemeine Potenz.

Aus dem Begriffe des Logarithmus folgt auch der einer Potenz. Als Definition von z^x hat man die Gleichung

$$z^x = e^{x \log z} \qquad 1$$

Diese Definition ist ganz allgemein und sie zeigt nur alle Eigenschaften einer Potenz. Wenn x eine ganze Zahl ist, so ist z^x vollständig eindeutig, denn obgleich $\log z$ unendlich vieldeutig ist, so wird im Exponenten nur ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ vorkommen, was den Werth von $e^{x \log z}$ nicht aendert. Wenn x ein rationaler Bruch ist, und in der reducirten Form (kleinster Nenner) gleich ist $\frac{\mu}{\nu}$, so hat die Function z^x ν verschiedene Werthe. Ist dagegen x irrational, so ist z^x unendlich vieldeutig. Die gewöhnliche Definition $a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$ ist unrichtig, wenn μ u. ν einen Theiler haben.

Hieran schliesst sich die Binominalreihe $(1+x)^m$, welche man so definirt, dass

2 $\qquad (1+x)^m = e^{m \log(1+x)}$ und nun muss man unterscheiden, welches Anfangselement für $\log(1+x)$ genommen wird. Nehmen wir

3 $$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$ so erhalten wir

4 $$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \dots$$

Die Rechte dieser Gleichung stellt uns nur einen Zweig der durch $(1+x)^m$ dargestellten Function und zwar den, der für $x=0$ 1 wird. Aus dieser Reihe kann man aber alle andern Werthe herleiten. Als Function von m betrachtet, stellt uns die Reihe 4 für $x = -1$ eine Funktion, die den Charakter einer ganzen Function hat. Für $|x| = 1$ hört im Allgemeinen die Convergenz derselben auf. Man kann aber fragen, für welche Werthe von m die Reihe 4 noch convergent bleibt, wenn $|x| = 1$. Hierbei kommt zur Sprache die bedingte Convergenz der Reihen. Es kann nämlich vorkommen, dass die Reihe bei einem bestimmten Arrangement einen endlichen Werth hat, alsdann definirt man als den Werth der Reihe

$$S = \lim S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

wobei die bestimmte Anordnung ins Auge gefaßt wird.
Man sagt dann, die Reihe convergire bedingt. Bei der Binomialreihe tritt der Fall für $|x| = 1$.
(Siehe Abels Untersuchungen der Binomialreihe)

4, Trigonometrische und cyklische Functionen

Aus der Exponentialfunction ergeben sich die trigonometrischen Functionen, mittelst der Gleichung

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x \qquad 1$$

und hieraus

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \qquad 2$$

Diese Functionen sind ebenso wie die Exponentialfunction eindeutig und lassen sich durch beständig convergirende Reihen darstellen

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \qquad 3$$

sind periodische Functionen mit der Periode 2π.
Alle andern Eigenschaften der Exponentialfunction ziehen entsprechende Eigenschaften dieser Functionen nach sich.
Setzt man

$y = \sin x$ oder

$y = \cos x$, so ergeben die Umkehrungen derselben mehrdeutige Functionen, die man bezeichnet mit

$x = \arcsin y$ oder

$x = \arccos y$

man kann sich leicht überzeugen, daß alle Werthe der Functionen in den Formeln

$x = \arcsin y \pm 2n\pi$

$x = \arccos y \pm 2n\pi$ enthalten sind, wo n ganze positive Zahl bedeutet. Die Reihen für diese Functionen kann man auch leicht herstellen. Sehr interessante Untersuchungen bieten uns die Darstellungen von $\cos mx$, $\sin mx$, $\cos^m x$, $\sin^m x$ dar. (Abel, Lagrange falsche Resultate) Es sei $y = \sin x$ und x möge nur reelle Werthe annehmen; dann ist $x = y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \dots$ und wenn y zwischen 1 u $+1$ liegt, so liegt x zwischen $-\pi$ u π. Wenn ich nun e^{mxi} darstellen will, so erhalte ich

$e^{mxi} = e^{mi(y + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3} + \dots)}$ Die Reihe können wir finden und erhalten sie in der Form $P + Qi$ und durch Vergleichung der reellen und imaginären Theile ergibt sich $\cos mx = P$, $\sin mx = Q$.

Es lassen sich $\cos mx$ und $\sin mx$ darstellen für jedes beliebige m, aber nur unter der Voraussetzung, daß x zwischen $-\pi$ u $+\pi$ liegt. Man findet hier ein interessantes Coefficientengesetz. Wir erhalten zunächst

4 $e^{mxi} = \sum c_r y^r$ und alsdann

$mi\, e^{mxi} = \sum r c_r y^{r-1} \frac{dy}{dx}$ Es ist aber

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$ Wir erhalten

$$-m^2 e^{mxi} = \sum \nu(\nu-1) c_\nu y^{\nu-2}(1-y^2) - \sum \nu c_\nu y^\nu \qquad 5$$

Aus 4 und 5 bekommt man alsdann eine Recursionsformel.
Man könnte auch dies so machen. Zunächst entwickelt man die Reihe mechanisch, so erhält man als Coefficienten derselben rationale ganze Functionen von m, und die Function vom ν ten Gliede ist vom ν ten Grade. Diese Function kann man darstellen, wenn man ihren Werth für $\nu+1$ Werthe kennt. Dies erreicht man leicht für ganzzahlige Werthe von m, und so kann man die Werthe der Coefficienten finden.
Dieser Theil der Theorie der trigonometrischen Function ist auch besonders interessant, weil man früher, ehe man noch die unendlichen Reihen recht zu beurtheilen wußte, auf verschiedene Paradoxa und falsche Resultate kam.

Anhang

Die allgemeine Theorie der complexen Zahlen

bearbeitet nach den Vorlesungen des Herrn Professor Weierstraß im math. Seminar zu Berlin 1874

1.

Die Theorie der gewöhnlichen und complexen Zahlen.

Bei der Untersuchung über die Zahlengrößen der Arithmetik haben wir gezeigt, wie man allmählich den Zahlenbegriff zu erweitern hat, indem man zur Einführung neuer Zahlen durch das Bedürfniß der Allgemeinheit der mathematischen Gesetze gezwungen wird. So wurden wir zunächst von den ganzen positiven Zahlen auf die Brüche geführt; alsdann haben wir die positiven und negativen Zahlen unterschieden und schließlich haben wir die aus den 4 Einheiten $+1\ -1\ +i\ -i$ und ihren genauen Theilen gebildeten Zahlen einführen müssen. Bei der Einführung neuer Zahlen hielten wir immer das Princip fest, daß die Gesetze der Hauptoperationen für die neuen Zahlen dieselbe bleibe, wie die der aus der positiven Einheit gebildeten Zahlen. Bei der Einführung der neuen Zahleinheit $+i$ haben wir für die Multiplication der Einheiten die Gaussischen Definitionen genommen, daß $+1 \cdot +1 = +1$, $+i \cdot +i = -1$ sein soll. In diesen Definitionen scheint eine gewisse

Willkür zu liegen, man wird aber auf dieselbe mit Nothwendigkeit geführt, wenn man außer dem oben erwähnten Princip noch das Princip der Zweckmäßigkeit in's Auge faßt.

Zunächst nehmen wir Zahlen, die gebildet sind aus 2 Einheiten der Grundeinheit und der entgegengesetzten und ihre Theorie sei schon begründet.

Nun betrachten wir Zahlen, die aus 4 Einheiten gebildet sind; die Einheiten seien e_1, e_2 und die entgegengesetzten $-e_1$, $-e_2$. Wenn α β Zahlen sind, die aus einer unbenannten Einheit gebildet werden, so bedeutet αe_1, βe_2 diejenige Zahl, welche aus α β entsteht, wenn man darin an die Stelle der unbenannten Einheit resp. e_1 .. e_2 setzt, so daß, wenn in α das Element $\frac{1}{m}$ vorkommt, so kommt in αe_1 das Element $\frac{e_1}{m}$ u.s.w. Alsdann kann jede Zahl unseres Zahlengebietes dargestellt in der Form

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

Die Additions und Subtractionsgesetze bleiben bei unsern Zahlen bestehen, da sie ja dieselben sind für beliebige complexe Zahlen. Es handelt sich zunächst darum, daß die Multiplicationsgesetze aufrecht erhalten werden, welche für die ganzen positiven Zahlen gelten, vor Allem, daß die Multiplication unseres Zahlengebietes wiederum Zahlen desselben Gebietes liefert und daß das Resultat von der Ordnung der Factoren unabhängig sei. Wir müssen zunächst die Definitionen der Multiplication der Grundeinheiten aufstellen.

Wir setzen also als Definitionen fest, daß

$$e_1\, e_1 = \lambda e_1 + \mu e_2$$

1 $$e_1\, e_2 = \lambda' e_1 + \mu' e_2 = e_2\, e_1$$

$$e_2\, e_2 = \lambda'' e_1 + \mu'' e_2$$

wo die Zahlen $\lambda \mu\; \lambda' \mu'\; \lambda'' \mu''$ noch näher zu bestimmen sind.

I <u>Hilfsatz</u>. Wenn man erst die Zahlen $\lambda \mu\; \lambda' \mu' \ldots$ hat, so kann man jede Multiplication ausführen.

Nehmen wir z. B.

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

2 $$b = \alpha' e_1 + \beta' e_2$$

und zeigen zunächst wie aus den Multiplicationsgesetzen der Einheiten, die Multipl. Gesetze für die Theile folgen.

Nehmen wir $\frac{e_1}{m} \cdot \frac{e_2}{n}$ so ist

3 $$\frac{e_1}{m} \cdot \frac{e_2}{n} = \frac{\lambda'}{m,n}\, e_1 + \frac{\mu'}{m,n}\, e_2$$

Um zu zeigen, daß dies richtig ist, haben wir nachzuweisen, daß, wenn ich das $m\,n$ fache von 3 nehme ich $e_1\, e_2$ erhalte. Denn auf der Linken erhalte ich nach den Multiplications-regeln für das m fache

$\frac{e_1}{m} + \frac{e_1}{m} + \ldots (m \text{ mal}) \frac{e_2}{n} = e_1 \cdot \frac{e_2}{n}$ dieses wiederum ver n facht gibt $e_1\, e_2$. Die Rechte Seite muß also auch ver $m\,n$ facht zum Resultate $e_1\, e_2$ geben.

Kommt nun auf der Rechten z. B. in λ' das Element $\frac{1}{g}$ oder $-\frac{1}{h}$, so kommen in $\frac{\lambda'}{m\,n}$ die Elemente vor $\frac{1}{g\,m\,n}$, $-\frac{1}{h\,m\,n}$ also in $\frac{\lambda' e_1}{g\,m\,n}$ kommen $\frac{e_1}{g\,m\,n}$ $-\frac{e_1}{h\,m\,n}$ vor;

wenn ich dieses verm n fache so erhalte ich $\frac{e_1}{g} - \frac{e_1}{h}$. Wenn ich also die Rechte von 3 ver m n fache, so bekomme ich $\lambda e_1 + \mu e_2$ dies ist aber wegen 1 gleich e_1, e_2. Daraus sieht man, dass es ausreicht, die Multiplication der Einheiten zu kennen, um die der genauen Theile anführen zu können.

II Hilfsatz: Es ist stets

$$(\gamma e_\alpha)\cdot(\delta e_\beta) = (\gamma\delta)(e_\alpha e_\beta) \text{ und}$$

$$\xi(\lambda e_1 + \mu e_2) = (\xi\lambda)e_1 + (\xi\mu)e_2$$

Um das erste nachzuweisen, schliessen wir so: kommt in γ das Element $\pm\frac{1}{g}$ und in δ $\pm\frac{1}{h}$ so kommt in γe_α u. δe_β resp. das Element $\pm\frac{e_\alpha}{g}$, $\pm\frac{e_\beta}{h}$. Da nun die allgemeinen Multiplicationsgesetze der gen. Zahlen bestehen sollen, so wird die Multiplication von $(\gamma e_\alpha)\cdot(\delta e_\beta)$ so ausgeführt werden müssen, dass man jedes Element der einen Zahl mit jedem Elemente der andern Zahl multiplicirt; dies gibt uns, was in dem Producte vorkommen wird.

$$\frac{(\pm e_\alpha)(\pm e_\beta)}{gh}$$

Untersuchen wir alle 4 Fälle so bekommen wir dies gleich

$(\pm\frac{1}{g}\cdot\pm\frac{1}{h})(e_\alpha e_\beta)$ Da dies für je 2 Elemente gilt, so gilt dies auch für das ganze Product. Um also die Multiplication ausführen zu können hat man zu untersuchen was

$\xi(e_\alpha e_\beta) - \xi(\lambda e_1 + \mu e_2)$ bedeutet, wo ξ eine beliebige Zahl bedeutet. Um dies zu unterscheiden denken wir uns ξ in die Elemente zerlegt. Kommt in ξ das Element $\frac{1}{g}$, so komt in $\xi(\lambda e_1 + \mu e_2)$ das Element $\frac{\lambda}{g} e_1 + \frac{\mu}{g} e_2$ da dies verg facht gleich ist $\lambda e_1 + n e_2$. Da dies nun für alle Elemente gilt, so hat man

$$\xi(\lambda e_1 + \mu e_2) = (\xi \lambda) e_1 + (\xi \mu) e_2$$

Wir haben somit folgende Sätze.

