Disertación Inaugural
Göttingen 1851; Segunda impresión (sin cambios), Göttingen 1867

Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja

1.

Denotemos por z la variable que puede tomar sucesivamente todos los valores reales posibles. Cuando existe un único valor de la variable w correspondiente a cada z, se dice que w es una función de z. Si w varía continuamente cuando z se ejecuta continuamente sobre todos los valores entre dos puntos dados, se dice que la función es continua en ese intervalo.

Esta definición claramente impone ninguna ley entre los valores individuales de la función. Para cuando la función se especifica en un cierto intervalo, el método de su continuación fuera del intervalo permanece totalmente arbitraria.

La dependencia de la cantidad w en z puede ser expresada por una ley matemática, de modo que las operaciones definidas en cada valor de z proporcionando el w correspondiente. La posibilidad de que una sola ley de dependencia para todos los valores de z en un intervalo dado anteriormente se atribuía sólo a una determinada clase de funciones (*functiones continuae* en la terminología de *Euler*). Investigaciones más recientes han demostrado, sin embargo, que hay expresiones analíticas que representan cada uno funciones continuas en un intervalo dado. Por lo tanto es una y la misma cosa que decir que w depende de z de alguna manera arbitraria dada, o que w está dada por las operaciones definidas. Ambas nociones son equivalentes, en vista de los resultados mencionados.

Este no es el caso, sin embargo, si z no se limita a los valores reales, pero varía con el número complejo de la forma $x + yi$ (donde $i = \sqrt{-1}$)

Sea

$$x + yi,\ x + yi + dx + dyi$$

Sea dos valores de la cantidad z con una diferencia de infinitamente pequeño, y dejar

$$u + vi,\ u + vi + du + dvi$$

Sean los valores correspondientes de w. Si la dependencia de w en z se define arbitrariamente, el radio

$$\frac{du + dvi}{dx + dyi}$$

varía, en general, de acuerdo con los valores de dx y dy. De hecho, sea $dx + dyi = \epsilon e^{\phi\theta}$; luego

$$\frac{du+dvi}{dx+dyi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{du+dvi}{dx+dyi}$$

$$\frac{du+dvi}{dx+dyi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\epsilon e^{-2\phi i}$$

De cualquier manera que w se determina a partir z por una combinación de operaciones simples, el valor de la derivada $\frac{dw}{dz}$ siempre será independiente[1] del valor particular del diferencial dz. Obviamente, no podemos obtener la dependencia arbitraria de complejo w en complejo z de esta manera.

La anterior característica, común a todas las funciones obtenidas a través de cada intervención será fundamental para la presente investigación, en la que se trató esta función independientemente de su expresión. Sin demostrar la suficiencia general y validez de la definición de la dependencia a través de las operaciones, tomamos la siguiente definición como punto de partida.

Un complejo de variable w se dice que es una función de otro complejo de variable z , si w varía con z de tal manera que el valor de la derivada $\frac{dw}{dz}$ es dependiente del valor del diferencial dz

2.

Ambas cantidades z y w se tratan como variables que pueden tomar cada valor complejo. Es mucho más fácil de visualizar más de una variación conectado en un dominio bidimensional, si lo vinculan a un punto de vista espacial.

Representamos a cada valor $x + yi$ de la cantidad z de un punto O del plano A que tiene rectangular coordenadas x, y; y cada valor de $u + vi$ de la cantidad w por un punto Q de la plano B, que tiene coordenadas rectangular u, v dependencia de w en z se representa entonces por la dependencia de la posición de Q en la posición de O.

Cuando w corresponde a z de una manera que varía continuamente con z, o en otras palabras cuando u, v son funciones continuas de x, y luego a todos los puntos del plano A corresponde un punto del plano B; hablando en general, a todas las líneas corresponde una línea, y para cada pieza unida de superficie hay un fragmento que corresponde ir conectado a la superficie. Así, podemos pensar en esta dependencia de w en z como un mapa del plano A en el plano B.

3.

[1]Esta afirmación se justifica, obviamente, en todos los casos donde se puede obtener a partir de la expresión de w en términos de z, usando las reglas de diferenciación, una expresión de $\frac{dw}{dz}$ en términos de z. La validez rigurosa general de la afirmación se deja de lado por ahora.

Ahora investigar las propiedades que esta asignación tiene cuando w es una función de z, es decir, cuando $\frac{dw}{dz}$ es independiente de z.

Designemos por o a un punto general de plano A en la vecindad de O, y la imagen de o en el plano B por q. Además sean $x + yi + dx + dyi$ y $u + vi + du + dvi$ los valores de z y w en estos puntos. Nos modo cuenta dx, dy, y du, dv como coordenadas rectangulares de los puntos o y Q con respecto a los puntos O y Q tomadas como orígenes. Si escribimos $dx + dyi = \epsilon e^{\phi i}$ y $du + dvi = \eta e^{\psi i}$, a continuación, las cantidades ϵ, ϕ, η, ψ llegan a convertirse en coordenadas polares de los puntos relativos a los orígenes. Ahora sean o', o'' cualquiera de los dos puntos infinitamente cerca de O. Para cantidades dependientes sobre o', o'', utilizamos las notaciones anteriores con los acentos correspondientes. Por Hipotesis

$$\frac{du' + dv'i}{dx' + dy'i} = \frac{du'' + dv''i}{dx'' + dy''i}$$

Consecuentemente

$$\frac{du' + dv'i}{du'' + dv''i} = \frac{\eta'}{\eta''} e^{(\psi' - \psi'')i} = \frac{dx' + dy'i}{dx'' + dy''i}$$

$$= \frac{\epsilon'}{\epsilon''} e^{(\phi' - \phi'')i}$$

Y luego

$$\frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\epsilon'}{\epsilon''}, \psi' - \psi'' = \phi' - \phi''$$

Es decir, en los triángulos $o'Oo''$ y $q'Qq''$ los ángulos $o'Oo''$, $q'Qq''$ son iguales y los lados correspondientes son proporcionales.

Esto proporciona la similitud de los dos triángulos correspondientes infinitamente pequeñas, y por consiguiente, en general, la similitud de las partes más pequeñas del plano A y sus imágenes en el plano B.

Una excepción a este resultado se produce sólo en el caso especial de que las variaciones correspondientes de las cantidades z y w no están en proporción finita. Nos tácitamente excluye la excepción de nuestra deducción.[2]

4.

Si escribimos el cociente diferencial $\frac{du+dvi}{dx+dyi}$ en la forma

$$\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i\right) dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i\right) dyi}{dx + dyi}$$

Es evidente que tendrá el mismo valor para cualquiera de los dos valores de dx y dy exactamente cuando

[2]Sobre este tema, véase: 'solución general del problema de la cartografía de las partes de una superficie para que la imagen es similar a la original en las partes ms pequeas ", CF Gauss. (Respuesta a la pregunta del premio 1822 propuesto por la Sociedad Real de Ciencias en Coponhagen *Astronomische Abhandlungen*, editado por Shumache, vol III, Altona 1825; Gauss, *Collected works* , vol IV, p 189)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

Por tanto, esta condición es necesaria y suficiente para $w=u+vi$ al ser una función de $z=x+yi$. Para cada término de la función, se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Esta ecuación es la base para la investigación de las propiedades de los términos individuales de tal función. Damos la prueba de las más importantes de estas propiedades antes de emprender un tratamiento más profundo de la función completa. Sin embargo, lo primero que establecemos son algunos puntos relativos a cuestiones más generales, con el fin de allanar el terreno de la investigación.

5.

Para el tratamiento siguiente nos permitirá x, y variar en una región finita. La posición del punto O ya no se considera como siendo en el plano A, pero en una superficie T hacia fuera sobre el plano. Elegimos este texto, ya que es inofensivo para hablar de una superficie de reposo en otro, dejar abierta la posibilidad de que la posicin de O se puede extender más de una vez sobre una parte determinada del plano.

