Ensembles, topologies et ultrafiltres

Christophe Chalons

July 25, 2012

Contents

Chapter 1

Introduction

Ceci est un cours basique de topologie, qui rappelle aussi d'autres bases mathématico-logiques peu présentes dans les documents courants. Une pratique *classique* de l'analyse non standard y est aussi présentée, par classique j'entends sans faire un usage de la formalisation officielle IST Nelson.

La plupart du temps, je ferai une faute volontaire (pour éviter des ambiguités) de style en utilisant la forme *comme blabla1 donc blabla2*, plutot que l'usage qui met une virgule a la place du *donc*.

Les preuves sont en violet!

Les résumés de preuves sont en vert!

Les reperes rouges servent pour l'index final

Le mot *évidence* et le mot *axiome* seront considérés comme de parfaits synonymes dans la suite.

J'ai essayé de réunir aussi en appendice les sujets dont j'ai remarqué qu'ils posaient parfois des soucis récurrents en plus de juste signaler les definitions et lemmes de topologie. On y trouve le signe =, quelques consideration sur implique, et les axiomes logiques propositionnel, ainsi qu'une preuve qu'il y a equivalence entre (A implique B) et ((nonA) ou B).

Quand vous ne connaissez pas une expression vous pouvez tenter d'aller voir l'appendice, j'ai essaye d'y mettre tout ce qui est tacite ailleurs.

Christophe C

1.1 Introduction: publicité pour les ultrafiltres

Il est évidemment difficile de couvrir en quelques dizaines de pages le vaste sujet de la topologie (générale) et de ses applications. J'ai essayé de mettre des preuves et des définitions efficaces pour tous les sujets récurrents que j'ai pu croiser à répétition sur le forum *lesmathematiquepointnet*. Si les preuves (aussi cabalistiques qu'elles apparaissent) sont si courtes c'est grace aux ultrafiltres qui permettent de trivialiser en bonne partie ce que j'appellerai "la topologie dans ses manifestations compactes". Les ultrafiltres permettent de "tranformer" la cohérence finie (le fait de ne pas se contredire en temps fini pendant une conversation) en existence d'objets (qui donnent ensuite des déductions *comme s'ils existaient*) puis de retourner à la vie réelle après l'argumentation. Le tout a été formalisé sous une théorie qui s'appelle l'analyse non standard (consultez "axiomes IST de Nelson si vous faites une recherche). Le maximum d'efficacité est atteint quand ils sont confontés aux espaces compacts qui "font exister" les objets du discours dès lors qu'imaginer ces derniers peut se faire avec cohérence.

1.1.1 Exemple

Soit E un espace compact et f une application continue de E dans E. Tout le monde trouve évident l'existence de suites finies aussi longues qu'on veut telle que $u_1 = f(u_2), u_2 = f(u_3), .., u_{n-1} = f(u_n)$. Il suffit de partir de $a \in E$ et de prendre les $f^i(a)$, puis de retourner la numérotation.

Et bien l'analyse non standard (ou un maniement courant des ultrafiltres) transforme cette évidence en une autre **évidence** pour les analystes non standard, qui est:

Théorème 1 *il existe une* **suite** *u telle que pour tout entier n :* $u_n = f(u_{n+1})$

Les rédactions classiques des preuves de ce lemme ne doivent pas cacher que **c'est une évidence** une fois acquis l'état d'esprit ANS.

1.1.2 Preuve de l'exemple

J'en donne une preuve (accessible une fois entrainé par la lecture du présent pdf presque entière) par principe: soit L l'ensemble des suites finies d'éléments de E telles que $u_i = f(u_{i+1})$ pur les indices i de l'ensemble de définition de la suite finie u. Soit W un ultrafiltre sur L qui contient tous les A_n, en notant A_n l'ensemble des suites de longueur $\geq n$. Soit la fonction $pro_i : u \mapsto u_i$. Alors la suite $v : n \mapsto lim_E(pro_n[W])$ vérifie la propriété voulue.

1.1.3 Autre exemple

Soit (E, T) un espace compact et f, g deux applications continues qui commutent (ie telles que $f \circ g = g \circ f$). Presque n'importe qui conviendra aisément qu'on peut fabriquer une application m de n^2 dans E telle que pour les indices (i,j) pour lesquels c'est défini, $f(m(i,j)) = m(i+1,j)$ et $g(m(i,j)) = m(i,j+1)$. Imaginez maintenant qu'on vous demande de prouver qu'une telle m soit définie sur Z^2 tout entier. Pourtant, un état d'esprit ANS vous le donne comme une évidence au même titre que l'exemple précédent: il vous suffit de considérer un ultrafiltre W tel que pour tout entier naturel n, l'ensemble des m telle que ci-dessus vérifiant de plus $[-n,n]^2 \subseteq dom(m)$ soit un élément de W. L'existence de W est triviale et le fait que $v : (i,j) \in Z^2 \mapsto pro_{i,j}[W]$ convienne aussi. (Le domaine $dom(f)$ d'une fonction est son ensemble de définition).

1.1.4 Autre exemple (un poil moins ANS-easy lol)

Soit (E, T) un espace compact, $n \mapsto (x \mapsto T \ni R_n(x) \ni x \in E)$ de recouvrements ouverts de E et L un ensemble de suites finies d'éléments de E. Ce n'est pas parce que L contient des suites de longueurs arbitrairement grande qu'il existe une suite $v \in E^{IN}$ ayant des segments initiaux arbitrairement longs dans L. On suppose que tout segment initial d'un élément de L est un élément de L. De plus soit f_n une fonction pour chaque entier n vérifiant: *pour toute suite $u \in L$, telle que $n \in dom(u)$, et toute suite finie v définie sur le même domaine que u et obtenue par $v(i) := f_n(u(i))$ pour $i \neq n$ et $v_n := a$ si $u_n \in R_n(a)$ alors $v \in L$.* Alors si L contient des suites arbitrairement longues, il existe une suite $u \in E^{IN}$ telle que pour tout entier $n : (u_0, .., u_n) \in L$. Je ne démontre pas ce phénomène ici. Je le signle juste pour illustrer qu'une vision ANS va nettement plus loin que le simple fait d'extraire des suites, puis de reextraire et rextraire diagonalement comme certains peuvent le préjuger. En effet, dans ce qui précède, le fait de considérer une suite v de suites finies $v(n)$ de longueur $\geq n$ puis d'extraire des v_n une sous-suite telle que $n \mapsto v(n)(1)$ converge vers w_1 et ainsi de suite ne sera évidemment d'aucune utilité puisqu'on n'a pas de transitivité (chaque fois qu'on "fixe" une valeur "réelle" pour un entier n, on ne peut que remplacer chaque autre x par $f_n(x)$).

1.2 Courage

J'espère que la suite de ce pdf vous donnera envie d'arriver à un état de *comprendre* couramment, comme vous parlez dans un bar, les quelques lignes mystérieuses ci-dessus. En tout, je l'ai rédigé pour que le lecteur après un parcours fastidieux consistant à s'armer de patience en lisant les preuves ou parties d'entre elles minutieusement et analytiquement crée un réseau de neurones qui, après la souffrance, fait "tilt". Je ne connais pas de méthode qui, sans souffrir avec du formalisme, permet d'arriver à des résultats probants. Il n'y a pas d'éducation sans traumatisme.

La chance ici est que c'est le langage de la théorie des ensembles (3 petits signes et puis c'est tout: $\forall, \in$ et it implique) qui est universelle et fonde et précède toutes les maths (elle a juste l'inconvénient d'être tellement puissante qu'elle est contradictoire dans sa version naive, mais c'est bcp moins important que ça en a l'air en fait) qui est utilisé. Ce langage est d'une très grande pauvreté (6 ou 7 signes et règles de fonctionnement) et n'est donc pas long à acquérir.

Le chapitre sur les ultrafiltres vient trè tôt. A la dernière section avant l'appendice, j'ai ajouté un chapitre sur leur utilité hors-topologie.

Chapter 2

Topologie, définitions à sec

2.1 Définitions générales ensemblistes

1. Les expressions de la forme $\forall x \in A$: *blabla* signifient $\forall x : x \in A$ implique *blabla*

2. Les expressions de la forme $\exists x \in A$: *blabla* signifient $\exists x : x \in A$ et *blabla*

3. $A \subseteq B$ signifie $\forall x : x \in A$ implique $x \in B$. Quand $A \subseteq B$ on dit que A est une partie (ou encore un sous-ensemble) de B.

4. Soit E, A des ensembles. La notation $inter(E, A)$ signifie $\{x \in E / \forall y \in A : x \in y\}$. La notation $union(A)$ signifie $\{x / \exists y \in A : x \in y\}$

5. Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E est noté $P(E)$.

2.2 Ultrafiltres

Définition 1 *Soit E un ensemble.*

Soit W une partie de $P(E)$. On dit que W est un ultrafiltre sur E quand les conditions suivantes sont toutes satisfaites:

1. $\emptyset \notin W$

2. $E \in W$

3. *$\forall X \in W \forall Y \supseteq X : Y \in W$*

4. *$\forall F$ si F est une partie finie de W alors $inter(E, F) \in W$*

5. *$\forall a \subseteq E : a \in W$ ou $(E \setminus a) \in W$ (***)*

Lorsque la condition (***) n'est pas satisfaite, on se contente de dire que W est un filtre sur E

Un ultrafiltre est un élément virtuel de l'ensemble E. Soit $a \in E$. alors $W_a(E) := \{X \in P(E)/a \in X\}$ est un ultrafiltre sur E.

Un ultrafiltre U sur E est dit **principal** quand $\exists a \in E : U = W_a(E)$.

Soit E un ensemble f une application de E dans F et W un ultrafiltre sur E. On notera $f[W]$ (comprendre image de W par f) l'ensemble des parties X de F tel que $\{e \in E/f(e) \in X\} \in W$.

Théorème 2 *$f[W]$ est un ultrafiltre et $f[W_a(E)] = W_{f(a)}(F)$*

Intuitivement, $f[W]$ est l'élément virtuel de F qui est obtenu en prenant l'image f(x) de l'élément virtuel de E représenté par W.

L'intérêt des ultrafiltres (et de la topologie) est d'être utilisé en présence de l'axiome du choix.

2.2.1 Lemmes presque triviaux, mais à avoir présent à l'esprit

Les quatre lemmes suivants sont ou bien évidents ou bien conséquence évidente de l'axiome du choix. Je recommande au lecteur de les prouver en exercice. Les preuves se situent dans la section *ultrafiltres et topologie*

Théorème 3 *si W est un ultrafiltre sur E et $union(P) \in W$ et P fini alors $\exists x \in P : x \in W$ (exercice)*

Théorème 4 *si F est un filtre sur E alors il existe un ultrafiltre W sur E tel que $F \subseteq W$.*

Théorème 5 *si $\forall F$ partie finie de Z : $E \cap inter(E, F) \neq \emptyset$ alors il existe un ultrafiltre W sur E tel que $P(E) \cap Z \subseteq W$*

Théorème 6 *soit f telle que pour tout ultrafiltre W sur E : $f(W) \in W$. Alors il existe un ensemble fini F dont les éléments sont des ultrafiltres sur E tel que $\forall x \in E \exists W \in F : x \in f(W)$*

2.3 Définitions concernant la topologie

Soit T une partie de $P(E)$.

On dit que T est une topologie sur E quand $\forall X \subseteq T : union(X) \in T$ et $\forall F \subseteq T$ si F est fini alors $inter(E, F) \in T$.

Traduction française: T est stable par unions (quelconques) et intersections finies.

Théorème 7 *Soit $S \subseteq P(E)$. Soit G l'ensemble des topologies T sur E telles que $S \subseteq T$. Alors $T_0 := inter(P(E), G)$ est une topologie sur E, donc $T_0 \in G$ et comme $\forall X \in G : T_0 \subseteq X$, on dit que T_0 est la plus petite topologie qui contient S, ou encore la topologie engendrée par S.*

2.3.1 Preuves des faits précédents

1. Evidemment $S \subseteq T_0$

2. soit F une partie finie de T_0. soit $T \in G$. alors $F \subseteq T$. donc $inter(E, F) \in T$. Ceci valant pour tout $T \in G$ donc $inter(E, F) \in T_0$

3. soit $P \subseteq T_0$. soit $T \in G$. alors $P \subseteq T$. Donc $union(P) \in T$. Ceci valant pour tout $T \in G$ donc $union(P) \in T_0$.

4. conclusion: $T_0 \in G$.

5. $inter(E, \emptyset) = E \in T_0$

6. $union(\emptyset) = \emptyset \in T_0$.

Théorème 8 *La topologie T_0 ci-dessus est egale à $T_1 :=$ l'ensemble des parties de E qui sont réunions d'intersections finies d'éléments de S*

En particulier, si S est stable par intersections finies, alors T_0 est simplement l'ensemble des réunions d'éléments de S.

Soient en particuler deux espaces topologiques $(E, top1)$ et $(F, top2)$. Soit S l'ensemble des $U \times V \in P(E \times F)$, quand (U, V) parcourt $top1 \times top2$. alors S est stable par intersections finies.

On verra plus bas que dans ce cas la topologie engendrée par S sur $E \times F$ s'appelle la topologie produit des topologies $top1, top2$.

2.3.2 Preuves

Pour prouver que $T_0 = T_1$, il suffit de prouver que $T_1 \subseteq T_0$ et que $T_0 \subseteq T_1$.

Pour prouver que $T_0 \subseteq T_1$ on va prouver que $T_1 \in G$

L'autre sens sera prouvé directement.

1. si X, Y sont des éléments de T_1 alors il existe des ensembles A, B tels que $X = union(A)$ et $Y = union(B)$ et des applications f, g telles que $\forall x \in A : f(x)$ est une partie finie de S telle que $x = inter(E, f(x))$ (idem avec g a la place de f et B a la place de a). Soit C l'ensemble des $inter(E, f(x) \cup g(y))$ quand (x, y) parcourt $A \times B$. Si $t \in X \cap Y$ alors il existe $(x, y) \in A \times B$ tel que $t \in inter(E, f(x))$ et $t \in inter(E, g(y))$. Donc $\forall z \in f(x) \cup g(y) : t \in z$. Donc $t \in inter(E, f(x) \cup g(y))$. Donc $x \in union(C)$. Réciproquement, si $t \in union(C)$ alors il existe $(x, y) \in A \times B$ tel que $t \in inter(E, f(x) \cup g(y))$. En particulier $t \in inter(E, f(x))$ donc $t \in X$ et $t \in inter(E, g(y))$ donc $t \in Y$. Finalement $union(C) = X \cap Y$ et $union(C)$ est une réunion d'intersections finies d'éléments de S.

2. $\emptyset \in T_1$. En effet, $\emptyset = union(\emptyset)$

3. $E \in T_1$. En effet, $E = inter(E, \emptyset)$

4. soit F une partie finie de T_1. Si $F = \emptyset$ alors $inter(E, F) = E \in T_1$. Si F est le singleton $\{X\}$ alors $X \in T_1$ et $inter(E, F) = X \in T_1$. Si $F = \{X_1, .., X_n\}$ alors $inter(E, F) = X_1 \cap X_2 .. \cap X_n \in T_1$ d'aprés la preuve faite pour le cas $n = 2$.

5. soit P une partie de T_1. Alors il existe une application f telle que $\forall X \in P : X = union(f(X))$ et tout élément de $f(X)$ est un intersection finie d'éléments de S. Soit $C :=$ l'ensemble des a tels que $\exists X \in P : a \in f(X)$. Chaque élément de C est une intersection finie d'éléments de S. Donc $union(C)$ est une réunion d'intersections finies d'éléments de S et est donc un élément de T_1. Si $t \in union(P)$ alors il existe $x \in P$ tel que $t \in x$ et donc $t \in union(f(x))$ donc $\exists z \in f(x) : t \in z$ et comme $z \in C$, $t \in union(C)$. Réciproquement si $t \in union(C)$ alors $\exists a \in C$ tel que $t \in a$ donc il existe $X \in P$ tel que $a \in f(X)$ donc $t \in union(f(X)) = X$ ce qui fait que $t \in union(P)$. Il s'ensuit que $union(P) = union(C) \in T_1$.

6. les points précédents prouvent que $T_1 \in G$ et donc que $T_0 \subseteq T_1$.
7. une intersection finies d'éléments de S est dans T_0. Une réunion d'éléments de T_0 est dans T_0. Conclusion $T_1 \subseteq T_0$.

2.4 Quelques définitions très usuelles

Dans la suite $K := (E, T)$ est un espace topologique, c'est à dire un ensemble E et T une topologie sur E. Les éléments de T s'appellent *les ouverts de l'espace topologique* K.

1. K est dit séparé quand $\forall (x, y) \in E^2$: si $s \neq y$ alors $\exists U \in T \exists V \in T$: $x \in U$ et $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$
2. une partie A de E est dite dense quand $\forall x \in E \forall U \in T$ si $x \in U$ alors $D \cap U \neq \emptyset$
3. une partie A de E est dite fermée quand $E \setminus A \in T$, autrement dit quand $E \setminus A$ est un ouvert de K.
4. Soit $L := (F, T_2)$ un espace topologique. Soit $a \in E$. Une application f de E dans F est dite *continue en* a quand pour tout $V \in T_2$ si $f(a) \in V$ alors il existe $U \in T$ tel que $a \in U$ et $\forall x \in U : f(x) \in V$.
5. f est dite continue quand $\forall a \in E : f$ est continue en a.

2.4.1 Espaces métriques

Une topologie est une notion qui généralise la notion d'éloignement. Je ne rappelle pas ce qu'est un espace métrique (notion que je suppose connue), mais je signale ce qu'on appelle *la topologie induite par la métrique* et donne les preuves liées a ça.

Soit donc (E, d) un espace métrique. L'expression $boule(x, r)$ signifie $\{y \in E / r > d(x, y)\}$

Soit T l'ensemble des parties X de E telles que $\forall x \in X \exists r > 0$: $Boule(x, r) \subseteq X$.

Théorème 9 *T est une topologie sur E.*

Preuve

1. soit $P \subseteq T$ et $a \in union(P)$. Il existe $U \in P$ tel que $a \in U$. donc il existe $r > 0$ tel que $boule(a, r) \subseteq U$. Donc $Boule(a, r) \subseteq union(P)$

2. soit F une partie finie de T. soit $x \in inter(E, F)$. Il existe s telle que $\forall U \in F : Boule(x, s(U)) \subseteq U$ et $s(U) > 0$. Soit $r > 0$ tel que $\forall U \in F : s(U) > r$. alors $\forall U \in F : boule(x, r) \subseteq Boule(U, s(U)) \subseteq U$ et donc $boule(x, r) \subseteq inter(E, F)$. Ceci valant pour tout $x \in inter(E, F)$ donc $inter(E, F) \in T$.

2.5 Produit d'espaces topologiques

Soit J un ensemble et $j \in J \mapsto (E(j), T(j))$ une application qui associe a chaque $j \in J$ un espace topologique $(E(j), T(j))$ c'est a dire un ensemble $E(j)$ et une partie $T(j) \subseteq P(E(j))$ qui est une topologie que $E(j)$

soit Z un ensemble tel que $\forall j \in J : E(j) \subseteq Z$

L'ensemble E des applications f de J dans Z telles que $\forall j \in J : f(j) \in E(j)$ s'appelle *le produit des* $E(j)$

Soit $j \in J$ et $U \in T(j)$. On note $a(j, U) := \{f \in E / f(j) \in U\}$. Soit $S := \{X / \exists j \in J \exists U \in T(j) : X = a(j, u)\}$

Alors S est un ensemble de parties de E.

Définition 2 *La topologie T_0 engendrée par S s'appelle la topologie produit. Précisément, (E, T_0) s'appelle le produit topologique de la famille d'espaces topologiques $j \in J \mapsto (E(j), T(j))$.*

Chapter 3

Didacticiel

La fréquentation des forums m'a montré que trop peu de gens utilisent les ultrafiltres pour raisonner topologiquement. Je rajoute donc ce chapitre *didacticiel* pour insister lourdement sur les économies d'écriture et de pensées que procure cette démarche. Il n'y a besoin **d'aucun background** pour la lire en dehors des notations ensemblistes que tout le monde est censé connaitre dans les études de maths à partir de 20ans et des définitions basiques de topologie rappelées dans le présent pdf, ainsi que des "trivialités" du chapitre "ultrafiltres" ci-dessus.

3.1 Preuves guidées de quelques cas typiques

3.1.1 Le Cube de Hilbert

Il s'agit de l'ensemble C des suites u de réels positifs vérifiant $\forall n \in IN$: $u(n) \in [0, 1/n]$. On le munit de la métrique $dist(u, v) := sup_n|u(n) - v(n)|$. Je montre qu'il est compact en mentionnant en rouge les passages importants (mais évidents, une fois fait l'effort d'acquérir les bases concernant les ultrafiltres)

Théorème 10 *C muni de la topologie induite par la métrique ci-dessus est un espace compact*

Preuve

- Soit R un recouvrement de C par des boules ouvertes. Supposons que R n'ait pas de sous-recouvrement fini. Il s'ensuit que pour toute partie finie F de R, il existe $u \in C$ tel que $\forall B \in F : u \notin B$.

- Par conséquent, il existe un ultrafiltre W tel que pour toute $B \in R$: $B \notin W$. ***

- Notons V_k l'ensemble des parties $X \in IR$ telles que $\{u \in C | u(k) \in X\} \in W$. C'est un ensemble de parties de IR. Il se trouve que c'est un ultrafiltre, mais ici, ça n'a même carrément aucune importance.

- Supposons que pour tout $a \in [0, 1/k]$, il existe un **ouvert** $U(a)$ tel que $a \in U(a) \notin V_k$.

- Alors $a \mapsto U(a)$ serait un recouvrement ouvert de $[0, 1/k]$ sans sous-recouvrement fini, et donc ce serait une contradiction

- Par conséquent, pour tout entier $k > 0$, il existe $a(k)$ tel que pour tout ouvert U de IR : si $a(k) \in U$ alors $U \in V_k$.

- Cela donne une suite $u : k \mapsto a(k)$ qui est un élément de C

- Soit maintenant une boule $B(v, e_1) \in R$ telle que $u \in B(v, e_1)$ (il en existe puisque R est un recouvrement). Cela signifie que $\forall n : |v(n) - a(n)| < e_1$.

- Soit $e > 0$ tel que $B(a, 10e) \subseteq B(v, e_1)$. Soit N un entier tel que $\forall p \geq N : 1/p \leq e$

- $\{w \in C | \forall n \leq N : |a(n) - w(n)| < e\} \in W$. Par ailleurs, pour n'importe quel couple de $(x, y) \in C^2$, si $p > N$ alors $|x(p) - y(p)| < e$

- Il s'ensuit que $\{w \in C | \forall n \in IN : |w(n) - a(n)| < 3e\} \in W$, c'est à dire que $B(a, 3e) \in W$.

- en particulier $B(v, e_1) \in W$ car $B(v, e_1) \supseteq B(v, 10e) \supseteq B(v, 3e)$

- C'est une contradiction avec ***!

Le lecteur doit se concentrer sur les passages rouges. Ils sont triviaux dès lors qu'on a accepté de *travailler* un peu le chapitre *ultrafiltre*. Le reste est bateau.

3.1.2 Compacité de $[0,1]^{[0,1]}$ pour la topologie de la convergence simple

A suivre

Chapter 4

Topologies usuelles et vocabulaire

4.1 Définitions et tacites

1. E:= IR. La topologie dite usuelle sur IR est la topologie engendrée par $\{X \subseteq IR / \exists$ des réels a, b tels que $X =]a, b[\}$

2. E:=IR^n. La topologie dite usuelle sur ce E-là est la topologie engendrée par les $a(k,U) := \{x \in E / x(k) \in U\}$ quand (k,U) parcourt $n \times topologieusuelledeIR$

3. Soit Z un ensemble d'applications d'un ensemble E dans un espace topologique (F,T). Pour $x \in E, U \in T$, on note $w(x,U) := \{f \in Z / f(x) \in U\}$. L'ensemble S des $w(x,U)$ quand (x,U) parcourt $E \times T$ est une partie de $P(Z)$. La topologie engendrée par S s'appelle la topologie de la convergence simple

4. Soit Z un ensemble d'applications d'un ensemble E dans un espace métrique (F,d). Pour $e > 0$ un réel positif, et $f \in Z$ on note $c(f,e)$ l'ensemble des $g \in Z$ telles que $\forall x \in E : e > d(f(x), g(x))$. L'ensemble des $c(e,f)$ est une partie (notons-la S) de Z. La topologie engendrée par S est dite topologie de la convergence uniforme.