Wenn wir mit (α, β) Zahlen bezeichnen für die stets $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ ist, so haben wir die Sätze in den Formeln

$$e_i e_k = (i, k)_0 e_1 + (i, k)_2 e_2$$

1 a $$\frac{e_i}{m} \cdot \frac{e_k}{n} = \frac{(i\,k)_1}{mn} e_1 + \frac{(i, k)_2}{mn} e_2$$

2 a $$(\gamma e_i)(\delta e_k) = (\gamma \delta)(e_i e_k)$$

3 a $$\xi \cdot (\alpha e_1 + \beta e_2) = (\xi \alpha) e_1 + (\xi \beta) e_2$$

Wenn wir nun 2 Zahlen

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

$$b = \alpha' e_1 + \beta' e_2$$ multipliciren und die allgemeinen Multiplicationsgesetze festhalten, so bekommen wir mit Rücksicht auf 2^a

4 $$ab = (\alpha \alpha')(e_1 e_1) + (\beta \beta')(e_2 e_2) + (\alpha \beta' + \alpha' \beta)(e_1 e_2)$$

Setzt man für $e_1 e_1$, $e_2 e_2$ die Werthe aus 1. Seite so erhalten wir mit Rücksicht auch 3^a

5 $$ab = \left\{ \lambda \alpha \alpha' + \lambda' (\alpha \beta' + \alpha' \beta) + \lambda'' \beta \beta' \right\} e_1 + \left\{ \mu \alpha \alpha' + \mu' (\alpha \beta' + \alpha' \beta) + \mu'' \beta \beta' \right\} e_2$$

Die Multiplication zweier Zahlen unseres Gesetzes ist also möglich, sobald sie für die Elemente möglich ist, und das

Resultat der Multiplication ist wiederum eine Zahlengröße desselben Gebietes. Folglich ist die Multiplication überhaupt ausführbar. Auch sieht man sofort, daß $ab = b.a$, denn das Resultat 5 ist in Bezug auf $\alpha\beta\alpha'\beta'$ symmetrisch. Man überzeugt sich aber leicht, daß nicht immer wenn $\lambda\mu, \ldots$ willkürlich sind $a\,bc = ab\,c$ ist. Nun soll aber das Gesetz festgehalten werden. Zunächst kann man sehr leicht zeigen, daß dieses Gesetz für beliebige Zahlen besteht, wenn es für die Einheiten gilt. Nun ist wegen 1

$$e_1 e_1 e_2 = e_1 e_1 \cdot e_2 = \lambda e_1 e_2 + \mu e_2 e_2$$

$$e_1 e_2 e_1 = e_1 e_2 \cdot e_1 = \lambda' e_1 e_1 + \mu' e_2 e_1 \qquad 6$$

Hieraus ergibt sich

$$e_1 e_1 e_2 = \lambda(\lambda' e_1 + \mu' e_2) + \mu(\lambda'' e_1 + \mu'' e_2) \text{ oder}$$

$$e_1 e_1 e_2 = (\lambda\lambda' + \mu\lambda'')e_1 + (\lambda\mu' + \mu\mu'')e_2 \text{ und ebenso} \qquad 7$$

$$e_1 e_2 e_1 = (\lambda'\lambda + \mu'\lambda')e_1 + (\lambda'\mu + \mu'\mu)e_2 \qquad 8$$

Sollen die beiden Producte gleich sein, so muß

$$\mu\lambda'' = \mu'\lambda' \qquad 9$$

$$\lambda\mu' + \mu\mu'' = \lambda'\mu + \mu\mu'$$

Dies gibt uns eine Bedingung für die Größen $\lambda\mu \cdots$; Dasselbe müßte man für alle Combinationen von e_1, e_2 in 3 Elementen machen, und wir würden mehrere Bedingungsgleichungen erhalten, denen die Größen $\lambda\mu, ..$ genügen müssen, damit das Gesetz der Vertauschbarkeit der Factoren in dem Producte von 3 Zahlen bestehe. Aus diesen Gleichungen

würden wir die $\lambda\,\mu$ ganz allgemein finden können.
Aus der Vertauschbarkeit von 3 Factoren läßt sich leicht das Gesetz der Vertauschbarkeit bei beliebig vielen Factoren herleiten. Wir wollen aber einen andern Weg einschlagen.
Nachdem wir nach Einführung der Einheiten e_1, e_2 und ihrer entgegengesetzten die Möglichkeit der Multiplication aller Zahlengrößen nachgewiesen haben, können wir uns die Frage aufwerfen, ob auch die Division immer möglich ist, oder wie müssen die Einheiten beschaffen sein, damit die Division möglich ist.
Es seien die beiden Zahlen

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2$$

$$b = \alpha' e_1 + \beta' e_2,$$ da die Division möglich sein soll, so muß vor Allem das Resultat der Division wiederum eine Zahl sein, die sich in unserem Zahlengebiete vorfindet. Wir wollen ansetzen

10 $$\frac{a}{b} = \alpha'' e_1 + \beta'' e_2;$$ dann muß

$$a = b\,(\alpha'' e_1 + \beta'' e_2)$$ sein oder

$$a = \left\{\lambda \alpha' \alpha'' + \lambda' (\alpha' \beta'' + \alpha'' \beta') + \lambda'' \beta' \beta''\right\} e_1$$

11 $$+ \left\{\mu \alpha' \alpha'' + \mu' (\alpha' \beta'' + \beta' \alpha'') + \mu'' \beta' \beta''\right\} e_2 = \alpha e_1 + \beta e_2$$

und hieraus folgt

$$\alpha = (\lambda \alpha' + \lambda' \beta')\alpha'' + (\lambda' \alpha' + \lambda'' \beta')\beta''$$

12 $$\beta = (\mu \alpha' + \mu' \beta')\alpha'' + (\mu' \alpha' + \mu'' \beta')\beta''$$

Nun sind gegeben $\alpha\,\beta\,\alpha'\,\beta'$ und man kann im Allgemeinen

$\alpha'' \beta''$ finden. Dazu, daß dies möglich sei, ist erforderlich, daß die Determinante 12 nicht identisch Null ist. Soll nun jede Zahl mit Ausnahme von Null die Rolle des Divisor spielen können, so muß man hinzufügen, daß die quadratische Form, die Determinante von 12, nie Null sein kann. Alsdann ist die Division stets möglich, nur dann nicht, wenn der Divisor gleich Null ist. Die obige Bedingung kann aber wirklich erfüllt werden durch passende Wahl der Zahlen λ μ.
Unter der Voraussetzung, daß λ μ .. so bestimmt sind, gibt es in dieser Theorie eine Zahl, welche dieselbe Rolle spielt, wie die Zahl 1. d. h. eine Zahl mit der man jede Zahl multiplicieren kann, ohne sie zu ändern ($a . 1 = a$). Wenn es eine solche Zahl gibt $b = \alpha' e_1 + \beta' e_2$, so daß immer wenn

$a = \alpha e_1 + \beta e_2$ $\quad a . b = a$ so erhalten wir zunächst

$\alpha = (\lambda \alpha' + \lambda \beta')\alpha + (\lambda' \alpha' + \lambda'' \beta')\beta$

$\beta = (\mu \alpha' + \mu \beta')\alpha + (\mu' \alpha' + \mu'' \beta')\beta$ und dies soll für beliebiges $\alpha \beta$ gelten, woraus die Relationen folgen

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda' \alpha' + \lambda' \beta' \\ 1 &= \mu' \alpha' + \mu'' \beta' \\ 0 &= \lambda' \alpha' + \lambda'' \beta' \\ 0 &= \mu \alpha' + \mu' \beta' \end{aligned} \qquad 14$$

Nun ist klar, daß eine solche Zahl existiert. Denn nach der Division ist $\frac{b'}{b'}$ eine existierende Zahl. Diese Zahl hat aber die Eigenschaft, daß

$$a \cdot \frac{b'}{b'_1} = a \text{ denn es ist}$$

$$a\left(b'\frac{b'}{b'_1}\right) = \alpha b'$$

Wenn ich $\frac{b'}{b'_1} = \alpha' e_1 + \beta' e_2$ setze, so müssen für $\alpha'\beta'$ die Gleichungen 14 existiren. Aus den letzten beiden Gleichungen in 14 erhalten wir aber

$$\alpha' = \mathfrak{z}\lambda''$$

15 $$\beta' = -\mathfrak{z}\lambda' \text{ und}$$

$$\alpha' = \mathfrak{z}'\mu$$

$$\beta' = \mathfrak{z}'\mu'$$ wo $\mathfrak{z}\mathfrak{z}'$ beliebig sind. Setzen wir dies in die beiden 1ten Gleichungen in 14 ein, so erhalten wir folgende Relationen:

$$1 = \mathfrak{z}(\lambda\lambda'' - \lambda'\lambda')$$

$$1 = \mathfrak{z}'(\mu\mu'' - \mu\mu'')$$

Da nun diese Relationen möglich sind, so existirt eine Größe von der verlangten Eigenschaft, daß sie die Zahl nicht ändert, wenn man letztere mit ihr multiplicirt.

Diese Zahl wollen wir mit ε bezeichnen.

III Hilfsatz: Wenn wir

$$\mathfrak{z}_1 = \gamma e_1 + \gamma' e_2$$

$$\mathfrak{z}_2 = \delta e_1 + \delta' e_2$$ setzen mit der Bedingung daß $\begin{vmatrix}\gamma & \delta \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix}$ von Null verschieden ist, so kann ich jede Zahlengröße unseres Gebietes auch durch $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ ausdrücken. Aus der Gleichung 16 kann ich nämlich e_1, e_2 herleiten. Denn multiplicire ich die beiden Gleichungen resp mit ε_1 u ε_1' und add.

dire sie, so folgt

$$\xi\eta_1 + \xi\eta_2 = (\xi\gamma+\xi'\delta)e_1 + (\xi\gamma'+\xi'\delta')e_2 \qquad 17$$

Nun kann ich da $\begin{vmatrix}\gamma & \delta \\ \gamma' & \delta'\end{vmatrix} \gtrless 0$, ξ u. ξ' so bestimmen, daß

$$\xi\gamma+\xi'\delta=1 \qquad 18$$

$\xi\gamma'+\xi'\delta'=0$ Auf die Weise bestimmt sich e_1 und ebenso e_2. Ich kann also e_1, e_2 durch η_1, η_2; also auch kann ich jede Zahl durch η_1, η_2 ausdrücken. Wir können also diese Zahlen $\eta_1\ \eta_2$ als Einheiten gelten laßen.

Nun haben wir eine ausgezeichnete Zahl unseres Zahlengebietes gefunden, die wir mit ε bezeichneten. Diese Zahl wollen wir als die Einheit einführen. Die zweite Einheit wollen wir mit ε' bezeichnen. Für diese Einheiten haben wir die Multiplicationsgesetze

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$$

$$\varepsilon\varepsilon' = \varepsilon'\varepsilon = \varepsilon' \qquad 19$$

$$\varepsilon'\varepsilon' = \lambda\varepsilon + \mu\varepsilon'$$

Nach Einführung dieser Einheit ε' und irgend einer andern, werden sich die Multiplicationsgesetze vereinfachen. Hierbei ist zu bemerken, daß λ u. μ nicht ganz willkürlich sind, sondern den Bedingungen des Hilfsatzes III gemäß, gewählt werden müßen. Aus 19 folgt nun weiter

$$\varepsilon'\varepsilon' - \mu\varepsilon' = \lambda\varepsilon \text{ und hieraus}$$

$$\left(\varepsilon' - \frac{\mu}{2}\varepsilon\right)^2 = \left(\lambda + \frac{\mu^2}{4}\right)\varepsilon = \rho\varepsilon. \qquad 20$$

wo $\rho = \lambda + \frac{\mu^2}{4}$ ich kann aber auch andere Einheiten einführen, indem ich setze

$$\varepsilon = \varepsilon$$

21 $$\varepsilon'' = \varepsilon' - \frac{\mu}{2}\varepsilon$$

Wenn die Multiplicationsregeln möglich sind, so ist auch ε'' möglich. Für diese Einheiten ε u ε'' gestalten sich dann die Multiplicationsgesetze so.

22. $$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon \qquad \varepsilon\varepsilon'' = \varepsilon''\varepsilon = \varepsilon'' \qquad \varepsilon''\varepsilon'' = \rho\varepsilon.$$

Was die Zahl ρ anbetrifft, so können wir leicht zeigen, daß sie negativ sein muß, wenn wir verlangen, daß in unserem Zahlengebiete auch die Wurzelausziehung allgemein bestehen soll. Wenn wir nämlich verlangen, eine Zahl x, so daß ihr Quotient gleich $-\varepsilon''$ sein soll, so haben wir daß $x = \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon''$ zu setzen ist

23 $$(\alpha\varepsilon + \beta\varepsilon'')^2 = \alpha^2\varepsilon + 2\alpha\beta\varepsilon'' + \beta^2\rho\varepsilon = -\varepsilon''$$

Diese Gleichung wird erfüllt, dadurch daß man setzt.