Sin embargo, en tal caso, se supone que las porciones de superficie situadas una sobre otra no se conectan a lo largo de una línea. Así, un plegado de la superficie, o una división de la superficie en partes superpuestas, no se produce.

Ahora, el número de piezas de superficie superpuestas en cada parte de la placa está completamente determinada, cuando damos el límite de la región y su dirección (es decir, su interior y los costados exteriores). Un tránsito de estas piezas puede adoptar diferentes formas.

En efecto, si trazamos una línea a través de la parte del plano cubierto por la superficie, el número de superficies superpuestas sólo cambios en cruzar la frontera. De hecho, los cambios en el número de móvil desde el exterior hacia el interior por $+1$, en el caso contrario por -1. As, el número se determina en todas partes. A lo largo del borde de la línea, cada porción de superficie limítrofe continúa de una manera definida, siempre y cuando la línea no alcanza el contorno. Para indeterminación sólo puede ocurrir en un punto aislado, y en consecuencia se produce bien en un punto de la línea ℓ en el interior de la superficie, y ambos lados del mismo en una tira suficientemente estrecha de superficie, cuyo número es igual a ambos lados. Especificación de una direccin definida de la línea, denotan las partes de la superficie en el lado izquierdo por $a_1,\cdots,a_n$ y los de la derecha por $a_1^{'},\cdots,a_n^{'}$. Cada parte a continuará en una de las partes $a^{'}$. En efecto, este será en general la misma parte a lo largo de la longitud de la línea ℓ, excepto por ciertas posiciones de ℓ se puede cambiar en un momento dado. Supongamos que por encima de un punto σ (es decir, a lo largo de la parte anterior de ℓ) las porciones de superficie $a_1,\cdots,a_n$ son conectadas respectivamente con las porciones $a_1^{'},\cdots,a_n^{'}$ mientras que por debajo $\sigma, a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2},\cdots,a_{\alpha n}$ conectados respectivamente con $a_1^{'},\cdots,a_n^{'}$. Aqui $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ es una permutación de $1,\cdots,n$. Un punto de a_1 que pasa a $a_1^{'}$, encima σ, pasará a $a_{\sigma 1}$ si nos remontamos a la izquierda por debajo de σ. Si un punto se mueve alrededor de σ, de izquierda a derecha, el índice de la parte de la superficie en la que se encuentra toma sucesivamente los valores

$$1, \alpha_1, \alpha_{\alpha 1}, \cdots, \mu, \alpha_\mu \cdots$$

En esta secuencia, siempre que el término 1 no se repite, los términos son necesariamente distintos. En un término intermedio arbitrario α_μ es necesariamente precedido por μ y en sucesión directa a todos los términos anteriores hasta 1. Sin embargo, después de un cierto número de términos, por ejemplo m, un número evidentemente menor que n, el término 1 reaparece, los otros términos entonces debe repetirse en el mismo orden. El punto que se mueve alrededor de σ vuelve después de cada m circuitos en la misma parte de la superficie y se limita a m partes superficiales superpuestos, que cumplen por encima de σ en un único punto. Llamamos a este punto, un punto de ramificacin de orden $m-1$ de la superficie de T. Repetir el procedimiento, las restantes $n-m$ partes de la superficie. En este caso, el punto de ramificación adicional de órdenes $m_1 - 1$, $m_2 - 1$, $\cdots$ son localizamos en σ.

Cuando la posición y la dirección del límite de T, y la posición de los puntos de ramificación, se les da, entonces T es o bien completamente determinado, o se limita a uno de un número finito de formas distintas. Esto último ocurre, en la medida en que estas partes determinan puede acostarse sobre diferentes partes de la superficie superpuesta.

Una variable que, en general, después de excluir líneas aisladas o puntos[3], toma un valor definitivo en cada punto O de la superficie T que varía continuamente con posiciones, obviamente puede considerarse como una funcin de x, y. cuando nos referimos a las funciones de x, y en lo que sigue. Nosotros nos limitamos a las superficies que no se separaron a lo largo de una línea.

6.

Consideramos dos partes de superficie como conectado, o que pertenecen a una sola pieza, si desde cualquier punto de una parte a cualquier punto de la otra, una línea se pueden extraer interior a la superficie. Consideramos dos partes de forma separada, cuando este procedimiento no es posible. El estudio de la conectividad de una superficie bases en su descomposición a través de cortes transversales, es decir, las líneas que atraviesan el interior de un punto límite simplemente (sin punto ocurriendo multiplicar) a otro punto límite. El punto terminal puede estar en la parte de la frontera con ello unido, y por lo tanto en un punto anterior del corte transversal.

Una superficie que está conectado se separaron por cada corte transversal, se dice que está simplemente conectado, de lo contrario se múltiplemente conectado.

Teorema 1 *Una superficie simplemente conectada se divide por cada corte transversal ab en dos piezas simplemente conectados.*

[3]Estas restricciones no surge de la definición de una función, pero es necesario para la aplicación de cálculo infinitesimal a ella. Como un ejemplo de una función discontinua en todos los puntos de una superficie, tomar la funcin cuyo valor es 1 para racional x y y, y de lo contrario es 2. No podemos aplicar a la función ya sea diferenciación o integración, por lo que no puede utilizar directamente el cálculo infinitesimal. La restricción arbitraria puesto aquí en la superficie T se justificará más adelante (Sección 15).

Supongamos que una de las piezas no está destruida por un cd corte transversal. Hay tres casos posibles: ninguno de los criterios de valoracin c, d se encuentra en ab, c sólo en ab, ambos son de ab. Reunirse con la superficie respectivamente a lo largo de la línea ab conjunto; a lo largo de la parte cd, o a lo largo de la parte de la lnea cd, se obtiene una superficie conectada que surge de un corte transversal de a, contradiciendo a la hipótesis.

Teorema 2 *Supongamos que T es una superficie dividida por n_1 cortes trasnversales*[4] *q_1 en un sistema T_1 de m_1 de piezas simplemente conectadas, y n_2 cortes trasnversales q_2 en un sistema de piezas simplemente T_2 de m_2. Entonces $n_2 - m_2 \leq n_1 - m_1$*

Cada linea q_2 no completamente contenida en the sistema de corts transversales q_1, junto con los rendimientos del sistema de cortes q_1 uno o varios cortes transversales $q_2^{'}$ of la superficie T_1. Como criterios de valoración de los cortes transversales $q_2^{'}$, tenemos:

1. Los $2n_2$ extremos de los cortes transversales q_2, a excepción de aquellos cuyos extremos cubren parte del sistema de líneas q_1

2. Todo punto intermedio de un corte transversal q_2 en el que éste corte se reúne como punto intermedio de una línea q_1 excepto para el caso en que el punto está ya en otra línea de q_1 , es decir, cuando al final de un corte q_1 coincide con este punto.

   Denotemos ahora por μ el número de veces que ambos sistemas se unen o se separan (donde, en consecuencia, un punto comn aislado es para ser contado dos veces); por ν_1, número de veces y final de una linea q_1 coincide con una parte intermedia de la linea q_2; por ν_2, el número of veces y la parte final de una linea q_2; y finalmente por ν_3, el número de veces y final de una parte de la linea q_2 coincide con una parte intermedia de la linea q_1. Luego caso 1) rendimientos $2n_2 - \nu_2 - \nu_3$ de los puntos finales, caso 2) rendimiento de $\mu - \nu_1$ de los puntos finales, los cortes transversales $q_2^{'}$. Los dos casos considerados en conjunto producen todos los puntos finales, cada uno sólo una vez. El número de estos cortes transversales es por lo tanto

$$\frac{2n_2 - \nu_2 - \nu_3 + \mu - \nu_1}{2} = n_2 + s$$

   En una forma completamente análoga se concluye que el número de cortes transversales de la superficie T_2 formado por las lineas q_1, es

$$\frac{2n_1 - \nu_1 - \nu_3 + \mu - \nu_2}{2} = n_1 + s$$

   Ahora la superficie T_1 estará obviamente transformada por los $n_2 + s$ cortes transversales $q_2^{'}$ en la misma superficie obtenida desde T_2 por los $n_1 + s$ cortes transversales $q_1^{'}$. Pero T_1 comprende m_1 piezas simples conectadas y consecuentemente, por el teorema

[4] Por una descomposición través de varios cortes transversales se entiende una descomposición sucesiva. Es decir, la superficie que se obtiene por un corte transversal se descompone adicionalmente mediante un corte transversal nuevo.