5. Lorsqu'on a affaire à une structure qui porte un nom, si on rajoute le mot *topologique* derrière l'adjectif qualificatif qui désigne la structure,

cela signifie traditionnellement qu'on se donne (ou qu'on a) une topologie T et que les opérations de la structure sont **continues**. Exemple: un groupe topologique est un couple $((G,.),T)$ avec: (G,T) est un espace topologique et $(G,.)$ est un groupe et $. : G^2 \mapsto G$ est continue du produit topologie $(G,T)\times(G,T)$ dans (G,T) et $x\mapsto x^{-1}$ est continue de (G,T) dans (G,T). Les adjectifs toologiques concernent la toologie. Par exemple un groupe compact veut dire que le couple (G,T) est compact en tant qu'espace topologique.

6. Lorsque les livres ou les gens ne précisent pas, la topologie tacite mise sur un produit ensembliste est automatiquement la topologie produit telle que définie ci-dessus, dès lors bien sur que les ensembles du produit ont été eux munis d'une topologie pour chacun.

7. si (E,T) est un espace topologique c'est à dire un ensemble E et une partie T de $P(E)$ qui est une topologie sur E, et si un auteur décide d'en parler pendant 50 pages sans changer d'espace, il appelera *ouverts* les éléments de T, *fermés* les éléments de la forme $E\setminus U$ avec $U\in T$. Ce serait mieux de dire *T-ouvert* ou *T-fermé* mais ce serait gaspilleur d'encre.

8. Si (E,T) est un espace topologique, $a\in E$ et $X\subseteq E$. On dit que X est un T-voisinage de a quand $\exists U\in T : x\in U$ et $U\subseteq X$

9. Soit (E,T) un espace topologique. Soit $A\subseteq E$. Soit $S := \{X\subseteq A/\exists U\in T : X = A\cap U\}$. alors S est une topologie sur A dite *topologie induite par* (E,T) *sur l'ensemble* A. Quand les gens utilisent des adjectifs destinés à qualifier des espaces topologiques pour qualifier des sous-ensembles de E, ils estiment tacitement que ces adjectifs concernent l'espace obtenu en munissant l'ensemble de la topologie induite.

10. un espace topologique est dit connexe s'il n'est pas réunion disjointe de deux ouverts non vides

11. un espace est dit quasi-compact quand de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini: formellement pour tout $R\subseteq T$ si $union(R) = E$ alors il existe $F\subseteq R$ tel que F est fini et $union(F) = E$.

12. un espace est dit compact quand il est quasi-compact et séparé.

13. Soit (E, T) un espace topologique et $A \subseteq E$. Un point $a \in A$ est dit isolé dans A quand $\exists U \in T : x \in U$ et $U \cap A = \{a\}$

14. Soit (E, T) un espace topologique et $A \subseteq E$. L'intérieur de A est l'ensemble des $x \in A$ tels que $\exists U \in T : x \in U$ et $U \subseteq A$. L'adhérence de A est l'ensemble $E \setminus B$ en notant B l'intérieur de $E \setminus A$. Une valeur d'adhérence d'un ensemble A est un élément de l'adhérence de A qui n'est pas un point isolé de A.

15. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subseteq E$. Le diamètre de A est la borne supérieure des $d(x, y)$ quand (x, y) parcourt A^2.

16. Soit (E, d) un espace métrique et W un ultrafiltre sur E. On dit que W est *de Cauchy* quand $\forall e > 0$, il existe un ensemble A dont le diamètre est $\leq e$ et tel que $A \in W$.

17. Soit (E, T) un espace topologique et u une suite dont les terme sont dans E. On dit que u converge vers $a \in E$ quand pour tout ouvert $U \in T$ tel que $a \in U$ l'ensemble des entiers n tels que $u(n) \notin U$ est fini.

18. une valeur d'adhérence de u est un élément de l'adhérence de $Im(u) := \{x \in E / \exists$ un entier n tel que $u(n) = x\}$

19. un espace métrique est dit complet quand tout ultrafiltre de Cauchy a une limite.

20. un espace métrique est dit précompact quand $\forall e > 0$, il existe un ensemble fini de boules de rayon e qui recouvrent l'espace.

21. un espace est dit *de Baire* quand il n'est pas possible de l'obtenir comme réunion de fermés d'intérieur vide.

4.2 ultrafiltres et topologies

Soit (E, T) un espace topologique. Soit W un ultrafiltre sur E, soit $a \in E$. On dit que a est une limite de W quand pour tout ouvert $U \in T$ si $a \in U$ alors $U \in W$. Intuitivement *l'élément virtuel* représenté par W est *superproche* de a.

Par exemple, un ultrafiltre sur IR tel que $\forall x, y$, si $0 \in]x, y[$ alors $]x, y[\in W$ sera un réel virtuel superproche de 0.

Voici une liste de théorèmes importants, mais basiques, concernant les ultrafiltres et comment ils trivialisent la topologie.

Théorème 11 *un espace topologique* (E, T) *est compact ssi tout ultrafiltre sur* E *a une unique limite.*

Théorème 12 *un espace topologique* (E, T) *est quasicompact ssi tout ultrafiltre sur* E *a au moins une limite.*

Théorème 13 *un espace topologique* (E, T) *est séparé ssi tout ultrafiltre sur* E *a au plus une limite.*

Théorème 14 *les items précédents ont comme corollaire important ce qui est connu sous le nom de théorème de Tychonoff: tout produit d'espaces quasicompacts est quasicompact et tout produit d'espaces compacts est compact.*

Théorème 15 *idem autre corollaire trivialisé par les ultrafiltres sont les théorèmes d'Ascoli. J'ai un peu le flemme de donner une version abstraite, j'en mets une version concrete à la dernière section.*

Théorème 16 *Soit* (E, T_1) *un espace topologique ainsi que* (F, T_2)*. Soit* f *une application de* E *dans* F *et* $a \in E$*. alors* f *est continue en* a *ssi pour tout ultrafiltre* W *dont la limite est* a*: l'élément* $f(a)$ *est limite de* $f[W]$*.*

4.2.1 Preuves

Tout d'abord voici une liste de preuves des *petits faits élémentaires* (première sous-section). Puis la deuxième sous-section donne une preuve des points plus profonds.

4.2.2 Petites preuves des petits faits

1. Soit W un ultrafiltre sur E et P un ensemble fini tel que $union(P) \in W$. Supposons que $\forall X \in P : X \notin W$. Alors $\forall X \in P : E \setminus X \in W$. Par conséquent l'intersection quand X parcourt P des $E \setminus X$ est dans W. Mais cette intersection est disjointe de $union(P)$ qui appartient aussi à W, contradiction.

2. Utilisation du lemme de Zorn: exercice, prouver que tout filtre maximal est un ultrafiltre. Si on part d'un filtre, il suffit de prendre un filtre maximal qu ile contient.

3. Supposons $\forall F$ partie finie de Z : $E \cap inter(E, F) \neq \emptyset$. Soit G l'ensemble des parties X de E telles que $\exists F$ qui est une partie finie de Z et telle que $inter(E, F) \subseteq X$. Démontrer que G est un filtre. Il s'ensuit, par le point précédent qu'il existe un ultrafiltre sur E qui la contient

4. Soit f telle que $\forall W$ ultrafiltre sur E : $f(W) \in W$. Soit Z l'ensemble des $E \setminus f(W)$ quand W parcourt l'ensemble des ultrafiltres sur E. S'il y a un ultrafiltre W tel que $Z \subseteq W$, alors en particulier $E \setminus f(W) \in W$, mais comme $f(W) \in W$ c'est contradictoire. Il s'ensuit qu'il existe une partie finie (d'après le point précédent) F telle que $E \subseteq \cup W \in F f(W)$

5. Soit (E, T) un espace topologique séparé. Soit W un ultrafiltre et a, b des limites de W. Soient U, V des ouverts tels que $a \in U, b \in V$ et $U \cap V = \emptyset$. On a alors la contradiction que $U \cap V$ devrait appartenir à W.

6. Réciproquement. Soit (E, T) un espace topologique tel que tout ultrafiltre a au plus une limite. Soit a, b des points que l'on ne pourrait pas séparer. Alors l'ensemble Z des $U \cap V$ quand (U, V) parcourt l'ensemble des couples d'ouverts tels que $a \in U$ et $b \in V$ est telle que pour toute partie finie F de Z : $inter(E, F) \neq \emptyset$. Il existe donc un ultrafiltre W tel que $Z \subseteq W$. Or tout ouvert qui contient a oou qui contient b est un élément de W. Les points a, b sont tous deux limites de W et donc $a = b$.

Les point précédents étaient les petites choses qu'il faut toujours avoir à l'esprit. Les preuves suivantes établissent des lemmes plus profonds tout en étant courtes et elles illustrent de ce fait la puissance de l'outil ultrafiltre.

4.2.3 Preuves des points plus profonds

1. soit (E, T) un espace quasicompact. Soit W un ultrafiltre sur E. Supposons que $\forall a \in E : a$ n'est pas une limite de W. alors l'ensemble des ouverts U tel que $U \notin W$ serait un recouvrement de E. Il y aurait donc une partie finie F dont les éléments seraient tous des ouverts et telle que $union(F) \in W$. Mais alors $\exists U \in F : U \in W$ contradiction.

2. Supposons que tout ultrafiltre sur E admette au moins une limite. Soit R un recouvrement ouvert, sans sous-recouvrement fini. Soit W un ultrafiltre tel que $\forall F$, si F est une partie finie de R alors $E \backslash union(F) \in W$. Soit a une limite de W. soit $U \in R$ tel que $a \in U$. Comme a est une limite de W donc $U \in W$, contradiction.

3. Corollaire: l'intervalle $[0,1]$ muni de la topologie usuelle est compact. Soit W un ultrafiltre sur $[0,1]$. Soit A l'ensemble des nombres rationnels $q \in [0,1]$ tels que $[0,q] \in W$. L'ensemble A est un intervalle de la forme $[0,a]$ ou $[0,a[$. Soit U un ouvert tel que $a \in U$. soient u, v des éléments de $[0,1]$ tels que $a \in]u,v[\subseteq U$. Alors $U \supseteq]u,v[\in W$. Donc a est limite de W.

4. **Théorème de Tychonoff:** soit $j \in J \mapsto (E(j), T(j))$ une famille d'espaces topologiques quasi-compacts. Soit (E,T) le produit topologique de cette famille. Soit W un ultrafiltre sur E. En notant $pro_j(f) := f(j)$ pour chaque $f \in E, j \in J$, soit $g(j)$ une limite de l'ultrafiltre $pro_j[W]$. Soit maintenant un ouvert $U \in T$ tel que $g \in U$. D'après le premier chapitre, U est une réunion d'intersection finie d'éléments du S définie au chapitre *topologie produit*. Il existe une intersection finie V d'éléments de S telle que $g \in V$. Si $V \notin W$ alors il existe un élément X de S tel que $g \in X$ et $X \notin W$. Un tel élément a été noté $a(j,U)$ au chapitre *topologie produit* et est $\{f \in E / f(j) \in U\}$. On a donc que $g(j) \in U$. Mais $g(j)$ est la limite de $pro_j(W)$. Donc $X = \{f / f(j) \in U\} \in W$, contradiction.

5. supposons f continue en a qui est limite de W. Soit U un ouvert tel que $f(a) \in U$. Soit V un ouvert tel que $\forall x \in V : f(x) \in U$. Comme $V \in W$ donc $U \in f[W]$.

6. supposons que tout ultrafiltre W de limite a soit tel que $f[W]$ ait comme limite $f(a)$. Soit U un ouvert tel que $f(a) \in U$. Soit W un ultrafiltre tel que $\forall V$ si V est ouvert et $a \in V$ alors $V \in W$ et $C := \{x / f(x) \notin U\} \in W$ (en supposant qu'il existe). alors a est une limite de W et pourtant $f(a)$ n'est pas une limite de $f[W]$ puisque $U \notin f[W]$. Contradiction. L'inexistence de W entraine l'existe d'un ensemble finie F d'ouverts contenant a tel que $inter(E,F) \cap C = \emptyset$. Il s'ensuit que l'ouvert $V := inter(E,F)$ vérifie $\forall x \in V : f(x) \in U$ (et $a \in V$ évidemment).

La sous-section suivante décrit une preuve d'une version concrete (mais qui contient l'essentiel) du théorème d'Ascoli.

4.3 Théorème "Ascoli-like"

Soit Z l'ensemble des applications f de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $\forall (x,y) \in [0,1]^2 : dist(f(x), f(y)) \leq 2d(x,y)$

On munit Z de la topologie de la convergence uniforme, ce qui signifie en fait qu'on considère la métrique $d(f,g) := sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$ et qu'on considère la topologie induite T par cette métrique.

Théorème 17 *(d'Ascoli**): (Z,T) est un espace compact.*

** Les théorèmes d'Ascoli sont juste des versions abstraites obtenues par la preuve du théorème concret ci-dessous.

4.3.1 Preuve

Soit W un ultrafiltre sur Z. Pour $x \in [0,1], f \in Z$, notons $pro_x(f) := f(x)$. L'ultrafiltre $pro_x[W]$ est un ultrafiltre sur $[0,1]$ qui a une limite $g(x)$. Ce qui donne une application g de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

Il reste à montrer que g est une limite de W et que $g \in Z$. Soient $e > 0$ et a, b tels que $dist(g(a), g(b)) > e + 2d(a,b)$.

L'ensemble C des $f \in Z$ telles que $e/100 > dist(f(a), g(a)) + dist(f(b), g(b))$ et $d(f(a), f(b)) \leq 2dist(a,b)$ est un élément de W. Et pourtant... Cet ensemble est vide. contradiction. Donc $g \in Z$.

Soit $e > 0$. Soit A l'ensemble des $f \in Z$ telle que $\exists x \in [0,1] : dist(f(x), g(x)) > e$. soit s une application de A dans $[0,1]$ telle que $\forall f \in A : dist(f(s(f)), g(s(f))) > e$. Supposons que $A \in W$. Soit b une limite de $s[W]$. L'ensemble D des $f \in Z$ telles que: $e/100 > dist(f(b), g(b)) + dist(f(b), f(s(f))) + dist(g(s(f)), g(b))$ est tel que $D \in W$. Et pourtant $D \cap A$ est vide. contradiction. Donc $A \notin W$ et finalement $\{f \in Z : \forall x \in [0,1] : dist(f(x), g(x)) \leq e\} \in W$. CQFD.

4.4 Quelques grands classiques

Je formaliserai et prouverai plus tard les énoncés suivants, énoncés rapidement en français. L'utilisation des ultrafiltres trivialise ces énoncés

Théorème 18 *Soit* (E, T) *un espace quasi-compact. Soit* f *une application continue de* (E, T) *dans* $(IR, usuelle)$*. Alors il existe* $a \in E \forall x \in E f(x) \leq f(a)$

Théorème 19 *une intersection filtrante de compacts connexes est compacte et connexe*

Théorème 20 *les espaces compacts sont de Baire.*

Théorème 21 *les espaces métriques complets sont de Baire.*

Théorème 22 *les espaces métriques compacts sont complets.*

Théorème 23 *les espaces métriques complets et précompacts sont compacts*

Théorème 24 *un espace métrique est compact ssi de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente*

Théorème 25 *pour toute espace métrique compact* (E, T) *il existe une injection* f *qui va de* E *dans* IR

Théorème 26 *Les sous-ensembles compacts de* $(IR^n, usuelle)$ *sont les parties fermées et bornées.*

Théorème 27 *Soit* (E, T_1) *un espace compact,* (C, T) *l'ensemble des applications continues de* E *dans* IR *où* T *est la topologie de la convergence uniforme et* A *une partie de* C *vérifiant* $\forall (a, b) \in E^2 \forall (x, y) \in IR^2$*, il existe* $f \in A$ *si* $a \neq b$ *alors* $f(a) = x$ *et* $f(b) = y$*. On suppose de plus que* $\forall F$ *fini non vide inclus dans* A*,* $[x \mapsto min\{h(x)/h \in F\}] \in A$ *Soit* $f \in C$*,* $e > 0$ *alors il existe* $h \in A$ *telle que* $\forall x \in E : h(x) \in]f(x), f(x) + e[$*. Remarque: cet énoncé est le contenu topologique du théorème connu sous le nom de Stone-Weirstrass.*

4.5 Pourquoi ces définitions-là et pas d'autres?

Prenons comme exemple l'ensemble $E := [0, 1]$ des nombres réels compris entre 0 et 1. Soit W un ultrafiltre sur E. Comme déjà raconté ci-dessus on peut le voir comme un élément virtuel ϵ de E. En effet, W répond à **toutes**

les questions concernant ϵ sans jamais se contredire du moment qu'on ne lui pose qu'un nombre fini de questions.

Par exemple, on lui demande ϵ est-il rationnel. La réponse de W est oui si $Q \in W$ et non si $E \setminus Q \in W$.

On peut lui demander *est-ce que ϵ est plus grand que 1/3?*. La réponse est oui si $[0, 1/3] \in W$ et non si $]1/3, 1] \in W$.

Bref..

Soit maintenant $A := \{x \in E/[0, x] \in W\}$. C'est évidemment un intervalle qui est ou bien de la forme $[0, a]$ ou bien de la forme $[0, a[$. Il s'ensuit que $\forall b \in [0, a[: [0, b[\notin W$ et $\forall b > a : [0, b] \in W$. Autrement dit pour tous réels x, y si $a \in]x, y[$ alors $]x, y[\in W$. C'est une manière technique de dire que l'élément ϵ qu'on ne connaitra jamais qu'à travers un nombre fini de questions est **superproche de** a.

Supposons maintenant qu'on soit face à un ensemble E absolument quelconque et que pour tout ultrafiltre W sur E, on ait un ensemble $\phi(W)$ d'éléments de E tels que tout élément de $\phi(W)$ soit appelé par tartanpion *un élément de E dont W est superproche*. Tartanpion n'a à priori aucune contrainte et il peut décider selon ses pires caprices de la fonction ϕ.

Peut-on attribuer à Tartanpion *une topologie canonique*? (C'est à dire essayer de deviner comme il mesure la proximité entre les éléments de E pour *ressentir* sa fonction ϕ ainsi?

La réponse est oui et elle est très naturelle. Un Tartanpion ouvert sera un ensemble X tel que pour tout ultrafiltre W si $\phi(W) \cap X \neq \emptyset$ alors $X \in W$.

En clair ça signifie que si un élément virtuel est superproche d'un élément réel qui est dans X alors l'élément virtuel est obligé d'être aussi dans X.

Théorème 28 *L'ensemble des Tartanpion ouvert est une topologie*

4.5.1 Preuve

- Soit P un ensemble qui ne contient que des Tartanpion ouverts. Soit W un ultrafiltre et $a \in E$ tel que $a \in \phi(W) \cap union(P)$. Alors il existe $X \in P$ tel que $a \in X$. Comme X est un Tartanpion ouvert donc $X \in W$. Or $X \subseteq union(P)$ donc $union(P) \in W$.

- Soit U,V deux ensembles qui sont Tartanpion ouverts. Soit W un ultrafiltre et $a \in \phi(W) \cap U \cap V$. Comme U,V sont Tartanpion ouverts, donc $U \in W$ et $V \in W$. Et donc $U \cap V \in W$.

Attention: une fois que la fonction ϕ de Tartanpion nous a donné sa notion à lui de proximité, donc sa topologie, il se peut très bien que dans sa démarche capricieuse il ait oublié de mettre tout ce qu'il aurait fallu dans $\phi(W)$. On peut donc *compléter* en quelque sorte ϕ en notant $lim(W) := \{a/$ pour tout Tartanpion ouvert U si $a \in U$ alors $U \in W\}$. Evidemment $\forall W : \phi(W) \subseteq lim(W)$. La fonction lim sera appelée $comp(\phi)$. Alors $comp(comp(\phi)) = comp(\phi)$

Autrement dit, quand on part d'avance d'une topologie et qu'on définit directement ϕ par $a \in \phi(W)$ *ssi tout ouvert qui contient a comme élément est un élément de* W alors $comp(\phi) = \phi$.

4.5.2 Exemple

Revenons à $E := [0, 1]$. Soit W un ultrafiltre sur E. Soit $A(W) :=$ l'ensemble des rationnels r tels que $[0, r] \in W$. Soit $\phi(W) := \{borneinf(A(W))\}$.

Théorème laissé en exercie:

Théorème 29 *les Tartanpion-ouvert correpondant à ϕ forment exactement la topologie usuelle de E.*

4.6 Espaces vectoriels topologiques sur IR

4.6.1 Définition

Conformément à la section précédente, c'est un couple $((E, +, .), T)$ avec:

1. On considère les espaces topologiques produits $A_1 := (IR, usuelle) \times (E, T)$ et $A_2 := (E, T) \times (E, T)$
2. $(E, +, .)$ est un esp.vect. sur IR
3. $(x, u) \mapsto x.u$ est continue de A_1 dans (E, T)
4. $(u, v) \mapsto u + v$ est continue de A_2 dans (E, T)
5. $u \mapsto -u$ est continue de (E, T) dans (E, T).

4.6.2 Les points-clés connus par les gens qui parlent de ce sujet

Dans les suite, on suppose (sauf mention contraire), qu'on est face à un evt, ie un couple (E, T) qui soit un evt. Les éléments de T sont simplement appelés *ouverts*, etc. On suppose la topologie **séparée**

Théorème 30 *Soient (E, T_1) et (E, T_2) deux evt. On abrège provisoirement $X \leq Y$ l'énoncé suivant:*

$\forall U \in X$ si $0_E \in U$ alors $\exists V \in Y : V \subseteq U$ et $0_E \in V$.

Alors si $T_1 \leq T_2$ et $T_2 \leq T_1$ alors $T_1 = T_2$.

En français ce principe est connu sous: il suffit de connaitre suffisamment de voisinages de 0_E pour connaitre la topologie mis sur E

Théorème 31 *Dans un evt, tout voisinage de 0_E est absorbant, c'est à dire: $\forall x \in E \forall U$ un ouvert tel que $0_E \in U$ il existe un entier n et $y \in U$ tel que $ny = x$.*

Théorème 32 *si $0_E \in U$ et U ouvert, alors il existe un ouvert V tel que $0_E \in V$ et $\forall (x, y) \in V^2 : x + y \in U$.*

Théorème 33 *un ensemble X est un voisinage de $a \in E$ ssi $\{x - a / x \in X\}$ est un voisinage de 0_E.*

Théorème 34 *un evt sur IR de dimension finie n'a qu'une seule topologie séparée possible*

Théorème 35 *tous les sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un evt séparé sont des ensembles fermés*

Théorème 36 *si un ouvert d'un evt est inclus dans un ensemble compact alors l'evt est forcément de dimension finie (ça, les gens l'aiment bien, c'est le célèbre théorème de Riesz)*

Chapter 5

Preuves des faits classiques énoncés dans les chapitres précédents

Les preuves qui suivent prouvent les enonces de la section *quelques grands classiques*. Il est conseille de s'y referer pour les notations.

5.1 Atteinte du maximum dans les compacts

Soit (E,T) un espace quasi-compact. Soit $(L,\leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit f une application de E dans L vérifiant $\forall k \in L \forall x \in E$ si $f(x) < k$ alors il existe $U \in T$ tel que $x \in U$ tel que $\forall y \in U : f(y) < k$. Cette hypothèse traduit une semi-continuité de f vérifiée évidemment dans les cas usuels par les applications continues.

Théorème 37 *il existe $a \in E \forall x \in E : f(x) \leq f(a)$. (Un maximum existe).*

5.1.1 Preuve

Supposons que non. Soit Y l'ensemble des $U \in T$ tel qu'il existe $a \in E \forall x \in U : f(x) < f(a)$. Alors Y est un recouvrement ouvert de E. Soit F fini inclus dans Y tel que $union(F) = E$. Soit $U \in F \mapsto a_U$ tel que $\forall U \in F \forall x \in U : f(x) < f(a_U)$. Soit $U \in F$ tel que $\forall V \in F : f(a_V) \leq f(a_U)$. Il existe $W \in F$ tel que $a_U \in W$. Donc comme $a_U \in W$ donc $f(a_U) < f(a_W)$, contradiction.

5.1.2 Une application classique du lemme précédent

.

Théorème 38 *Soit f dérivable (donc continue) sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Soit $x \in [0,1]$ tel que $f(x) > 0$. Alors $\exists c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$. Preuve: il existe $m \in [0,1]$ tel que $f(m)$ soit maximum possible et ce $m \in]0,1[$. Il vérifie donc forcément $f'(m) = 0$.* **(Théorème de Rolle)**

Corollaire: si f est dérivable sur $[0,1]$ alors il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = f(1) - f(0)$

5.2 Intersection filtrante de compacts connexes

Soit (E,T) un espace compact dont nous appellerons les éléments de T des ouverts. Soit $L \subseteq P(E)$ non vide tel que tout élément de L soit connexe et compact pour la topologie induite et vérifiant $\forall (X,Y) \in L^2 \exists Z \in L : Z \subseteq X \cap Y$.