24 $$\alpha^2 + \beta^2\rho = 0 \qquad 2\alpha\beta = -1$$

wo α β reelle Zahlen (aus $+1$ -1) zusammengesetzt) sind. Wäre ρ positiv, so könnte die Gleichung $\alpha^2 + \beta^2\rho = 0$ nur durch $\alpha = 0$ $\beta = 0$ befriedigt werden, was aber gegen die zweite Gleichung $2\alpha\beta = -1$ widerspricht. Es muß also ρ negativ sein.

Wir können weiter die Einheiten ε, i einführen, indem wir

$$\varepsilon = e$$

$$\varepsilon'' = \sqrt{-g}\, i \text{ setzen.}$$ 25

Für diese Einheiten gestalten sich die Multiplicationsgesetze folgendermaßen

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon$$

$$\varepsilon i = i\varepsilon = i$$ 26

$$i i = -\varepsilon$$

Wenn es also möglich ist, die λ u. μ in 1 so zu bestimmen, daß die Multiplication allgemein möglich ist, so gibt es in unserm Zahlengebiete zwei Zahlen ε u. i, für welche sich die einfachen Multiplicationsgesetze 26 ergeben. Führt man diese Zahlen als Einheiten, so hat man in 26 die Gausische Definition der Multiplication der Einheiten. Hätte man andere Multiplicationsgesetze der Einheiten aufgestellt, so würde das eine einfache Coordinaten Verwandlung bedeuten. Wenn man die Multiplicationsgesetze am einfachsten haben will, so wird man mit Nothwendigkeit auf die Gausische Definition geführt. Verstehen wir unter α, β ~~reelle~~ Zahlen, welche aus der Einheit ± 1 gebildet werden, so wird sich jede Zahl unseres Gebietes darstellen in der Form

$$\alpha + \beta i$$

Zum Schlusse dieser Theorie machen wir auf den Satz aufmerksam, daß wenn a b zwei Zahlen unseres Gebietes bedeuten, deren Product $a . b = 0$, so muß wenigstens eine derselben Null sein. Denn wenn

$$a = \alpha + \beta i$$

$$b = \alpha' + \beta' i \text{ ist und}$$

$a . b = (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = 0$ sein soll, so muß

$$\alpha \alpha' - \beta \beta' = 0$$

$$\alpha \beta' + \alpha' \beta = 0$$

Hieraus folgt leicht

$$(\alpha\alpha' - \beta\beta')^2 + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha'^2 + \beta'^2) = 0$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

II

Theorie der complexen Zahlen, die aus beliebig vielen Einheiten gebildet werden.

Ebenso wie wir durch Nothwendigkeit gezwungen, Zahlengrößen haben einführen müssen, die aus 2 Einheiten ε, i, und den entgegengesetzten $-\varepsilon$ $-i$, als auch aus genannten Theilen derselben gebildet werden, so können wir uns beliebig viele Einheiten e_1 $e_2 \ldots e_n$ und ihre entgegengesetzten denken, und aus ihnen complexe Zahlen bilden. Verstehen wir unter α β reelle, aus einer Haupteinheit gebildete Zahlen und unter αe_1 dasjenige was aus α wird, wenn man überall, statt der unbenannten Einheit, die Einheit e_1 einsetzen, so können wir jede Zahl dieses Gebietes auf die Form bringen.

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots\dots + \alpha_n e_n \qquad 1$$

Daß für diese Zahlen die Addition und Subtraction möglich ist, folgt ohne weiteres, aus der Definition dieser Operationen. (Die <u>Einheiten</u> $e_1 \dots e_n$ müssen in Bezug auf die Addition von einander unabhängig gedacht werden.)

Nun soll auch die Multiplication dieser Zahlen möglich sein, und die Multiplicationsgesetze sollen dieselben bleiben, wie bei den aus positiver Einheit gebildeten Zahlen, nämlich

$$ab = b \cdot a$$

$$abc = acb \qquad 2.$$

$$(a \pm b)\,c = ac \pm bc$$

Wenn wir nun 2 Zahlen haben

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

$$b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n \quad \text{und sie} \qquad 3$$

nach den allgemeinen Multiplicationsregeln multipliciren, so erhalten wir mit Rücksicht auf die Sätze 1^a, 2^a, 3^a Seite welche allgemein gültig sind:

$$a\,b = \sum_{\varkappa,\mu} (\alpha_\varkappa \beta_\mu)(e_\varkappa e_\mu)$$

Hieraus sehen wir also, daß man die Gesetze der Multiplication der Einheiten nöthig hat. Nehmen wir nun zwei beliebige $e_\varkappa$ und e_μ, so muß ihr Product wiederum sich in unserm Zahlengebiete vorfinden, so daß wir setzen können.

12 $$\alpha_i = \sum_\mu \beta_\mu (\mu,1)_i \gamma_1 + \sum_\mu \beta_\mu (\mu,2)_i \gamma_2 + \dots + \sum_\mu \beta_\mu (\mu,n)_i \gamma_n \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ist aber im Allgemeinen nur dann möglich, wenn die Determinante der Coefficienten von $\gamma_1, \dots \gamma_n$ in 12 nicht verschwindet. Dies gibt uns eine Beschränkung der Größen $(\mu,\nu)_i$. Nun ist $\frac{a}{a}$ offenbar eine Zahl, die die Eigenschaft hat, daß $\frac{a}{a} \cdot b = b$ ist; auch sieht man, daß das Resultat von a unabhängig ist, d. h. daß

$$\frac{a}{a} = \frac{a'}{a'} \text{ da ja } a \cdot a' \left(\frac{a}{a}\right) = a \cdot a' \cdot \left(\frac{a'}{a'}\right) \text{ ist.}$$

Unter der Voraussetzung, daß die Coefficienten $(\mu,\nu)_i$ der oben ausgesprochenen Bedingung gemäß gewählt werden, ist $\frac{a}{a}$ eine existente Zahl, die die Eigenschaft hat, daß sie eine andere Zahl nicht ändert, wenn man sie mit ihr multiplicirt. Um die Bedingung dafür aufzustellen, setzen wir in 10 $\beta = \alpha$ und ordne die Coefficienten nach α; das Resultat muß von α unabhängig sein, so daß die Coefficienten der α identisch Null sein müssen. Wir setzen nun

13 $$\frac{a}{a} = \varepsilon_0 = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$$ Jetzt nehme ich andere Zahlen $\varepsilon_1 = \gamma_1' e_1 + \dots + \gamma_n' e_n$ wo die γ's willkürlich sind und leite daraus

$$\varepsilon_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1^2 = \gamma_1'' e_1 + \dots + \gamma_n'' e_n$$ wo die $\gamma_1'' \dots$ Functionen der $\gamma_1' \dots$ sind. Ebenso kann ich bilden

$$\varepsilon_1^3 = \gamma_1''' e_1 + \dots + \gamma_n''' e_n$$

. . . .

$$e_1^{n-1} = \gamma_1^{(n-1)} e_1 + \dots + \gamma_n^{(n-1)} e_n$$

Ich bekomme auf diese Weise die Gleichungen

$$\varepsilon_0 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n$$

$$\varepsilon_1 = \gamma_1' e_1 + \gamma_2' e_2 + \dots + \gamma_n' e_n \qquad 14$$

$$e^2 = \gamma_1'' e_1 + \gamma_2'' e_2 + \dots + \gamma_n'' e_n$$

. . . .

$$\varepsilon_1^{n-1} = \gamma_1^{(n-1)} e_1 + \gamma_2^{(n-1)} e_2 + \dots + \gamma_n^{(n-1)} e_n$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen können wir die e's durch die ε's ausdrücken sobald die Determinante nicht null ist, was man stets erreichen kann, da die $\gamma_1' \dots \gamma_n'$ willkürlich sind. Ich kann somit die Größen $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_1^{n-1}$ als Einheiten gelten lassen und wenn ich allgemein

$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_1^\lambda$ setze, und als Definition

$\varepsilon_1^0 = \varepsilon_0$ so gilt dann für diese Einheiten das Multiplicationsgesetz

$$\varepsilon_\lambda\, \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\lambda+\mu} \qquad 15$$

Denn wenn

1) $\lambda = 0$ $\mu = 0$ so ist $\varepsilon_0 . \varepsilon_0 = \varepsilon_0$

2) $\lambda = 0$ $\mu \gtrless 0$ so ist $\varepsilon_0\, \varepsilon_\mu = \varepsilon_\mu$

3) $\lambda \gtrless 0$ $\mu = 0$ „ „ „ $\varepsilon_\lambda\, \varepsilon_0 = \varepsilon_\lambda$

4) $\lambda \gtrless 0$ $\mu \gtrless 0$ „ „ ε_λ das Product von λ Factoren ε_1 und ε_μ das Product von μ Factoren ε_1 also $\varepsilon_\lambda\, \varepsilon_\mu$ das Product von $\lambda + \mu$ Factoren ε_1 d. h. $= \varepsilon_{\lambda+\mu}$.

Das Gesetz 15 geht bis in's Unendliche, es lassen sich aber die

4 $$e_\lambda e_\mu = (\lambda,\mu)_1 e_1 + (\lambda,\mu)_2 e_2 + \dots + (\lambda,\mu)_n e_n$$

wo $(\lambda\mu)_\nu$ reelle Zahl bedeutet, gebildet aus einer Haupteinheit, die aber wegen des ersten Gesetzes, in 2 der Bedingung genügen muss, dass

5 $$(\lambda,\mu)_\nu = (\mu,\lambda)_\nu$$

Setzen wir in 3 den Werth 4 ein, so erhalten wir

6 $$ab = \sum_{\lambda\mu\nu} (a_\lambda b_\mu)(\lambda,\mu)_\nu e_\nu$$

Wenn also die Multiplication möglich ist, so muss sich das Resultat 6 ergeben, wo $(\lambda,\mu)_\nu$ vorläufig unbestimmt ist. Was die Gesetze 2 anbetrifft, so ist klar, dass das 3te Gesetz unbedingt erfüllt ist; das 1te Gesetz ist erfüllt, sobald 5 besteht. Das 2te Gesetz ist aber nicht immer erfüllt. Nun kann man leicht zeigen, dass dasselbe für beliebige Zahlen besteht, sobald es für die Einheiten gilt. Man müsste also, um das zweite Gesetz aufrecht zu erhalten, die Bedingung hinzufügen, dass

$$e_\lambda e_\mu e_\nu = e_\lambda e_\nu e_\mu$$

Man müsste also alle Producte von den n Einheiten zu je 3en bilden, und alsdann würden wir für die Zahlen (λ,μ) Relationen finden. Es ist aber mit grossen Schwierigkeiten verbunden die Grössen $(\lambda\mu)$ auf diesem Wege zu bestimmen, schlagen wir daher einen andern Weg ein.

Wenn wir setzen

7 $$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \alpha_1^{(1)} e_1 + \dots + \alpha_n^{(1)} e_n \\ \varepsilon_2 &= \alpha_1^{(n)} e + \dots + \alpha_n^{(n)} e_n \end{aligned}$$

mit der Bedingung, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \dots & \alpha_n^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \dots & \alpha_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{(n)} & \alpha_2^{(n)} & \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix} \qquad 8$$

nicht verschwindet, so können wir die $e_1 \dots e_n$ durch die Größen $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n$ ausdrücken, und es ist leicht zu zeigen, daß alsdann jede Zahl unseres Gebietes sich auch durch die Größen $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ ausdrücken läßt. Man kann also solche n Größen, die den Bedingungen 7, 8 genügen auch als Einheiten gelten lassen. Wir wollen nun an die Stelle von $e_1 \dots e_n$ solche Einheiten ε einführen, für die sich die Multiplicationsgesetze am einfachsten gestalten.

Zunächst verlangen wir von unsern Größen, daß für sie die Division im Allgemeinen möglich sei. Wenn nun

$$a = \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda e_\lambda$$

$$b = \sum_{\mu=1} \beta_\mu e_\mu \text{ ist, so muß} \qquad 9$$

$$\frac{a}{b} = c = \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu e_\nu \text{ sein, oder da } a = bc,$$

so erhalten wir hieraus mit Rücksicht auf (6)

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda = \sum_\mu \beta_\mu e_\mu \sum_\nu \gamma_\nu e_\nu = \sum_{\mu,\nu} (\beta_\mu \gamma_\nu)(e_\mu e_\nu) \text{ oder}$$

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda e_\lambda = \sum_{\lambda,\mu,\nu} (\beta_\mu \gamma_\nu)(\mu\nu)_\lambda e_\lambda. \qquad 10$$

Soll diese Gleichung bestehen, so muß für jeden Werth von λ die Gleichung bestehen,

$$\alpha_\lambda = \sum_{\mu\nu} (\beta_\mu \gamma_\nu)(\mu, \nu)_\lambda \qquad 11$$

Aus diesen Gleichungen kann ich die γ's herleiten, es ist nämlich

ε, bei welchen der Index größer ist, als $(n-1)$ reduciren d. h. durch die n ε, $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n-1}$ ausdrücken, Denn haben wir

16 $$\varepsilon_1^n = \gamma_1^{(n)} e_1 + \gamma_2^{(n)} e_2 + \dots + \gamma_n^{(n)} e_n$$ und setzen wir hierin für $e_1 \dots e_n$ die Werthe aus dem System 14, so erhalten wir

17 $$\varepsilon_1^n + g_1 \varepsilon_1^{n-1} + g_2 \varepsilon_1^{n-2} + \dots + g_n \varepsilon_0 = 0 \text{ oder}$$

18 $$\varepsilon_n + g_1 \varepsilon_{n-1} + g_2 \varepsilon_{n-2} + \dots + g_n \varepsilon_0 = 0$$ so daß sich hieraus ε_n durch ε_{n-1}, ε_0 ausdrücken läßt, dies geht auch weiter, denn wir erhalten aus 18

19 $$\begin{aligned} &\varepsilon_{n+1} + g_1 \varepsilon_n + g_2 \varepsilon_{n-1} + \dots + g_n \varepsilon_1 = 0 \\ &\varepsilon_{n+2} + g_1 \varepsilon_{n+1} + g_2 \varepsilon_n + \dots + g_n \varepsilon_2 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

und mittelst dieser Formeln kann man die ε's mit höheren Index als $(n-1)$ reduciren.