1, es descompuesta por n_2+s cortes transversales en m_1+m_2+s piezas. Consecuentemente, si $m_2 < m_1 + n_2 - n_1$, el número de piezas de la superficie T_2 sería incrustada por más de $n_1 + s$ por el hecho de $n_1 + s$ cortes transversales, lo cual es absurdo.

Como consecuencia de este teorema, si el número indeterminado de cortes transversales es denotado por n, y el número de piezas por m, entonces $n-m$ es constante para toda división de la superficie dentro de las piezas simplemente conectadas. Para considerar las dos divisiones, por n_1 cortes transversales en m_1 piezas y por n_2 cortes en m_2 piezas. Desde el primer conjunto de piezas estan simplemente conectadas, tenemos

$$n_2 - m_2 \leq n_1 - m_1$$

Desde el segundo conjunto estan simplemente conectadas, tenemos

$$n_1 - m_1 \leq n_2 - m_2$$

Y puesto que ambas desigualdades se mantienen, tenemos $n_2 - m_2 = n_1 - m_1$.

Estos números pueden propiamente designados "conectados" de una superficie. Por definición, este disminuirá uno por corte transversal. Estará sin cambios por el efecto de un corte simple, partiendo de un punto del interior y que termina ya sea en un punto de la frontera, o en un punto de un corte anterior. Se incrementa en 1, por un simple corte en el interior de la superficie con dos puntos finales. En el primer caso, el corte se convierte en un corte transversal, si hacemos un corte transversal nuevo. En este último caso, dos cortes nuevos transversales se necesitan.

Finalmente la conectividad de la superficie que se forma a partir de varias piezas se obtiene sumando las conectividades de estas piezas.

En lo que sigue, por lo general nos limitamos a la superficie que tienen una sola pieza, y para su conexión simplemente hablar de doble simple, y as sucesivamente. Aquí se entiende, por una superficie de $n - veces$ conexiones, una superficie que puede ser descompuesto por $n-1$ cortes transversales en una que se conecta simplemente.

En cuanto a la dependencia de la conexión de la frontera en la conexión de la superficie, es evidente que:

(a) El límite de una superficie simplemente conectada necesariamente comprende una línea cerrada única.

Supongamos que el límite consta de dos piezas separadas. Un corte transversal q que une un punto de la superficie de la otra. Para un punto de la pieza a a un punto de otra pieza b, meramente divididas las partes conectadas de la superficie cada una. Por cada línea se puede formar una línea interior a la superficie a lo largo de una, a partir de un lado del corte transversal q y que termina en el lado opuesto. Así que q no divide la superficie, contradicción con la hiptesis.

(b) Cada corte transversal o bien disminuye en un 1, o se incrementa en 1, el número de piezas de la frontera.

Para un corte transversal q hay tres casos: o q se une a un punto de una pieza del lmite a, a un punto de otra pieza b. En este caso, todas estas líneas tomada en la secuencia a, q, b, q forma una sola pieza cerrada de la frontera. O, q se une a dos puntos de una sola pieza de la frontera. En este caso, el límite se divide en dos piezas a través de los dos extremos, cada uno de los cuales, tomados junto con el corte transversal, da una pieza cerrada de la frontera.

O, por último, q termina en uno de sus propios puntos anteriores. En este caso q puede ser considerado como que comprende una línea cerrada o y una línea ℓ que une un punto de o a punto de una pieza límite a, En este caso o, por una parte, y a, ℓ, ℓ, o, por el otro camino cerrado, se cierran formando cada uno una pieza de la frontera.
En lugar de dos piezas de contorno se obtiene uno, en el primer caso, y dos en lugar de uno, en los casos de remolque últimos. Esto produce nuestro teorema.

El número de piezas que componen el límite de una porción de $n - veces$ conectado a la superficie, es por lo tanto ya sea n, o menos de n por un número par.

De esto podemos obtener un corolario.

Si el número de piezas de contorno de una superficie de $n - veces$ conectado es n, la superficie se divide en dos partes separadas por cada corte simple cerrado en su interior.

Para la conectividad no se altera por este corte y las piezas de contorno número se incrementa en 2. Por consiguiente, si la nueva superficie se conecta, sería $n - nupla$ conectado con piezas de contorno $n + 2$, lo cual es imposible.

7.

Sean X y Y dos funciones de x, y continuas en todo punto de la superficie T partidos en A. Con la integral de superficie extendida sobre todos los elementos de dT de esta superficie, tenemos

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT = - \int (X \cos \xi + Y \cos \eta)\, ds$$

Aquí, en cada punto de la frontera, ξ denota la inclinacin del interior normal al eje x, y η denota su inclinación con respecto al eje y. En el lado derecho, la integral se extiende sobre todos los elementos ds de la línea de límite.

En orden al transformar la integral $\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dT$, dividamos la parte del plano A cubierto por T en tiras, via un sistema de lineas paralelas al eje x, de tal manera que cada punto de ramificación de T cae en una de estas líneas. Con este supuesto, cada parte de T correspondiente a una de estas tiras se forma de una o más piezas trapezoidales separadas. La contribución a $\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dT$ de una de estas tiras de la superficie, cortar un elemento dy del eje y, obviamente, será $dy \int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx$.

Aquí la integral es tomada sobre (uno ó más) lineas que pertenecen a la superficie T que caen sobre una emisión normal a partir de algún momento de este elemento dy. Ahora vamos a los extremos inferiores de estas líneas sean $O_1, O_2, O_3, \cdots$, (es decir, corresponden a los valores más pequeños de x); los puntos superiores $O^{(1)}, O^{(2)}, O^{(3)}, \cdots$, y denote por $X_1, X_2, \cdots, X^{(1)}, X^{(2)}, \cdots$ los valores de X sobre estos puntos. Sean $ds_1, ds_2, \cdots, ds^{(1)}, ds^{(2)}, \cdots$ los correspondientes elementos aislados del límite de las tiras de la superficie, y $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots$ los valores de ξ para estos elementos. Entonces

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx = -X_1 - X_2 - X_2 \cdots + X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)} \cdots$$

Los angulos ξ son evidentemente agudos en los extremos inferiores, obtuso en los extremos superiores; consecuentemente

$$dy = \cos\xi_1 ds_1 = \cos\xi_2 ds_2 = \cdots = -\cos\xi^{(1)} ds^{(1)} = -\cos\xi^{(2)} ds^{(2)} = \cdots$$

Sustituyendo estos valores tenemos

$$dy \int \frac{\partial X}{\partial x}\, dx = -\sum X \cos\xi ds$$

La suma se extiende sobre todos los elementos de borde cuya proyección en el eje y es dy

Por integración sobre todos los elementos dy que existen, es claro que todos los elementos de la superficie T y todos los elementos del límite serán agotados.

En consecuencia se obtiene, con la integracin tomada sobre el permetro,

$$\int \frac{\partial X}{\partial x}\, dT = -\int X \cos\xi ds$$

Por un razonamiento totalmente análogo obtenemos

$$\int \frac{\partial Y}{\partial y}\, dT = -\int Y \cos\eta ds$$

De modo que

$$\int \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dT = -\int (X \cos\xi + Y \cos\eta)\, ds$$

Lo que queriamos probar.

8.