Théorème 39 *$inter(E,L)$ est compact et connexe.*

5.2.1 Preuve

Soit $P := inter(E,L)$ l'intersection des élements de L. Comme intersection de fermés, P est fermée et compacte. Soient des ouverts U,V tels que $U \cap V \cap P = \emptyset$ et $P \subseteq U \cup V$, $a \in P \cap U$ et $b \in P \cap V$. Soit W un ultrafiltre sur L tel que $**\forall X \in L : \{Y/Y \subseteq X\} \in W$. Soit $K \in L$ tel que $K \subseteq U \cup V$. L'existence de K est un exercice provenant de *** que je laisse au lecteur. Soit $A :=$ l'ensemble des $X \in L$ tels que $X \subseteq U \cup V$. Alors $A \in W$ et il existe une application $b : X \in A \mapsto b(X) \in U \cap V$. Soit $Z := b[W]$ et c une limite de Z. Si $X \in L$, comme ** donc si $c \notin X$ alors $X \notin Z$, contradiction. Il s'ensuit que $c \in P$. Donc $c \notin U$ ou $c \notin V$. Quitte à renommer U,V, on peut supposer que $c \notin U$. Pourtant $c \in adh(U)$, sinon on aurait que $adh(U) \notin Z$, or $U \cap V \in Z$. Comme $c \in P \subseteq U \cup V$ donc $c \in V$ alors que $P \cap adh(U) \cap V = \emptyset$ contradiction.

*** Si P est inclus dans un ouvert U alors il existe une partie finie de F de L telle que inter(E,F) est incluse dans U

5.3 Petitesse des compacts métriques

Théorème 40 *Le cardinal d'un espace métrique et compact est inférieur ou égal au cardinal de IR*

Soit (E, d) un compact métrique, d étant la distance. Soit, pour chaque entier n, F_n un ensemble fini d'éléments de E vérifiant $\forall x \in E \exists y \in F_n : x \in boule(y, 1/n)$. A chaque $x \in E$ on associe une suite $u(x)$ telle que pour tout entier $n : u_n(x) \in F_n$ et $x \in boule(u_n(x), 1/n)$. Si $x \neq y$ et $3/n < d(x, y)$ alors $u_n(x) \neq u_n(y)$. Donc u est injective. Or il existe une injection de $Im(u)$ dans IN^{IN} évidente à construire avec l'axiome du choix et ce dernier peutêtre envoyé injectivement dans IR.

Remarque: on a utilisé l'inégalité triangulaire, mais il existe une preuve un peu plus longue que tout espace séparé et compact tel que $\forall x \in E$ il existe une suite d'ouverts U_n tels que $\cap_n U_n = \{x\}$ peut s'envoyer injectivement dans IR.

5.4 un espace métrique complet est de Baire

Théorème 41 *Un espace métrique complet est de Baire*

Soit $n \mapsto U_n$ une suite d'ouverts qui sont denses. Il existe (c'est presque évident***) une suite de boules fermées B_n vérifiant:

1. $B_n \subseteq U_n$
2. $B_{n+1} \subseteq B_n$
3. le diamètre de B_n est inférieure ou égale à $1/n$

.

Soit W un ultrafiltre tel que $\forall n : B_n \in W$. Il est évident que W est de Cauchy. Soit a une limite de W. Soit n un entier. Si $a \notin U_n$ alors $a \notin B_n$. Mais comme B_n est fermée et que a est une limite de W, $E \setminus B_n \in W$, contradiction.

*** Rappel de l'axiome du choix dépendant: *soit $n \mapsto R_n$ une suite de parties de E vérifiant pour tout n, $\forall x \in E \exists y \in E : (x, y) \in R_n$. Alors il existe une suite u vérifiant que pour tout entier n: $u(n), u(n+1)) \in R_n$*

5.5 Un espace compact est de Baire

Théorème 42 *Un espace compact est de Baire*

C'est la même preuve que pour le cas métrique complet en remplaçant *boules fermées* par *fermés* et en utilisant le lemme suivant:

soit U un ouvert non vide. Alors il existe un ouvert non vide V et un fermé F tels que $V \subseteq F \subseteq U$.

Preuve du lemme: sinon, soit W un ultrafiltre tel que pour tout ouvert non vide $V \subseteq U$ $adh(V) \setminus U \in W$. Soit a une limite de W. Alors $a \notin U$. Soit $b \in U$. Soit K,L des ouverts tels que $K \cap L = \emptyset$ et $b \in K$ et $a \in L$. Alors $a \notin adh(K \cap U)$ et donc $adh(K \cap U) \notin W$ contradiction.

5.6 Un espace E métrique précompact et complet est compact

Théorème 43 *Un espace E métrique précompact et complet est compact*

Soit W un ultrafiltre sur E. Soit $e > 0$. Il existe un ensemble fini F de boules de rayon e tel que $union(F) = E$. Donc $union(F) \in W$ et donc $\exists B \in F : B \in W$. Ceci valant pour chaque $e > 0$, l'ultrafiltre W est de Cauchy et donc converge. tout ultrafiltre converge et E est donc compact.

5.7 Caractérisation séquentielle

Théorème 44 *Un espace métrique est compact ssi de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge.*

un espace métrique est compact ssi de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge.

- supposons que de toute suite on peut extraire une sous-suite qui converge. Soit W un ultrafiltre sur E. Supposons que $\forall e > 0$ il existe $a \in E$ tel que boule(centre:=a,rayon:=e)$\in W$. En particulier, il existe une suite de $a_n \in E$ tels que $\forall n : boule(a_n, 1/n) \in W$. Soit f une application de IN dans IN, $b \in E$ vérifiant uof converge vers b et $f(n) > n$ pour tout entier n. Soit $e > 0$. Soit n un entier. Si $boule(b, e) \notin W$

alors $\exists x : d(x, a_{f(n)}) \leq 1/f(n)$ et $d(x, b) \geq e$. Contradiction avec le fait que $n \mapsto a_{f(n)}$ tend vers b.

soit donc $e > 0$ tel que $\forall a \in E : boule(a, e) \notin W$. Il existe donc une suite de u_n tels que $\forall n, p : d(u_n, u_p) \geq e$. En effet, une fois contruits les u_p pour $p < n$, comme W contient comme élément l'ensemble des x tels que $\forall i < n : d(x, u_i) \geq e$, ledit ensemble n'est pas vide et il suffit de prendre u_n dedans. Une telle suite u ne peut évidemment pas avoir de sous-suite convergente.

- soit E compact et u une suite de E. Soit V un ultrafiltre sur IN qui est non principal. Soit $W := u[V]$. Soit a une limite de W. Soit f la suite strictement croissante d'entiers obtenu en prenant $f(n) >$ à tous les $f(p)$ et tel que $d(u(f(n)), a) < 1/n$. La suite extraite uof de u converge vers a. La preuve qu'une fois construits les $f(i), i < n$ on peut choisir $f(n)$ comme voulu est la même qu'au paragraphe précédent.

5.8 dimension finie implique fermeture

Théorème 45 *Soit E un evt séparé sur IR (ou IC). Si H est un sous espace vectoriel de E qui est de dimension finie alors il est fermé*

Soit E un evt séparé et H un sev de dimension finie de E. Soit $B := e_1, .., e_n$ une base de H, soit $a \in E$ et W un ultrafiltre sur E de limite a tel que $H \in W$. On souhaite prouver que $a \in H$. Pour $v \in H$ on note $coor_i(v)$ le coefficient de son unique décomposition sur la base B. On note $Z_i := coor_i[W]$. Supposons que tous les Z_i aient une limite c_i. Alors $a = \sum c_i e_i \in H$ et c'est terminé. On peut donc supposer que $\forall x$ réel, $[x, +\infty[\in Z_1$ et que $\{v / |coor_1(v)| \geq$ tous les $|coor_i(v)|\} \in W$. Soit $L := f[W]$ où $f : v \mapsto (1/coor_1(v)).v$. $H \in L$ et $lim(L) = 0_E$. Mais $\{v / \exists m \in vect(e_2, .., e_n) : v = e_1 + m\} \in L$. Donc $e_1 \in adh(vect(e_2, .., e_n))$ qui est fermé si on suppose qu'on a pris le plus petit entier n qui offre un contre-exemple. Contradiction. Il suffit donc de démontrer qu'une droite vectorielle est fermée. C'est en fait le même raisonnement avec l'espace vectoriel nul qui est fermé. J'en donne néanmoins une preuve pour éviter les pinaillages. Soit donc la droite D vectorielle engendrée par un vecteur e, W un ultrafiltre sur E tel que $D \in W$ et $a \in E$ tel que W converge vers a. On suppose que $a \notin D$ et on cherche une contradiction. Soit Z un ultrafiltre sur IR tel que

$W = f[Z)$ avec $f : x \mapsto x.e$. Evidemment Z ne peut pas avoir de limite (si x est une limite de Z alors $a = x.e$). Il s'ensuit que $\forall M \in IR\{x/|x| \geq M\} \in Z$. Par conséquent, comme $e = (1/x).x.e$ et que $y.v$ tend vers 0_E quand (y, v) tend vers (∞, a) donc e appartient à tout ouvert qui $\ni 0_E$. Contradiction.

5.9 Théorème de Riesz

Théorème 46 *Tout espace vectoriel topologique sur IR qui est localement compact est de dimension finie*

Soit V un ouvert qui contient 0_E, K un compact tel que $V \subseteq K$ et U un ouvert qui contient 0_E et tel que $\forall v \in U : 10v \in V$.

Soit F un ensemble fini inclus dans E tel que $\forall v \in K \exists y \in F \exists t \in U : v = y + t$.

Soit H le sous-espace vectoriel de E engendré par F (qui est donc de dimension finie et donc fermé).

Soit $v \in E \setminus H$. On peut supposer que $v \in V$ car il existe un entier n et un élément $w \in V$ tel que $nw = v$.

Il s'ensuit qu'il existe $u_1 \in F, w_1 \in U : v = u_1 + w_1$. Autrement dit $v - u_1 \in U$. Il s'ensuit que $10v - 10u_1 \in V$. On a donc un élément $h_1 \in H$ tel que $10(v - h_1) \in V$. On peut recommencer avec $10(v - h_1)$ à la place de v, ce qui donne un élement $k \in H$ tel que:

$10(10(v - h_1) - k) \in V$. Autrement dit $100v - 100h_1 - 10k \in V$. Cela donne en fait un élément $h_2 \in H$ tel que $100(v - h_2) \in V$.

Finalement, on obtient une suite d'éléments h_n de H telle que pour tout entier $n : z_n := 10^n(v - h_n) \in V \subseteq K$ qui est compact.

Soit a une valeur d'adhérence de $n \mapsto z_n$. On sait que $10^{-n}.x$ tend vers 0_E quand x tend vers a et n tend vers l'infini. Soit donc O un ouvert tel que $0_E \in O$. il existe un ouvert L tel que $a \in L$ et un entier k tels que $\forall y \in L \forall n \geq k : 10^{-n}.y \in O$. Or pour une infinité d'entiers n, $10^n(v-h_n) \in L$. Pour ces entiers-là, $v - h_n \in O$. il s'ensuit, puisque c'est valable pour tout o que $v \in adh(H)$ et comme H est fermé que $v \in H$ contradiction.

5.10 Stone-Weirstrass

Théorème 47 *Soit E un espace compact. Soit C l'espace des applications continues de E dans IR, muni de la métrique de la convergence uniforme. Il* *suffit de peu de choses pour qu'une partie de C soit dense dans C (la preuve ci-dessous indique une condition suffisante)*

Soit $f \in C, e > 0$. Soit Y l'ensemble des ouverts U de E tel qu'il existe $h \in A : \forall x \in U : h(x) \in]f(x), f(x)+e[$. Les hypothèses faites sur A assurent que Y est un recouvrement (par des ouverts) de E. La compacité de E entraine l'existence d'un ensemble fini $F \subseteq Y$ tel que $union(F) = E$. Soit $U \mapsto h_U$ allant de F dans A tel que $\forall U \in F \forall x \in U : h_U(x) \in]f(x), f(x)+e[$. Alors la fonction $g(x) := min_{U \in F} h_U(x)$ vérifie la conclusion qu'on cherche.

Chapter 6

Complétions, compactifications

6.1 Problématique

Parfois, on a une irrésistible envie, partant d'une espace topologique (E, T), que l'on trouve "trop petit" ou "trop laid" de trouver un espace topologique (A, M) avec: (1) $E \subseteq A$ et (2) T est la topologie induite sur E par l'espace topologique (A, M) (3) (A, M) a tout plein de propriétés excitantes du genre, il est complet, il est compact, etc... Dans ce genre de lancée, évidemment les ultrafiltres sont les meilleurs guides.

Par exemple si on veut compactifier un espace (c'est à dire le voir comme sous-ensemble d'un espace compact plus grand), l'idée est toute trouvée: on veut que tout ultrafiltre converge, et bin, il suffit de demander que tout ultrafiltre converge vers "lui-même" en quelque sorte, comme ça on est tranquille.

6.2 Deux lemmes très peu présents dans la littérature

Théorème 48 *Soit $S \subseteq P(E)$ telle que de tout recouvrement de E par des éléments de S on peut extraire un sous-recouvrement fini. Alors la topologie T engendrée par S est quasi-compacte.*

6.2.1 Preuve

soit W un ultrafiltre sur E. Supposons que $\forall e \in E \exists U(e) \in T$ tel que $e \in U(e)$ et $U(e) \notin W$. Comme $U(e)$ est une réunion d'intersections finies d'éléments de S, on peut supposer que chaque $U(e)$ est en fait une intersection finie d'éléments de S quitte à remplacer la réunion qu'est $U(e)$ par l'item de cette réunion qui $\ni e$. Soit $F(e)$ un ensemble fini inclus dans S tel que $U(e) = inter(E, F(e))$. Comme $U(e) \notin W$, il existe un élement $R(e) \in F(e)$ tel que $R(e) \notin W$. Mais $e \in R(e)$. Ainsi $e \mapsto R(e)$ est un recouvrement de E par des élements de S et il existe un ensemble fini G tel que $\forall x \in E \exists e \in G : x \in R(e)$. Il existe $e \in G : R(e) \in W$, contradiction.

6.2.2 Deuxième lemme

Théorème 49 *Soit S une partie de $P(E)$ et T la topologie engendrée par S. soit W un ultrafiltre sur E et $e \in E$ tel que $\forall X \in S$ si $e \in X$ alors $X \in W$. Alors e est limite de W au sens de la topologie T.*

La preuve est laissée au lecteur.

6.3 Une compactification historique

.

6.3.1 Définition du compactifié d'Alexandroff

Nous évoquons le compactifié d'Alexandroff. Soit (E, T) un espace topologique et $a \notin E$. Soit $F := \{a\} \cup E$. Soit S l'ensemble des parties X de F telles que si $a \in X$ alors $E \setminus X$ est fermé **et** quasi-compact et sinon $X \in T$. Soit T_1 la topologie engendrée par S. Soit W un ultrafiltre sur E. Si a n'est pas sa T_1-limite dans F alors il existe une partie fermée et quasi-compact K de E telle que $K \in W$. Il s'ensuit qu'il existe $b \in E$ qui soit une T-limite de W. Soit maintenant $U \in T_1$ tel que $b \in U$ et $U \notin W$. Il s'ensuit que comme U est réunion d'intersections finies d'éléments de S donc il existe $X \in S$ tel que $b \in X$ et $X \notin W$ et donc que $X \notin T$. Par conséquent, il existe un ensemble fermé (et compact) L de l'espace (E, T) tel que $b \notin L$ et $L \in W$ ce qui est une contradiction. Conclusion: (F, S) est quasi-compact.

Supposons que $X \in T_1$. Alors X est réunion d'intersections finies d'éléments de S. Il s'ensuit que $X \cap E$ est réunion d'intersections finies d'ensembles de la forme $Y \cap E$ avec $Y \in S$. Se peut-il qu'il y ait un $Y \in S$ tel que $Y \cap E \notin T$. Dans ce cas ça voudrait dire que Y est de la forme $F \setminus K$ où K est un T

fermé-quasicompact de E. Mais alors $Y \cap E$ serait de la forme $E \setminus K$, mais ce dernier ensemble appartient à T, contradiction.

Soit maintenant $X \in T$. Il existe de manière évidente $Y \in T_1$ tel que $Y \cap E = X$. Tout bêtement $Y := X$.

Conclusion:

Théorème 50 *T est la topologie induite sur E par (F, T_1).*

Je renvoie à wikipedia ou d'autres documentations pour plus d'informations sur ce procédé, néammoins preuve du lemme suivant ci-dessous:

Théorème 51 *le compactifié d'Alexandroff est séparé ssi l'espace de départ est localement compact*

6.3.2 Preuve

On garde les notations du paragraphe précédent. Si (F, T_1) est séparé, chaque ultrafiltre sur F n'a qu'une seule limite. Soit $b \in E$. Supposons qu'aucun quasi-compact fermé de E ne contienne b dans son intérieur. Il existe alors un ultrafiltre W sur F tel que $E \in W$ et vérifiant: pour tout $X \in T$ si $b \in X$ alors $X \in W$. Mais par ailleurs pour tout $X \in S$ si $a \in X$ alors $X \in W$. pour tout $X \in T_1$ si $a \in X$ alors $X \in W$. Cela donne un ultrafiltre W qui a comme limites les deux éléments différents a et b, contradiction

Réciproquement: si E est localement compact alors (F, T_1) est évidemment séparé, il l'est même par les éléments de S et pas seulement par les éléments de T_1.

6.4 Complétion

cette section pourrie est à refaire entièrement

Soit (E, d) un espace métrique. Soit Z l'ensemble des ultrafiltres de Cauchy sur E. Notons $V == W$ la relation d'équivalence sur Z définie par $\forall e > 0$ il existe $A \subseteq E$ tel que le diamètre de A est $\leq E$ et $A \in V \cap W$. Exercice: prouver que c'est une relation d'équivalence.

Soit c, d deux éléments de $Y := Z/ ==$ qui sont différents. Alors la borne inférieure des diamètres des parties A tel qu'il existe $(V, W) \in c \times d$ avec $A \in V \cap W$ est un nombre strictement positif (exercice) que l'on notera $d_2(c, d)$. Exercice: (Y, d_2) est un espace métrique. L'application $j : a \in$

$E \mapsto classe_{==}(W_a(E))$ est une isométrie et $Im(j)$ est dense dans (Y, d_2). (Ceci sont des exercices routiniers qui ne demandent aucune inspiration et qui sont fastidieux seulement au niveau de la gestion formelle). On note T_3 la topologie induite par la métrique d_2 sur Y.

Soit S un ultrafiltre de Cauchy sur (Y, d_2). Soit W un ultrafiltre sur E qui contient toutes les boule X de l'espace métrique (E, d) telles que $adh_{T_3}(\{j(x)/x \in X\}) \in S$. Montrer que W est de Cauchy et que $classe_{==}(W)$ est une limite de l'ultrafiltre S dans l'espace (Y, d_2).

Conclusion: (Y, d_2) est complet.

6.5 Compactification de Stone-Cech

C'est le procédé probablement le plus "sain", ou du moins le plus intelligent. Contrairement à la compactification d'Alexandroff, ce procédé ne se contente d'envoyer tous les éléments virtuels qui sont "loin de tout" à un état de superproximité d'un unique élément ∞ ajouté à l'espace.

C'est aussi le procédé le plus "évident" si on fait abstraction des paradoxes ensemblistes qui empèchent, sous peine de contradiction, de prendre n'importe quelles collections comme ensembles. On va faire semblant d'ignorer cette difficulté (peu importante en fait) de manière à montrer que la compactification de Stone-Cech est la plus "simple" à décrire. En plus on obtiendra tout de suite ce que les fans de "catégories" appellent des "un objet universel".

6.5.1 Définition "fictive"

Soit (E, T) un espace topologique quelconque.

Soit Big l'ensemble des couples (f, K) où f est une application continue de E dans un espace compact K. (Evidemment, en fait Big est une collection et non pas un ensemble).

Soit $Huge$ l'ensemble des applications s définies sur Big telles que $\forall (f, K) \in Big : s(f, K) \in K$.

On munit $Huge$ de la topologie produit, c'est à dire de la topologie engendrée par l'ensemble des ensembles suivants: $a(f, K, U) := \{s \in Huge / s(f, K) \in U\}$ quand (f, K, U) parcourt l'ensemble des triplets tels que f est une application conitnue de E dans K et U est un ouvert de la topologie de K.

Pour $x \in E$, $(f, K) \in Big$, on note $j(x)(f, K) := f(x)$.

L'application j va de E dans $Huge$ et elle est manifestement continue. Par Tychonoff, $Huge$ est un espace compact. On appelle $Stone(E)$ l'adhérence de l'image de E par j dans $Huge$. Par définition l'image de E par j est dense dans $Stone(E)$.

Soit maintenant un espace compact K et une application continue f de E dans K. Autrement dit, un élément de Big. Soit g l'application de $Huge$ dans K : $s \in Huge \mapsto s(f, K)$, qu iest évidemment elle aussi continue. Alors $f = goj$. En effet, $f(x) = j(x)(f, K) = g(j(x))$.

6.5.2 Définition moins idéaliste

Soit Z l'ensemble des ultrafiltres sur E. Soit $(f, K) \in Big, W \in Z$. La compacité de K donne une unique limite $=: li(f, K, W)$ à $f[W]$. On obtient donc une application naturelle h allant de Z dans $Huge$ définie par: $(f, K) \mapsto li(f, K, W)$. En fait $\forall W \in Z : h(W) \in Stone(E)$.

Supposons que non. Soit un ouvert X de $Huge$ tel que $h(W) \in X$ et $X \cap Stone(E) = \emptyset$. On peut supposer ($X$ est une réunion de tels ensembles) qu'il est de la forme $\{s \in Huge / \forall (f, K) \in F : s(f, K) \in U(f, K)\}$ où F est une partie finie de Big et U une application définie sur F qui associe à chaque $(f, K) \in F$ un ouvert de K. Il s'ensuit que pour tout $x \in E$ il existe $(f, K) \in F$ tel que $j(x)(f, K) = f(x) \notin U(f, K)$. Il existe donc $(f, K) \in F$ tel que l'ensemble des $x \in E$ tel que $f(x) \notin U(f, K)$ est un élément de l'ultrafiltre W. Or $h(W)(f, K) =$ la limite de $f[W]$ et $U(f, K) \notin f[W]$. Mais comme $U(f, K)$ est un ouvert de K, il s'ensuit que $h(W)(f, K) \notin U(f, K)$ contradiction.

Demandons-nous si tout élément de $Stone(E)$ est de la forme $h(W)$ pour au moins un $W \in Z$. (Autrement dit est-ce que h est surjective?). Soit $s \in Stone(E)$. Tout ouvert de l'espace $Huge$ qui $\ni s$ rencontre l'image de E par j. Supposons cependant que pour tout ultrafiltre W, il existe $(f, K) \in Big$ (qui dépend de W) tel que $h(W)(f, K) \neq s(f, K)$. La séparation de K donne alors deux ouverts $U(W), V(W)$ qui séparent $h(W)(f, K)$ et $s(f, K)$. Il s'ensuit en particulier (vu que $h(W)(f, K)$ est la limite de $f[W]$) que $V(W) \notin f[W]$ et donc que l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \notin V(W)$ est un élément de W (que l'on notera $D(W)$). Soit F un ensemble fini inclus dans Z tel que $\forall x \in E \exists W \in F : x \in D(W)$. Le couple (f, K) de l'argument précédent est maintenant noté provisoirement $f(W), K(W)$. L'ensemble des $t \in Huge \in$ tel que $\forall W \in F : t(f(W), K(W)) \in V(W)$ est un ouvert de $Huge$ qui contient s, donc il existe $x \in E$ tel que $\forall W \in F$:

$f(W)(x) = j(x)(f(W), K(W)) \in V(W)$. C'est exactement le contraire de l'énoncé: $\forall x \in E \exists W \in F : f(W)(x) \in D(W)$. Contradiction.

Soit $==$ la relation d'équivalence sur Z définie par $W_1 == W_2$ ssi $h(W_1) = h(W_2)$. L'application surjective h de Z dans $Stone(E)$ induit donc une bijection de $Z/==$ sur $Stone(E)$.