Jetzt ist es leicht zu zeigen, wie die Multiplication auszuführen ist, und daß die allgemeinen Gesetze bestehen bleiben, womit wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Es sei $$a = \alpha_0 \varepsilon_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_{n-1} \varepsilon_{n-1}$$
$$b = \beta_0 \varepsilon_0 + \beta_1 \varepsilon_1 + \dots + \beta_{n-1} \varepsilon_{n-1}$$ so erhalten wir nach der allgemeinen Regel

20 $$ab = \sum (\alpha_\nu \beta_\mu)\, \varepsilon_{\nu+\mu}$$

wo man die ε's reduciren muß. Um die Methode zu zeigen nach der man die Multiplication, Reduction ausführen kann, zu zeigen, wenden wir ein Verfahren an, welches uns alle diese Operationen vermittelst der gewöhnlichen Arithmetik auszuführen erlaubt.

Wenn wir eine Zahl $a = \alpha_0 \varepsilon_0 + \alpha_1 \varepsilon_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \varepsilon_{n-1}$ haben, so bilden wir uns eine ganze Function von einer Variablen s auf die Weise, dass wir jedes ε_ν durch s^ν ersetzen.

$$\varphi(s) = \alpha_0 s^0 + \alpha_1 s^1 + \cdots + \alpha_{n-1} s^{n-1} \qquad (21)$$

Diese Function nennen wir die zu der Zahl a gehörige Function und bezeichnen sie durch $\varphi(s)\,\psi(s)\ldots$; insbesondere bezeichnen wir mit $\vartheta(s)$ diejenige Function, welche mit

$$\varepsilon_n + g_1 \varepsilon_{n-1} + \cdots + g_n \varepsilon_0$$ in Verbindung steht, also

$$\vartheta(s) = s^n + g_1 s^{n-1} + g_2 s^{n-2} + \cdots + g_n s^0 \qquad (22)$$

Diese letzte Function hat die Eigenschaft, dass wenn man in ihr s^ν durch ε_ν ersetzt, sie zu Null wird, was wir so bezeichnen

$$\vartheta(\varepsilon) \equiv 0 \qquad (23)$$

Zunächst wollen wir zeigen, wie wir mittelst dieser Functionen ε_ν, wo $\nu > (n-1)$ reduciren kann auf die ε mit kleineren Indicibus. Wenn wir $m \geqq n$ annehmen, dann können wir in der gewöhnlichen Arithmetik uns bewegend eine ganze Function $\mathfrak{X}(s)$ finden, so dass

$$s^m - \vartheta(s)\mathfrak{X}(s) = \varphi_1(s) \qquad (24)$$

und $\varphi_1(s)$ vom niedrigeren als dem $n$ten Grade ist. Denn wenn $\vartheta(s)$ eine ganze Function vom $n$ten Grade bedeutet, und $f(s)$ eine ganze Function vom höheren Grade, so ist es allgemein möglich eine ganze Function $\mathfrak{X}(s)$ zu finden, so dass

$f(s) - D(s)\,\mathfrak{X}(s) = f_1(s)$ vom niedrigeren als dem n^{ten} Grade ist und zwar ist dies auf eine einzige Weise möglich. Führe ich nun die Rechnung 24 aus, so habe ich

25 $$s^m = D(s)\,\mathfrak{X}(s) + \varphi_1(s)$$

Ersetzen wir nun das s^ν durch ε_ν so erhalten wir da $D(\varepsilon) \equiv 0$.

26 $$\varepsilon_m = \varphi_1(\varepsilon)$$ wo $\varphi_1(\varepsilon)$ dasjenige bedeutet, was aus $\varphi_1(s)$ wird, wenn man jedes s^ν durch ε_ν ersetzt. Denn ersetze ich in $25^{\sim}$ rechts s durch ε, so habe ich $D(\varepsilon)\,\mathfrak{X}(\varepsilon) + \varphi_1(\varepsilon)$ zu bilden. dies bewirke ich, indem ich ein beliebiges Glied aus $D(\varepsilon)$ z. B. $g_\lambda\,\varepsilon_\lambda$ nehme, und dieses mit jedem beliebigen Gliede aus $\mathfrak{X}(\varepsilon)$ multiplicire und dann das Aggregat zu $\varphi_1(\varepsilon)$ addire. Wenn ich dasselbe mit $D(s)\,\mathfrak{X}(s) + \varphi_1(s)$ ausführe, so bekomme ich hier $s^{\lambda+\mu}$ so wie ich oben $\varepsilon_{\lambda+\mu}$ erhalten habe. Ich erhalte also

$$D(\varepsilon)\,\mathfrak{X}(\varepsilon) + \varphi_1(\varepsilon) = \varepsilon_m \text{ oder wegen } D(\varepsilon) \equiv 0$$

$$\varepsilon_m = \varphi_1(\varepsilon)$$

Nun enthält φ_1 nur $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1}$, da es vom Grade $< n$ ist, also habe ich hiermit ε_m reducirt. Die Regel zur Reduction von ε_m wo $m \geqq n$ ist, ist also folgende

$$\frac{s^m}{D(s)} = \mathfrak{X}(s) + \frac{\varphi_1(s)}{D(s)}$$ d. h. man dividire s^m durch die Function $D(s)$, so gibt mir der Rest $\varphi_1(s)$ die Reductionsformel. Diese Regel gilt auch für ein beliebiges Aggregat von den Grössen ε_μ. Es sei $f(\varepsilon)$ das Aggregat, worin sich die ε bis zu jedem beliebigen Index vorfinden mögen. Ich setze

$$f(s) = D(s)\,\mathfrak{X}(s) + f_1(s)$$ wo $f_1(s)$ vom niedrigeren als

dem n^{ten} Grade ist. Nun führe ich die Rechnung mit

$\vartheta(\varepsilon)\,\mathfrak{X}(\varepsilon) + f_1(\varepsilon)$ aus, so geht daraus unmittelbar hervor, daß ich erhalte da $\vartheta(\varepsilon) = 0$

$$f(\varepsilon) = f_1(\varepsilon)$$ und dies

ist die allgemeine Formel zur Reduction eines Aggregates von 27

$\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n \ldots$ Nun können wir die Multiplication ebenfalls ausführen. Wenn wir nämlich a_1 mit b zu multipliciren haben, so ersetze ich $a_1\,b$, durch die zugehörigen Functionen resp $\varphi(\rho)\,\psi(\rho)$ und bilde das Product

$\varphi(\rho)\,\psi(\rho)$ welches in Bezug auf ρ vom höheren 28

als dem $(n-1)^{ten}$ Grade ist. Ich reducire dann die Formel indem ich setze

$$\frac{\varphi(\rho)\,\psi(\rho)}{\vartheta(\rho)} = \mathfrak{X}(\rho) + \frac{f(\rho)}{\vartheta(\rho)} \text{ oder}$$

$$\varphi(\rho)\,\psi(\rho) = \vartheta(\rho)\,\mathfrak{X}(\rho) + f(\rho) \text{ wo } f(\rho) \qquad 29$$

vom niedrigeren als dem n ten Grade ist. Dasselbe denke ich mir gemacht aus

$$\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon) = \mathfrak{X}(\varepsilon)\,\vartheta(\varepsilon) + f(\varepsilon) \text{ und hieraus folgt}$$

$$\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon) = f(\varepsilon) \qquad 30.$$

Man sieht, daß jeder Rechnung mit den Functionen $\varphi(\iota)$ eine entsprechende Rechnung mit den Einheiten zur Seite steht.

Das Resultat ist also: Wenn es überhaupt möglich ist für die Einheiten $e_1 \ldots e_n$ ein Multiplicationsgesetz aufzustellen, so giebt es in dem Gesetze solche Größen

$\varepsilon_0\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots$ in inf. für die das Gesetz der Multiplication ausgesprochen wird in der Formel

$$\varepsilon_\lambda \cdot \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\lambda+\mu}$$

wo man alsdann jedes ε mit einem Index $> (n-1)$ reduciren kann auf $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n-1}$. Alsdann gestaltet sich die Multiplication für beliebige 2 Größen a b so: man ersetze a, b resp durch $\varphi(s)$, $\psi(s)$ addire das Product $\varphi(s) . \psi(s)$ durch $\vartheta(s)$ und suche den Rest $f(s)$ der vom niedrigeren als dem n^{ten} Grade ist. Alsdann ist

$$\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

Daß die Grundgesetze der Multiplication bestehen bleiben, ergibt sich sofort. Besonders wollen wir zeigen daß

$a . b = b . a$, und $abc = acb = \dots$ ist.

Für's erste sei $a = \varphi(\varepsilon)$

$b = \psi(\varepsilon)$ so haben wir zunächst

31 $\varphi(s)\,\psi(s) = \psi(s)\,\varphi(\varepsilon)$ und daraus

$\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon$ oder

32 $a \cdot b = b\, a$

Zweitens sei

$a = \varphi(\varepsilon)$

33 $b = \varphi_1(\varepsilon)$

$c = \varphi_2(\varepsilon)$ Zunächst haben wir nach der Regel

34 $\varphi(s) . \varphi(s) = \chi(s)\,\vartheta(s) + f(s)$ und ferner ist zu bilden

35' $f(s)\,\varphi_2(s) = \chi_1(s)\,\vartheta(s) + f_1(s)$ und aus 34 35' folgt

36 $\varphi(\varepsilon)\,\varphi_1(\varepsilon)\,\varphi_2(\varepsilon) = f_1(\varepsilon)$. Nun erhalte ich aus 34

$\varphi(s)\,\varphi_1(s)\,\varphi_2(s) = \chi(s)\,\varphi_2(s)\,\vartheta(s) + \chi_1(s)\,\vartheta(s) + f_1(s)$

$= \chi_2(s)\,\vartheta(s) + f_1(s)$ d. h. ich bekomme $f_1(s)$ indem ich $\varphi(s)\varphi_1(s)\varphi_2(s)$ durch $\mathfrak{D}(s)$ addire und den Rest bilde. Nun erhalten wir offenbar denselben Rest, wenn wir dieselbe Operation mit $\varphi(s)\varphi_2(s)\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)\varphi(s)\varphi_1$ u. s. w. vornehme, da ja

$$\varphi\varphi_2\varphi_1 = \varphi\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi\varphi_1 \text{ u. s. w. und hieraus folgt.}$$

$$\varphi(\varepsilon)\varphi_1(\varepsilon)\varphi_2(\varepsilon) = \varphi_2(\varepsilon)\varphi(\varepsilon)\varphi_1(\varepsilon) = \varphi_2(\varepsilon)\varphi_1(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) = \dots \qquad 37$$

Wir sehen also, daß wir aus n Haupteinheiten complexe Größen bilden können, für die die Gesetze der Addition, Subtraction und Multiplication bestehen, wie sie bei den gewöhnlichen Zahlen sind.

Nun gehen wir zu der Division über und untersuchen, ob sie möglich ist. Wenn wir $\frac{a}{b} = \frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)}$ bilden wollen, so heisst dies in unserem Gebiete eine Zahl $c = f(\varepsilon)$ zu finden, so daß

$$a = b \cdot c \text{ oder } \varphi(\varepsilon) = \psi(\varepsilon) f(\varepsilon) \text{ sei} \qquad 38$$

Angenommen wir hätten $f(\varepsilon)$, so muß

$$\psi(s) \cdot f(s) = \mathfrak{X}(s)\mathfrak{D}(s) + \varphi(s) \text{ sein, oder es muß} \qquad 39$$

$$\psi(s) f(s) - \varphi(s) = \mathfrak{X}(s)\mathfrak{D}(s) \qquad 40$$

Es muß also $f(s)$ so beschaffen sein, daß die linke Seite von 40 durch $\mathfrak{D}(s)$ theilbar sei. Die Möglichkeit der Division unserer Zahlengrößen ist also reducirt auf die Frage der Theilbarkeit der Functionen. Soll aber eine ganze Function durch eine andere ganze Function theilbar sein, so ergibt dies eine Anzahl von Bedingungsgleichungen. Hieraus sehen wir, daß die Division unserer Zahlengrößen im Allgemeinen nur unter gewissen Bedingungen möglich sein wird. Um diese Frage vollständig zu erledigen, erwähnen wir einige Sätze aus der Theorie der ganzen Functionen.