En la línea de frontera, denotamos por s la distancia de un punto general O_o, desde un punto fijo inicial, en una dirección que se fijará a continuacin. En la normal en O_o, sea p denotemos la distancia de un punto indeterminado O desde O_o; la distancia es tomada siendo positiva por un punto interior al normal. Los valores de x y y al punto O claramente puede ser considerada como funciones de s y p. En los puntos de la línea de límite tenemos entonces las derivadas parciales

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \cos\xi, = \frac{\partial y}{\partial p} = \cos\eta, = \frac{\partial x}{\partial s} = \pm\cos\eta, \ \frac{\partial y}{\partial s} = \pm\cos\xi$$

Aquí tomemos el signo superior si la dirección en la que s aumenta forma el mismo ángulo con p del eje x con el eje y. En el caso contrario, se toma el signo inferior. Tomamos la direccin de s en aumento en todo el contorno de tal forma que

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial p} \ o \ \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{\partial x}{\partial p}$$

Esto no esencialmente restringir la generalidad de nuestros resultados.

Obviamente podemos extender esta regla a las líneas interiores a T. A continuación, en la determinación de las señales de dp y ds, si su dependencia mutua se fija como antes, tenemos que indicar cómo solucionar el signo de dp o de ds. Para una línea cerrada, que se incluirá una de las dos partes en que corta la superficie, y tomar la línea como su límite, lo que determina el signo del dp. Para una línea que no está cerrada, se indica en lugar del origen de la línea, es decir, el punto final donde s toma el valor mínimo.

Sustituyendo los valores obtenidos para $\cos\xi$ y $\cos\eta$ en la ecuación probada en la anterior sección, con el dominio de integración como antes, tenemos

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) dT = -\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}\right) ds = \int\left(X\frac{\partial y}{\partial s} - Y\frac{\partial x}{\partial s}\right) ds$$

9.

Se aplica el resultado al final de la sección anterior para el caso en que, a lo largo de la superficie,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Esto conduce a los siguientes teoremas.

(a) Sean X y Y dos funciones continuas a lo largo de T que satisface

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Entonces, integrando sobre todo el límite de T,

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = 0$$

Considerando una superficie arbitraria T_1 extendida sobre A y dividida en forma arbitraria en dos piezas T_2, T_3. La integral

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds$$

Sobre el límite de T_2 puede ser considerada como la diferencia entre las integrales sobre los limites de T_1 y T_3. Por donde esta T_3 la frontera de T_1 las dos integrales se anulan; cada otro elemento corresponde a un elemento de la frontera de T_2

Usando esta información, dedudimos de (a).

(b) El valor de la integral

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds$$

Toma sobre el límite de una superficie extirada sobre A, se mantiene constante cuando la superficie aumenta o disminuye en tamaõ de manera que no atraviesa parte de de la superficie donde la hipótesis del teorema de (a) son violados.

Cuando las funciones X, Y satisface la equación diferencial de arriba a lo largo de la superficie T, pero tenemos discontinuidades en líneas o puntos aislados, que pueden rodear cada una de estas líneas o puntos con una región arbitraria pequeña de la superficie. Aplicando el teorema (b), se obtiene

(c) La integral

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds$$

Sobre el límite de T es igual a la suma de las integrales

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds$$

Toma alrededor de todas las discontinuidades. La contribución a la integral de cada discontinuidad es constante, sin embargo reducir el límite que lo encierra. La contribución de un punto de discontinuidad es necesariamente cero si, ρ denota la distancia de O desde la continuidad, ρX y ρY llega a ser infinitamente pequeña con ρ. Tome un momento, como el origen, y una dirección arbitraria como las iniciales de las coordenadas polares ρ, ϕ; elegir como la curva límite de un círculo de radio ρ y centro en este punto. Luego la integral en cuestión es expresada por

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) \rho d\phi$$

Este no puede tomar un valor distinto de cero χ, ya que cualquiera que sea el valor de χ, podemos tomar ρ tan pequeña que sea el valor de $X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p}$ ρ es más pequeño que $\frac{\chi}{2\pi}$ para todo ϕ, dando

$$\int_0^{2\pi} \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) \rho d\phi < \chi$$

(d) Supongamos que para una superficie simplemente conectada repartidas sobre A, se tiene que

$$\int \left(X\frac{\partial x}{\partial p} + Y\frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = 0$$

Cuando integramos alrededor de una parte arbitraria de la superficie; or

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

Luego esta integral, toma entre dos puntos cualesquiera fijos O_0 and O_1, tienen el mismo valor para cualquier línea de O_0 a O_1.
Las dos caminos s_1 y s_2 se unen de O_0 a O_1, en conjunto forman una linea s_3. O esta misma línea pasa por ningún punto más de una vez, o se lo puede dividir en varias líneas simples cerradas como sigue. Iniciar desde un punto arbitrario y describe el contorno. Cada vez que nos encontramos con un punto ya recorrido, separe de la parte intermedia, y considerar la parte siguiente como la extensión inmediata de la parte anterior de la curva. Cada línea divide la superficie en una pieza simplemente conectado y una pieza doblemente conectado, y forma el límite completo de una de estas piezas. La integral

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

Corresponde a la pieza simplemente conectada la cual seria 0 por hipótesis. En consecuencia mantiene la misma propiedad para la integral la cual toma valores sobre el camino s_3 con la cantidad s con la cantidad tratada como el aumento a lo largo en la misma dirección. De ello se deduce que las integrales a lo largo de las líneas s_1 y s_2 se anulan, si no hay un cambio en la dirección; es decir, una linea pasa de O_0 a O y la otra de O a O_0. Si se altera el sentido de la integral de este último, se vuelven iguales.

Considere cualquier superficie T, en general

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Podemos remover la discontinuidad, si es necesario, de modo que para cualquier parte de las piezas restantes de la superficie

$$\int \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

y reducir el resto de la superficie a través de cortes transversales a una superficie simplemente conectada T^*. Para cada camino en el interior de T^*, desde un punto O_0 al otro punto O, la integral anterior tiene el mismo valor, que por brevedad denotamos por

$$\int_{O_0}^{O} \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

La integral, donde O_0 es fijo y O es arbitrario, es independiente para cada O de la trayectoria que une los puntos; así puede ser visto como una función de x, y. La variación de esta función cuando O se mueve a lo largo sobre la línea en un elemento ds es

$$\left(Y\frac{\partial x}{\partial y} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

Esto es continuo en todo T^* e igual en ambos lados del corte transversal de T.

(e) La integral

$$z = \int_{O_0}^{O} \left(Y\frac{\partial x}{\partial s} - X\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds$$

Así representa para O_0 fijo una función de x, y continua a lo largo de T^*, pero varia por una constante en cualquier lugar a lo largo del cruce de un corte transversal de T de punto a otro en ramificacin. La función tiene derivadas parciales

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = Y, \; \frac{\partial Z}{\partial y} = -X$$

Las variaciones sobre el cruce de cortes transversales dependen de ciertas cantidades, independientes entre s, iguales en número al número de cortes transversales. Para cuando se corre sobre el sistema de cortes transversales en un sentido retrógrado a las partes posteriores primeron esto es en todas partes de variación determinado si su valor al comienzo de cada corte se conoce. Sin embargo, estos últimos valores son independientes uno de otro.

10.

Para las funciones hasta aquí notadas por X y Y, tenemos

$$u\frac{\partial u'}{\partial x} - u'\frac{\partial u}{\partial x}, \; u\frac{\partial u'}{\partial y} - u'\frac{\partial u}{\partial y}$$

Respectivamente. Luego

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=u\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right)-u'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Así, si u, u' satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}=0$$

Tenemos

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0$$

Podemos aplicar el resultado a la anterior sección como

$$\int\left(X\frac{\partial x}{\partial p}+Y\frac{\partial y}{\partial p}\right)ds$$

la cual es igual a

$$\int\left(u\frac{\partial u'}{\partial p}+u'\frac{\partial u}{\partial p}\right)ds$$

Supongamos ahora que nunca u y sus derivadas parciales de orden primero tiene discontinuidades a lo largo de una línea. Supongamos, además, que en cada punto de discontinuidad,ρ denotada la distancia de O a la discontinuidad, $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ llegan a ser infinitamente pequeas con ρ. De acuerdo con la observación en c. de la sección anterior, la discontinuidad de u puede ser ignorada.