Il ne reste plus qu'à transporter la topologie de $Stone(E)$ sur $Z/==$.

6.5.3 Utilité langagière

En quelque sorte le compactifié de Stone-Cech est l'ensemble de "toutes les limites" possibles de n'importe quoi qui "varie" (sans préciser le sens du mot "varier") dans un espace topologique (E, T). C'est l'outil idéal et formellement valide qui permettrait d'écrire, si l'habitude était prise des expression comme:

$f(x)$ *tend vers ceci quand* x *tend vers cela*

Les ceci et cela peuvent être remplacés par des ultrafiltres dans TOUS LES CAS

Chapter 7

Topologie quotient

Soit (E, T) un espace topologique et soit $==$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble des classes d'équivalence est traditionnellement noté $E/==$. Dans la suite on note $Q := E/==$

Soit T_2 l'ensemble des parties X de Q telles que $union(X) \in T$.

Théorème 52 (Q, T_2) *est un espace topologique. Il est appelé le quotient de l'espace* (E, T) *par* $==$

Remarque: ce théorème est en fait une évidence: une réunion d'élément de T_2 est un élément de T_2 et une intersection finie d'éléments de T_2 aussi. Ce dernier point est peut-être un poil moins évident? $union(X) \cap union(Y)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe $i \in X$ et $j \in Y$ vérifiant $x \in i$ et $x \in j$. Deux éléments différents de Q étant dijoints, il s'ensuit que $union(X) \cap union(Y)$ est l'ensemble des $x \in E$ tels qu'il existe $i \in X \cap Y$ vérifiant $x \in i$. Autrement dit $union(X) \cap union(Y) = union(X \cap Y)$

7.1 Un exemple élaboré

Soient E, F des Banach (la définition et quelques propriétés classiques sont donnés plus loin). Soit f, g des applications linéaires de E dans F. Pour $x \in IR$, on note $B(x)$ la boule fermée de E centrée en 0_E et de rayon x, autrement dit $\{v \in E / nomre_E(v) \leq x\}$.

On suppose qu'il existe un sous-ensemble compact K de F tel que l'image par g de $B(1)$ est incluse dans K. On suppose aussi que f est continue, ce qui signifie, dans le cadre des applications linéaires qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in B(1) : norme_F(f(x) \leq r$.

Le but du jeu est de démontrer qu'il existe un compact G de F tel que $\forall x \in B(1) : f(x) \in G$.

En "jargon" d'analyste fonctionnel, *un opérateur borné dont l'image est incluse dans celle d'un opérateur compact est lui-même un opérateur compact.*

Remarque: ça n'a rien d'évident car à priori, il se peut que bien qu'incluse dans $Im(g)$, l'image de $B(1)$ par f peut n'être incluse dans aucune image par g de quelque boule que ce soit.

Dans la suite, je donne une preuve que je recopie sur JLT un intervenant du forum, lien:

`http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,738489,page=1`

7.2 Preuve

Soit Z le noyau de l'application linéaire g. Supposons que $f(x) = g(y)$ et $z \in Z$. Alors $f(x) = g(y) + 0_F = g(y) + g(z) = g(y + z)$. Ainsi, en notation symbolique, $\{f(x)\} \supseteq g(y + Z)$. De plus comme le premier membre est un singleton, en fait $\{f(x)\} = g(y+Z)$. Il apparait donc que les sous-ensembles $t+Z$ de E forment une partition P importante pour ce problème. La relation d'équivalence induite sera noté $==$. Autrement dit $x == y$ ssi $x - y \in Z$.

Nous allons munir très classiquement P d'une structure d'espace vectoriel, d'une norme et montrer que c'est un Banach pour cette norme.

Dans la suite, pour $a \in E$, la notation $a+Z$ désigne l'ensemble des $x \in E$ tels que $x - a \in Z$.

Soit H l'ensemble des couples $(x, Y) \in E \times P$ tels que $\exists t \in Y : f(x) = g(t)$. C'est une **application** allant de E dans P.

On décrète que $norme_P$ d'un élément $X \in P$ est $inf(\{norme_E(x)/x \in X\}$. La somme de $a + Z$ et de $b + Z$ est $(a + b) + Z$. Quand x est un réel, on définit $x.(a + Z)$ comme étant l'élément $(x.a) + Z$

Pour avoir un sens, ces définitions doivent être telles que si $a == a'$ et $b == b'$ alors $(a + b) + Z = (a' + b') + Z$, et idem avec la multiplication. Si $a' = a+e$ et $b' = b+u$ avec e, u dans Z et $r \in IR$ alors $a'+b' = a+b+(e+u)$ et $r.a' = r.a + r.e$. Or $e + u$ ainsi que $r.e$ sont des éléments de Z.

Exercice: H est une application linéaire de E dans P.

Admettons que $P(, +, ., norme_P)$ soit un espace de Banach (Ca n'a rien d'évident, il faut vérifier que $norme_P$ est une norme et qu'elle rend complet l'espace métrique induit). Soit W un ultrafiltre tel que $B(1) \in W$. On souhaite prouver que $f[W]$ a une limite. $H[W]$ est un ultrafiltre sur P. Supposons que r soit un réel tel que $\{x/H(x) \cap B(r) \neq \emptyset\} \in W$. Alors il existe un ultrafiltre W_2 sur E tel que $f[W] = g[W_2]$ et $B(r) \in W_2$. Mais par hypothèse, $g[W_2]$ a alors une limite et cqfd.

Il s'ensuit que pour tout réel r, $\{x/H(x) \cap B(r) = \emptyset\} \in W$. C'est très exactement dire que $\forall r \in IR : \{x \in E/norme_P(H(x)) > r\} \in W$. Autrement dit, c'est très exactement dire que l'application linéaire H allant de E dans P n'est pas continue.

7.2.1 Un outil

Il y a un théorème apparemment fructueux d'analyse fonctionnelle qui dit la chose suivante:

Théorème 53 *si (le graphe d')une application linéaire allant d'un Banach dans un autre est fermé dans le produit topologique des deux Banach alors elle est continue.*

Ce théorème est un corollaire du théorème de l'application ouverte donné dans la section sur les Banach un peu plus loin dans le document.

7.2.2 Suite et fin

Il suffit donc de prouver que H est fermée dans $E \times P$. Et là, je vais le rédiger EXCEPTIONNELLEMENT en ANS et en donner une traduction informelle très simple à traduire en argument formel classique:

7.2.3 Rédaction ANS

Supposons que le couple $(x, Y) \in H$ soit superproche de l'élément standard $(a, C) \in E \times P$. Cela signifie qu'il existe $y \in Y, c \in C$ tel que $norme_E(y - c)$ est superproche de 0. Il s'ensuit donc que $norme_F(g(y) - g(c))$ est elle-même superproche de 0. Or $g(y) = f(x)$. Donc, comme f est continue et que F est un espace topologique séparé, $g(c)$ est superproche de $f(x)$ qui est lui-même superproche de $f(a)$ et finalement $g(c) = f(a)$ ce qui prouve que $(a, C) \in H$.

7.2.4 Rédaction informelle

Remplacer “superproche” par “aussi proche que l’in veut”.

7.2.5 Ce qui n’a pas été justifié

- la linéarité de H
- le fait que $norme_P$ est une norme sur l’espace vectoriel P
- le fait que $(x, y) \mapsto norme_P(x - y)$ est une distance d telle que (P, d) est complet (voir section suivante).

CQFD

7.3 Complétude

soit E un Banach et F un sev fermé de E. La norme de E est notée $||.||$

Soit P l’ensemble des espaces affines $x + F$ de E (tous fermés). On munit P de la norme suivante: $N(X) := inf\{||x||/ \in X\}$. On suppose compris que P est muni des opérations décrites à la section précédente qui en font un espace vectoriel.

Dans cette section, on prouve la complétude de $P = E/F$ est un Banach, argument admis à la section d’avant), cadire que sa N est bien une norme qui fait de P un evn et qu’il est complet.

- Soit X, Y dans P. Si $N(X + Y) > N(X) + N(Y) + e$ alors pour tout $z \in X + Y$: $||z|| > N(X) + N(Y) + e$. Il existe donc deux éléments x, y respectivement dans X, Y tels que $||z|| > ||x|| + ||y|| + e$. Pourtant $x + y \in X + Y$ contradiction. En effet, x peut s’écrire $a + o_1$, y peut s’écrire $b + o_2$ avec des $o_i \in F$ et $x + y = (a + b) + (o_1 + o_2) \in X + Y$.
- On raisonne de même pour prouver que $N(a.X) = |a|.N(X)$
- Si $N(X) = 0$, la fermeture de F entraine que $0_E \in X$ et donc que $X = 0_P$.
- Il reste à prouver la complétude. Soit des X_n formant une suite de Cauchy d’éléments de P. On peut supposer que $\forall n, p$ si $n < p$ alors $dist(X_n, X_p) < 10^{-n}$. Ayant construit $x_n \in X_n$, on choisit $x_{n+1} \in X_{n+1}$

tel que $||x_n - x_{n+1}|| \leq 2.10^{-n}$. Remarquer que c'est toujours possible car les X_n ne sont pas n'importe quels sev de E, mais des sev deux à deux "parallèles" (Il s'ensuit que si $(u, v) \in X \times Y$ vérifient $||u - v|| < e$ et $x \in X$ alors il existe $y \in Y$ tel que $||x - y|| < e$. Il suffit en effet de prendre $y := x + (v - u)$).

Soit alors b une limite de $n \mapsto x_n$. Soit $e > 0$. Alors $dist(b+F, X_n) < e$ dès que n est assez grand car $(b, x_n) \in (b + F) \times X_n$.

Chapter 8

Remarques sur la topologie algébrique

Je n'y connais pas grand chose, par contre, je peux, au gré de mes promenades sur le forum, réimporter quelques résultats marquants dans le présent fichier, quand ça ne me coute pas trop cher en temps.

La topologie algébrique est un corpus de techniques qui essentiellement montre sa puissance en prouvant le théorème de Brouwer et le théorème de Lepfchetz. Les deux sont naturels, mais c'est le deuxième qui est intuitif.

8.1 Théorème de Lefchetz (version corollaire)

Le "thorme" suivant ncessaite des hypothses

Théorème 54 *Soit $n > 0$ un entier, soit E un sous-espace compact et triangul de de IR^n. Soit $a \in IR^n$. Soit f une application continue de $[0,1] \times E$ dans E telle que $\forall x \in E : f(0,x) = a$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(1,x) = x$.*

8.1.1 Preuve intuitive

Considérons la situation "physique" suivante:

- une suite de cabine toute indiscernable
- dans chaque cabine, un petit personnage

- tout le monde est fabriqué sur le même modèle, dans un monde mécanique déterministe.
- à l'instant $-n$, le réveil sonne dans la cabine numéro n. Le petit personnage se réveille alors (il est en position a de la cabine). Il lit sur son écran que son homologue d'avant a terminé son aventure d'une unité de temps en position y_{n+1}
- Ce petit personnage fait alors "ce qu'il veut", mais doit s'immobiliser en position y_n et se recoucher avant l'instant $1-n$

Intuitivement, à moins que ces IN copies du même personnage soient douées de libre-arbitre, sinon on pourra leur aventure (en les identifiant à des points matériels), comme des applications de $[0,1]$ dans E (l'espace de la cabine est E).

Intuitivement toute application continue du type de f peut servir de guide matériel (déterministe) à leur comportement. Le personnage se réveille en position a et lit sur son écran x. son aventure est alors l'application $t \mapsto f(t,x)$

La symétrie du protocole oblige à admettre que les IN aventure seront la même et que $y_n = y_{n+1}$. Mais $y_n = f(1, y_{n+1})$, d'où l'existence affirmée par le théorème

Il va sans dire que le petit argument précédent n'est vraiment pas une preuve!!!

8.2 Théorème de Brouwer

Théorème 55 *Pour tout entier n, toute fonction d'un convexe compact de IR^n dans lui-même a un point fixe.*

Le théorème de Brouwer est corollaire évident du théorème de Lefchetz

A SUIVRE

8.3 Un résultat amusant

Théorème 56 *Soit $n > 1$ un entier et soit H une application continue de IR^n dans IR. On suppose que $H^{-1}(]-\infty,0[)$ n'a que des composantes connexes non bornées ainsi que $H^{-1}(]0,+\infty[)$*

Alors $H^{-1}(0)$ possède au moins une composante connexe non bornée

Ce résultat est récupéré sur le forum. J'en donne une preuve qui utilise un lemme de topologie algébrique signalé par JLT.

8.3.1 Preuve

Lemme de topologie algébrique de JLT

Théorème 57 *Soit $n \geq 2$. Soit K un compact connexe de IR^n. Soit U la composante connexe non bornée de $IR^n \setminus K$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, l'ouvert $U_\epsilon = \{x \in U \mid d(x, K) < \epsilon\}$ est connexe.*

En effet, soit F le complémentaire de U. C'est un borné de IR^n car si B est une boule contenant K, alors U contient le complémentaire de B donc $F \subset B$. De plus, F est un fermé car c'est le complémentaire d'un ouvert. Donc F est compact.

L'ensemble F est connexe. En effet, soit $f : F \to \{0, 1\}$ continue. Comme K est connexe, f est constante sur K. Pour se fixer les idées, supposons par exemple que $f(x) = 0$ pour tout $x \in K$.

Si $x \in F \setminus K$, considérons une demi-droite $\{x + ta \mid t \geq 0\}$ issue de x. Comme x n'est pas dans la composante connexe non bornée de $IR^n \setminus K$, cette demi-droite doit rencontrer K. Soit $t_0 > 0$ le plus petit réel positif tel que $x + t_0 a \in K$. Alors $[x, x + t_0 a] \subset F$, donc f est constante sur ce segment, donc elle y est nulle.

Bref, F est compact connexe.

Soit $F_\epsilon = \{x \in IR^n \mid d(x, F) < \epsilon\}$. On vérifie facilement que $F_\epsilon = F \cup U_\epsilon$. C'est un voisinage ouvert de F. De plus, il est connexe. En effet, si $f : F_\epsilon \to \{0, 1\}$ est continue, elle est constante sur F et aussi sur toutes les boules ouvertes $B(x, \epsilon)$ où $x \in F$, donc on voit facilement qu'elle est constante sur F_ϵ.

En considérant la suite exacte des groupes de cohomologie (mettons de de Rham)

$$0 \to H^0(IR^n) \to H^0(F_\epsilon) \oplus H^0(U) \to H^0(U_\epsilon) \to H^1(IR^n)$$

on voit que $H^0(U_\epsilon) = IR$ donc U_ϵ est connexe.

Preuve du théorème

Notons A_e l'ensemble des x tels que $e > |H(x)|$.

Soit une assez grande boule B (fermée) centrée en 0. Soit D la réunion de B avec les composantes connexes dans A_e des éléments de $B \cap A_e$. Soit K son adhérence. Par l'absurde, K peut être supposé compact (il est évidemment connexe, tout point étant connecté à la boule). Par le théorème de JLT, sa frontière F est connexe. Sur F, H est non nulle et de signe constant. Contradiction si on choisit une boule assez grande dans laquelle figure des x tels que $H(x)$ puisse être de signe opposé audit signe constant.

Il s'ensuit que pour tout $e > 0$ il existe un élément $x \in B$ tel que x a une composante connexe non bornée dans A_e. A chaque $e > 0$, associons $x(e) \in B$ ainsi et $C(e)$ sa composante connexe dans A_e (qui rappelons-le a été choisie non bornée).

Soit un ultrafiltre W sur IR tel que pour tout $e > 0 :]0, e] \in W$. Soit $a \in B$ limite de l'image de W par $e \mapsto x(e)$ et notons L l'ultrafiltre image de W par $e \mapsto C(e)$. Soit D l'ensemble des $x \in IR^n$ tel que pour tout $e > 0 : \{C | e > dist(x, C)\} \in L$. Comme D intersecte chaque sphère centrée en 0 (ces sphères sont compactes), D n'est pas bornée. Par ailleurs D est connexe et $\forall x \in D : H(x) = 0$. Et comme $a \in D$, cqfd.

Chapter 9

Des evt particuliers: les Banach et les Hilbert

9.1 Les Hilbert

9.1.1 Définition

Un pré-Hilbert est un espace vectoriel sur IR muni d'un produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$. Il est muni d'une norme naturelle $norme(x)$ qui consiste à prendre la racine carrée de $(x|x)$. L'application $(x, y) \mapsto norme(x - y)$ est alors une distance. Un pré-hilbertien est appelé *un espace de Hilbert* quand l'espace métrique (H, d) est complet. Ce sont des cas particulier de Banach qui sont abordés à la section suivante.

On note $B_r(H)$ la boule fermée, centrée en 0_H et de rayon r.

D'une manière générale, quand B est un Banach, l'ensemble des formes linéaires h sur B telles qu'il existe $k \in IR \forall x \in B_1(B) : |h(x)| \leq k$ est lui-même un Banach muni de la norme $||h|| := sup_{x \in B_1(B)} |h(x|$.

Il ya toute une littérature importante sur les Hilbert, je ne vais pas m'étendre (surtout que je n'y connais pas grand chose). Il y a cependant un truc célèbre les concernant, **c'est qu'ils sont réflexifs**.

Théorème 58 *Un espace de hlibert est réflexif*

9.1.2 Preuve de la reflexivité des Hilbert

Soit H un Hilbert et W un ultrafiltre sur H. On appelle *porte vers* W un élément $a \in H$ qui est le plus proche possible de W. En termes formels:

1. notons $distt(x, W)$ la limite dans $IR \cup +\infty$ de l'ultrafiltre $f_x[W]$ image de W par $y \mapsto norme(x - y)$

2. a est une porte vers W quand $\forall x \in H : distt(x, W) \geq distt(a, W)$

Intuitivement, W est un élément virtuel de H et a est "son suppléant" réel dans H. Le point important avec les Hilbert est le suivant:

Théorème 59 *Si $distt(x, W) < +\infty$ alors il existe une* **unique porte** *a dans H qui mène vers W.*

Il s'ensuit que pour tout autre $b \in H$, le vecteur $a - b$ est "orthogonal" au vecteur virtuel qui mènerait de a à W. Précisément: pour tout $e > 0$, l'ensemble des x tel que $|(a - b, a - x)| < e$ est un élément de W.

Preuve: en effet, sinon, il y aurait un moyen simple de s'approcher plus de W que a ne le fait, en parcourant la droite (ab) et en se plaçant sur cette droite en un point le plus près possible de W (le plus court chemin qui mène d'un point à une droite consiste à y aller perpendiculairement et ce fait est encore valable dans les Hilbert). L'existence de portes est proposée en exercice à une section ultérieure

Remarque: c'est le caractère complet de H qui assure l'existence de suffisamment de portes.

Notons, comme c'est l'usage H' le Banach des formes linéaires continues sur H que l'on dote de la norme $sup|f(x)|$, la borne sup étant prise sur l'ensemble des x tels que $norme(x) \leq 1$.

Enoncé

La réflexivité est l'énoncé qui dit:

Théorème 60 $\forall f \in (H')' \exists a \in H \forall h \in H' : f(h) = h(a)$

Suite de la preuve

Soit ϕ une forme linéaire continue sur H'. **On peut supposer que** $\forall h \in B_1(H') : |\phi(h)| \leq 1$

On cherche un élément $a \in H$ tel que $\forall h \in H' : \phi(h) = h(a)$. Le lemme de JLT fournit un ultrafiltre W sur H tel que $B_1(H) \in W$ et vérifiant: pour tout $e > 0$ et toute $h \in B_1(H') : \{x \in B_1/|h(x) - \phi(h)| < e\} \in W$.

L'ultrafiltre W contenant la boule unité de H, il existe une (unique) porte qui mène à W. Notons-la a. Rappelons que si $b \neq a$ alors il existe $e > 0$ tel que $\{x/dist(x, b) > dist(x, a) + e\} \in W$ *****

On peut raisonnablement espérer que comme "a est l'élément le plus proche de W", on aura que $\forall h \in H' : \phi(h) = h(a)$. Essayons de le prouver.

Soit $h \in B_1(H')$ telle que $\phi(h) \neq h(a)$. Soit $r := \phi(h)$. Soit b l'élément de l'hyperplan affine fermé $P := \{x|h(x) = r\}$ qui est le plus proche possible de a, autrement dit, b est le projeté orthogonal de a sur P. Rappelons-nous que $\{x/dist(x, a) \leq 1\} \in W$. On sait que pour tout $e > 0 : \{x/|(a-x|a-b)| < e\}$. Notons $Z = f[W]$ où f est la projection orthogonale sur P. Il s'ensuit que $\{z/h(z) = r\} \in Z$ et $\{x/dist(x, f(x)) < e\} \in W$ pour n'importe quel $e > 0$. Mais cela oblige $\{z/b$ est plus proche de z que a ne l'est $\}$ à être un élément de Z. Ceci est en contradiction avec *****. Il s'ensuit que $a \in P$ et donc que $\phi(h) = h(a)$.

Résumé de la preuve

Je résume cette preuve par un slogan intuitif et simplificateur: *si a est la porte qui mène à W et $h \in H'$ alors $h(a)$ et $h[W] = W_{f(h)}(H)$ sont obligés d'être infiniment proches.*

Remarque:

La *preuve intuitive* ci-dessus montre qu'on n'a essentiellement besoin que d'avoir l'unicité des portes et l'unicité du projeté sur un hyperplan fermé. Cela permet de "deviner" que les espaces vectoriels normés complets (ils s'appellent des espaces de Banach) qui ont des boules suffisamment "arrondies" (en fait ils suffit qu'elles soient uniformément strictement convexes) sont réflexifs.

9.1.3 Détails

Dans cette section, je répare des tricheries commise dans la section précédente. En effet, j'ai prétendu de manière très cavalière, et sans argument sur les problèmes soulevés par la continuité que tel ou tel ultrafiltre induisait telle ou telle forme linéaire.. continue et réciproquement. Tout ceci aurait dû être justifié. On est dans un Hilbert ambiant durant toute la section.

Dans le sens ultrafiltres vers formes

Théorème 61 *Soit W un ultrafiltre sur H* **qui appartient à la boule unité**. *Soit f la forme linéaire définie par $f(x) := lim((y \mapsto (x|y))[W])$. Alors si f est bien définie alors elle est continue.*

Preuve: la linéarité ne pose aucun problème. Soit $x \in H$ de norme au plus 1. Si $||y|| \leq 1$ alors $|(x|y)| \leq 1$ et donc $\{y||(x|y)| \leq 1+e$ et $|f(x)-(x|y)| \leq e\} \in W$. Ceci valant pour tout $e > 0$, cqfd.

Théorème 62 *Soit W un ultrafiltre sur H' qui appartient à la boule unité de H'. Soit f la forme linéaire définie par $f(x) := lim((g \mapsto g(x))[W])$. Alors si f est bien définie alors elle est continue. (En d'autres mots, l'injection canonique de H dans H'' est continue).*

La preuve est laissée au lecteur et plus simple encore que la précédente.

Dans l'autre sens

Si $\phi \in H''$ dont la norme est ≤ 1. On sait évidemment trouver des ultrafiltres W sur E tels que $\forall h \in H' : \{x \in E|\phi(h) = h(x)\} \in W$. Bon, mais dans ce qui précède, j'ai été très cavalier avec ça, en supposant même qu'il serait facile de choisir un tel W de manière qu'il contienne une boule B_r. (On pourrait dire qu'il est "borné", si l'usage des ultrafiltres était courant dans ce domaine).

Or rien n'indique qu'il soit facile d'obtenir un tel ultrafiltre, ni même qu'il existe avec le signe = plutôt qu'une contrainte moins exigeante de égal approximatif.

Pour réparer cette tricherie, je reproduis ci-dessous un lemme qui m'a été donné par l'intervenant JLT du forum *lesmathematiquepointnet*. En termes résumé, ce lemme exprime, et ceci est valable dans tous les Banach, que l'application $H \to (H')'$ qui à chaque $x \in H$ associe $f \in H' \mapsto f(x)$ a une image qui est dense dans $(H')'$.

Le lemme de JLT

Théorème 63 *Soit donc B un Banach et ϕ un élément de son bidual qui soit de norme ≤ 1. Soit $e > 0$ et F une partie finie de B' le dual de B, incluse dans la boule unité de B'. Il existe x dans la boule unité de B vérifiant:* $\forall h \in F : |h(x) - \phi(h)| < e$

Lien: `http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?14,737905,739508#msg-739508`

Preuve de JLT

Je me place dans le cas où le corps de base est IR.