I <u>Hilfsatz</u>. Wenn A u. B 2 beliebige ganze Functionen sind, ohne einen gemeinschaftlichen Theiler; so kann man stets 2 andere C u. D finden, so daß

41 $$AC + BD = 1 \text{ ist}$$

II <u>Hilfsatz</u>. Wenn A, B, C drei gegebene ganze Functionen sind, und zwar A u. B ohne einen gemeinschaftlichen Theiler, so kann man C u. D so bestimmen, daß

42 $$AC + BD = E \text{ ist}$$

Denn unter den gemachten Bedingungen können wir nach I C' D' so bestimmen, daß

43 $$AC' + BD' = 1$$

und hieraus folgt

44 $$A\{C - C'E\} = -B\{D - D'E\}$$

Da A u. B relativ prime sind, so kann die Gleichung befriedigt werden durch

45 $$C - C'E = B \cdot G$$
$$D - D'E = -A \cdot G,$$ wo G willkürliche ganze Function ist. Daraus folgt

46 $$C = C'E + BG$$
$$D = D'E - AG$$ als Lösung der Gleichung 42

Denn es ist

$$AC + BD = \{AC' + BD'\}E + ABG - ABG$$ und wegen 43

$$A\, C + B'' D = E.$$

III Zusatz. Man kann unter den obigen Bedingungen C stets so bestimmen, daß die Gleichung 42 besteht und C vom niedrigeren Grade ist als B''. Denn wenn C vom höheren oder demselben Grade ist wie B'', so kann ich setzen

$C = B'' . B' + C_1$ wo C_1 vom niedrigeren 47

Grade ist als B''. Alsdann haben wir

$$A C + B'' D = A B'' B' + A C_1 + B'' D =$$
$$A C_1 + B'' (D + A B') = E$$

und dies gibt mit die Lösung der Aufgabe, so daß $C = C_1$ vom niedrigeren Grade ist als B''.

IV Zusatz. Wenn A u. B'' einen gemeinschaftlichen Theiler haben, so ist die Aufgabe II nur dann möglich, wenn E denselben Theiler gemein hat. Wenn dies der Fall ist, so erhalten wir aus

$$A C + B'' d = E$$

$$A_1 C + B''_1 D = E_1,$$ wo A_1 B_1 keinen Theiler mehr gemein haben, und die letzte Gleichung ist zu befriedigen, woraus sich dann die erste Gleichung ergibt.

Kehren wir nun zu unserer Frage zurück. Die Möglichkeit der Division für $\frac{\varphi(\varepsilon)}{\psi(\varepsilon)} - f(\varepsilon)$ führte uns auf die Gleichung 40

$$\psi(s) f(s) - \chi(s) \vartheta(s) = \varphi(s) \qquad 49$$

Gegeben sind hier $\psi(s)$ $\vartheta(s)$ $\varphi(s)$ und gesucht $f(s)$, $\chi(s)$ so daß die Gleichung 49 besteht. Wenn die Functionen $\psi(s)$ u. $\vartheta(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so kann man $f(s)$ u. $\chi(s)$ der Gleichung 49 gemäß (wegen II) bestimmen. Hieraus folgt, daß die Division stets möglich ist, sobald die Functionen $\psi(s)$ u. $\vartheta(s)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler haben. Wenn $\psi(s)$ u. $\vartheta(s)$ einen Theiler gemeinschaftlich haben, so kann die Division nur dann möglich sein, dann auch $\varphi(s)$ denselben Theiler hat. Nun hat $\vartheta(s)$ unter allen Umständen Factoren und hieraus folgt, daß es in unserm Gebiete solche Zahlen sind, durch die man im Allgemeinen nicht dividiren darf, ohne daß diese Zahlen Null sind. Die Division durch eine solche Zahl wird nur dann möglich sein, wenn die dem Dividenden zugehörige Function $\varphi(s)$ denselben Theiler hat, wie $\psi(s)$ und $\vartheta(s)$. Wenn wir uns $\vartheta(s)$ auf irgend welche Weise in Factoren zerlegen

$\vartheta(s) = \vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s)$, so werden ϑ_1 und ϑ_2 Functionen seien vom niedrigeren als dem $n$ten Grade. Die Zahl $\vartheta_1(\varepsilon)$ ist dann von Null verschieden, denn dies könnte, da sie nur die Einheiten $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{n-1}$ enthält, nur dann der Fall sein, wenn sie identisch Null ist, alsdann müßte aber auch $\vartheta_1(s)$ identisch Null sein, was nicht der Fall ist. Wenn ich nun eine beliebige Function $\psi(s)$ habe, sodaß

$\psi(s) = \vartheta_1(s)\,\psi_1(s)$ so ist die Zahl

$\psi(\varepsilon) = \vartheta_1(\varepsilon)\,\psi_1(\varepsilon)$ eine Zahl die im Allgemeinen nicht Null ist, durch die man aber nicht dividiren darf, sobald der Dividendus function $\varphi(s)$ den Theiler $\vartheta_1(s)$

nicht gemeinschaftlich hat.

Nehmen wir $n = 2$ so haben wir die gewöhnliche Arithmetik, hierfür ist:

$$\varepsilon_2 + \varepsilon_0 = 0 \text{ also}$$

$$\vartheta(s) = s^2 + s_0 = (s - \varepsilon_1)(s + \varepsilon_1) = \vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s).$$

Nun ist $\vartheta_1(\varepsilon) = 0$, $\vartheta_2(s) = 2\varepsilon_1$. Man darf im Allgemeinen nicht dividiren durch die Zahl Null, und diejenigen, welche den Factor $2\varepsilon_1$ haben. Nun kann man aber jede Zahl dieser Theorie $\varphi(\varepsilon) = \alpha\varepsilon_0 + \beta\varepsilon_1$ so umformen, daß sie den Factor $2\varepsilon_1$ zum Theiler hat; denn es ist

$$\varphi(\varepsilon) = \alpha\varepsilon_0 + \beta\varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 \left\{ \frac{\beta}{2}\varepsilon_0 - \frac{\alpha}{2}\varepsilon_1 \right\}$$

Hieraus folgt, daß die Division durch die Zahlen, welche den Factor $2\varepsilon_1$ haben, stets möglich ist. Also ist in dieser Theorie die einzige Zahl durch die man nicht dividiren kann die Null allein. In der allgemeinen Theorie hat man ganze Reihen solcher Zahlen, die dadurch charakterisirt werden, daß

$\varphi(\varepsilon) = \vartheta_1(\varepsilon)\,\varphi_1(\varepsilon)$ wo $\vartheta_1(\varepsilon)$ aus $\vartheta_1(s)$ entsteht und
$\vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s) = \vartheta(s)$ ist. Hieraus folgt daß
$\vartheta_1(\varepsilon)\,\vartheta_2(\varepsilon) = \vartheta(\varepsilon) = 0$. wo $\vartheta_1(\varepsilon)$ u. $\vartheta_2(\varepsilon)$ im 50
Allgemeinen von Null verschieden sind. Es gibt also in unserer allgemeinen Theorie solche Zahlen, die von Null verschieden sind, zum Producte aber Null geben.

Der Schluß der gewöhnlichen Arithmetik, daß, wenn

$a \cdot b = 0$ und $b \gtrless 0$, nothwendig $a = 0$ ist hier nicht berechtigt. Solche Zahlen $\vartheta_1(\varepsilon)$, $\vartheta_2(\varepsilon)$. (50) die nicht Null sind, zum Producte aber Null geben, wollen wir Factoren der Null nennen. Wenn wir $\varphi(\varepsilon) = \varphi_1(\varepsilon)\,\vartheta_1(\varepsilon)$ und

$\psi(\varepsilon) = \psi_1(\varepsilon)\,\vartheta_2(\varepsilon)$ wo $\vartheta_1(\varepsilon)\,\vartheta_2(\varepsilon) = \vartheta(\varepsilon)$ ist, so ist

auch $\varphi(\varepsilon) \cdot \psi(\varepsilon) = 0$ obgleich $\varphi(\varepsilon)$ u. $\psi(\varepsilon)$ von Null verschieden sind. In diesem Falle nennen wir auch $\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon)$ Factoren der Null. Es gibt auch keine andern Größen, die Factoren der Null sind, als die hier definirten. Denn angenom. $\alpha_1(\varepsilon)$ $\alpha_2(\varepsilon)$ seien 2 solche Zahlen, so wird man zunächst haben

51 $$\alpha_1(s)\,\alpha_2(s) = \vartheta(s)\,\varphi(s) + \varphi_1(s)$$ wo $\varphi_1(s)$ vom niedrigeren als dem $n$ten Grade ist. Nun soll

$\alpha_1(\varepsilon) \cdot \alpha_2(\varepsilon) = 0$ sein, woraus folgt daß

$\varphi_1(\varepsilon) = 0$ was nur möglich ist, daß es identisch Null ist.

Wir haben somit

52 $$\alpha_1(s)\,\alpha_2(s) = \vartheta(s)\,\varphi(s)$$

und hieraus folgt, daß die allgemeinste Größe dieser Art die Gestalt haben muß

$$\alpha(s) = \vartheta_1(s)\,f_1(s) \text{ also}$$
$$\alpha(\varepsilon) = \vartheta_1(\varepsilon)\,f_1(\varepsilon)$$

Jetzt können wir die Gesetze der Division näher untersuchen.

Wenn $f(\varepsilon)$ und $h(\varepsilon)$ gegeben sind und suche ich

$\frac{f_2(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ so heißt dies eine Zahl $g(\varepsilon)$ zu finden so dass

$$h(\varepsilon) = f(\varepsilon)\cdot g(\varepsilon)$$ Dies giebt nun 53

$$f(s)\,g(s) = \vartheta(s)\,\varphi(s) + h(s)$$ 54

Hier sind die unbekannten Functionen $g(s)$ u. $\varphi(s)$. Wenn $f(s)$ u. $\vartheta(s)$ keinen Theiler haben, so lässt sich die Gleichung 54 lösen, und zwar so, dass $g(s)$ vom niedrigeren Grade ist, als $\vartheta(s)$ d. h. vom niedrigeren als dem $n$ten Grade. Alsdann haben wir

$$\frac{h(\varepsilon)}{f(\varepsilon)} = g(\varepsilon)$$

wo $g(\varepsilon)$ vollkommen bestimmt ist 54

Haben dagegen $f(s)$ u. $\vartheta(s)$ einen gemeinsamen Theiler z. B. $\vartheta_1(s)$ so haben wir

$$f_1(s)\,g(s)\,\vartheta_1(s) = \vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s)\,\varphi(s) + h(s)$$ 55

Es muss also, wenn $g(s)$ möglich sein soll $h(s)$ auch durch $\vartheta_1(s)$ theilbar sein. d. h. es muss

$$h(s) = h_1(s)\,\vartheta_1(s).$$ Die Gleichung 55 reducirt sich dann auf

$$f_1(s)\,g(s) = \vartheta_2(s)\,\varphi(s) + h_1(s)$$ da f_1 u. ϑ_2 keinen 56

Theiler haben, so ist $g(s)$ möglich und wir erhalten

$$\frac{h_1(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = g(\varepsilon)$$

Wir sehen also, dass die Division stets möglich ist, wenn $f(s)$ un $\vartheta(s)$ keinen Theiler haben. Wenn aber $f(s)$ und $\vartheta(s)$ einen Theiler haben, so muss der grösste Theiler von $f(s)$ u. $\vartheta(s)$ auch ein Theiler von $h(s)$ sein, wenn die Division überhaupt möglich sein soll. Sonst ist die Division unmöglich.

Es handelt sich nun, ob der Quotient $\frac{h_1(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)}$ mit dem Quotienten $\frac{h(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ übereinstimmt. Machen wir die Rechnung mit $\frac{h_1(s)}{f_1(s)}$ so erhalten wir.

$$f_1(s)\, g_1(s) = \varphi_1(s)\, \vartheta(s) + h_1(s)$$

Soll nun $\frac{h_1(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = g_1(\varepsilon) = \frac{h(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ so muss wegen 56

$$\varphi_1(s)\, \vartheta(s) = \varphi(s)\, \vartheta_2(s) \text{ d.h. es muss}$$

$$\varphi(s) = \varphi_1(s)\, \vartheta_1(s)$$

Dies ist aber nicht nothwendig der Fall. Also braucht der Quotient $\frac{h_1(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)}$ mit $\frac{h(\varepsilon)}{f(\varepsilon)}$ nicht übereinzustimmen, was wiederum eine Ausnahme von der gewöhnlichen Arithmetik macht.

Nun wollen wir auch die Frage stellen: Sind nun in unserem Zahlengebiete die Gleichungen lösbar?

Zunächst wollen wir untersuchen, analog, wie in der gewöhnlichen Arithmetik, ob in unserem Systeme $\sqrt{-\varepsilon_0}$ existirt. (Die Zahl ε_0 ist die Eins unseres Systems) Existirt die Grösse $\sqrt{-\varepsilon_0}$, so muss es eine Zahl $f(\varepsilon)$ geben,

57 wo dass $f^2(\varepsilon) = -\varepsilon$. Setzen wir die zugehörigen Functionen, so muss

58 $$f^2(s) = \vartheta(s)\, \varphi(s) - 1 \text{ oder}$$

$$f^2(s) + 1 = \vartheta(s) . \varphi(s)$$ wobei wohl zu bemerken ist, dass alle Coefficienten von $f(s)\, \vartheta(s),\ \varphi(s)$ reale Zahlen sind. In der letzten Gleichung sind $f(s)$ und $\varphi(s)$ unbekannt.