Para, dada una línea recta desde una de estas discontinuidades, tomar un valor R de ρ tal que

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}=\rho\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho}+\rho\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}$$

sigue siendo finito $\rho<R$. Sea $u=U$ para $\rho=R$, sea M el más grande en valor absoluto de $\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}$ en el intervalo de la linea con $0<\rho<R$. Luego, nuevamente haciendo caso omiso al signo,

$$u-U<M(\log\rho-\log R)$$

De modo que $\rho(u-U)$, en efecto ρu, llegase a ser infinitamente pequeño con ρ. Por hipótesis, este se mantiene también para $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$, $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$. Consecuentemente, si u' no llega a ser discontinua, los mismo sucede para

$$\rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial x}-u'\frac{\partial u}{\partial x}\right)\text{ y }\rho\left(u\frac{\partial u'}{\partial y}-u'\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

de modo que el caso considerado in el anterior paragrafo aplica aqui.

Suponga ahora que la superficie T forma desde la posición de O es simple donde ésta cubre A. tome un punto arbitrario fijo O_0 a T donde $u = u_0$, $x = x_0$, $y = y_0$. La cantidad

$$\frac{1}{2}\log((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2) = \log r$$

Considerada como una función de x y y, tenemos la propiedad que

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0$$

y tiene una discontinuidad solo para $x = x_0$, $y = y_0$; y en lo que nuestro caso solamente para un punto de la superficie T.

Consecuentemente, desde la sección 9., *c.* con $u' = \log r$, la integral

$$\int \left(u\frac{\partial \log r}{\partial p} - \log r \frac{\partial u}{\partial p} \right) ds$$

Tiene el mismo valor para el límite conjunto de T como lo hace para un circuito arbitrario alrededor del punto O. Tome para este circuito la circunferencia de un circulo sobre el cual r es constante, y denotado por ϕ el ángulo de un radio con punto final O, la medida desde un punto arbitrario de la circunferencia en una dirección definida. La integral es

$$-\int_0^{2\pi} u\frac{\partial \log r}{\partial p} r d\phi - \log r \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds$$

Que, desde

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0$$

Reduce a

$$-\int_0^{2\pi} u\, d\phi$$

Este valor llega a ser $-u_0 2\pi$ para r infinitamente pequeño si u es continua sobre O_0.

Bajo las hipótesis anteriores sobre u y T, entonces, tenemos, para un pnto arbitrario O_0 al interior de la superficie, donde u es continua

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u\frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

Con la integral tomada a través del límite; y

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\phi$$

Como la integral se toma alrededor de un circulo O_0. La primera de estas expresiones son las consecuencias de lo siguiente

Teorema *Suponga que, en general, la función satisface*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dentro de una superficie T extendida sobre el plano A. Suponga que además que

(a) Los puntos donde la esta ecuación diferencial no llena una región de la superficie.

(b) Los puntos en los cuales u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ son discontinuas no llene cualquier línea.

(c) Para cada discontinuidad de las cantidades $\rho\frac{\partial u}{\partial x}$, $\rho\frac{\partial u}{\partial y}$ llegan a ser infinitamente pequeños a lo largo con la distancia ρ de O desde la discontinuidad, y

(d) Una discontinuidad de u, que puede ser removida modificando el valor de u es aislandolo, excluyendolo.

entonces u y todas estas derivadas parciales son continuas y finitas para todos los puntos interior de la superficie.

Ahora consideremos O_0 como un punto variable. Las cantidades que varían sólo en la expresión

$$\int \left(\log r \frac{\partial u}{\partial p} - u \frac{\partial \log r}{\partial p} \right) ds$$

son $\log r$, $\frac{\log r}{\partial x}$, $\frac{\partial \log r}{\partial y}$. Sin embargo, estas cantidades, junto con sus derivadas parciales, son funciones finitas y continuas de x_0, y_0 en cada punto de la frontera mientras O_0 restos en el interior de T; las derivadas parciales pueden ser expresadas como funciones racionales de estas cantidades, que contiene sólo potencias de r en el denominador. La propiedad continuidad persiste por el valor de nuestra integral y por consiguiente para las funciones u_0. Ahora u, por las hipótesis anteriores, sólo se diferencian en el valor de nuestra integral en puntos aislados donde U es discontinua. Esta posibilidad se excluye por hipótesis (d) de nuestro teorema.

11.

Bajo la hipótesis de u y T al final del párrafo anterior, tenemos los siguientes teoremas:
I. Si $u = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ a lo largo de una línea, entonces $u = 0$ en todas partes.

Se demuestra primero que una línea λ donde $u = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ no puede ser el límite de una recion de la superficie, donde $u > 0$.

Para suponer que esta tuvo lugar. De una tomar una pieza limitada por un lado por λ y sobre el otro lado por un circulo; el centro del circulo O_0 siendo excluidos de esta pieza. Esta construcción siempre es posible. Con la integral tomada sobre el límite de estas piezas, y con r, ϕ denotadas en coordenadas polares de O con respecto a O_{01} tenemos

$$\int \log r \frac{\partial u}{\partial p}\, ds - \int u \frac{\partial \log r}{\partial p})\, ds$$

Por hipótesis se deduce que, con la integral tomada sólo sobre el circulo,

$$\int u\, d\phi + \log r \int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0$$

Desde que

$$\int \frac{\partial u}{\partial p}\, ds = 0$$

Obtenemos

$$\int u\, d\phi = 0$$

que es incompatible con la hipótesis de que $u > 0$ en el interior de a.

De una manera similar se demuestra que las ecuaciones $u = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial p} = 0$ no puede mantener en la línea de límite de una región de la superficie b, donde u es negativa.

Suponga ahora que u y $\frac{\partial u}{\partial p}$ son 0 sobre una línea de la superficie T, y hay una región de T donde $u \neq 0$. Es evidente que tal región está limitada ya sea por esta línea o por una región de la superficie donde $u = 0$. Consecuentemente, siempre está limitada por una linea donde u y $\frac{\partial u}{\partial p}$ son 0, que conduce necesariamente a una de las hipótesis rechazada anteriormente.

II. Si u y $\frac{\partial u}{\partial p}$ han dado valores a lo largo de una línea, entonces u es determinada a lo largo de T.

Sean u_1 y u_2 dos funciones cualesquiera que satisfacen las anteriores condiciones sobre u. Estas condiciones también aplica a la diferencia $u_1 - u_2$. Suponga que u_1, u_2 son identicas, a lo largo con sus derivadas parciales de primer orden con respecto a p, sobre una línea en algunas regiones de la superficie. Entonces a lo largo de esta linea $u_1 - u_2 = 0$ y $\frac{\partial}{\partial p}(u_1 - u_2) = 0$, mientras que $u_1 - u_2$ no sea 0 en cualquier lugar, contradice el Teorema I.

III. Si u no es constante en T, entonces los puntos en T donde u toma un valor constante son necesariamente lineas las cuales divide regiones donde u es grande de regiones donde u es pequeño.

Este teorema es obtenido por combinación de los siguiente:

u no puede tener un mínimo o máximo en los puntos interiores de T;
u no puede ser una constante en tan sólo una parte de T;
Las líneas in las cuales $u = a$ no pueden unirser por porciones de la superficie en ambos lados donde $u - a$ tienen el mismo signo.

Todas estas proposiciones cuya negación, como se ve fácilmente, llevaría una contradicción con la ecuacin

$$u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \, d\phi$$

o

$$\int_0^{2\pi} (u - u_0) \, d\phi = 0$$

Demostraba en la sección anterior. La negación es consecuentemente imposible.

12.