Notons $h_1, \dots, h_n$ les éléments de F. Considérons l'application

$$f : B \to IR^n$$

définie par $f(x) = (h_1(x), \dots, h_n(x))$. Notons B_1 la boule fermée de B de centre 0 et de rayon 1. Supposons par l'absurde que pour tout $x \in B_1$ on ait $||f(x) - (\phi(h_1), \dots, \phi(h_n))|| > e$. D'après le théorème de Hahn-Banach de séparation des convexes (en dimension finie), il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $c \in IR$ tels que $h = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_n h_n$ vérifie

$$h(x) < c < \phi(h)$$

pour tout $x \in B_1$.

En passant au sup** sur x, on obtient $||h|| \leq c < |\phi(h)|$, donc $||\phi|| > 1$. Impossible

Remarque: ** ne pas oublier que la boule unité est non seulement convexe mais équilibrée. Autrement dit, si $h(x) < -c$ avec x dans la boule unité alors $h(-x) > c$ avec $-x$ dans la boule unité

9.1.4 Bilan

L'existence de portes dans les Hilbert est proposée un peu plus loin dans ce document en exercice. Le schéma que j'ai proposé ci-dessus (avant le lemme) est un schéma intuitif mais qui se formalise facilement **une fois qu'on est assuré de l'existence d'un ultrafiltre dans la boule unité**. Je recommande au lecteur de traduire ce schéma en démonstration rigoureuse.

9.2 Les Banach

Un Banach est un espace vectoriel normé et complet. La topologie induite par la distance (elle-même induite par la norme) en fait un evt. Les Hilbert du paragraphe ci-dessus sont des Banach particuliers.

On appelle demi-espace un ouvert un ensemble de la forme $\{x \in B/h(x) > a\}$ où a est un réel et h une forme linéaire continue

J'essaie de me souvenir des choses dont les fans d'analyse fonctionnelle parlent souvent. Soit B un Banach

9.3 Liste

Théorème 64 *si la topologie engendrée par les demi-espaces ouverts fait de la boule unité un compact alors B est reflexif.*

Théorème 65 *si B est réflexif alors la topologie engendrée par les demi-espaces ouverts fait de la boule unité un compact*

Théorème 66 *si une application linéaire continue de B dans B' est surjective alors l'image de tout ouvert qui contient 0_B contient elle-même un ouvert qui contient $0_{B'}$.*

Théorème 67 *un théorème célèbre qui concerne en fait les evt généraux: Hanh-Banach! C'est un théorème multiforme qui dit en résumé que quand deux convexes sont disjoints ou ont des intérieures disjoints, il existe un hyperplan qui les sépare. Il y a plusieurs formes à* **ces théorèmes** *de Hahn Banach selon qu'on prend uniquement l'aspect algébrique ou l'aspect topologique. Par exemple, pour séparer des convexes fermés ou ouverts, on obtiendra un hyperplan fermé, etc.*

Théorème 68 *Si E est un evn de dimension infinie alors il existe une forme linéaire non continue. Si B est une base algébrique de E (base de Hamel), il n'y a pas de contradiction à supposer que tous les éléments de sa base duale sont des formes continues*

Pour l'instant, je ne me souviens de rien de plus... Je complèterai éventuellement. Je mets les preuves à la section suivante.

9.4 Preuve

9.4.1 discontinuité en dimension infinie

Le corps est IR.

En considérant l'espace vectoriel libre sur une base qui est un ensemble infini, on peut le normer de telle sorte que la norme fasse de tous les éléments de la base duale une forme linéaire continue.

Soit E un evn, dont la norme nous est imposée.

Supposons que toutes les formes linéaires sur E soient continues. Soit F un sev de E qui est dense. Soit $v \notin F$ et G un supplémentaire de $F + IR.v$. Tout élément x s'écrit d'une manière unique $u(x) + f(x).v + v(x)$ avec $(u(x), f(x), v(x)) \in F \times IR \times G$. La forme linéaire f est continue. Son noyau est fermé et dense donc $F + G = E$ donc $v \in F + G$ contradiction.

Il n'y a donc pas de sev dense autre que E inclus dans E.

Or il y a un moyen de fabriquer facilement des sev denses: choisir dans chaque boule de rayon 2 un élément. L'ensemble de ces éléments engendrent un sev dense, donc E tout entier.

Soit μ le plus petit ordinal possible tel qu'on puisse indicer une famille $T : i \in \mu \mapsto t_i$ génératrice par lui.

Le **sous-ensemble** A des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des éléments de T est un ensemble **dense** dans E et de cardinal μ. Soit $s := i \in \mu \mapsto s_i$ une bijection de μ dans A

Soit $v \in E$ un vecteur non nul. On construit par récurrence ordinale, un élément $w(i)$ tel que $v \notin vect(\{w(j)|j \leq i\})$ et $w(i) \in$ la boule ouverte de centre s_i et de rayon 2. On s'arrête au premier ordinal a tel qu'on ne peut construire $w(a)$. On a donc $a \in \mu$, puisque sinon l'ensemble des $w(i)$ engendrerait un espace vectoriel dense, donc qui serait E tout entier donc contiendrait v.

Puisqu'on ne peut construire $w(a)$, il s'ensuit que tout élément de la boule de centre s_a et de rayon 2 est une combinaison linéaire de $w(j), j \in a$ en nombre fini, et de v. Mais donc c'est aussi le cas de tout élément de E. Par conséquent, on est arrivé à la contradiction que $v \cup \{w(i), i \in a\}$ est une famille génératrice indiçable par un ordinal strictement plus petit que μ.

Il y a un corollaire presque évident à ça:

Théorème 69 *La famille des duaux d'une base de Hamel n'engendre jamais la dual entièrement (il suffit de choisir une norme qui les rend toutes continues)*

9.4.2 Compacité et reflexivité

- soit $\phi \in (H')'$ le dual topologique du dual topologique de H. Soit W un ultrafiltre contenant au moins une boule sur H tel que pour tout $f \in H'$ l'ensemble des $x \in B$ tels que $f(x) = \phi(f)$ est un élément de W (l'existence de W est la même que pour le cas des Hilbert et pour tout dire, elle est valable dans tout espace vectoriel sans aucune considération topologique. Pour obtenir que W appartienne à au moins une boule se référer au **lemme de JLT**). On peut supposer quitte à faire des homothéties et en regardant la norme de ϕ que la boule unité $\in W$. Soit a une limite W pour la topologie engengrée par les demi-espaces ouverts. Alors $\forall f \in H' : f(a) = \phi(f)$.

- Soit B un Banach. Soit W un ultrafiltre sur la boule unité fermée. La réflexivité de B entraine l'existence de $a \in B$ tel que pour toute $h \in B'$ et tout $e > 0$ l'ensemble $A(h, e)$ des x tels que $e > |h(a) - h(x)|$ vérifie $A(h, e) \in W$. Soit $D := \{x/h(x) > u\}$ un demi-espace ouvert tel que $a \in D$. Alors $h(a) < u$ et donc $D \in W$. Tout demi-espace ouvert qui $\ni a$ est forcément un élément de W et donc a est une limite de W pour la topologie engendrée par les demi-espaces ouverts, cqfd.

9.4.3 Hahn-Banach

Les preuves des théorèmes de Hahn-Banach sont très médiatisées sur internet, je m'abstiens donc. Lien:

`http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Hahn-Banach`

9.4.4 Ouverture des applications linéaires continues et surjectives

Je ne donne pas une preuve complète (inutile) mais un plan qui permet de la reconstruire. Le fait que B soit de Baire, entraine qu'il existe un ouvert U tel que $0_E \in U$ et $U \subseteq$ dans l'adhérence de l'image par f de la boule unité. Il suffit ensuite de montrer que tout ultrafiltre W qui converge vers 0_E est tel que l'image de la boule unité par f est un élément de W. En se servant de la linéarité et de la continuité de f on procède comme pour le théorème de Riesz en construisant une suite de Cauchy u telle que $x - u_n$ appatient à

$Boule(0_B, 1/2^n)$ pour tout entier n, chaque terme de la suite appartenant en outre à l'adhérence de la boule centrée en 0_B de rayon $1/2$. Cette adhérence étant incluse dans la boule unité. Je laisse au lecteur le soin de trouver cette construction. Elle se trouve aisément sur internet:

http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Banach-Schauder

9.4.5 Corollaire

Soient E, F des Banach. Soit f une application linéaire allant de E dans F. On suppose que f (rappel: $f \subseteq E \times F$) est fermée dans l'espace topologique produit $E \times F$ pour lequel on peut considérer (exercice) qu'il est un Banach normé par $norme(x, y) := max\{norme_E(x), norme_F(y)\}$. Mais alors f est une sous-Banach de $E \times F$, munissable de la norme induite. L'application $(x, y) \in f \in E \mapsto x$ allant du banach f dans E est une application linéaire surjective et continue. Il s'ensuit qu'il existe un réel $r > 0$ tel que pour tout élément $x \in E$ vérifiant $norme_E(x) < r$, il existe (u, v) de norme au plus 1 dans f tel que $u = x$ (et donc $v = f(x)$). En particulier: $\forall x \in E$: si $norme_E(x) < r$ alors $norme_F(f(x)) < 1$.

Conclusion: la fermeture dans $E \times F$ de f entraine la continuité de f

Chapter 10

Multifacettes des ultrafiltres

10.1 Théorème de Hindman

Soit $(G, .)$ un monoide associatif muni d'une topologie qui rend, pour chaque $a \in G$ l'application $x \mapsto a.x$ continue. On suppose la topologie compacte.

il existe alors $a \in G$ **tel que** $a.a = a$ Soit F un sous-ensemble fermé et stable par . qui soit non vide et minimal pour l'inclusion (Zorn). Soit $a \in F$. Alors l'ensemble des x tels que $\exists y \in F : x = a.y$ est stable par . et fermé. Donc il existe $b \in F$ tel que $a.b = a$. Cela montre que l'ensemble des $x \in F$ tels que $a.x = a$ est non vide. Il est évident fermé. Il s'ensuit que $a.a = a$.

$U.U$ est défini par $X \in U.U$ ssi $\{x/\{y/x + y \in X\} \in U\} \in U$

En termes imagés, $X \in U.U$ ssi *pour U-presque x(pour U-presque tout y:* $x + y \in X$*)*

Soit U un ultrafiltre non principal sur IN tel que $U.U = U$. Soit s une application de IN dans un ensemble fini F. Soit $A(0) \in U$ dont l'image par s soit un singleton $\{i\}$. L'ensemble $B(0)$ des $x \in A(0)$ tels que $\{y \in A(0)/x+y \in A(0)\} \in U$ est tel que $B(0) \in U$ car $U.U = U$. Soit $a(0) \in B(0)$ et $A(1)$ l'ensemble des x tels que $x > a(0)$ tels que $x \in A(0)$ et $a(0)+x \in A(0)$. On vient de voir que $A(1) \in U$. Il s'ensuit que l'ensemble $B(1) \subseteq A(1)$ des x tels que $\{y \in A(1)/x + y \in A(1)\} \in U$. On peut donc choisir $a(1) \in B(1)$ et poser $A(2) \subseteq B(1)$ l'ensemble des $x \in B(1)$ tels que $x > a(1)$ tels que $a(0) + x \in A(0)$ et $a(1) + x \in A(1)$ et $a(0) + a(1) + x \in A(0)$ de sorte qu'on aura $A(2) \in U$. En continuant ainsi, on obtient une suite $a : n \mapsto a(n)$ telle qu'une somme finie quelconque d'éléments de l'image de a est envoyé sur i par l'application s.

Je laisse au lecteur le soin de formaliser plus précisément ce qui précède et d'en déduire le théorème de Hindman:

Théorème 70 *si s est une application IN dans F (un ensemble fini) alors il existe $i \in F$, il existe une partie infinie A de IN telle que toute somme x d'éléments de A vérifie $s(x) = i$*

10.2 Théorème de Ramsey

Exercice proposé au lecteur: on note T l'ensemble des parties finies de IN. Soit Z une partie de T. On suppose qu'il n'existe pas de partie infinie de IN dont toutes les parties finies sont en dehors de Z.

Théorème 71 *Montrer l'existence d'une partie infinie A de IN telle que pour toute suite u strictement croissante à valeurs dans A, il existe un entier n tel que $\{u_0, .., u_{n-1}\} \in Z$. En déduire le théorème de Ramsey "classique" quand l'appartenance de F à Z ne dépend que des n premiers éléments de F.*

10.3 Un théorème rigolo

Voici un énoncé que j'avais filé en exo sur le forum "lesmathspointnet". Il m'était donné par les ultrafiltres. Un des intervenants, **Gottfried**, dont je recopie la preuve ci-dessous, en a donné une preuve totalement académique (entendez "sans utiliser d'ultrafiltres").

10.3.1 Lien

`http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?14,724969,731450`

10.3.2 Le théorème

Théorème 72 *Soit E et H deux espaces topologiques et f une application continue de $E \times H$ dans E telle que la relation $==$ définie par $x == y$ ssi $\exists h \in H : x = f(y, h)$ soit une relation d'équivalence sur E. Si H et $E/==$ sont quasi-compacts, alors E est quasi-compact*

10.3.3 Preuve (comme toujours dans ce cas, trivialisée avec des ultrafiltres)

Soit W un ultrafiltre sur E. Soit $Z := classe[W]$ l'ultrafiltre sur $E/==$ image de W par $x \mapsto classe_{==}(x)$. Soit C une limite de Z dans $E/==$ supposé quasi-compact. Tout ouvert $\supseteq C$ de E qui est réunion de classes est un élément de W. Soit V un ouvert tel que $C \subseteq V$ et G l'ensemble des classes D telles que $D \cap V \neq \emptyset$. Soit $S := reunion(G)$. L'ensemble S, qui est une réunion de classes est en fait un ouvert car si $f(b, h) \in V$ et si x est assez proche de b alors $f(x, h) \in V$. Il s'ensuit que $S \in W$.

Ainsi tout ouvert V qui contient C vérifie $V \in W$. Il s'ensuit qu'il existe $a \in C$ (chaque classe est quasicompacte) tel que tout ouvert U qui contient a vérifie $\{x/classe(x) \text{ rencontre } U\} \in W$. Soit L un ultrafiltre sur $E \times H$ dont a est une limite de la première projection et tel que $f[L] = W$. Soit h une limite de la deuxième projection de L. Alors $f(a, h)$ est limite de W

(La longueur de la rédaction ne doit pas cacher qu'il s'agit de quelque chose de très "routinier" en ANS. L'usage des ultrafiltres rallonge un peu)

10.3.4 Preuve de Gottfried

on notera π la surjection canonique de E sur $E/==$.

Supposons donné un recouvrement par des ouverts U_x, $x \in E$.

Soit $x \in E$ fixé, et soit pour chaque $h \in H$, $O_h = f^{-1}(U_{f(x,h)})$. C'est un ouvert de $E \times H$ qui contient le couple (x, h). Il contient donc un produit cartésien $W_h \times V_h$ avec W_h voisinage ouvert de x dans E et V_h voisinage ouvert de h dans H. Les V_h forment un recouvrement de H dont par quasi-compacité on peut extraire un sous-recouvrement fini par des V_i associés à des h_i. Notons Z_x l'intersection des W_i associés aux h_i. C'est un voisinage ouvert de x dans E. Aussi on notera $U_i = U_{f(x,h_i)}$ et $O_i = f^{-1}(U_i)$.

Considérons maintenant $f(Z_x \times H)$. C'est une réunion de classes et parmi elles il y a la classe C de x. Montrons que $f(Z_x \times H)$ est ouvert. Si y en est un élément il est de la forme $f(z, h)$ avec $z \in Z_x$. Donc $z = f(y, k)$ pour un certain $k \in H$. Notons $f_k : E \to E$ l'application $y \mapsto f(y, k)$. Elle est continue, donc $f_k^{-1}(Z_x)$ est un ouvert, qui contient y. Si $w \in f_k^{-1}(Z_x)$, alors $f(w, k)$ est un élément de Z_x donc $w = f(f(w, k), k')$ pour un certain k' et est un élément de $f(Z_x \times H)$. Ainsi ce dernier est un voisinage ouvert de y. Donc $f(Z_x \times H)$ est un ouvert de E.

Soit à nouveau $y = f(z, h)$ dans cet ouvert. Il existe un h_i et un V_i associé tel que $h \in V_i$. Donc $y \in f(Z_x \times V_i) \subset f(W_i \times V_i) \subset U_i$. Ainsi $f(Z_x \times H)$ est inclus dans une union finie d'ouverts du recouvrement initial.

Par ailleurs $f(Z_x \times H)$ est de la forme $\pi^{-1}(R_x)$ avec R_x un ouvert de E/H contenant la classe C de x. Par la quasi-compacité de E/H un nombre fini de tels R_x le recouvrent. Donc E est recouvert par un nombre fini de $f(Z_x \times H)$ et finalement par un nombre fini d'ouverts du recouvrement initial. Donc E est quasi-compact.

10.4 Finitude des corps compacts

Soit (K, T) un corps quasicompact. T étant la topologie qu'on met dessus pour laquelle les opérations du corps sont continues. Soit W un ulrafiltres non principal sur K et a une limite de W. En passant à $f[W]$ où $f : x \mapsto x - a$, on peut supposer que 0 est limite de W. Soit L l'ultrafiltre $g[W]$ où $g : x \mapsto x^{-1}$ et b une limite de L. La continuité de la multiplication entraine que $0 = 0.b$ est une limite de l'ultrafiltre principal $W_1(K)$ et donc 1 est dans tout voisinage de 0.

10.5 Séparation de groupes quasi-compacts quotients

Théorème 73 *Soit G un groupe compact (donc séparé) et H un sous-groupe fermé de G. Si on munit G/H de la topologie quotient alors on obtient un espace évidemment quasi-compact mais aussi* **séparé**.

10.5.1 Preuve

Soit W un ultrafiltre sur G tel que $classe[W]$ a deux limites différentes c, d. Cela signifie que toute réunion de classes qui est un ouvert et qui rencontre $c \cup d$ est un élément de W. Soit U un ouvert de G tel que $c \subseteq U$. Soit S l'ensemble des $d \in G/H$ telles que $d \cap U \neq \emptyset$ et $P := union(S)$. Supposons que $x \in P$. Cela signifie qu'il existe $h \in H$ tel que $xh \in U$. Un élément y proche de x est alors tel que $yh \in U$ et donc $y \in P$. Ainsi, P est une réunion de classes et ouvert. Il s'ensuit que $P \in W$. Il en va de même avec d à la place de c. Il existe donc un ultrafiltre L sur G^2 tel que l'ensemble des (x, y) vérifiant $x ==_H y$ est un élément de L et tel que la première projection de

L soit dans c est la deuxième dans d. La fermeture de H entraine alors que ces deux limites sont $==_H$ et donc que $c = d$.

10.6 Finitude des quotients des anneaux noethériens par des idéaux maximaux

.

Ou bien on procède avec du background académique (ce qui est gaspillant en références et mémoire), ou bien on refait la preuve de ci-dessus. Soit A un anneau topologique compact noetherien. Soit M un idéal maximal de A et W un ultrafiltre sur A tel que $classe_M(W)$ n'est pas un ultrafiltre principal sur A/M. Soient $(e_1, .., e_n)$ des générateurs de M. On les utilise pour dire que M est fermé, car il est l'image de A^n par $x \mapsto \sum x_i e_i$. Soit a une limite de W de sorte qu'on peut supposer comme ci-dessus que 0 est limite de W. Soit h, m définies sur $A \setminus M$ telle que $\forall x \notin M : h(x).x + m(x) = 1$ et $m(x) \in M$. Soient h', m' les limites repectives de $h[W]$ et $m[W]$. La fermeture de M entraine que $m' \in M$. On obtient que $h'.0 + m' = 1$ par continuité de la multiplication et $1 \in M$.

10.7 Un exercice

Théorème 74 *Soit (E, T) un espace compact (donc séparé) et tel que tout ensemble d'ouverts 2 à 2 disjoints est fini. Alors que E est fini*

10.7.1 Correction

Soit W un ultrafiltre non principal sur E. Il n'a qu'une seule limite, disons a. Soit L un ultrafiltre sur T tel que pour tout $U \in T$ si $a \in U$ alors l'ensemble des $X \in T$ tel que $a \in X \subseteq U$ est un élément de L. L'existence de W entraine que a n'est pas un point isolé de E. Soient $U_1, .., U_n$ des ouverts vérifiant $A := \{X/\forall i \leq n : U_i \cap X\emptyset\} \in L$. Soit $U \in A$ et $x \in U$ tel que $x \neq a$. Il existe alors deux ouverts, U_{n+1}, V vérifiant: $x \in U_{n+1}$ et $a \in V$ et $U_{n+1} \cap V = \emptyset$. Il s'ensuit que $\{X/U_{n+1} \cap X = \emptyset\} \in L$. Cela permet de construire par récurrence une suite d'ouverts deux à deux disjoints et d'obtenir une contradiction.

10.7.2 Sans l'hypothèse de compacité

Théorème 75 *Soit (E, T) un espace topologique séparé et tel que tout ensemble d'ouverts 2 à 2 disjoints est fini. Alors que E est fini*

En fait, le rôle joué par a ci-dessus n'a vraiment aucune importance autre que de ne pas être isolé. Il suffit de remarquer que l'ensemble S des points isolé est fini et que si $a \notin S$ alors **il existe** un ultrafiltre non principal W dont a est une (la) limite.

10.8 Petitesse des anneaux noethériens topologiques séparés et compacts

Dans cette sous-section, j'illustre la "facilité" que procure l'outil ultrafiltres. Je n'y connais pas grand-chose en algèbre et jamais je ne me serais amusé à trouver une preuve "classique" de la petitesse des anneaux noéthériens et compact pour le plaisir. Il fallait vraiment qu'elle "saute aux yeux".

- Soit A un anneau noethérien, séparé et compact (pléonoasme vu que j'utilise la terminologie française). Pour maintenir la preuve intuitive, je ne donne pas de définition du mot *gros*. Elle va apparaitre naturellement.

- On prend un idéal J de A qui soit maximal parmi les idéaux qui font que A/J est gros. L'anneau A/J (car J est fermé) est séparé pour la topologie quotient ce qui fait qu'on peut supposer $J = (0)$.

- Première question: se peut-il que A ne soit pas intègre? Dans ce cas il existe u, v vérifiant $uv = 0$, mais $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Soit P_1, P_2 de petits ensembles vérifiant $\forall x \in A \exists t \in P_1 : x - t \in (u)$ (idem pour P_2 et (v)).

- Soit alors $x \in A$. Il existe $a \in P_1, t \in A$ tel que $x = a + tu$. Il existe $b \in P_2, s \in A$ tels que $t = b+sv$. Il s'ensuit que $x = a+(b+sv)u = a+bu$ et $(a, b) \in P_1 \times P_2 \mapsto a + bu$ est une surjection.

- Il s'ensuit que A est un anneau intègre. Soit $a \in A$ un élément non nul de A. On note J_n l'ensemble des x qui sont des multiples de a^n. (Dans un anneau x est un multiple de y quand $\exists t \in A : x = ty$)

- Soit b tel que $\forall n : b \in J_n$. Pour tout entier n, il existe $c(n)$ tel que $b = c(n)a^n$. Il s'ensuit que $c(n+1).a.a^n = c(n).a^n$ et donc $a^n = 0$ ou $c(n+1).a = c(n)$, pour chaque entier n. Par conséquent, comme $a^n \neq 0$ donc $c(n) \in (c(n+1))$ et la suite d'idéaux $n \mapsto (c(n))$ est croissante. Il existe un entier n tel que $(c(n)) = (c(n+1))$ et donc $t \in A$ tel que $c(n+1) = t.c(n)$. Mais alors $(ta-1).c(n) = 0$ et donc $b = 0$ ou a est inversible. Si A ne contient que des inversibles comme éléments non nuls, on sait qu'il est fini par une des sections d'avant (tout corps compact est fini). Si on a choisi un a ni nul ni inversible, on vient de prouver que $b = 0$ et donc que l'intersection des J_n vaut (0).

- On fixe un tel a. Soient des petits ensembles (chaque A/J_n est petit) P_n tel que $\forall x \in A \exists y \in P_n : x - y \in J_n$. A chaque $x \in A$ on associe une suite $u(x)$ telle que pour tout entier $n : x - u(x)(n) \in J_n$ et $u(x)(n) \in P_n$. On vient de prouver que c'est une injection de A dans le produit des P_n et A est donc lui aussi petit.

10.8.1 Remarque

La compacité de l'anneau n'a servi qu'à une chose: prouver que si A est un corps alors A est fini. Autrement dit, on a montré que tout gros anneau noethérien a au moins un idéal maximal M tel que A/M est gros. Pour info, la démonstration ci-dessus permet de comprendre comment sont les anneaux noethériens compacts. (Essentiellement des quotients de sous-anneaux de produits dénombrables de corps finis ou quelque chose dans ce genre). L'utilité des ultrafiltres est dans la séparation des quotients.