Nun kann möglicher Weise $\vartheta(s)$ reelle Factoren haben 1ten Grades von der Form $s-c$, wo c reell ist. Alsdann wird die Rechte von 58 für $s=c$ verschwinden, während die Linke nicht verschwinden kann. In diesem Falle kann also die Gleichung 58 nicht bestehen. Nun hat $\vartheta(s)$ immer reelle Factoren, wenn $\vartheta(s)$ vom ungraden Grade ist, da ja jede Gleichung ungeraden Grades mit reellen Coefficienten wenigstens eine reelle Wurzel besitzt. Wenn also $\vartheta(s)$ vom ungeraden Grade ist, ist die Gleichung 58 unmöglich, also existirt $\sqrt{-\varepsilon_0}$ in unserem Zahlengebiete nicht. Wenn also r die Anzahl der Haupteinheiten $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{r-1}$ ist, so existirt $\sqrt{-\varepsilon_0}$ nicht sobald r ungerade ist. Damit $\sqrt{-\varepsilon_0}$ möglich sei, muss r gerade sein d.h. $\vartheta(s)$ vom geraden Grade und dazu nicht in lineare reelle Factoren zerlegbar sein. Es muss sich also $\vartheta(s)$ in der Form darstellen lassen.

$$\vartheta(s) = \prod_{\nu=1}^{\frac{r}{2}} (s^2 + 2c_\nu s + c'_\nu) \text{ und } c_\nu^2 - c'_\nu < 0 \text{ sein} \qquad 59$$

Diese einzelnen Factoren bezeichnen wir mit $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots$ und schreiben für r, $2r$, da wir uns nur mit dem Systeme beschäftigen wollen, in welchem $\sqrt{-\varepsilon_0}$ möglich ist. Wir setzen also

$$\vartheta(s) = \vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s) \dots \vartheta_r(s) \qquad 60$$

wo $2r$ die Anzahl der Haupteinheiten $\vartheta_1(s) \dots \vartheta_r(s)$ quadratische Functionen sind, die in lineare reelle Factoren unzerlegbar sind. Wenn diese Bedingung erfüllt

ist, so ist $\sqrt{-\varepsilon_0}$ in unserem Zahlensysteme möglich.
In dem Producte 60 für $\vartheta(s)$ können möglicherweise auch gleiche quadratische Factoren vorkommen, so daß wir allgemein setzen müßen.

61 $$\vartheta(s) = \vartheta_1^{r_1}(s) \dots \vartheta_\nu^{r_\nu}(s) \text{ wo } r_1 + \dots + r_\nu = r \text{ ist}$$

Nun wollen wir unter Annahme des Systems von $2r$ Einheiten, für das die Function $\vartheta(s)$ den Bedingungen 59 genügt, die allgemeine Frage untersuchen:
Sind in unserem Gebiete allgemeine Gleichungen lösbar.
Es seien $a_0\ a_1 \dots a_n$ complexe Zahlen unseres Systems und x eine unbekannte, so fragen wir: kann man in dem Gebiete unserer Zahlen, solche Zahlen für x finden, die der Gleichung

62 $$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \text{ genügen.}$$

wobei wir zunächst voraussetzen, daß a_0 keinen Factor der Null zum Theiler hat/ In der gewöhnlichen Arithmetik darf der Coefficient der höchsten Potenz nicht Null sein) Diese interessante Frage wollen wir für 2 Formen der Function $\vartheta(s)$ untersuchen, zunächst für den Fall, wo die quadratischen Factoren von $\vartheta(s)\ \vartheta_1(s)\ \vartheta_2(s)$ sämmtlich von einander verschieden, und zweitens, wo sie alle einander gleich sind.
Es sei die zu untersuchende Gleichung

63 $$f_0(\varepsilon)\, x^n + f_1(\varepsilon)\, x^{n-1} + \dots + f_n(\varepsilon) = 0,$$ so ist zu unter-

suchen, ob man

$$x = \varphi(\varepsilon) \qquad 64$$

so bestimmen kann, dass die vorgelegte Gleichung besteht. Man könnte die Aufgabe auch so angreifen; man stelle sich $\varphi(\varepsilon)$ dargestellt durch eine Zahl $\alpha_0 \varepsilon_0 + \dots + \alpha_{2r-1}\varepsilon_{2r-1}$, wo $\alpha_0 \dots \alpha_{2r-1}$ unbestimmte Coefficienten bedeuten und führe alsdann die Multiplication in

$$f_0(\varepsilon)\varphi^n(\varepsilon) + f_1(\varepsilon)\varphi^{n-1}(\varepsilon) + \dots + f_{n-1}(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) + f_n(\varepsilon) = 0 \qquad 65$$

aus, ziehe die Glieder, die aus derselben Einheit gebildet werden zusammen und setze alsdann die Coefficienten der Einheiten gleich Null. Dies würde uns für die $2r$ Coefficienten $2r$ Bedingungsgleichungen ergeben, welche näher zu untersuchen wären. Auf diesem Wege würde man auf Schwierigkeiten stossen. Führen wir aber unsere Functionen ein und operiren mit denselben, so vereinfacht sich die Untersuchung wesentlich. Es muss zunächst wegen 65

$$f_0(s)\varphi^n(s) + \dots + f_n(s) = \vartheta(s)\,\mathfrak{X}(s) \text{ sein d. h.} \qquad 66$$

die linke Seite muss durch $\vartheta(s)$ theilbar sein. Wenn ich nun setze

$$F(s,t) = f_0(s)\,t^n + \dots + f_n(s) \qquad 66^a$$

so ist dies 63 analog, wenn ich hier die ε x resp. durch s, t ersetze.. Wegen 66 haben wir

$$F(s,\varphi(s)) = \vartheta(s)\,\mathfrak{X}(s) \text{ d. h.} \qquad 67$$

F muss durch $\vartheta(s)$ theilbar sein. Nun kann ich $\vartheta(s)$ zerlegen in complexe Factoren 1ten Grades, die nur aus den beiden Einheiten + 1, i gebildet sind. Nun möge irgend einer der complexen Werthe von s, für die $\vartheta(s) = 0$ mit s_1 bezeichnet werden.

Alsdann habe ich

$$F(s_1, \psi(s_1)) = 0$$ und solcher Gleichung finde ich 2r, da ja $\vartheta(s)$ vom 2rten Grade ist und wegen der gemachten Voraussetzung 2r verschiedene Wurzeln hat. Wir haben also

68
$$F(s_1, \psi(s_1)) = 0$$
$$F(s_2, \psi(s_2)) = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$F(s_{2r}, \psi(s_{2r})) = 0$$

Die Function $F(s, t)$ ist eine ganze Function von t vom nten Grade, und läßt sich, da sie nur solche complexe Coefficienten hat, die aus 1 und i gebildet werden, nach der gewöhnlichen Arithmetik darstellen in der Form

69 $$F(s, t) = f_0(s)(t - t_{1,1})(t - t_{1,2}) \cdots (t - t_{1,n})$$

Setze ich nun $t = \psi(s_1)$ so muß wegen 68 die Rechte von 69 verschwinden, was nur dann möglich ist, wenn einer der Factoren Null wird; daraus ergiebt sich

70 $$\psi(s_1) = t_{1,\nu}$$

Nun erhalte ich offenbar 2r – 1 Gleichungen von der Form 69, indem ich statt s_1 s_2 ... einsetze

Wenn ich so weiter schließe, so erhalte ich das System

$$\psi(s_1) = t_{1,\nu_1}$$
$$\psi(s_2) = t_{2,\nu_2} \qquad 71$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\psi(s_{2r}) = t_{2r,\nu_{2r}}$$

Umgekehrt wenn wir durch die Auflösung der Gleichung $D(s)=0$ die $2r$ Wurzeln $s_1, s_2 \dots s_{2r}$ finde und dann durch Auflösung der Gleichung $n$ten Grades $F(s_\nu t)$ $(\nu = 1 \dots 2r)$ der Größen $t_{01}, t_{02} \dots t_{0n}$; $t_{21}, t_{22} \dots t_{2n} \dots$ bezeichne, was mittelst der gewöhnlichen Arithmetik ausführbar ist, und dann die unbekannte Function $\psi(s)$ so bestimme, daß die Gleichungen 71 befriedigt werden, so wird die Function

$$F(s\,\psi(s)) = f_0(s)\,\psi^n(s) + \dots + f_n(s) \qquad 72$$

durch $D(s)$ theilbar sein. Denn es ist $F(s_\nu\, \psi(s_\nu)) = 0$ $(\nu = 1 \dots 2r)$ d. h. die Function 72 verschwindet für $s = s_1, \dots s = s_{2r}$ und daraus folgt, daß sie den Factor

$$(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_{2r}) = D(s) \qquad 73$$

zum Theiler hat. Nun ist $\psi(s)$ eine ganze Function vom Grade $2r-1$ durch die Gleichungen 71, ist sie also vollkommen bestimmt. Es ist also möglich die Function $\psi(s)$ so zu bestimmen, daß man hat

$$f_0(s)\,\psi^n(s) + \dots + f_n(s) = D(s)\,K(s) \qquad 74$$

Ersetzt man nun die s's durch ε's so erhalten wir

75 $f_0(C)\,\psi^n(C) + \dots + f_n(C) = 0$ d. h. $x = \psi(C)$ ist die Wurzel der Gleichung 63.

Wenn also $\alpha_0 = f_0(C)$ der Coefficient der höchsten Potenz der Unbekannten x keinen Factor der Null enthält, so kann man stets Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades, wo die Coeff. Zahlen unseres Systems sind, finden, und zwar geschieht die Lösung mittelst Gleichungen mit gewöhnlichen complexen Coefficienten. Nun ist noch zu untersuchen, wie viel verschiedene Lösungen wir erhalten. Diese Frage entscheiden wir, wenn wir die Bildung der Function $\psi(s)$ betrachten. Sie wurde bestimmt durch die Gleichungen 71. Nun erhalten wir, da wir $2r$ verschiedene $s_1 \dots s_2$ bekommen durch Auflösung der Gleichung 66^a, wenn wir die Reihe nach $s = s_1 \dots s_{2r}$ setzen für t, $2rn$ verschiedene Werthe, nämlich

$$t_{1,1},\ t_{1,2} \ \dots\ t_{1n} \text{ für } s = s_1$$

76 $$t_{2,1},\ t_{2,2} \ \dots\dots\ t_{2,n} \ \dots\dots\ s = s_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$t_{2r,1},\ t_{2r,2} \ \dots\ t_{2r,n} \ \dots\ s = s_{2r}$$

Nun sehen wir, daß jeder Function $\psi(s)$ welche bestimmt wird, indem wir in 71 $t_{1\nu} \dots t_{2r}\ \nu_{2r}$ beliebig aus dem Systeme 76 wählen, den Bedingungen genügt. Nun aber reducirt sich die Anzahl aller $\psi(s)$ durch die Bedingung, daß die Coefficienten von ψ sämmtlich reell sind, dies zieht nämlich eine bestimmte Wahl der t's zur Bestimmung von $\psi(s)$ nach sich.

Die Grössen $s_1 \dots s_{2r}$ sind paarweise conjugirt, da die Wurzel der Gleichung $\Delta(s) = 0$ mit reellen Coefficienten sind. Wir wollen annehmen, dass die conjugirten Wurzeln sind

$$s_1 s_2;\ s_3 s_4;\ \dots\ s_{2r-1};\ s_{2r};$$ 77

wenn wir nun die Gleichungen

$$F(s_\nu, t) = 0 \ (\nu = 1, 2 \dots 2r) \text{ auflösen}$$

so bekommen wir für t $2rn$ Wurzeln, die aber so beschaffen sind, dass die eine Hälfte conjugirte Grössen der andern sind. Wir wollen, wenn $t_1 \nu_1$ die eine Wurzel bedeutet mit $t_1' \nu_1$ die conjugirte bezeichnen. Wir erhalten somit das System der Wurzeln

$t_{1,1}\, t_{1,2} \dots t_{1,n}$ für s_1 und für s_2 die conjugirten

$t_{1,1}'\, t_{1,2}' \dots t_{1,n}'$

$t_{3,1},\ t_{3,2} \dots t_{3,n}$ für s_3 und für s_4 die conjugirt

$t_{3,1}',\ t_{3,2}' \dots t_{3,n}'$

. . . .

$t_{2r-1,1} \dots t_{2r-1,n}$ für s_{2r-1} und für s_{2r} die conjugirt

$t_{2r-1,1}' \dots t_{2r-1,n}'$.