Pasamos ahora de nuevo al tratamiento de una variable compleja $w = u + vi$, la cual, generalmente hablando (es decir, exclusión de las líneas y puntos aislados) tienen un único valor por cada punto O ode la superficie T que varia continuamente con la posición de O. por otra parte supongamos que la equación

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Mantener a salvo los valores excluidos. Como se indicó anteriormente, decimos que W es una función de $x = x + iy$. Para simplificar lo siguiente, supogamos que una función de z no tiene discontinuidad que pueda ser removida al cambiar su valor en un punto aislado.

La superficie T al principio se suponía simplemente conexo, y se extendió únicamente sobre el plano A.

Teorema*Suponga que el conjunto de las discontinuidades de la función w de z no contiene una línea. Además suponga que en un punto arbitrario O' de la superficie, donde $z = z'$, $(z - z')w$ lleva a ser infinitamente pequeña como O tiende a O'. Entonces w, a lo largo con todas estas derivadas, es finita y continua en todos los puntos interiores de la superficie.*

Sea $z - z' = \rho e^{\phi i}$. La hipótesis sobre la variación de la cantidad w tiene la siguiente consecuencias para u y v

1.) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

y

2.) $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

a lo largo de T;

3.) Las funciones u y v no son discontinuas a lo largo de una línea;

4.) Para todo punto O', las cantidades ρu y ρv llegan a ser infinitamente pequeñas con la distancia ρ de O desde O'.

5.) Ni u ni v tienen discontinuidades que pueden ser removidas por cambio el valor en un punto aislado.

Como consecuencia de las hipótesis 2), 3), 4), para alguna porción de la superficie T tenemos

$$\int \left(u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

La integral se toma sobre la frontera, desde III, sección 9. Además, la integral

$$\int_{O_0}^{O} \left(u\frac{\partial x}{\partial s} - v\frac{\partial y}{\partial s} \right) ds = 0$$

(Por IV, sección 9) tiene el mismo valor a lo largo de toda línea de O_0 a O, y para O_0 fijo forma una función continua U de x, y excepto por puntos aislados. Recordando 5), las derivadas parciales satisfacen $\frac{\partial U}{\partial x} = u$ y $\frac{\partial U}{\partial y} = -v$ en todo punto. Al sustituir estos valores por u y v, las hipótesis 1), 3), 4) llegan a ser las condiciones del teorema al final de la sección 10. En consecuencia la función U es finita y continua, a lo largo con estas derivadas parciales, en todo punto de T. Así mismo vale pra la función compleja $w = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} i$, y estas derivadas con respecto a z.

13.

Ahora investigar lo que sucede, conservando las otras hipótesis de las sección 12., se supone que, para un determinado punto O' interior a la superficie,

$$(z - z')w = \rho e^{i\phi} w$$

No llega a ser infinitamente pequeña cuando O tiende a O'. En este caso w llega a ser infinitamente larga cuando O tiende a O'. Supongamos que, si la cantidad w no es de orden de magnitud $\frac{1}{\rho}$, es decir, su cociente no tiene un límite finito, entonces al menos el orden de dos cantidades esta en un radio finito. Es decir, existe una potencia de ρ cuyo producto con w nunca llega a ser pequeño con ρ, o sigue siendo finito. Si μ es el exponente de tal potencia y n es el entero más pequeño con $n > \mu$, entonces la cantidad $(z - z')w = \rho^n e^{i\phi} w$ llega a ser infinitamente pequeña con ρ. Ahora, $(z - z')^{n-1}w$ es una función de z (desde $\frac{d}{dz}((z - z')^{n-1}w)$ es independiente de dz). Esta función satisface, en esta región de la superficie, la hipótesis de la sección 12, y consecuentemente es finita y continua en el punto O'. Notemos este valor O' por a_{n-1}. Entonces $(z - z')^{n-2}w.a_{n-1}$ es una función continua en O' y allí desvanece, y consecuentemente llega a ser infinitamente pequeña con ρ. Por la sección 12, $(z - z')^{n-2}w - \frac{a_{n-1}}{z-z'}$ es continua en el punto O'. Continuando este procedimiento, es obvio que restando una expresión de la forma

$$\frac{a_1}{z - z'} + \frac{a_2}{(z - z')^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z - z')^{n-1}}$$

w llega a ser una función sigue siendo finito y continua en O'.

En consecuencia, si varían las hipótesis de la sección 12, permitiendo que w llega a ser infinitamente larga como O tiende al punto O' en el interior de T, luego el orden de estas cantidades infinitas, si es finita, es necesariamente un entero a tener orden 1). Si este entero es m, entonces en que le correspondía una función que contenga constantes $2m$ arbitrarias, w llega a ser una función continua en O'.

Observación. Nosotros consideramos una funcion para obtener una constante arbitraria, cuando las posibles determinaciones de las constantes comprenden un dominio continuo unidimensional.

14.

Las restricciones sobre la superficie T de la sexxión 12 y 13 no son esencial para la validez de los resultados obtenidos. Obviamente se puede rodear cada punto interior a una superficie arbitraria con un trozo de la superficie que tiene las propiedades asumidas allí. La única excepción es el caso en el que este punto es un punto de ramificación de la superficie.

Al investigar este caso, consideremos la superficie T, o una pieza arbitraria de esta, que contiene un punto de ramificación de orden $n - 1$, donde $z = z' = x' + y'i$, y el mapa definido por la función $\zeta = (z - z')^{\frac{1}{n}}$ en otro plano Λ. Es decir, representamos el valor de la función $\zeta = \xi + \eta i$ en el punto O como un punto Θ de Λ con coordenadas rectangulares ξ, η, y tratar Θ como la imagen de O. La imagen de la región T obtenida en esta manera es una superficie conectada extendida sobre Λ, sin un punto de la ramificación en la imagen de Θ' de O', como mostraremos ahora.

Para fijar ideas, dibujemos un círculo de radio R alrededor del punto O en el plano A y dibujemos un diámetro paralelo al eje x, de modo que $z - z'$ es real sobre este diámetro. La pieza de la superficie T, alrededor del punto de ramificación, cortado por este círculo, se divide en ambos lados de este diámetro en n piezas separadas de forma semicircular, R es suficientemente pequeño. Las porciones de superficies sobre el lado del diámetro donde $y - y'$ es positivo será denotada por $a_1, \cdots, a_n$; aquellos en el lado opuesto por $a'_1, \cdots a'_n$. Supongamos además que para valores negativos de $z - z'$, $a_1, \cdots, a_n$ son conectados respectivamente a $a'_1, \cdots a'_n$, mientras para valores positivos ellos son conectados respectivamente a $a'_n, a'_1, \cdots, a'_{n-1}$. Entonces un punto O', que rodea el punto de ramificación en la dirección apropiada, corre la sucesin sobre las superficies $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \cdots, a_n, a'_n$ y desdes a'_n atras de a_1; por hipótesis es obviamente permitible. Presentamos las coordenadas polares sobre ambos planos, escribimos $z - z' = \rho e^{\phi}$, $\zeta = \sigma e^{\psi i}$, y escogemos como la imagen de la superficie de porción a_1 el valor $(z - z')^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\phi}{n} i}$. Aqui suponemos que $0 \leq \phi \leq \pi$. Luego $\sigma \leq R^{\frac{1}{n}}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}$ para todo punto de a_1; esta es la imagen en Λ en el sector de $\psi = 0$ a $\psi = \frac{\pi}{n}$ de un circulo alrededor de Θ' de radio $R^{\frac{1}{n}}$. En efecto, cada punto de a_1 corresponde a un punto de este sector variando continuamente con l. y viceversa. Así la imagen de a_1 es una superficie conectada hacia afuera simplemente sobre este sector. Analogamente, la imagen de $a'_1, a'_2, \cdots, a'_n$ son respectivamente sectores de la forma $\psi = \frac{\pi}{n}$ a $\psi = \frac{2\pi}{n}$, desde $\psi = \frac{2\pi}{n}$ a $\psi = \frac{3\pi}{n}$, $\cdots$, desdes $\psi = \frac{2n-1}{n}\pi$ a $\psi = 2\pi$. Aqui ϕ, es sucesivamente recorriendo desde π a 2π, de 2π a 3π, ... , de $(2n-1)\pi$ a $2n\pi$ para los puntos de estas superficies, que es posible en exactamente una manera.