10.9 Finitude des anneaux artiniens et compacts

Un anneau est artinien quand il ne contient aucune suite strictement décroissante pour l'inclusion d'idéaux. Un théorème célèbre affirme que tous les anneaux qui sont artiniens sont forcément noethériens.

Par exemple un corps est un anneau artinien (il contient exactement deux idéaux).

Théorème 76 *Un anneau artinien* **ne peut pas** *être intègre, sauf s'il est un corps*

En effet, si la suite des idéaux (a^n) n'est pas strictement décroissante alors l'existence d'un x tel que $xa^{n+1} = a^n$ entraine que $a^n = 0$ (donc $a = 0$) ou $xa = 1$ quand l'anneau est intègre. De la même manière, tout idéal premier d'un anneau artinien est forcément maximal, et il ne peut y avoir qu'un nombre fini d'idéaux premiers puisque sinon on aurait la suite strictement décroissante de $P_1 \cap P_2 .. \cap P_n$. Rappel: un élément qui appartient à tous les idéaux premiers est nilpotent (exercice).

On se place maintenant dans un anneau artinien topologique qui est séparé et compact. But du jeu: prouver qu'il est fini.

10.9.1 Preuve

- Soit W un ultrafiltre non principal sur A dont on peut supposer qu'il a 0 comme limite. Supposons qu'il existe un idéal premier P tel que $P \notin W$. Soit r, m telle que $\forall x \notin P : r(x).x + m(x) = 1$ et $m(x) \in P$. Soit a, b les limites respectives de $r[W], m[W]$. On obtient que $a.0 + b = 1$, autrement dit que $P \in m[W]$ et 1 est limite de $m[W]$. Or tous les idéaux d'un anneau noethérien topologique séparé sont fermés et ça conduit à une contradiction. Remarque: on a utilisé le fait que artinien implique noethérien!

- Finalement tous les idéaux premiers (en nombre fini) sont des éléments de W. Dans n'importe quel anneau noethérien il existe une suite finie d'idéaux premiers $P_1, .., P_n$ telle que $P_1 P_2 .. P_n = (0)$. Il s'ensuit que $N \in W$ où N désigne l'ensemble des éléments nilpotent de A. On peut aussi supposer que l'anneau A est tel que pour tout idéal J non nul, A/J est fini, car dès le départ, on aurait pu prendre un idal maximal I tel que A/I est infini, idéal forcément fermé (A est nothérien), donnant un quotient compact, artinien, séparé.

- Soit donc $b \in A$ qui est non nul. Il existe donc $t \in A$ tel que $\{x/x - t \in (b)\} \in W$ et ce ci est valable pour tout $b \neq 0$. En particulier, si $b^2 = 0$ et si $x = t_1 + r(x)b$ et $r(x) = t_2 + s(x)b$, on obtient que $x = t_1 + (t_2 + s(x)b)b = t_1 + t_2 b$. Ce calcul montre alors que W est l'ultrafiltre principal $W_{t_1+t_2 b}(A)$. Il n'existe donc pas d'élément $b \in A$

tel que $b^2 = 0$ et $b \neq 0$ et il s'ensuit donc que A n'a pas d'éléments nilpotents non nuls et donc $\{0\} \in W$, cqfd.

Chapter 11

Pot pourri d'outils admis (ou non) dans ce qui précède

11.1 Adhérence, intérieur

Théorème 77 *L'adhérence d'un ensemble est l'intersection des fermés qui le contiennent*

Preuve: soit (E, t) un espace topologique. la définition ci-dessus que j'ai donnée de l'adhérence de A est $adh(A)\{x \in E/\forall U \in T$ si $x \in U$ alors $U \cap A \neq \emptyset\}$. Soit F un fermé. Si $A \subseteq F$ alors $E \setminus F \in T$ et donc $adh(A) \subseteq F$. Réciproquement, soit $x \in$ l'intersection des fermés qui $\supseteq A$. Soit $x \notin adh(A)$ alors il existe $U \in T$ tel que $x \in U$ et $A \subseteq E \setminus U$ qui est un fermé, contradiction.

Théorème 78 *l'intérieur d'un ensemble est la réunion des ouverts inclus dedans*

Même preuve que ci-dessus.

11.2 Fonctions continues sur un ensemble

Théorème 79 *Soit $(E, T_1); (F, T_2)$ deux espaces topologiques. Soit f une application de E dans F. Alors f est continue sur E ssi pour tout $V \in T_2$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) \in V$ est un élément de T_1.*

Preuve: si f est continue en a et si V est un ouvert qui contient $f(a)$ alors l'ensemble des x tels que $f(x) \in V$ est par définition un voisinage de a. Il suffit donc de montrer que:

Théorème 80 *Une partie X de l'espace topologique (E, T) est un ouvert (ie $X \in T$ ssi X est voisinage de tous ses éléments*

Exercice laissé au lecteur.

11.3 fermés et compacts

Théorème 81 *Soit (E, T) un espace topologique à la fois quasicompact et séparé (autrement it compact). Soit A une partie de E qui est quasicompacte pour la topologie induite. Alors A est fermé.*

Il suffit de montrer que si W est un ultrafiltre sur E tel que $A \in W$ et si a est une limite de W alors $a \in A$. Soit b une limite de W dans A. Comme E est séparé, $a = b$ et donc $a \in A$.

11.4 Images continues de compacts

Théorème 82 *Soit (E, T) un espace topologique compact et f une application continue de E dans un espace topologique quelconque (F, T_1). Alors l'image G de E par f est quasi-compacte.*

Preuve: il suffit de montrer que tout ultrafiltre $W \ni G$ a une limite. Soit Z un ultrafiltre sur E tel que $W \supseteq f[Z]$. Soit $a \in E$ une limite de Z. Alors $f(a)$ est une limite de W.

11.5 Noyaux de formes linéaires

Théorème 83 *Soit E un espace vectoriel sur un corps K. Soient $f_1, .., f_n$ des formes linéaires sur E. Soit g une forme linéaire telle que $\forall x \in E$: si $\forall i : f_i(x) = 0$ alors $g(x) = 0$. Alors g est combinaison linéaire des f_i*

Preuve: en supposant que n est l'entier le plus petit possible permettant un contre-exemple à cet énoncé sur au moins un espace vectoriel et en se plaçant dans le noyau de f_1, on sait qu'il existe x_i tels que pour tout vecteur $v \in E$ si $f_1(v) = 0$ alors $g(v) = x_2.f_2(v) + ..x_n.f_n(v)$. Soit alors w un vecteur tel que $\forall i \geq 2 : f_i(w) = 0$ et $f_1(w) = g(w)$. Soit $u \in E$ **un vecteur quelconque**. Soit $y \in IR$ et v tels que $u = yw + v$ et $f_1(v) = 0$. Alors $g(u) = y.g(w) + g(v) = y.f_1(w) + x_2.f_2(v) + ..x_n.f_n(v) = y.f_1(u) + x_2.f_2(u) + .. + x_n.f_n(u)$.

Il s'ensuit que w n'existe pas. Soit w tel que $g(w) \neq 0$ et $\forall i \geq 2 : f_i(w) = 0$. On peut supposer que w existe sinon g est combinaison linéaire de $(f_2, .., f_n)$. Soit par ailleurs u tel que $f_1(u) = 0$ et $g(u) \neq 0$. Alors $g(xu + w) = xg(u) + g(w) \neq f_1(xu + w) = xf_1(u) + f_1(w) = f_1(w)$ pour tout $x \in K$. Autrement dit $g(u) = 0$ contradiction.

11.6 Existence et unicité de portes dans les Hilbert

Soit r un nombre réel et W un ultrafiltre sur H tel que $Boule(0, r) \in W$. Soit m tel que $\forall s > e$ il existe $a \in H$ tel que $\{x/m \leq dist(a, x) < s\} \in W$. (Il suffit de prendre la borne inférieure des $distt(x, W)$). On suppose que pour tout $c \in E : distt(c, W) \geq m$.

Soit $a_n \in H$ tel que pour tout $e > 0$ l'ensemble A_n des x tels que $dist(a_n, x) \leq m + 1/n$ soit tel que $A_n \in W$. Montrer $n \mapsto a_n$ est de Cauchy. Soit b une limite de la suite a. Montrer que $\forall e > 0 : \{x/dist(x, b) < m + e\} \in W$. En déduire que b est une porte de W. Montrer son unicité.

11.7 Un lemme algébrique pur

Les deux sections suivantes racontent des choses classiques sur les Hilbert et les Banach. Cependant il y a un phénomène qui ne porte pas de nom qui est tacitement supposé connu qui me semble souvent utilisé. C'est le suivant:

11.7.1 Le lemme

Théorème 84 *Soit E un espace vectoriel sur IR et F un ensemble fini de formes linéaires. Soit ϕ une forme linéaire sur E^* (l'ensemble des formes* *linéaires sur E). Alors il existe $x \in E \forall f \in F : f(x) = \phi(f)$*

11.7.2 Preuve

Supposons que F ait un cardinal le plus petit possible qui soit un contre-exemple à l'affirmation précédente. Supposons que $F = \{f_1; ..; f_n; g\}$. Soit $a \in E$ tel que $\forall i : \phi(f_i) = f_i(a)$. Soit $b \in$ l'intersection des $Ker(f_i)$ tel que $g(b) \neq 0$. Il suffit alors de choisir un réel x comme il faut pour obtenir que pour tout i, $f_i(a+xb) = f_i(a) = \phi(f_i)$ et $g(a+xb) = g(a)+xg(b) = \phi(g)$. Si ce n'est pas possible, cela signifie que g est combinaison linéaire $\sum x_i f_i$ des f_i (exercice laissé au lecteur) et donc que $\phi(g) = \sum x_i \phi(f_i) = \sum x_i f_i(a) = g(a)$

Chapter 12

Index

12.1 Liste des mots presents dans le texte

Les reperes rouge du texte permettent de retrouver les mots de l'index. En face de chaque vous trouvez la liste de ses occurences.

Weirstrass:23616; 15706
XQS:102145; 97173
ZFC:79847; 69918
Zero:88569; 88482; 88447
Zorn:59629; 12095
“Ascoli:14293
“P:73531
“V”:66217
“accessible”:67633
“arrondies”:37135
“assez”:88877
“aussi:31343
“authentiquement”:72113
“axiome:114433; 55149
“axiomes:931
“banale”:62598
“basse:73446
“bien:65827
“c”:50402
“ce:32954
“classique”:47178; 43234
“coller”:50106
“constructible”:62415
“d’avaler”:67890
“d’une:51042
“dans:71462
“delta:72091
“deviner”:37099
“diviseurs:92893
“ensemble:60682
“ensembles:67830
“fictive”:26936
“fini”:74089
“fixe”:2526
“font:976
“force”:69096; 69069; 66626
“forcing:74684
“game:74607
“grands:89120
“hasard:49839
“il:62070
“indivisibles”:68460
“inf”:66790
“j”:114305
“jargon”:29560
“la:91573; 75255; 802
“les:67182
“lesmathspointnet”:96549; 43310
“loin:26746
“lui:24257
“minimaux”:83318
“nombre:71454
“ordinal:60038
“orthogonal”:35791
“passe:69054
“physique”:32758
“platoniciens”:67923
“pour:91044; 69229
“premier”:83160; 83137
“presque”:96470; 87927
“prolongement”:90329
“qu’il:50036
“routinier”:44113
“sain”:26695
“sans:43371
“saute:47211
“sensible”:73250
“ses:51111
“simple”:26886
“son:35666
“sont:64398
“st”:80518; 80235; 80182; 80065; 79872
“sup”:66805
“superproche”:31339
“surunivers”:65631
“tilt”:2728
“tout”:113296
“toutes:28677
“tranformer”:823
“trop:24032; 24026
“u”:51849
“ultrafiltres”:7845
“un:26923
“varie”:28693
“vrai:67656
“wlog”:72037
‘buveur:111007
a¡b:53528
a¡b¡c¡d:71266
aQR:102158; 102143; 97186; 97171
abc:91061
able:40492
absolument:65937; 16251
absorbant:17871
abstraction:26801
abstraite:70390; 11683
abstraites:14496
absurde:105213
abus:49899
accorder:50059
acquis:70358; 1315
actives:113178
actuellement:77316
addition:98681
adeptes:55895
adh:26573
adjectifs:10257; 10216; 9693
admet:109755; 99472; 79643; 78474; 59707
admette:13122
admettre:33195
admis:109888; 109848; 84883; 31690
affaire:9466
affiablit:76284
affine:36624
affines:105942; 31554
affirme:104875; 48590
affirmer:84055
aides:70350
aient:22135
ailleurs:114296; 106521; 88685; 86511; 84126; 81889; 66707; 64679; 57268; 45015; 34930; 25910; 8720; 622
ainsi:98566; 95126; 82204; 79577; 76302; 71438; 61109; 57713; 51709; 42813; 34707; 33486; 30441; 16455; 11735; 7833; 2494; 544
ais:111232; 17781; 15072
aise:4459
ait:112262; 109025; 91442; 77584; 66592; 38472; 25429; 16920; 16278; 13996
ajoutant:93793; 93737
ajoute:112279; 79730
algorithme:103961
allant:93188; 68613; 50224; 41855; 41707; 30918; 30837; 30155; 27602; 23897
aller:36002
allons:114511; 113464; 75047; 71083; 64896; 30006
alors:114069; 114033; 113690; 113654; 113131; 113040; 112501; 111828; 111693; 110981; 110899; 110891; 110340; 110324; 110276; 110225; 110144; 110020; 109704; 109689; 109678; 109663; 109631; 109596; 109571; 109546; 109142; 108698; 107478; 107447; 106748; 106709; 105995; 105354; 105298; 105186; 105060; 104926; 102687; 102663; 102276; 101991; 101968; 101935; 101892; 101424; 101053; 100623; 100489; 100073; 99255; 99067; 98962; 98362; 97863; 97825; 97717; 97682; 97395; 97258; 97106; 95924; 95756; 95712; 95379; 95299; 94564; 93387; 92816; 91945; 89275; 88744; 88294; 87793; 86248; 86221; 86060; 85677; 85384; 85099; 85045; 85014; 84756; 84699; 84526; 83766; 82703; 80477; 78979; 78848; 78709; 77949; 77238; 77184; 77133; 77071; 75774; 75674; 74338; 73927; 72753; 72393; 72013; 71629; 71591; 71489; 71301; 71023; 70843; 70227; 70181; 69804; 69692; 68691; 68044; 67127; 66302; 65979; 65534; 65189; 64433; 63031; 61615; 61276; 60957; 60749; 60736; 60543; 59052; 58265; 58052; 57916; 57817; 57769; 57403; 57279; 57134; 57042; 56889; 56854; 56756; 56286; 55137; 54813;

23166; 22574; 22415; 21408; 19935; 17320; 9973; 9588; 8865; 5387; 2750; 1004
aventure:33205; 33166; 33041; 32918
avez:109484; 90213; 87947
avoir:112798; 105288; 95676; 78156; 57189; 50024; 48814; 30287; 22599; 21622; 12856; 3962
axiomatique:79708
axiome:112291; 109990; 80194; 80094; 79949; 76476; 76465; 76454; 70301; 69935; 69911; 427
axiomes:114427; 81262; 79908; 79814; 79720; 76294; 74170; 69903; 62645; 62148; 55034; 537
ayant:103538; 103352; 73774; 67382; 2065
b¡a:77902
b¿a:16124
bac:76381
background:46055; 7759
banach:41859
banal:68086
bar:2630
bas:5105
base:87062; 87018; 56712; 40558; 39686; 39639; 39518; 39473; 38341; 22100; 21999
bases:109977; 8000; 180
basique:165
basiques:11381; 7816
bateau:62090; 50618; 8944
bateaux:50691
bcp:55690; 2897
beaucoup:103206; 91291; 73519
besoin:114271; 114246; 95678; 83202; 75521; 37064; 7752
bidual:38128
bidule:94638
bien:114653; 114476; 114383; 113309; 105086; 105025; 104871; 104814; 98893; 97806; 91676; 91646; 90262; 82101; 80629; 80055; 79393; 79346; 77672; 77666; 76367; 73831; 70198; 70045; 70030; 67841; 65329; 64703; 63751; 63707; 62210; 61975; 61807; 61775; 60350; 59945; 59751; 59663; 58809; 57220; 56827; 56817; 56122; 53691; 53685; 52572; 52552; 46078; 46045; 37623; 37397; 31713; 29644; 18219; 16906; 16081; 16065; 9807; 3990; 3984; 1163
bijection:79635; 63136; 60118; 60001; 40148; 28593
bijective:111708; 99177; 99166
bilan:103188; 102799
bin:82097; 24236
blabla:111470; 111454; 111363; 111284; 3145; 3126; 3102; 3083
blablabla:80360
bleu:111869; 111798
blue:104268; 54898
bob:74780
bon:114529; 87935; 78993; 78975; 72057; 71599; 70148; 65259; 65167; 65158; 65029; 65005; 64939; 63914; 60336; 51266
bonne:91575; 67874; 792
bons:81304; 75593; 74707; 73307; 72857; 70528; 70439; 70366; 68637; 68074; 68002; 66983; 66694; 66598; 65361; 64908; 64810; 64777
book:4
boole:95432; 68447
borne:86725; 68695; 65283; 64923; 64916; 54515; 36138; 26283; 10716
bouche:51065
boule:41596; 41563; 41420; 41371; 40948; 40859; 40803; 40671; 40368; 40228; 39972; 39156; 39092; 38840; 38731; 38708; 38668; 38423; 38223; 38197; 37852; 37574; 37349; 36421; 35195; 34585; 34409; 33759; 29691; 29330; 26550; 8555
boules:37131; 34232; 20947; 20596; 20168; 11083; 8091
but:29508
c'est:113250; 112972; 111058; 107268; 105425; 102199; 101978; 101464; 101455; 101137; 99863; 98772; 95063; 91857; 89063; 82505; 81134; 79631; 79547; 79226; 74689; 74590; 73740; 72564; 72176; 72053; 70991; 70450; 69013; 68208; 67950; 66537; 65950; 64815; 64527; 63607; 62580; 61566; 58803; 57811; 57763; 57490; 51469; 51202; 50374; 48284; 40427; 36088; 36052; 35400; 33812; 32584; 32192; 30819; 30037; 27103; 26237; 23566; 22166; 18222; 17875; 17303; 12414; 9858; 8803; 8293; 7346; 6379; 2895; 2823; 2797; 1669; 1304; 774
cabalistique:55384
cabalistiques:762
cabine:33084; 32854; 32790; 32778
cacher:113857; 44097; 1297
cadire:31701
cadre:56089; 55782; 55672; 29468
cadres:55688
calcul:96667; 95150; 83210; 49598
calculatoire:105116; 92875; 91656; 91631
calculatoire":91579
calculs:104560; 97129
caml:94696; 64414; 64384; 64349
canonique:104975; 44163; 37645; 16401
canoniquement:108476; 89812
caprices:16369
capricieuse:16916
car:112738; 106108; 105296; 103376; 99158; 95128; 90337; 82752; 78699; 78239; 73238; 72001; 70749; 70049; 68872; 64870; 59056; 57724; 57470; 57310; 54027; 53991; 53957; 49371; 46229; 43832; 42594; 33810; 33747; 32396; 32198; 29629; 23022; 8838
cardinal:109029; 77524; 74213; 74200; 67269; 66927; 61397; 61340; 61321; 60924; 60447; 60417; 60392; 60363; 60327; 60274; 60195; 60149; 60136; 60126; 60071; 40122; 19696; 19674
cardinale:72065
cardinaux:74176; 73216; 73158; 73123; 73101; 67314; 67275; 67218
cas:111571; 108316; 104657; 103943; 101141; 71583; 68439; 56356; 56198; 56160; 54351; 50378; 47448; 43595; 40745; 40433; 38331; 35158; 25456; 20579; 18478; 7865; 5864; 5113
cause:84821; 54876; 49950
cavalier:37807
ceci:114478; 67519; 38015; 37267; 28794; 28772
cela:112608; 112503; 112260; 109222; 95814; 91469; 36830; 28798; 28785; 9514
celle:92216; 91895; 89465; 87688; 66950; 29586
celles:80010; 80000; 52460; 52335; 52321; 52309; 52164
celui:73838; 67328
central:69249
centre:40372; 40234; 38435
cependant:35384; 28132
cerise:66865
certain:96206; 94436; 69325; 44808; 44680
certaine:114303
certainement:81295
certaines:113168; 72586; 64502; 52121; 51475
certains:62685; 2395
cerveau:49882
ces:108565; 107526; 96144; 90728; 87951; 83654; 81318; 76396; 64695; 56108; 55847; 54689; 52138; 51233; 45983; 39989; 39350; 33008; 30294; 23541; 15721; 15083; 10255; 994
cesse:109933
cet:113847; 111295; 86138; 82110; 75625; 65868; 63988; 44898; 15678
cette:113153; 112927; 112283; 108597; 92083; 90925; 81207; 75534; 75249; 73475; 73414; 72542; 72477; 71692; 70360; 69040; 68968; 66709; 65880; 65763; 64888; 51371; 51078; 49890; 49736; 47118; 41619; 37957; 37172; 36947; 35950; 34006; 31658; 30045; 26848; 26096; 24537; 14439; 13532; 12053; 7741; 1185
ceux:104742; 102938; 102847; 101405; 84498; 79837; 72293
chacun:95205; 9835
chacune:103546
chance:2789
chances:51389
changer:9925
changez:51383
chapitre:86936; 13776; 13664; 13635; 8929; 7843; 7709; 3011; 2977
chapitres:18259

constant:97973; 34625; 34572
constante:75146; 34263; 34214; 34077; 33887
constants:101794; 98052
constructible:64537; 64441
constructibles:64380; 62460; 61781
construction:100021; 58594; 41621
construire:113466; 103409; 103125; 75049; 64357; 61094; 55569; 46856; 40347; 40273; 19933
construis:94713
construisant:41487
construit:61107; 40182; 32120
construite:55729
construits:21798
contenant:101394; 100513; 100365; 100285; 45068; 40663; 36417; 33761; 14179
contenir:66103; 55444
contente:26730; 3572
contenu:100173; 15686
contiendrait:40332
contienne:78231; 72505; 37848; 25831
contiennent:114103; 113724; 104547; 104530; 101005; 100951; 96109; 84932; 84838; 84502; 83537; 83410; 82754; 81878; 79864
contient:105241; 104206; 104168; 101113; 100702; 100397; 96919; 96260; 96252; 95912; 95760; 95747; 95706; 95342; 93595; 92424; 92241; 92214; 90698; 87893; 87850; 87846; 87826; 87509; 87471; 85378; 84660; 84619; 84607; 83102; 82546; 82517; 82014; 76117; 75010; 73150; 65265; 65082; 63517; 53815; 48635; 48561; 48035; 44743; 44302; 44286; 43951; 43902; 39233; 39221; 39213; 33774; 28438; 26544; 22869; 22830; 21539; 17101; 16647; 14277; 12771; 12761; 12292; 12147; 4615; 2268; 2034; 1467
continu:73236; 73177; 70483; 67343; 65718; 63848; 62607
continuant:42811
continue:105678; 99388; 85785; 85354; 85270; 44716; 43464; 42115; 41883; 39865; 39696; 39460; 39183; 39015; 37633; 37407; 37258; 36247; 34207; 33867; 33437; 33102; 32669; 31248; 30954; 30855; 29454; 27472; 27396; 27292; 26989; 17485; 17455; 17422; 15122; 13875; 11787; 9672; 9632; 6785; 6768; 6687; 1039
continues:85744; 85198; 45255; 41256; 39749; 39528; 36107; 23652; 18488; 15474; 9559; 1591
contradiction:109450; 108180; 105429; 104598; 101090; 100126; 92488; 86595; 85140; 83792; 82967; 82866; 82729; 82673; 81949; 78910; 78807; 78440; 76098; 72417; 61570; 59187; 59054; 58316; 57835; 57825; 57806; 57787; 55533; 54344; 49174; 46882; 40463; 39901; 39500; 36892; 31876; 28007; 26820; 26007; 25555; 25319; 24714; 23606; 22545; 20837; 20398; 19584; 19456; 18747; 14978; 14784; 13861; 13270; 13101; 12558; 12080; 8863; 8434
contradictions:112268
contradictoire:113337; 112418; 112188; 80026; 54872; 12416; 2882
contradictoires:76278
contraidction:59918
contrainte:37938; 16353
contraintes:73589
contraire:50099; 28489
contrairement:68129
contre:109046; 106882; 106681; 104285; 103507; 92748; 92697; 90431; 86132; 84094; 70704; 63240; 32455; 22374
contredirait:100529; 71666
contredire:15859; 843
contruire:107044
contruits:21516
conventions:87324
converge:41398; 24253; 24231; 22516; 21781; 21322; 21181; 21136; 21094; 21030; 21023; 10897; 2482
convergence:23679; 15504; 14375; 9453; 9298; 8976
convergente:21630; 15335
convexe:38678; 33338
convexes:39391; 39303; 38513
conviendra:66076; 1621
convienne:1901
cool:91187; 91084
coolitude:91746; 91357
coor:22258; 22227; 22214; 22115; 22079
copie:97481; 96527
copies:33014
corollaire:114370; 102398; 101160; 84465; 83219; 59622; 59214; 40525; 33380; 30973; 11646; 11577
corps:106508; 106391; 102962; 102766; 101509; 97822; 97788; 97581; 96999; 96940; 96623; 96461; 96386; 95282; 95238; 89477; 85986; 48680; 48622; 48493; 48375; 48074; 45251; 45220; 45199; 39608; 38337
corpus:32534
correpondant:17238
correspond:112742
correspondances:50123
correspondant:104971
corresponde:89967
correspondront:64510
corrige:77979
coudre:113072
coup:114311; 66810
couple:90244; 76498; 75413; 73800; 73643; 73606; 71949; 70262; 60992; 44290; 31124; 28363; 17577; 17307; 9722; 9576; 8729
couples:111546; 106233; 75642; 73887; 72572; 70075; 59121; 56170; 56134; 30115; 26969; 12674
coups:74839
couramment:2617
courant:68374; 50112; 37884; 1177
courants:52033; 196
cours:94774; 68976; 162
court:63580; 35978
courte:79048; 49892
courtes:12885; 772
coute:32509
couvre:82202
couvrir:664
cpoids:54572; 50800; 50695; 50665; 50649; 50587; 50554; 50518; 50451; 50397
cqfd:103799; 93110; 69405; 49707; 41157; 37540; 34967; 30736
crivons:98154
crois:77310
croiser:735
croissante:108024; 106780; 104218; 87521; 47939; 43168; 21726
d'Aladin:113054
d'Alexandroff:26719; 25718; 24906; 24894
d'Ascoli:14486; 14285; 11662
d'abord:100810; 97651; 11856
d'accord:67204; 67160
d'aller:113269; 51103; 597
d'analyse:39036; 30883
d'analyste:29562
d'anneau:91390; 88754; 88720; 88651; 87690
d'anneaux:104289; 102872; 95452; 90393; 88157; 88099
d'anneaux":96610
d'antichaine:71686
d'applications:82392; 82217; 9315; 9171
d'arbitres:65962
d'arriver:2759; 2601
d'aucun:7757
d'aucune:2506
d'autre:54647; 53154
d'autres:113320; 96115; 83187; 62695; 55579; 37638; 25676; 15731; 178
d'avance:17064
d'avant:48070; 32910
d'avoir:114248; 64288; 37068
d'axiome:112287; 73210; 70335
d'axiomes:113302; 76133; 54830
d'efforts:55525
d'en:110877; 110598; 42906; 9913
d'encre:10018
d'ensemble:77326; 76969; 76907; 76840; 76773; 76705; 76591; 66143; 62076
d'ensembles:73651; 73608; 63077; 62862; 62803; 62732; 56941; 25396
d'entiers:23521; 21728
d'entre:103890; 52578; 2696