Auch sieht man, dass das Gleichungssystem 41 aufgestellt, sich nothwendig ergiebt

$$\psi(s_1) = t_{1\nu_1} \quad \psi(s_2) = t_{1,\nu_1}'$$

$$\psi(s_3) = t_{3\nu_3} \quad \psi(s_4) = t_{3\nu_3}'$$

. . . .

$$\psi(s_{2r-1}) = t_{2r-1,\nu_{2r-1}} \quad \psi(s_{2r}) = t_{2r-1,\nu_{2r-1}}'$$

Will man umgekehrt $\psi(s)$ so bilden, dass es reelle Coefficienten hat, so muss man zu der Bestimmung das Gleichungssystem

79 anwenden, und wenn dies der Fall ist, so ergeben sich auch die Coefficienten in $\psi(s)$ reell und

80 $$\psi(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \dots + \beta_{2r-1} s^{2r-1}$$

Nun sieht man aber, daß in der Wahl des Systems 79, noch eine Willkühr bleibt; indem man die 1te Reihe in 79 willkürlich wählen kann. Es kann nämlich gesetzt werden

1) $\psi(s_1) = t_{1,1};\ t_{1,2};\ t_{1,3};\ \dots t_{1,n}$ und daß

2) $\psi(s_2) = t_{3,1};\ t_{3,2};\ t_{3,3};\ \dots t_{3,n}$

. . . .

r) $\psi(s_{2r-1}) = t_{2r-1,1,2}\ \dots\dots\ t_{2r-1,n}$ die andere Reihe ist hierdurch schon bestimmt. Um die Anzahl aller möglichen Verbindungen von ψ mit t zu bestimmen, überlegen wir Folgendes. Es kann jedes t aus 1 mit jedem t aus 2 vorkommen, was n^2 Verbindungen liefert. Nun kann weiter jede dieser Verbindungen mit jedem t aus 3 vorkommen, also erhalten wir n^3 mögliche Verbindungen u. s. w., so erhalten wir n^r mögliche Verbindungen. Auf diese Weise erhalten wir zur Bestimmung der Function $\psi(s)$, n^r verschiedene Gleichungssysteme, wovon jedes nur ein $\psi(s)$ liefert, das reelle Coefficienten hat und den Bedingungen entspricht. Es gibt also n^r verschiedene Functionen $\psi(s)$ die der Gleichung 66 genügen und reelle Coefficienten haben. Ersetzen wir die s durch ε so erhalten wir n^r verschiedene Wurzeln, die der Gleichung 63 genügen.

Das Product ist also Folgendes: Wenn wir Zahlengrößen aus $2r$ Einheiten so wählen, daß die Function $\vartheta(s)$ in r verschiedene irreductible Factoren 2^{ten} Grades auflösbar ist (59), so ist in unserem Systeme jede Gleichung n^{ten} Grades

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

wo $a_0\ a_1 \dots a_n$ complexe Zahlen unseres Systems sind, und a_0 keinen Factor der Null zum Theiler hat, stets lösbar, und die Anzahl der Wurzeln ist genau gleich n^r. Alle diese Wurzeln findet man durch Auflösung gewöhnlicher Gleichungen n^{ten} Grades im Gebiete der gewöhnlichen Arithmetik.

Dies modificirt sich in dem Falle wo a_0 einen Factor der Null enthält. Es enthalte z. B. $a_0 = f_0(\varepsilon)$ den Factor $\vartheta_1(\varepsilon)$. Setze ich dann in der Gleichung

$$f_0(s)\,\psi^n(s) + \dots + f_n(s)$$ für $s = s_1$, so verschwindet $f_0(s_1)$ und es reducirt sich die Gleichung auf

$$f_1(s_1)\,\psi^{n-1}(s_1) \dots + f_n(s_1) = F(s_1, \psi(s_1))$$

Dann erhalten wir zur Bestimmung der ψ eine Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades $F(s_1, \psi(s_1))$, dann auch f_1 den Multiplicator enthält, so gehen wir weiter. Wenn dies bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$ Coefficienten geht, so erhalten wir eine andere einfachere Aufgabe. Die Lösungen solcher Gleichungen sind immer möglich, aber alsdann reducirt sich die Anzahl der Gleichungen auf eine geringere. Dies ist das Analogon mit den Gleichungen der gewöhnlichen Arithmetik wenn $a_0 = 0$ ist.

Jetzt wollen wir den weitern extremen Fall untersuchen, wo $D(s)$ lauter gleiche quadratische irreductible Factoren hat, wo also $D(s) = \{D_1(s)\}^r$ wo $D_1(s)$ eine quadratische Function von s ist, die sich nicht in reelle lineare Factoren zerlegen läßt. Wollen wir die Zahlengrößen x finden, welche der Gleichung 62 Genüge leistet, so erhalten wir die Gleichung

82 $$f_0(s)\psi^n(s) + f_1(s)\psi^{n-1}(s) + \dots + f_n(s) = D_1^r(s)\,\mathfrak{X}(s)$$

wobei wir von $f_0(\varepsilon)$ ebenfalls annehmen, daß es keinen Factor der Null, welcher in unserem Falle $= \varepsilon_2 + 2\varepsilon_1 c + \varepsilon_0 c'$ enthält. Durch dieselben Schlüsse erhalten wir

89 $$F\{s, \psi(s)\} = (s-s_1)^r (s-s_2)^r \mathfrak{X}(s)$$ d.h. es muß nicht nur $F\{s_1, \psi(s_1)\} = 0$ sondern auch $\frac{dF}{ds} = 0$ für $s = s_1$. Wenn ich $\psi(s) = t$ setze, so muß also sein.

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial t}\,\psi'(s) = 0$$

Immer bestimmbar ist $\psi(s_1)$; damit $\psi'(s)$ bestimmbar sei darf $F(s,t)$ und $\frac{\partial F}{\partial t}(s,t)$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Alsdann kenne ich alle Ableitungen von $\psi(s)$ für $s = s_1$ und außerdem den Werth für $\psi(s)$ für $s = s_1$, und daraus läßt sich $\psi(s)$ bestimmen. Ich könnte zu der Bestimmung die verschiedenen Werthe von t anwenden; damit aber $\psi'(s_1)$ bestimmbar sei, muß ich nur solche wählen, für die die Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ gleichzeitig mit $F(s,t)$ verschwindet. Ich erhalte auf diese Weise mehrere Functionen $\psi(s)$ und durch leichte Schlüsse gelangt man zu dem Resultate, daß in diesem Falle sich algebraische Gleichung n^{ten} Grades im Gebiete unseres Zahlensystems genau n Lösungen hat, wenn sie überhaupt Lösungen zulässt. Es handelt sich also nur darum, ob es überhaupt möglich ist eine Lösung zu finden. Dazu ist es nöthig, daß es wenigstens ein t gebe, welches $F(s,t)=0$ genügt, und und $\frac{\partial F(s,t)}{\partial t}$ nicht null macht.

Es muß dann die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial t}\,\psi'(s)=0$$ so befriedigt werden, daß $\frac{\partial F}{\partial s}=0$. Alsdann bekomme ich für die $\psi'(s)$ 2 Bedingungen, die im Allgemeinen nicht verträglich sind.

Je nachdem $\vartheta(s)$ in lauter verschiedene oder gleiche Factoren zerlegbar ist, hat man mit verschiedenen complexen Zahlen zu thun. Nun hat zuerst Dr Hacidati aus Athen aufmerksam gemacht, daß in dem Falle, wo $\vartheta(s)$ in lauter verschiedene quadratische Factoren zerlegbar ist, man mit keinen neuen Einheiten zu thun hat, in dem andern Falle bietet die Theorie etwas neues. Dies wollen wir noch etwas näher untersuchen. Wir haben gesehen, daß die Rechnungen mit den complexen Zahlen aus $2r$ Einheiten abhängen $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{2r-1}$ von der Function $\vartheta(s)$. Wir können $\vartheta(s)$ nun wie beliebige $2r$ Einheiten einführen stets solche Zahlen finden $\varepsilon_0 \dots \varepsilon_{2r-1}$ für die die Gleichung besteht.

$$\varepsilon_{2r}+g_1\,\varepsilon_{2r-1}+\dots+g_{2r}\,\varepsilon_0=0$$ und

$$\varepsilon_\alpha\,,\ \varepsilon_\beta-\varepsilon_{\alpha+\beta}.$$

die Function $\vartheta(s)$ ist dann

$\vartheta(s) = s^{2r} + g_1 s^{2r-1} + \dots g_{2r}$. Führen wir $e_0 - e_{2r-1}$ als Einheiten ein, so läßt sich jede andere Größe als ein linearer Ausdruck von $e_0 \dots e_{2r-1}$ darstellen, und zu jeder Größe gehört eine ganz bestimmte Function $\varphi(s)$; $\psi(s)$ etc. Alle Rechnungen mit diesen complexen Zahlen lassen sich ausführen mittelst der zugehörigen Functionen und so geschieht die Multiplication nach der Formel

$$\varphi(s) \cdot \psi(s) = \vartheta(s)\,\chi(s) + f(s) \text{ also}$$

$$\varphi(\varepsilon)\,\psi(\varepsilon) = f(\varepsilon)$$

Nun betrachten wir den Fall, wo $\vartheta(s)$ zerlegbar ist in lauter verschiedene irreductible Factoren mit reellen Coefficienten. Wir bemerken aber hierbei, daß das Vorgetragene für beliebige Anzahl der Einheiten gilt. Wir setzen

90 $$\vartheta(s) = \vartheta_1(s)\,\vartheta_2(s) \dots \vartheta_m(s)$$

wo die ϑ's keinen gemeinschaftlichen Factor haben und auch linear sein können. Wenn wir nun eine ganze Function $F(s)$ haben, die vom niedrigeren Grade ist als $\vartheta(s)$ so können wir bekanntlich $\frac{F(s)}{\vartheta(s)}$ in Partialbrüche zerlegen. Es sei $\varphi(s)$ eine solche Function $F(s)$ so haben wir.

$$\frac{\varphi(s)}{\vartheta(s)} = \frac{\varphi_1(s)}{\vartheta_1(s)} + \frac{\varphi_2(s)}{\vartheta_2(s)} + \dots + \frac{\varphi_m(s)}{\vartheta_m(s)} \text{ und hieraus}$$

91 $$\varphi(s) = \varphi_1(s)\,\Theta_1(s) + \varphi_2(s)\,\Theta_2(s) + \dots + \varphi_m(s)\,\Theta_m(s) \text{ wo}$$

$$\Theta_1(s) = \vartheta_2(s)\,\vartheta_3(s) \dots \vartheta_m(s)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\Theta_r(s) = \vartheta_1\,\vartheta_2 \dots \vartheta_{r-1}\,\vartheta_{r+1} \dots \vartheta_m$$

Auf diese Weise ist jede beliebige Zahl $\varphi(\varepsilon)$ unseres Systems zerlegt in m complexe Zahlen. Wenn wir die Grade von $d_1, d_2 \dots d_m$ resp. mit $r_1, r_2 \dots r_m$ bezeichnen, so ist, wenn der Grad von $d(s)$ $2r$ ist ($2r$ Einheiten) der Grad von $\mathfrak{A}_m(s)$ gleich $2r - r_m$, die Functionen $\varphi_1(s) \dots \varphi_m(s)$ sind vom niedrigeren Grade als $r_1 \,.\, r_2 \dots r_m$. Betrachten wir die Zahlen

$$x_1 = \varphi_1(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_1(\varepsilon)$$

$$x_2 = \varphi_2(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_2(\varepsilon) \qquad 92$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_m = \varphi_m(\varepsilon)\, \mathfrak{A}_m(\varepsilon)$$ so können wir setzen

$$x_1 = (g_{10}\, \varepsilon_0 + g_{11}\, \varepsilon_1 + \dots + g_{1r_1-1}\, \varepsilon_{r_1-1}) \,.\, \mathfrak{A}_1(\varepsilon)$$

$$\dots\dots\dots \qquad 93$$

$$x_m = (g_{m0}\, \varepsilon_0 + g_{m1}\, \varepsilon_1 + \dots + g_{m,r_m-1}\, \varepsilon_{r_m-1})\, \mathfrak{A}_m(\varepsilon).$$ Setzen wir

$$e_{10} = \varepsilon_0\, \mathfrak{A}_1(\varepsilon);\ e_{11} = \varepsilon_1\, \mathfrak{A}_2(\varepsilon);\ \dots\ e_{1,r_1-1} = \varepsilon_{r_1-1}\, \mathfrak{A}_1(\varepsilon);\ e_{20} = \varepsilon_0\, \mathfrak{A}_2(\varepsilon) \qquad 94$$

so sind dies ganz bestimmte complexe Zahlen unseres Gebietes, die wir als Einheiten betrachten wollen. Alsdann können wir schreiben

$$x_1 = g_{10}\, e_{10} + g_{11}\, e_{11} + \dots + g_{1r_1-1}\, e_{1,r_1-1}$$

$$x_2 = g_{20}\, e_{20} + g_{21}\, e_{20} + \dots + g_{2,r_2-1}\, e_{2,r_2-1} \qquad 95$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_m = g_{m0}\, e_{m0} + g_{m1}\, e_{m1} + \dots + g_{m,r_m-1}\, e_{m\,r_m-1}$$

Diese bilden eine Mannigfaltigkeit niederer Dimension. Wir haben also unser Gebiet in m andere Theilgebiete zerlegt.