Estos sectores siguen uno al otro en la misma manera que las superficies a y a', de tal manera que los puntos coincidentes corresponden a puntos coincidentes. Los sectores por lo tanto se pueden unir para dar la imagen conectada de una parte de T que rodea O', y esta imagen es obviamente una superficie simplemente extendida sobre el plano Λ.

Una variable que tiene un valor definido para cada punto O igualmente tiene un valor definido para cada punto Θ e inversamente, desde cada O corresponde sólo uno Θ y cada Θ un sólo O. Si la función es una variable de z, entonces esta es una funcion de ζ. En efecto, si $\frac{dw}{dz}$ es independiente de dz, entonces $\frac{dw}{d\zeta}$ es independiente de $d\zeta$, e inversamente. Concluimos que el resultado de la sección 12 y 13 son aplicables a todas las funcionnes w de z en los puntos de ramificación O', si son tratadas como funciones de $(z - z')^{\frac{1}{n}}$ continuacin, fijemos la expresin de la forma

$$\frac{a_1}{(z - z')^{\frac{1}{n}}} + \frac{a_2}{(z - z')^{\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{a_m}{(z - z')^{\frac{m}{n}}}$$

donde $a_1, a_2, \cdots, a_m$ son números complejos arbitrarios, la funcion llega a ser continua en O'.

Este teorema tiene el corolario que la función w es continua en O' si $(z - z')^{\frac{1}{n}} w$ llega a ser infinitamnete pequeña como O tiende a O'.

15.

Ahora consideremos una función de z con un valor definido para cada punto de una superficie arbitraria T extendida sobre A, no en todas constantes. Si representamos el valor $w = u + iv$ a O geométricamente como un punto Q del plano B con coordenadas rectangulares u, v, tenemos las siguientes consecuencias.

I. La totalidad de los puntos Q pueden ser consideramos como la forma de una superficie S, en los cuales cada punto corresponde a un punto O in T que varia continuamente con Q.

Para probar esto, obviamente nosotros sólo necesitamos mostar que la posición del punto Q siempre cambia a lo largo con la de O. (y, hablando en general, cambia continuamente). Esto se contiene en los siguientes resultados:

Una función $w = u + vi$ de z no puede ser constante a lo largo de la línea, a menos que w sea constante en todas partes.

Demostración . Si w toma el valor constante $a + bi$ a lo largo de la línea, entonces $u - a$ y $\frac{\partial(u-a)}{\partial p} = -\frac{\partial v}{\partial s}$ desaparecen no sólo en esta línea pero en todas partes, junto con

$$\frac{\partial^2(u-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u-a)}{\partial y^2}$$

Por la sección 11, I, $u - a = 0$. Desde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

También tenemos $v - b = 0$ en todo lugar, en contradiccón con la hipótesis.

II. Por la hipótesis hecha en I, dos partes de S no pueden ser conectadas juntas a menos que la parte correspondiente de T son conectadas juntas. Reciprocamente, cuando una conexión ocurra en T y w es continua, una conexión correspondiente en S.

Asumiento esto, el límite de S corresponde en parte al límite de T y en parte a la discontinuidad. El interior de S, excluido de puntos aislados, se extiende sobre B sin problemas. Es decir, la superficie nunca se divide en superficies superpuestas o pliegues sobre sí mismo.

Lo primero que sólo podria ocurrir, desde que T sea conectado de manera correspondiente, si T divide de esta manera contradice la hipótesis. El último caso se trata a continuación,
Mostramos primeramente, que un punto Q' donde $\frac{dw}{dz}$ es finito, no puede estar en un pliege de la superficie S. al mirar esto, rodeamos el punto O' correspondiente a Q', con

una pieza de la superficie T de alguna forma y tamaño. De acuerdo con la secci"on 3, el tamaño puede ser tomado tan pequeño que la forma de la pieza correspondiente sobre S difiere un poco como nosotros deseemos de la pieza sobre T. Consecuentemente este límite corta una porción de B que rodea Q'. sin embargo, esto es imposible si Q' se encuentra en un pliege de la superficie S.

Por I, $\frac{dw}{dz}$, como una función de z, puede ser sólo desaparecida por puntos. Desde w es continua en los punto de T considerados aquí, $\frac{dw}{dz}$ puede sólo llegar ser infinitamente a la ramificación de los puntos de la superficie. Esto proporciona el resultado deseado.

III. Consecuentemente, S es una superficie obedeciendo a la hipótesis que aquí impusimos sobre T en la sección 5. En esta superficie, la variable cantidad z tiene un valor para cada punto Q, el cual varia continuamente con la posición de Q de tal manera que $\frac{dz}{dw}$ es independiente de la dirección de variación. En consecuencia z, en el sentido del término especificado anteriormente, es una función continua de la cantidad compleja w sobre el dominio representado por S.
De esto, podemos obtener:

Sean O' y Q' puntos interiores de las superficies T y S correspondientes, en la cual $z = z'$, $w = w'$. Si ninguno de ellos es un punto de ramificación, $\frac{w-w'}{z-z'}$ tiende al límite cuando O tiende a O', y la imagen de una porción pequeña infinitesimal es similar a la porción. Sin embargo, si Q' es un punto de ramificación de orden $n-1$ y O' es un punto de ramificación de orden $m-1$, luego $\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$ tiene un límite finito como O tiende a O'. Para las regiones adyacentes que tenemos una forma de mapa, de fácil obtención de la sección 14.

16

Teorema *Sean α y β funciones arbitrarias de x, y para los cuales la integral*

$$\int \left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - \frac{\partial\beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} + \frac{\partial\beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

Toma sobre la superficie arbitraria T extendida sobre A, es finito. Si nosotros variamos α por funciones de fuga en el límite que son continuas, o sólo discontinua en puntos aislados, la integral tiene un valor mínimo para una de estas funciones. Si se excluye discontinuidades que se pueden eliminar mediante el cambio de la función en puntos aislados, el mínimo se obtiene para una sola función.

Sea λ una función no especificada de fuga en la frontera, cualquiera de los puntos aislados continuas o poseer sólo discontinuidades en, por lo que la integral

$$\int \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] dT$$

toma en toda la superficie, es finita. Notemos por ω los mienbros indefinidos del conjunto de funciones $\alpha + \lambda$, y finalmente notemos por Ω la integral

$$\int \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

Sobre toda la superficie. La familia de funciones λ forman un dominio conectado cerrado, en que la función pasa continuamente en cualquier otro, mientras que no hay límite de las funciones es discontinua a lo largo de una línea L a menos que simultáneamente se vuelve infinita (seccin 17). Para cada λ, escribimos $\omega = \alpha + \lambda$, la integral Ω tiene valores finitos, que tiene al finito con L y varia continuamente con la forma de λ, pero nunca puede ser menos que 0. Consecuentemente Ω tiene un valor mínimo por lo menos una función de ω.

Al probar la segunda parte de nuestro teorema, notamos por u una de las funciones de ω para los cuales Ω alcanzan esta valor mínimo. Sea h una función constante no especificada, ahora que $u + h\lambda$ satisface las condiciones requeridas para la función ω. Para $\omega = u + h\lambda$, escribimos el valor de Ω como

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$
$$+2h \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{d\lambda}{dx} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{d\lambda}{dy} \right] dT$$
$$+h^2 \int \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y} \right)^2 \right] dT = M + 2Nh + Lh^2$$

expresada. Esta debe ser almenos M para todo λ (por definición del mínimo), siempre que h es suficientemente pequeña. Ahora se sigue que $N = 0$ para cada λ. De otra manera,

$$2Nh + Lh^2 = Lh^2 \left(1 + \frac{2N}{Lh} \right)$$

Serian negativos si h es de signo opuesto a N y de valor absoluto $< \frac{2N}{L}$.
El valor de Ω para $\omega = u + \lambda$, una forma de los cuales obviamente contenidos todos los posibles valores de ω, es por lo tanto $M + L$. Como L es esencialmente positivo, Ω Puede alcanzar por ninguna forma de la función ω un valor más pequeño que alcanza para $\omega = u$.