26141; 24963; 24650; 24336; 23838; 23767; 23648; 21547; 20782; 19659; 19343; 19180; 19145; 19020; 18559; 18247; 18153; 17180; 16651; 16598; 15753; 15470; 15077; 14917; 14813; 14719; 14492; 14307; 13419; 13330; 13067; 13008; 12916; 12871; 12672; 12652; 12627; 12520; 12501; 12353; 12335; 12191; 12034; 11920; 11903; 11868; 10933; 10720; 10556; 10341; 10234; 10224; 10214; 9401; 9373; 9239; 9059; 8235; 8089; 7895; 7837; 7812; 7772; 7670; 7467; 7421; 6966; 5968; 5424; 5334; 5304; 5286; 5143; 5049; 4994; 4929; 4656; 4508; 4311; 3916; 3785; 3315; 3231; 2809; 2763; 2458; 2376; 2270; 2067; 2036; 1818; 1492; 1387; 1281; 1179; 869; 713; 707; 482; 281

descendante:102034

description:66711; 66608

dessous:93922; 43352; 37968; 25705; 23724; 14514

dessus:113283; 112644; 112352; 111025; 105754; 97361; 85189; 84970; 70422; 67364; 60104; 48452; 46987; 46288; 46092; 45239; 38941; 38789; 37054; 15795; 9800; 8036; 7849; 4911; 2644; 1830

deux:112760; 110770; 108815; 108472; 108397; 104655; 103534; 102671; 102667; 102656; 102652; 102439; 102435; 99032; 98249; 96730; 94896; 87994; 85232; 83340; 83310; 83306; 81444; 78233; 78062; 77386; 75538; 75066; 72865; 72861; 72492; 72203; 67414; 67410; 55450; 54584; 54500; 54496; 53718; 52872; 52576; 52352; 51667; 51663; 51500; 50679; 48639; 46872; 46868; 46759; 45985; 45603; 43447; 39301; 32575; 32237; 32233; 31817; 30944; 28199; 26256; 25990; 17664; 16762; 12804; 10308; 5019; 1587

devenir:112725

deviennent:76330

deviner:16415

devinette:75431; 74601; 74382; 74300; 74264; 74225; 73760; 73706; 73631; 73620; 73572

devoir:49808

devraient:52147

devrait:12568

diagonalement:2391

didacticiel:7714

difficile:105758; 96747; 660

dijoints:29168

dimension:39600; 39442; 38517; 22984; 22801; 21968; 21918; 21847; 18202; 18141; 18102

dira:108237; 65465; 65396; 56660; 50382

dire:112614; 111062; 110295; 110245; 110164; 109751; 101468; 98776; 94995; 92891; 89748; 82509; 80559; 80324; 79230; 64857; 64819; 51206; 50970; 50943; 46216; 40757; 37865; 33280; 30825; 30785; 27107; 25466; 24189; 17879; 16409; 16182; 9990; 9862; 9716; 8807; 7350; 6383; 3576

direct:99295

directement:17076; 5263

direz:68018

dirons:73602

disant:110206; 51019

discours:986

disent:114441

disjointe:71869; 12059; 10304

disjointes:78780

disjoints:73653; 72867; 71722; 67416; 54502; 51762; 51669; 46939; 46874; 46493; 39317; 39307

disons:46561

disparition:91780

distance:63641; 38908; 35110; 31446; 19740

distinct:100443; 100410; 100242; 100163

distincts:102650; 102433; 100274; 78237

distinguer:114277

dit:113161; 112112; 112069; 111786; 106365; 106270; 99489; 99345; 96583; 95826; 95653; 93953; 91234; 91173; 91078; 91030; 90949; 90839; 90802; 90772; 90740; 90710; 89057; 88939; 87746; 87622; 87554; 86587; 81361; 80262; 79806; 78722; 75904; 70987; 68714; 68237; 67754; 67671; 66457; 63476; 61795; 60375; 60280; 56526; 55242; 52633; 52196; 49111; 48390; 39291; 38687; 36664; 36185; 30889; 30816; 29981; 29363; 29223; 28058; 27417; 23231; 23096; 17055; 16137; 11213; 11110; 11058; 11025; 10889; 10780; 10480; 10423; 10325; 10292; 10059; 6606; 6452; 4593; 4385; 3686; 3389; 3189

dite:111706; 111669; 111641; 74605; 73710; 10179; 9445; 9099; 9029; 6766; 6682; 6589; 6534

dites:108617

dits:90678

divisait:95005

diviseur:87634

diviseurs:93165; 92517; 91813; 91796; 91725; 91670; 91620; 91599; 90849

dizaines:670

document:114814; 81438; 68962; 67927; 56389; 38770; 31011; 141

documentations:25678

documents:194

doit:113853; 76400; 68392; 44093; 34012; 32963; 8884

doivent:52239; 50055; 30298; 1293

domaine:77917; 63098; 62892; 62826; 62753; 59415; 58668; 2193; 1908

don:64402

donc:114134; 114115; 114081; 114045; 113755; 113736; 113702; 113666; 112885; 112625; 112576; 112536; 111204; 110946; 110909; 110857; 110712; 110661; 110648; 110609; 110510; 110433; 110373; 110349; 110308; 110257; 110178; 109522; 109266; 108772; 107328; 107300; 106892; 106151; 105698; 105312; 105243; 105121; 105002; 104911; 104625; 104344; 103955; 103451; 103050; 102563; 102558; 102392; 102286; 102242; 102193; 102054; 102015; 101813; 101721; 101291; 100963; 99998; 99223; 98891; 98862; 98799; 98636; 98208; 98117; 98017; 97874; 97840; 97337; 97300; 97221; 97073; 96930; 96911; 96693; 96331; 96294; 95779; 94985; 94513; 94142; 93565; 93541; 93056; 92435; 92231; 85728; 85425; 85057; 84668; 83314; 83086; 83009; 82974; 82864; 82748; 82646; 82051; 81735; 81107; 81006; 80752; 80555; 80527; 79190; 78794; 78483; 78219; 78183; 78125; 76081; 75788; 75751; 75180; 75169; 73375; 72910; 72821; 72362; 71526; 71328; 70789; 70274; 70208; 69470; 69456; 69336; 68809; 67337; 66971; 65103; 64055; 64008; 61457; 61424; 61315; 61255; 61161; 59176; 58500; 58416; 58308; 58254; 58190; 58085; 57842; 57790; 57611; 57560; 57337; 57075; 54964; 54325; 54123; 54096; 53224; 52657; 52391; 52103; 50057; 49694; 49672; 49636; 49471; 49450; 48318; 48124; 48008; 47968; 47913; 47866; 46000; 45876; 45799; 45426; 44790; 44719; 44304; 42722; 41965; 41206; 41120; 41079; 40425; 40330; 40316; 40284; 40002; 39912; 39890; 39880; 38629; 38103; 37486; 36917; 34338; 34251; 34086; 34069; 33786; 32020; 31815; 31201; 31030; 29920; 28589; 28445; 28271; 27884; 27590; 25249; 25217; 23430; 23130; 22990; 22980; 22723; 22451; 22386; 22175; 21469; 21439; 21040; 21021; 20978; 20827; 19562; 19437; 18897; 18736; 16949; 16891; 16830; 16811; 16743; 16726; 13953; 13809; 13261; 13045; 12816; 12732; 8426; 7705; 7263; 7234; 7089; 6916; 6253; 6187; 6165; 6102; 6094; 6047; 5612; 5594; 4824; 4757; 4732; 4561; 2962; 335; 304

donnant:49429

donne:113088; 113012; 107504; 107195; 90625; 69264; 65747; 64335; 63929; 58815; 56691; 56143; 55857; 47286; 41268; 33555; 29711; 28195; 27561; 25970; 23252; 23193; 22432; 14616; 11897; 9524; 8510; 6893; 1754; 1338

donnent:96657; 865

donner:107532; 82149; 51095; 49742; 31078; 11677

donnera:2597

dont:114256; 103755; 103611; 102979; 102849; 96737; 96418; 95834; 89953; 88653; 80242; 77656; 77252; 74703; 68452; 68144; 67939; 65440; 62822; 59955; 59411; 58664; 56970; 48980; 47078; 44402; 43997; 43340; 43102; 42521; 39712; 39030; 37719; 29576; 19004; 16331; 13057; 11807; 10872; 10817; 4303; 470

dote:36119

double:111049

doucement:96566

dresse:89154

droit:54614

droite:95958; 35994; 35952; 35930; 34010; 33951; 22455; 22394

dual:40642; 40636; 40570; 38177

duale:39688; 39520

duaux:40554

dupliquer:112806; 112746

76512; 76241; 76141; 76067; 76026; 75889; 75501; 75381; 75318; 75154; 75144; 75030; 74733; 74651; 74637; 74603; 74580; 74346; 74308; 74272; 74241; 74049; 73829; 73708; 73616; 73366; 73179; 72908; 72888; 72849; 72667; 72360; 72190; 72111; 72007; 71804; 71460; 71314; 71034; 70972; 70849; 70716; 69558; 69247; 68854; 68795; 68574; 68533; 68473; 68338; 68246; 68188; 68107; 68082; 68025; 67781; 67688; 67631; 67556; 67424; 67366; 67345; 67265; 67028; 66915; 66840; 66751; 66713; 66628; 66370; 66264; 65853; 65797; 65775; 65473; 65456; 65404; 65327; 65255; 65211; 65193; 65171; 65063; 65012; 64935; 64878; 64746; 64733; 64675; 64654; 64188; 64169; 64014; 63992; 63830; 63666; 63486; 63466; 63323; 62828; 62630; 62609; 62570; 62528; 62488; 62411; 62379; 62366; 62278; 62088; 62039; 61973; 61805; 61662; 61434; 61289; 61253; 61222; 60953; 60920; 60783; 60765; 60747; 60690; 60678; 60441; 60423; 60419; 60413; 60388; 60373; 60323; 60288; 60278; 60241; 60187; 60073; 60034; 59963; 59897; 59677; 59596; 59417; 59253; 59149; 58676; 58564; 58433; 58394; 58354; 58178; 58104; 57956; 57879; 57730; 57558; 57499; 57359; 57318; 57151; 57001; 56923; 56903; 56877; 56860; 56846; 56809; 56805; 56786; 56767; 56750; 56668; 56574; 56564; 56524; 56315; 55590; 55521; 54978; 54870; 54580; 54476; 54435; 54406; 54199; 53905; 53807; 53745; 53679; 53646; 53624; 53597; 53454; 53117; 52909; 52860; 52741; 52221; 51560; 51419; 51143; 51036; 51009; 50885; 50796; 50786; 50645; 50583; 50390; 49870; 49610; 49506; 49460; 49424; 49408; 49366; 49339; 49127; 48932; 48912; 48883; 48797; 48771; 48676; 48624; 48551; 48517; 48436; 48383; 48371; 48316; 48180; 48078; 48058; 48022; 47937; 47757; 47681; 47659; 47383; 47379; 47360; 47084; 47040; 46955; 46941; 46630; 46508; 46495; 46296; 46233; 46224; 46063; 45954; 45916; 45815; 45783; 45651; 45633; 45432; 45406; 45330; 45184; 45133; 45026; 44990; 44864; 44839; 44816; 44776; 44734; 44714; 44639; 44631; 44618; 44063; 44003; 43935; 43852; 43822; 43812; 43731; 43723; 43570; 42930; 42854; 42582; 42354; 42323; 42314; 42246; 41871; 41813; 41776; 41744; 41430; 41408; 41126; 41104; 40762; 40733; 40713; 40480; 40455; 40388; 40100; 39872; 39863; 39770; 39720; 39643; 39610; 39469; 39434; 39197; 39127; 39106; 38997; 38883; 38824; 38797; 38754; 38672; 38343; 38070; 38017; 37869; 37725; 37676; 37659; 37631; 37621; 37405; 37395; 37280; 36973; 36888; 36844; 36763; 36671; 36645; 36532; 36179; 36031; 36012; 35853; 35789; 35691; 35664; 35644; 35599; 35507; 35425; 35287; 35236; 35147; 35119; 35104; 35055; 35022; 34936; 34560; 34544; 34503; 34346; 34261; 34212; 34205; 34178; 34106; 34092; 34075; 33885; 33876; 33842; 33829; 33804; 33755; 33694; 33542; 33378; 33168; 33086; 32877; 32807; 32592; 32530; 32390; 31737; 31711; 31681; 31623; 31529; 31462; 31442; 31405; 31285; 31273; 31258; 31246; 31213; 31186; 31042; 30969; 30952; 30930; 30616; 30550; 30473; 30251; 30234; 30194; 29890; 29594; 29580; 29514; 29452; 29429; 29186; 29105; 29082; 29041; 29010; 28971; 28960; 28875; 28671; 28424; 28377; 28295; 28247; 28070; 28060; 28029; 27978; 27920; 27774; 27730; 27715; 27364; 27304; 27288; 27204; 27178; 27019; 26983; 26880; 26663; 26623; 26603; 26406; 26394; 26364; 26326; 26211; 26102; 26035; 26019; 25780; 25732; 25720; 25632; 25494; 25474; 25388; 25359; 25331; 25315; 25201; 24997; 24863; 24827; 24636; 24495; 24462; 24379; 24278; 24214; 24131; 24124; 24071; 23830; 23594; 23344; 22978; 22797; 22791; 22611; 22425; 22398; 22342; 21926; 21914; 21896; 21823; 21680; 21110; 21068; 21038; 21013; 20889; 20861; 20552; 20532; 20374; 20362; 20296; 20286; 20231; 20106; 20085; 19899; 19686; 19644; 19602; 19308; 19169; 19106; 18937; 18595; 18298; 18196; 18180; 18065; 18036; 17866; 17787; 17562; 17483; 17453; 17420; 17393; 17111; 16718; 16604; 16576; 16564; 16552; 16472; 16464; 16337; 16214; 16061; 15987; 15968; 15958; 15918; 15901; 15682; 15494; 15311; 15185; 14973; 14950; 14779; 14755; 14659; 14585; 14462; 14109; 14054; 13885; 13826; 13788; 13642; 13465; 13363; 13298; 13249; 13182; 12777; 12696; 12254; 12217; 12111; 12057; 12042; 11826; 11813; 11785; 11626; 11612; 11585; 11528; 11477; 11428; 11282; 11221; 11108; 11056; 11023; 10971; 10951; 10823; 10788; 10712; 10641; 10598; 10552; 10478; 10431; 10421; 10400; 10323; 10290; 10167; 10067; 10033; 9890; 9850; 9782; 9730; 9670; 9630; 9614; 9597; 9572; 9443; 9409; 9263; 9111; 9037; 8942; 8591; 8533; 8038; 7965; 7786; 7554; 7374; 7013; 6817; 6783; 6764; 6680; 6616; 6587; 6532; 6450; 6370; 6311; 6286; 6045; 6025; 6002; 5941; 5765; 5637; 5359; 5086; 4988; 4969; 4913; 4603; 4548; 4466; 4436; 4393; 4129; 4065; 3928; 3883; 3871; 3833; 3684; 3655; 3608; 3584; 3486; 3397; 3325; 3197; 2932; 2923; 2880; 2846; 2793; 2106; 1918; 1869; 1214; 956; 656; 618; 220; 158

estiment:10249

etc:111911; 109951; 109948; 82260; 73219; 60004; 56137; 49927; 49845; 39411; 24136; 17617

euclidien:97837

eux:103892; 90916; 90880; 90684; 66532; 52580; 9825

evn:39709; 39438; 31731

evt:39271; 38928; 34985; 21952; 21872; 18178; 18147; 18094; 17851; 17666; 17591; 17570

exacte:34284

exactement:112612; 102996; 102969; 102952; 101466; 101356; 96370; 82554; 48637; 30823; 30783; 28485; 17248

excitantes:24115

excitants:76168

exemple:111943; 109048; 108312; 106683; 104891; 95233; 92699; 86134; 70706; 62119; 51706; 48618; 39382; 33911; 29245; 24171; 22376; 15888; 15740; 11301; 9706; 1936; 1561

exemples:106884; 104287; 103509; 92750; 50689; 50681

exercice:104958; 79660; 78929; 75385; 73997; 72059; 69893; 60338; 46448; 38774; 36037; 19312; 12098; 4021

exercices:77983; 76416; 50427; 26427

exercie:17222

exhaltantes:87422

exhaustif:87034

exigeante:37942

existaient:880

existant:55479; 55441; 55426

existants:55585

existe:114617; 113112; 112120; 112077; 111123; 108982; 108727; 108585; 108130; 107681; 106979; 106546; 106278; 105999; 105573; 105000; 104503; 104458; 103569; 103477; 102407; 100838; 100727; 100423; 99930; 99755; 99707; 99663; 99494; 98121; 98021; 96014; 94298; 93563; 93391; 93267; 92914; 92820; 92433; 92263; 92004; 91680; 91650; 91487; 90973; 90885; 90581; 89314; 88955; 88748; 88402; 88335; 86686; 86477; 86187; 85103; 84805; 84672; 84524; 84346; 84315; 84285; 84228; 83921; 83890; 83860; 83801; 83090; 83053; 82031; 81739; 81546; 80817; 80762; 80717; 80658; 79960; 79285; 79259; 79188; 78389; 78364; 78280; 78093; 77899; 77812; 77804; 77492; 77101; 77053; 75953; 75725; 75678; 75216; 75178; 74695; 74209; 73022; 72617; 72201; 71921; 71400; 70787; 70382; 70231; 70122; 69800; 69647; 69585; 69334; 69152; 67702; 67477; 67226; 67135; 67098; 66444; 64542; 63892; 63755; 63711; 63408; 63341; 63279; 63194; 63162; 63086; 63035; 62946; 62880; 62876; 62812; 62741; 62549; 62421; 61983; 61580; 61186; 60571; 59939; 59782; 59565; 59298; 59243; 58952; 58716; 58459; 58056; 56605; 54239; 54094; 53846; 53550; 53012; 52978; 49469; 49243; 49005; 47944; 47825; 47591; 47561; 47452; 47063; 46755; 45874; 45748; 44905; 43923; 43183; 42968; 42957; 42265; 42136; 41929; 41892; 41324; 39450; 39322; 38524; 38211; 37922; 36478; 36434; 35719; 35265; 34649; 32711; 32288; 31813; 31161; 30670; 29522; 29478; 29391; 29202; 29121; 28449; 28149; 27882; 27851; 26303; 26189; 25846; 25574; 25267; 25221; 25131; 25090; 24700; 24664; 24596; 23785; 23455; 23065; 23026; 21467; 21248; 21213; 20933; 20646; 20487; 20150; 20026; 19986; 19908; 19620; 19376; 18953; 18856; 18703; 18571; 18501; 18418; 17974; 17910; 16693; 15644; 15545; 15366; 15146; 13721; 13677; 12730; 12425; 12276; 11073; 10809; 10384; 8585; 8457; 8347; 8187; 8144; 7157; 7093; 7070; 6722; 6169; 6074; 5900; 5555; 5465; 5302; 4291; 4215; 4145; 2281; 2050; 1227