so daß sich jede Zahl unseres Gebietes durch die Theilgebiete darstellen läßt. Führen wir diese Größen e als Einheiten, so ist das Multiplicationsgesetz folgendes. Wenn wir 2 complexe Größen x, y desselben Theilgebietes multipliciren, so sind die Multiplicationsgesetze wie bei r_λ Einheiten. Wenn wir aber zwei Größen verschiedener Theilgebiete multipliciren, so ist das Resultat gleich Null d.h. $x_\lambda \cdot x_\mu = 0$ $(\lambda \gtrless \mu)$ wo λ μ die Indices der Theilgebiete bedeuten. Um nämlich die Multiplication auszuführen, haben wir die Producte $e_{\lambda\alpha}\, e_{\mu\beta}$ zu bilden, und dies geschieht mittelst $s^\alpha \Theta_\lambda(s)\, s^\beta \Theta_\mu(s)$; nun können aber, sobald λ von μ verschieden ist in $\Theta_\lambda \Theta_\mu$ alle Factoren von $D(s)$ vor, daß wir haben

96 $$s^\alpha s^\beta \Theta_\lambda(s)\, \Theta_\mu(s) = D(s)\, \mathfrak{K}(s)$$ und hieraus folgt

97 $$e_{\lambda\alpha}\, e_{\mu\beta} = 0$$ wenn $\lambda \gtrless \mu$ u. $\alpha\,\beta$ beliebig sind.

und hieraus folgt allgemein

$$x_\lambda\, x_\mu = 0 \quad (\lambda \gtrless \mu)$$ Um fürs zweite zu zeigen, daß zwei Zahlen desselben Theilgebietes mit dem Index λ so multiplicirt werden, wie complexe Zahlen aus r_λ Einheiten, haben wir nur nöthig zu zeigen, daß dies für die Einheiten des Theilgebietes giltig ist: d.h. für $e_{\lambda\alpha}\, e_{\lambda\beta}$ Dazu haben wir das Product zu bilden $s^\alpha \Theta_\lambda(s) \cdot s^\beta \Theta_\lambda(s)$ Es kann gebracht werden auf die Form

98 $s^\alpha \Theta_\lambda(s)\, s^\beta \Theta_\lambda(s) = D(s)\, \mathfrak{K}(s) + f_{\lambda\alpha\beta}(s)$ mit $s^{\alpha+\beta}\Theta_\lambda(s)$ operire.

ist so, daß ich setze

$$s^{\alpha+\beta}\,\mathfrak{Q}_\varkappa(s) = \vartheta_\varkappa'(s)\,\overline{\mathfrak{X}}(s) + \Pi_{\varkappa,\alpha+\beta}(s)$$ wo $\Pi_{\varkappa,\alpha+\beta}$ eine ganze 99

Function von s ist vom niedrigeren Grade als $\vartheta_\varkappa$ auch als $r_\varkappa$.
Hieraus folgt durch Multiplication mit $\mathfrak{Q}_\varkappa(s)$

$$s^{\alpha+\beta}\,\mathfrak{Q}_\varkappa'(s)\,\mathfrak{Q}_\varkappa(s) = \vartheta(s)\,\overline{\mathfrak{X}}(s) + \mathfrak{Q}_\varkappa(s)\,\Pi_{\varkappa,\alpha+\beta}(s) \qquad 100$$

Und hieraus $e_{\varkappa\alpha}\,e_{\varkappa\beta} = \mathfrak{Q}_\varkappa(\varepsilon)\,\Pi_{\varkappa,\alpha+\beta}(\varepsilon)$ und dies ist wegen 94 101
eine Zahl desselben Theilgebietes, so daß wir erhalten

$$e_{\varkappa\alpha}\,e_{\varkappa\beta} = c^{(0)}_{\varkappa\,\alpha+\beta}\,e_{\varkappa,0} + c^{(1)}_{\varkappa\,\alpha+\beta}\,e_{\varkappa,1} + \cdots + c^{(r_\varkappa-1)}_{\varkappa\,\alpha+\beta}\,e_{\varkappa,r_\varkappa-1} \qquad 102$$

Also 2 Zahlen desselben Theilgebietes geben wieder nur eine Zahl desselben Theilgebietes. Aus Allem ersehen wir, daß die Betrachtung dieses Systems von complexen Zahlen, wo $\vartheta(s)$ sich in lauter verschiedene reelle Factoren zerlegen läßt nicht nöthig ist, da sich ja die Gesetze für dieselben, auf Gesetze bei niedrigerer Mannigfaltigkeit reduciren lassen. Das Vorgetragene gilt für beliebige Anzahl von Einheiten $e_0 \dots$; fügen wir die Bedingung hinzu, daß die Gleichungen immer lösbar sein sollen, so muß die Anzahl der Einheiten eine gerade sein $= 2r$. In diesem Falle besteht

$\vartheta(s) = \vartheta_1(s) \dots \vartheta_r(s)$ aus r quadratischen reellen Factoren, so daß die Grade von $\vartheta_1 \dots \vartheta_r$ immer gleich 2 sind. Unser Gebiet zerfällt dann in r Theilgebiete und die Zahlen jedes Theilgebietes sind aus 2 Einheiten gebildet. Jede Zahl a unseres Gebietes läßt sich dann in der Form

103 darstellen $a = a_1 + a_2 + \dots + a_\nu$ wo

$$a_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 i_1$$

104 $$a_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 i_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_\nu = \alpha_\nu e_\nu + \beta_\nu i_\nu$$ wenn wir mit $e_\nu\ i_\nu$ die Einheiten des ν^{ten} Theilgebietes bezeichnen, die wir im Vorigen mit e bezeichneten. Das Multiplicationsgesetz ist alsdann folgendes: Wenn $a = a_1 + a_2 + \dots + a_\nu$; $b = b_1 + b_2 + \dots + b_\nu$ so ist

105 $$a \cdot b = (a_1 + a_2 + \dots)(b_1 + b_2 + \dots) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots$$

und hieraus folgt

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots$$

106 $$\dots\dots\dots$$

$$a^n = a_1^n + a_2^n + \dots$$

Hieraus folgt, daß sich jede ganze Function auf diese Weise darstellen läßt. Wollen wir z. B. eine Gleichung

107 $$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$ in unserem Systeme auflösen, so setzen wir

$$c_0 = c_1^{(0)} + c_2^{(0)} + \dots + c_\nu^{(0)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$c_n = c_1^{(n)} + c_2^{(n)} + \dots c_\nu^{(n)}$$

und ebenso $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ und wenn wir das in 107 setzen, so erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} c_1^{0} x_1^{n} + \dots c_1^{(1)} x_1^{n-1} + \dots + c_1^{(n)} \\ c_2^{(0)} x_2^{n} + c_2^{(1)} x_2^{n-1} \dots + c_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots \\ c_\nu^{(0)} x_\nu^{n} + c_\nu^{(1)} x_\nu^{n-1} + \dots + c_\nu^{(n)} \end{array}\right\} = 0$$ und hieraus folgt

die Gleichung

$$c_1^{(0)} x_1^{(n)} + \cdots + c_1^{(n)} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$ 108

$$c_r^{(0)} x_r^{n} + \cdots + c_r^{(2)} = 0$$

wo alle Größen wegen 104 nur aus 2 Einheiten gebildet sind. Es kann somit das Gleichungssystem 108 nach der gewöhnlichen Arithmetik aufgelöst. Jede von diesen r Gleichungen hat n Wurzeln und die Summe von r, von allen diesen nr Wurzeln, welche verschiedenen Theilgebieten gehören genügt die Gleichung 107, so daß also die Gleichung 107 im Allgemeinen nr Wurzeln hat, was wir schon auf einem andern Wege gefunden haben. — Jetzt wollen wir noch den Fall näher ins Auge fassen wo $\vartheta(s) = (s^2 + 2cs + c')^r$ 109 wo die quadratische Function nicht mehr zerlegbar ist also $c' - c^2$ positiv ist. Wir haben hier

$$(\varepsilon_2 + 2c\,\varepsilon_1 + c'\varepsilon_0)^r = 0 = (\varepsilon_1 + c\varepsilon_0)^2 + (c' - c^2)\varepsilon_0$$ 110

Da nun $c' - c^2$ positiv ist, so können wir setzen

$$\frac{\varepsilon_1 + c\varepsilon_0}{\sqrt{c' - c^2}} = i$$ und dann haben wir die Formeln

$$\varepsilon\varepsilon = \varepsilon;\quad \varepsilon i = i;\quad (i^2 + \varepsilon)^r = 0,$$ wenn $\varepsilon = \varepsilon_0$ gesetzt 111

~~[illegible]~~ Aus unseren Gebieten, haben wir 2 Zahlen herausgehoben, für die die gewöhnlichen Multiplicationsgesetze bestehen. Für diese Zahlen ist unsere Function $\vartheta(s) = (s^2 + s)^r$ nur durch einen constanten verschieden von

109. Wir haben nun hier

$$\frac{\varphi(s)}{(s^2+1)^r} = \frac{g_1 s + h_1}{(s^2+1)^r} + \frac{g_2 s + h_2}{(s^2+1)^{r-1}} + \dots$$ und hieraus folgt, daß sich jede Zahl x so darstellen läßt, daß man hat

$$x = g_1 i + h_1 \varepsilon$$

112 $$+ (g_2 i + h_2 \varepsilon)(i^2+\varepsilon)$$

$$+ \dots\dots\dots$$

$$+ (g_{r-1} i + h_{r-1} \varepsilon)(i^2+\varepsilon)^{r-1}$$ die Einheiten sind

113 hier $(i^2+\varepsilon)^\alpha$, $i(i^2+\varepsilon)^\beta$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \dots r)$

Wir zerlegen also jedes x in $x_1 + x_2 + \dots + x_r$ und das Gesetz der Multiplication finden wir, wenn wir $x_\lambda y_\mu$ suchen. Nun sieht man sofort wie man die Einheiten 113 zu multipliciren hat. Es ist nämlich

$$(i^2+\varepsilon)^\alpha (i^2+\varepsilon)^{\alpha'} = \begin{cases} (i^2+\varepsilon)^{\alpha+\alpha'} & \text{für } \alpha+\alpha' < r \\ 0 & \text{"} \ \alpha+\alpha' \geqq r \end{cases}$$

$$i(i^2+\varepsilon)^\beta i(i^2+\varepsilon)^{\beta'} = \begin{cases} -\varepsilon(i^2+\varepsilon)^{\beta+\beta'} & \text{"} \ \beta+\beta' < r \\ 0 & \beta+\beta' \geqq r \end{cases}$$

$$(i^2+\varepsilon)^\gamma i(i^2+\varepsilon)^{\gamma'} = \begin{cases} i(i^2+\varepsilon)^{\gamma+\gamma'} & \text{"} \ \gamma+\gamma' < r \\ 0 & \gamma+\gamma' \geqq r \end{cases}$$

Da $\varepsilon = i^0$ so können wir auch setzen die Einheiten

115 $$i^\lambda (i^2+\varepsilon)^\mu = e_{\lambda\mu}$$ und dann ist das Gesetz

$e_{\lambda\mu} e_{\lambda'\mu'} = i^{\lambda+\lambda'}(i^2+\varepsilon)^{\mu+\mu'} = e_{\lambda+\lambda', \mu+\mu'}$ und muß man

116 $\lambda+\lambda'$ reduciren. Es ist aber $\frac{s^{\lambda+\lambda'}}{(s^2+1)} = \frac{a_0 s + b_0}{(s^2+1)^r} + \frac{a_1 s + b_1}{(s^2+1)^{r-1}}$

Von diesen complexen Zahlen kann man nicht behaupten daß ihre Betrachtung überflüssig wäre. Auch kann man hier leicht zeigen, daß jede Gleichung n^{ten} Grades im Allgemeinen n Wurzeln hat.

Man sieht aus Allem in die Mathematik complexe Zahlen einführen kann, die aus beliebig vielen Einheiten gebildet werden. Die Grundsätze der Addition, Subtraction und Multiplication der gewöhnlichen Arithmetik bleiben hierbei bestehen. Nur die Division erfordert einige Modification. Auch die Theorie der Gleichungen erleidet einige Aenderungen. Hiermit ist die Gaussische Frage, ob in der gewöhnlichen Arithmetik Zahlengrößen aus mehr als 2 Einheiten, die in Bezug auf die Addition unabhängig sind, gebildet zulässig sind, beantwortet und die Antwort lautet: Wenn man alle Grundgesetze der gewöhnlichen Arithmetik aufrecht erhalten will, so ist die Einführung neuer complexen Zahlen nicht möglich. Man wird aber vielleicht später, wenn sich der Kreis allgemeiner, mathematischer Speculationen erweitert, dazu gezwungen werden neue complexe Zahlen einzuführen; man kann z. B. vom jetzigen Standpunkte nicht behaupten, daß alle Gleichungen Wurzeln haben, indem es transcendente Gleichungen hat, die keine Wurzeln auf dem Gebiete der gewöhnlichen Arithmetik zulassen, vielleicht würde man durch Einführung neuer complexer Zahlen, den Satz der nur bei der algebraischen

Gleichungen allgemein richtig ist, auch allgemein richtig ist, auch allgemein aufrecht erhalten können. Natürlich müßte man die Grundsätze der Arithmetik modificiren. Raumverhältnisse können etwas auf neue complexe Zahlen führen, daß der Begriff der Proportionalität der Strecken vom rein geometrischen Standpunkte unmöglich ist.

Inhalt.

Borex, d. 7. 10. 1874.