Ahora supongamos que para otra u' la funciones ω produce un valor mínimo de M'

de Ω. Las mismas deducciónes dan $M' \leq M$ y $M \leq M'$, consecuentemente $M = M'$. Escribir u en la forma $u + \lambda'$; luego obtenemos para M' la expresión $M + L'$, donde L' denota el valor de L para $\lambda = \lambda'$. La ecuación $M = M'$ rinde cuando $L' = 0$. Esto es sólo posible a la largo de la superficie,

$$\frac{\partial \lambda'}{\partial z} = 0, \frac{\partial \lambda'}{\partial y} = 0$$

donde λ' es continua, eso es necesesariamente una constante. Puesto que λ se desvanece en el límite y no es discontinua a lo largo de una línea, que sólo puede ser distinto de cero en puntos aislados. Por lo tanto dos funciones ω para las cuales Ω alcanza un mínimo, difieren sólo en puntos aislados. Si todas las discontinuidades de u que se pueden eliminar mediante el cambio de su valor en puntos aislados se descartan, la funcin está completamente determinada.

17.

Ahora tenemos que suministrar la prueba del hecho de que λ, si L permanece finita, no puede tender a la función γ discontinua a lo largo de una línea. Es decir, si λ se supone que coincide con γ fuera de una porción de la superficie T^* que rodea la línea de discontinuidad, y T^* es tomada suficientemente pequeña, luego L excede tomando un número arbitrario C.

Asignamos s y p sus significados habituales con respecto a la línea de discontinuidad. Para s indeterminado, notemos por χ la curvatura, con una curvatura convexa en el lado positivo de p se toma como positivo. Sea p_1 que nota el valor de p sobre el límite de T' en el lado donde $p > 0$, y p_2 el valor del lando donde $p < 0$. Notemos los correspondientes valores de γ por γ_1 y γ_2. Consideremos alguna porción de esta línea con curvatura continua. La parte de T' entre las normales en sus extremos, tomado sólo hasta el centro de curvatura, contribuye a la cantidad L

$$\int ds \int_{p_2}^{p_1} dp(1 - \chi p) \left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} \right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s} \right)^2 \frac{1}{(1 - \chi p)^2} \right]$$

El valor más pequeño de la expresión

$$\int_{p_2}^{p_1} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial p} \right)^2 (1 - \chi p)\, dp$$

Para valores de límites fijos γ_1 y γ_2 de λ por procedimientos conocidos, es

$$\frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi}{\log(1 - \chi p_2) - \log(1 - \chi p_1)}$$

Consecuentemente la contribución de arriba es necesariamente

$$> \int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi}{\log(1 - \chi p_2) - \log(1 - \chi p_1)}$$

Sin embargo elegimos λ en el interior de T'.

La función γ seria continua para $p = 0$ si el mayor valor de $(\gamma_1 - \gamma_2)^2$, para $\pi_1 > p_1 > 0$ y $\pi_2 < p_2 < 0$, llega a ser infinitamente pequeña con $\pi_1 - \pi_2$. Consecuentemente, para cada valor de s podemos escoger una cantidad finita m de tal manera que, por más pequeño $\pi_1 - P_2$ es tomado, aqui los valores de p_1 y p_2 con $\pi_1 > p_1 \geq 0$, $\pi_2 > p_2 \geq 0$ (la igualdad firma mutuamente excluyentes) para los cuales

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m$$

Considere una forma arbitaria de T' consistente con las anteriores restricciones. Sean P_1 y P_2 los valores de p_1 y p_2 para esta forma, y notemos por a el valor de la integral

$$\int \frac{m \chi ds}{\log(1 - \chi p_2) - \log(1 - \chi p_1)}$$

sobre la parte de la línea de discontinuidad en duda. Obviamente podemos obtener

$$\int \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)^2 \chi ds}{\log(1 - \chi p_2) - \log(1 - \chi p_1)} > C$$

eligiendo p_1 y p_2 para cada valor de s de tal manera que las desigualdades

$$p_1 < \frac{1 - (1 - \chi P_1)^{\frac{a}{C}}}{\chi} \ , \ p_2 > \frac{1 - (1 - \chi P_2)^{\frac{a}{C}}}{\chi}$$

Y

$$(\gamma_1 - \gamma_2)^2 > m$$

Son satisfacidas. De ello se deduce que, sin embargo λ se define en el interior de T', la contribución a λ de la pieza de T en cuestin excede C. Así mismo L excede C, como se quería demostrar.

18.

Por la sección 16, para la función u fija aquí y para alguna función λ, tomemos $N = 0$. Aqui

$$N = \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] dT$$

La integral extendida sobre T. Ahora extendemos otras consecuencias de esta ecuación.

Cortar de T una pieza T' rodeando la discontinudad de u, β, λ. La contribución de N de la parte restante de T'' de T es

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dT - \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda \, ds$$

Por secciones 7 y 8 con $X = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \lambda$ y $Y = \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \lambda$

Por la condición de contorno impuestas a λ, la contribución a

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda \, ds$$

de la parte del límite de T'', común con la de T, es 0. Así uno puede considerar a N como una combinación de

$$-\int \lambda \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dT$$

Tomada sobre T'', y

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right] dT + \int \left(\frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) \lambda \, ds$$

donde las integraciones son tomadas sobre T' y su límite.

Claramente, si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ difieren de 0 en alguna parte de T, N tomaria un valor no nulo siempre que λ, tenga la posibilidad de tomar el valor 0 en T', y $\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ tiene el mismo signo a lo largo de T''. Sin embargo si $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ a lo largo de T, entonces la contibución a N de T'' es 0 para todo λ. Ahor la condición $N = 0$ deja el resultado que la contribución de la discontinuidad debe ser 0.

Ahora las funciones $X = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}$, no se limita, hablando en general, a satisfacer

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

Pero también

$$\int \left(X \frac{\partial x}{\partial p} + Y \frac{\partial y}{\partial p} \right) ds = 0$$

La integral se toma sobre cualquier parte del límite de T, al menos cuando esta integral tenga un valor definido. Si T es múltiplemente conexo, reducimos T a través de cortes transversales (por V de la sección 9) a una superficie simplemente conectada T^* y vemos que la integral

$$-\int_{O_0}^{O} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) ds$$

tiene el mismo valor para toda línea desde O_0 a O en el interior de T^*. Tomando O_0 fijo, la integral es una función de x, y que es continua a lo largo de T^* y tiene la misma variación a lo largo de cada lado de un corte transversal. Asociando a β esta función ν deja una función $v = \beta + \nu$ para los cuales

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Obtenemos lo siguiente

Teorema *Suponga que una función compleja $\alpha + \beta i$ de x, y es dada a lo largo de una superfice conectada T^*, y*

$$\int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT$$

tomada sobre el conjunto de superficie, es finito. Entonces hay una y sólo una elección de función $\mu + \nu i$ de x, y con las siguientes propiedades, que pueden ser unido a $\alpha + \beta i$ para dar una función de z:

1) μ desaparece en el límite, o por lo menos se diferencia de 0 en puntos aislados; ν es dado arbitrariamente en un punto

2) Variaciones de μ en T y de ν en T^* son discontinuas sólo en puntos aislados, y las discontinuidades son restringidas por la finitud de integrales

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] dT \ , \ \int \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} \right)^2 \right] dT$$

sobre la superficie. Además, ν tiene las mismas variaciones en cada lado de los cortes transversales.

Estas condiciones son suficientes para determinar μ y ν. Para μ, desde cualquier ν es determinado hasta una constante aditiva, siempre determinara un mínimo de esta integral Ω. desde luego, si $u = \alpha + \mu$, entonces claramente $N = 0$ para todo λ. Por sección 16. esta propiedad es poseída por sólo una función