existence:859

existent:67931

exister:112348

exister":978

existerait:82897; 82795; 82616; 81570; 71595

exo:110752; 73287; 68556; 43302

exploite:92879

exposer:65730

expression:111764; 28753; 589

gateau:66871
gauche:95960
genre:24145; 24119
gens:112167; 111999; 73523; 67767; 18215; 17528; 10210; 9757; 7686
gestion:68799; 26459
goj:27480
grace:776
gramme:112853; 112637; 112602; 112529; 112489
grand:107265; 94670; 82721; 81473; 81461; 81345; 79328; 73214; 67061; 60054; 52594; 47148; 35373; 32448; 32394; 15972
grande:114264; 113824; 34589; 34407; 2938; 2046
grandes:80310; 65753
grands:107373; 74174; 18290; 15037
graphe:30910
gratifiante:66842
green:64724; 32749; 364
gris:42
gros:90046; 48438; 48403; 47362; 47301
groupe:77236; 45497; 45479; 9710; 9618; 9568
groupes:52302; 45456; 34288
guide:76312; 33120
guides:24164
habitants:67637; 67569; 66087
habite:68327
habitudes:60356; 55547; 49756
habituels:68135
hasard:51181; 51001
hasard":51048
haut:73293
haute:73450
heures:67904
hilbertien:35117
histoire:70362
historique:24880
historiquement:55516
hlibert:35423
hoc:76201
homologue:32908
hors:3019
http:43391; 41643; 41218; 38270; 29746
humain:112901
hyperplan:39406; 39326; 37088
hypocritement:68787
i¡n:21806
ici:103198; 89947; 89149; 86954; 68150; 66549; 56156; 8302; 2791; 2337
idal:49390
idem:109810; 81100; 30343; 11642
identifiant:33047
identiques:83666
iest:27464
ile:12145
illustration:49748
illustrent:12891
illustrer:2350
ils:112025; 102659; 101003; 96655; 96627; 95130; 90339; 76328; 67200; 55610; 51022; 37141; 11395; 10247; 962
image:92085; 43650; 38066; 35574; 34824; 29679; 3773
imaginable:91381
imaginables:112959
imaginaire:65633
implicitement:109937
implique:114202; 112841; 112674; 112670; 112666; 112662; 112588; 112557; 112515; 112475; 111199; 111173; 111159; 111102; 111081; 110920; 110790; 110728; 110707; 110690; 110657; 110621; 110587; 110563; 110551; 110529; 110514; 110505; 110485; 110466; 110422; 110414; 110396; 110383; 110377; 110368; 110359; 110353; 110345; 110328; 109917; 109865; 109861; 109827; 109708; 109700; 109667; 109648; 109639; 109627; 109619; 109604; 109592; 109586; 109575; 109567; 109561; 109550; 109542; 109534; 109376; 94659; 94337; 93975; 91818; 91603; 91461; 79014; 69526; 53270; 49194; 21851; 3170; 3099; 2840; 562; 530
importance:46995; 8319
important:35683; 11579; 2901
importante:35342; 29952; 26854
importants:75542; 11376; 7981
importe:51254; 51150
inaccessible:112895; 62206; 62045; 60759
inaccessible":62078; 60684
inamivibles:55870
inclus:104841; 104771; 104537; 104446; 87903; 85169; 84167; 84075; 82566; 80408; 71933; 65213; 65197; 65173; 44992; 39930; 28331; 24562; 22911; 19604; 18618; 18182; 15600
incluse:83613; 83476; 41590; 38191; 29673; 29582; 29431; 19646
incomparables:83304
indicer:40037
indices:1659; 1424
indique:23726
indiscernable:32782
indivisibles:68428
induisait:37244
induit:71093; 28587
induite:85589; 74817; 41838; 38914; 38902; 29967; 26478; 25638; 24077; 19065; 14431; 10277; 10186; 8026; 6882
inf:31594
infaillible:74775; 74621
infini:78585; 77701; 77554; 77439; 77328; 76971; 76909; 61342; 60955; 60862; 60501; 60459; 60276; 50824; 50723; 49410; 39649
infinie:43139; 43094; 42974; 39602; 39444
infinies:54624
infiniment:68260; 37024
infinis:73160; 67316; 60591; 51760; 51661; 50703; 50673
influencer:113048
info:48443
informatique:96674; 95545; 64347
informatiques:96602
informelle:63935; 31333; 31084
initial:105106; 71427; 70997; 66577; 66338; 66243; 45174; 45008; 2094
initiaux:71123; 71060; 2071
injectif:90611; 90426
injection:106574; 103413; 103380; 79303; 79121; 76938; 76741; 67230; 63198; 61293; 61259; 60971; 59995; 59903; 51312; 48288; 19912; 15370
injective:111716; 111671; 87618; 87591; 79583; 71107; 52705; 19901
injectivement:20063; 19953
inquiet:91855
insister:7719
inspiration:26439
institute:73516
instructions:96600
intelligent:26708
internet:41634; 41199
intersecte:71326; 34894
intersection:108654; 96494; 68520; 63345; 58345; 53973; 29059; 24503; 19158; 15175; 13681; 12055; 6274; 6006; 5945
intersections:68175; 5092; 4975; 4478
intervalle:16057; 13367
intervenant:96541; 29729
intervenants:43330
intuitif:38803; 36957; 32594
intuitionniste:55903
intuitive:47279; 37049; 32743
intuitivement:113243; 55052
invalider:112714
inversible:107330; 106833; 89429; 87651; 48103; 48024
inversibles:95097; 94561; 48041
iserait:82631
isomorphe:97569
isomorphisme:101315; 99113
isont:106490
issue:64341; 33966
italique:109403
itemize:114706; 114538; 114161; 113933; 113782; 113554; 108557; 108494; 108219; 107816; 107491; 107382; 104228; 104147; 103180; 102826; 102787; 97640; 95857; 95261; 93893; 93233; 93116; 91916; 91708; 91345; 91201; 90667; 89680;

lecture:91544; 1356

ledit:21575

lemme:108900; 108805; 104869; 102603; 102571; 102543; 102378; 93128; 93044; 92905; 92866; 92766; 79647; 59625; 40814; 38087; 38008; 37972; 36321; 33567; 25699; 24724; 20690; 20617; 18763; 12091; 1289

lemmes:87058; 87014; 83656; 83342; 83334; 60016; 24289; 12873; 3976; 504

lequel:65847; 41764

les:114763; 114425; 114105; 113726; 113365; 113225; 112951; 112814; 112688; 112220; 112165; 111997; 110768; 110442; 109759; 109422; 108837; 108831; 108615; 107912; 107783; 107758; 107054; 106864; 106480; 106394; 106389; 105481; 104964; 104524; 104426; 104281; 104239; 104123; 104056; 103979; 103875; 103853; 103841; 103821; 103803; 103293; 103286; 103027; 102998; 102981; 102971; 102954; 102931; 102893; 102217; 102166; 101790; 101430; 101338; 100936; 99398; 98181; 98048; 97512; 97419; 97194; 97011; 96951; 96858; 96728; 96598; 96586; 96422; 96372; 96360; 96224; 96060; 95875; 95836; 95531; 95122; 95087; 95079; 94894; 94772; 94679; 94594; 93602; 92746; 91790; 91662; 91530; 91373; 90921; 90696; 90323; 89703; 89693; 89558; 89475; 89197; 89143; 89044; 89032; 88840; 87322; 87008; 86956; 86944; 86615; 84766; 83531; 83404; 83294; 83285; 83106; 82840; 82756; 82556; 82519; 82446; 82208; 82084; 82068; 81870; 81860; 81357; 81326; 81287; 80244; 79930; 79812; 78852; 78350; 78009; 77282; 76375; 76361; 76317; 76292; 76044; 75012; 74833; 74705; 73885; 73863; 73113; 73083; 72077; 72017; 71763; 71554; 71332; 71271; 70753; 70727; 70409; 70404; 69998; 69170; 69140; 68454; 68386; 68272; 68138; 67919; 67765; 67388; 67208; 67164; 66827; 66794; 66780; 66565; 66153; 66085; 65751; 65269; 65219; 65179; 65042; 64835; 64418; 64394; 64125; 63530; 62706; 62661; 62506; 62146; 60801; 60354; 60342; 59984; 58944; 58529; 58224; 57226; 56974; 56947; 56182; 55893; 55831; 55625; 55598; 55545; 55390; 55032; 54484; 52870; 52639; 52609; 52556; 52544; 52503; 52441; 52364; 52259; 52229; 52080; 51387; 50956; 50699; 50669; 50429; 50045; 49206; 49142; 49076; 48877; 48596; 48464; 47344; 46365; 46210; 45245; 43397; 43321; 43106; 41148; 40894; 40588; 39735; 39678; 39571; 39510; 39330; 39269; 39142; 39078; 39032; 38750; 38366; 38276; 38025; 37222; 37103; 36020; 35687; 35392; 35346; 34996; 34990; 34444; 34230; 33902; 33199; 33045; 32200; 30995; 29924; 29752; 28679; 26911; 26736; 26548; 26068; 26050; 25988; 25759; 24160; 24154; 22444; 22223; 22127; 21800; 21744; 21518; 19010; 18484; 18476; 18327; 18310; 18275; 18257; 18213; 18131; 17544; 17526; 17338; 17232; 16429; 15842; 15420; 15278; 15254; 15228; 15204; 15055; 13059; 12844; 11658; 11652; 11567; 11387; 10874; 10208; 9957; 9940; 9813; 9755; 9749; 9544; 9121; 8892; 8004; 7998; 7977; 7794; 7725; 7690; 6895; 6425; 6233; 4305; 4015; 3411; 2981; 2860; 2688; 2633; 1657; 1471; 1422; 1203; 1141; 980; 756; 723; 648; 535; 498; 466; 192

lesmathematiquepointnet:37995; 750

lesquels:1667

lettre:80266; 51847

lettres:89564; 55796

leur:107789; 89573; 78241; 70014; 66117; 66097; 64841; 33128; 33039; 3015

leurs:112232; 105039

libre:39633; 33028

libres:103419; 103386

lien:29736

lieu:90573; 76441; 50939; 50017; 49998; 49990

lieu":50040

ligne:93805; 76306

lignes:104062; 103987; 103877; 103855; 103823; 103715; 103601; 103544; 103372; 103358; 103279; 103267; 65755; 55000; 2638

like":14295

lim:37605; 17032; 1538

limite:108573; 108376; 108280; 106056; 105643; 86859; 85941; 85922; 85882; 85694; 85669; 79160; 77890; 62372; 62284; 61920; 60932; 60239; 49129; 48998; 47090; 46558; 46298; 46266; 45410; 45375; 45332; 45286; 44065; 44038; 44007; 43681; 41130; 40878; 35551; 34794; 32350; 30732; 30608; 28251; 27947; 27567; 26627; 25801; 25149; 25078; 24829; 22615; 22603; 22139; 22034; 21705; 20749; 20378; 20311; 19414; 14902; 14663; 14605; 14135; 14113; 14000; 13980; 13887; 13830; 13591; 13467; 13253; 13215; 13130; 12995; 12616; 11828; 11811; 11552; 11501; 11450; 11225; 11043

limite":60040

limites:108619; 107117; 49078; 46367; 45987; 45605; 25986; 12806; 12503

limites":28681

linguistique:63594

linguistiques:49857

lire:49888; 7766

lisant:2686

lisez:77993

liste:114786; 112285; 90631; 89160; 73585; 65899; 11862; 11370

lit:72957; 33151; 32896

livres:9751

local:106934

localement:26021; 25734; 22793

logicien:76215; 66859

logique:112657; 79802; 73844; 56095; 55901; 55620

logiques:109979; 539; 184

loi:51044

loin:68765; 51107; 38764; 31005; 2364

long:112173; 56383; 2966

longs:2075

longue:19998

longues:2276; 1074

longueur:44083; 2446; 1498

longueurs:2042

lors:95489; 79639; 9805; 8907; 990

lourdement:7721

lui:112988; 70607; 68278; 67287; 65207; 60097; 58452; 57883; 56821; 56737; 48320; 40059; 35289; 33350; 31287; 29596; 16884; 15951; 15893; 15869

m'a:91214; 90651; 37976; 7674

m'abstiens:41204

m'ont:104564

m¿a:61164

mAis:110700

machin:94646

maigre:63496

mail:91220

maintenant:106910; 100834; 100610; 98928; 98712; 90627; 80920; 79059; 70906; 51647; 48898; 44553; 28379; 27378; 25563; 25160; 16233; 16029; 13606; 8551; 1703

maintenir:47273

mais:112769; 105761; 96625; 96553; 93099; 91537; 88871; 87424; 87037; 84147; 82104; 81453; 80168; 76338; 75526; 68283; 67987; 66514; 66279; 65858; 64519; 63859; 62698; 62093; 55538; 52812; 52134; 51250; 51139; 49930; 47469; 45545; 41280; 38805; 38680; 37790; 32961; 32582; 32227; 25538; 19982; 12404; 11379; 10010; 8300; 6863; 3958; 2893

majorant:59961

mal:112802; 49970

maniement:1175

manifestations:810

manifestement:27290

manquait:112909

manque:114175

maro:95550; 90844; 87814; 87766; 87648; 87598; 87574; 63

marquants:32486

mathematiciens:109424

mathematiques:43399; 38278; 29754

matheux:76377; 50958

maths:113104; 112151; 97514; 73788; 55627; 49768; 7800; 2862

matrice:103691; 103514; 103495; 103350; 103255; 94704; 93629; 93441; 90961

matrices:103536; 95095; 94721; 94681; 93253; 90977

maximal:107869; 107654; 106964; 106665; 104849; 104520; 104381; 102748; 102623; 101530; 101241; 100781; 100655; 100595; 100559; 100357; 100333; 100209; 100181; 99654; 99611; 99478; 96009; 95324; 87969; 87915; 87817; 84762;

noms:66557; 66404

non:114347; 113494; 110861; 110643; 110200; 108051; 107602; 106898; 106499; 104430; 104293; 103896; 103707; 103577; 101854; 101121; 101013; 100710; 100690; 100618; 100195; 99581; 99453; 97975; 97892; 96442; 95972; 95918; 94797; 91491; 87718; 79914; 79703; 77648; 76842; 76775; 76707; 76593; 75597; 73315; 72009; 71901; 71828; 71710; 68361; 67970; 66678; 66561; 66266; 63834; 63523; 63507; 63079; 62866; 62805; 62734; 61823; 60908; 59319; 58400; 58369; 58331; 58180; 58119; 57596; 57575; 57483; 57102; 57048; 56962; 56883; 56588; 54079; 54023; 53701; 50634; 50015; 49688; 49462; 49355; 48970; 48047; 47702; 47070; 46539; 45268; 42461; 42316; 42193; 40175; 39458; 38674; 34741; 34677; 34562; 33993; 33651; 33527; 33482; 27664; 27027; 21682; 20722; 20652; 20637; 19033; 18548; 16005; 15932; 15596; 10312; 1207; 1167; 925; 214

normal:91859

normalement:67368

norme:42000; 41992; 41939; 41921; 41836; 41798; 41794; 40847; 40584; 39716; 39670; 38141; 37723; 37449; 36125; 35303; 35061; 31717; 31585; 31521; 31435; 31409; 31400; 31206; 31179; 30804; 30554; 30545; 30512; 30199; 30179; 30047; 30029; 29496

normer:39658

notant:94253; 88444; 62341; 56468; 56449; 56399; 55342; 55323; 55273; 16969; 13556; 10610; 1482

notation:112389; 89897; 88210; 58763; 56222; 30070; 29858; 3272; 3238

notations:49752; 25761; 18312; 7774

note:112364; 111416; 103553; 93241; 90066; 88601; 88522; 79400; 79370; 75581; 74994; 74923; 72882; 70554; 70518; 65607; 65368; 64800; 63617; 62446; 60961; 60396; 60141; 51627; 51515; 47715; 43042; 35185; 29322; 28897; 27248; 26466; 22107; 22076; 9363; 9212; 7494

notent:112001

noter:111983; 109418; 90451; 90278

notera:44508; 44152; 28311; 26342; 3765

notion:105854; 91629; 91613; 91577; 91516; 91417; 91398; 91388; 91363; 91353; 90927; 87680; 83373; 82423; 16880; 6829; 6821

notions:87432; 87416; 59986; 56184

notons:72789; 71364; 71194; 53337; 51804; 35541; 34816; 14565

notre:75615; 70600; 70560; 70507

nous:99406; 95539; 76310; 73458; 65968; 39718; 36694; 28015; 19006; 16872

nouveau:107508; 71466; 44883

nouvel:71099; 67292

noyau:88657; 88104; 86170; 39870; 29798

noyaux:88151

nul:103898; 102565; 101147; 100743; 97977; 97894; 96482; 96296; 95974; 94799; 49464; 49357; 48099; 47704; 40177; 22421

nulle:96506; 63335; 34564; 34094

nuls:101856; 96444; 95920; 94898; 87720; 49690; 48049

objet:112877; 26925

objets:112224; 66567; 55581; 55573; 982

obligatoirement:59058

obligatoires:113194; 69118

oblige:36832; 33191

obligerait:84196

obtenir:109490; 109164; 104323; 94580; 40785

obtenu:21730; 10263; 3885

obtenue:2203

obtenues:14498

obtiendra:39402; 26899

obtient:107017; 105352; 102341; 102137; 98194; 98057; 97166; 93817; 93759; 93706; 88469; 83215; 79575; 67043; 66969; 64638; 64431; 52389; 49565; 49094; 46407; 45533; 42818; 38612; 27588; 23292

occurences:114792; 113227

offertes:73508

officielle:248

officielles:113219

offre:113339; 113182; 103699; 76180; 22370

offrent:103503

ont:96629; 84858; 78870; 77514; 73921; 70759; 70006; 67176; 55551; 39311; 37127; 11573; 9821

oou:12767

ordinal:114685; 114601; 79591; 79263; 79158; 79105; 79089; 78274; 77888; 77158; 73066; 70617; 67468; 67458; 66919; 64482; 64206; 63990; 63964; 63142; 62791; 62425; 62370; 62282; 62227; 62025; 61987; 61918; 61886; 61190; 61125; 60930; 60860; 60409; 60237; 60077; 60032; 59814; 59470; 59247; 59087; 58623; 58568; 58547; 58437; 57877; 57630; 57376; 57087; 56907; 56864; 56801; 56790; 56784; 56771; 56754; 56727; 56568; 54070; 53840; 53699; 53558; 53493; 40498; 40259; 40027

ordinale:62256; 61876; 58600; 53344; 53335; 40188

ordinalement:107037

ordinaux:114554; 107115; 107056; 78352; 73085; 72494; 67210; 67172; 67088; 64396; 58946; 58531; 57914; 56982; 56949; 53515

ordre:114531; 91637; 91423; 91404; 87438; 79364; 78995; 78977; 77747; 77564; 63916; 63223; 60307; 60263; 60172; 60062; 59649; 51268

org:41651; 41226

oridnal:73142

orthogonal:36677

orthogonale:36769

oublier:38662

oui:70047; 16466; 15989; 15920

outil:113078; 30865

outils:113392

outre:41553

ouvert:91479; 85466; 85374; 77314; 71826; 71601; 70150; 65261; 65169; 65160; 65031; 65007; 64941; 63490; 63412; 45827; 45672; 45637; 45057; 44900; 44868; 44845; 44738; 44620; 44487; 44363; 44336; 44273; 43945; 43894; 43830; 43752; 43707; 41328; 41094; 41058; 39229; 39209; 38964; 34162; 33820; 28428; 28094; 27982; 27824; 27671; 27208; 23459; 23438; 22865; 22826; 22735; 20720; 20650; 20635; 19610; 18601; 18174; 17978; 17967; 17894; 17236; 17097; 16989; 16724; 16602; 16483; 14056; 14015; 13925; 13904; 13610; 13398; 13143; 12757; 11239; 10913; 9997; 8471; 8401; 8354; 6620

ouverte:40230; 30983

ouvertes:34234; 8093

ouverts:85167; 75595; 75123; 74709; 73309; 72859; 71708; 71185; 70530; 70441; 70368; 68639; 68076; 68004; 66985; 66696; 66600; 65363; 65271; 64910; 64812; 64779; 46761; 46693; 44197; 41154; 40900; 39397; 39148; 39084; 28201; 23769; 20784; 19182; 19022; 17613; 16808; 16772; 16655; 13069; 13010; 12522; 10343; 10310; 9937; 6427; 1987

p¡n:21529

p¿N:8745

pArticulier:110680; 110640

paxpa:93769

page:29768

pages:65740; 9921; 674

paire:78243

paires:78769

panel:90556

par:114657; 113166; 112440; 112293; 109515; 108538; 108310; 107052; 105674; 104889; 103941; 103321; 103157; 103069; 102843; 102567; 102539; 102394; 102328; 102195; 102128; 102030; 101738; 101651; 101628; 101621; 101511; 101413; 101024; 100980; 100823; 100298; 100019; 99887; 99412; 99390; 99371; 99314; 99269; 99227; 98984; 98947; 98679; 97907; 97597; 97499; 97468; 97157; 97081; 96965; 96645; 96537; 95169; 95091; 94828; 94758; 94383; 94128; 93695; 93668; 93581; 93026; 93008; 92412; 92408; 92237; 92224; 92208; 92065; 91218; 91151; 91054; 91042; 90495; 90357; 89412; 88992; 88908; 88791; 88589; 88510; 87380; 86509; 85827; 85406; 82442; 81314; 80557; 80030; 79469; 79360; 78858; 78251; 76406; 75322; 74819; 74801; 74682; 74494; 74423; 74091; 73972; 73796; 73581; 73510; 71891; 70688; 70012; 68518; 68307; 68173; 67660; 66801; 66786; 66753; 66215; 65819; 65804; 64677; 64451; 64099; 63588; 62260; 61872; 61754; 61643; 60259; 59030; 58596; 53654; 53050; 51855; 51704; 48062; 46979; 46858; 46422; 46243; 46031; 45160; 45137; 44424; 44404; 44193; 43658; 43498; 43319; 42864; 42525; 42358; 42250; 42183; 41784; 41424;

philosophique:54685; 51057
phorum:43403; 38282; 29758
photocopieuses:112794
php:43407; 38286; 29762
phrase:66396
physiques:51158
pinaillages:22446
pires:16367
place:93151; 48896; 45863; 38325; 23180; 5409; 5395; 328
placer:103196; 68396
plaisir:47200
plait:91289
plan:41284
plein:90391; 24109
plongent:90341
plupart:88816; 87297; 78726; 260
plus:114681; 113890; 113412; 113394; 112893; 112889; 110202; 109033; 108750; 106900; 103467; 103263; 99304; 93348; 92736; 92503; 91983; 91889; 90126; 87045; 86981; 86122; 84053; 84040; 83507; 83139; 82719; 82245; 82151; 82142; 81418; 81197; 79833; 79508; 79085; 78270; 76326; 75983; 73748; 73559; 73291; 72601; 70394; 70388; 68769; 67856; 67059; 66817; 66632; 66323; 66283; 65609; 64330; 63863; 62689; 62663; 62021; 61088; 61007; 60856; 60191; 60052; 59083; 57485; 56145; 55448; 54142; 54066; 54025; 53836; 53695; 53554; 53509; 53016; 52982; 52592; 51145; 51105; 42894; 41943; 40502; 40023; 39555; 38762; 37686; 37453; 36846; 36649; 36538; 35976; 35962; 35903; 35511; 34173; 34031; 33797; 31003; 29880; 29279; 28619; 26895; 26884; 26791; 26706; 26693; 25682; 24207; 22360; 19996; 15970; 15584; 15051; 12920; 12875; 12612; 11907; 11548; 5103; 4607; 2362; 2121; 1836; 490
plusieurs:39341
plutot:109428; 310
pmatrix:94929; 94910; 94749; 94728; 93875; 93866; 93842; 93824; 93777; 93766; 93721; 93714; 93641; 93634; 93453; 93446
poids:50207
poil:68477; 29090; 1940
point:114224; 114146; 113880; 113767; 113433; 112998; 100827; 100639; 99001; 83664; 58000; 46665; 35988; 35958; 35681; 34512; 33358; 29080; 12838; 12437; 12270; 10665; 10470
points:114333; 110772; 110444; 67390; 67360; 47036; 33053; 17518; 12918; 12792; 12629; 11905; 6235
porte:108858; 91367; 86912; 36977; 36440; 35728; 35603; 35486; 9476
portes:86611; 38746; 37074; 36078; 36029
posaient:478
posant:61175
pose:113519; 102482; 96691; 68280; 37432; 15871
poser:42734
positif:34037; 26334; 9350
positifs:7907
position:33143; 32969; 32930; 32881
posons:51788
possible:111601; 109219; 109037; 104834; 104331; 94452; 93471; 92740; 91989; 86126; 83263; 78223; 73563; 72364; 68350; 61090; 54021; 53989; 53955; 40029; 36653; 35966; 35515; 32196; 18878; 18116; 11128
possibles:112955; 91377; 90566; 82078; 28683
post:105104; 104746; 76379
pour:114337; 114177; 112961; 112897; 112230; 111863; 111424; 110936; 109993; 109453; 109168; 109162; 108100; 108026; 107774; 107756; 107663; 107656; 107257; 107214; 107165; 106523; 106478; 106315; 104725; 104711; 104420; 104321; 104220; 104182; 103873; 103851; 103819; 103433; 102768; 102203; 101947; 101901; 101143; 100993; 100783; 100643; 100561; 100335; 99961; 99813; 99656; 99613; 99511; 99480; 97227; 96400; 96202; 94578; 94432; 93981; 93205; 91957; 91189; 91088; 90957; 90856; 90639; 89691; 89302; 88218; 87939; 87523; 87485; 86779; 86745; 86574; 86199; 85583; 85280; 84333; 84272; 83908; 83847; 82838; 81119; 81018; 80774; 80016; 79422; 79273; 78951; 78617; 77985; 77868; 77775; 77480; 77154; 77088; 77041; 76474; 76463; 76452; 75969; 75623; 75204; 74777; 74196; 74018; 72980; 72949; 72605; 71945; 71761; 71386; 70648; 70321; 69747; 69490; 69321; 69194; 69138; 68993; 68596; 68366; 68342; 67439; 67084; 66541; 66392; 66001; 65491; 64531; 63866; 63179; 63147; 61914; 61882; 60714; 60640; 60493; 60340; 60058; 59375; 59286; 59231; 58852; 58742; 56956; 56582; 56345; 55891; 55648; 55527; 55461; 55042; 53782; 53511; 53340; 53254; 52966; 52227; 52042; 51792; 51611; 51308; 51059; 50404; 50330; 49859; 49740; 49510; 49345; 48571; 48244; 47889; 47529; 47387; 47196; 46588; 46214; 45241; 44804; 44676; 44233; 43155; 42418; 42201; 42095; 41906; 41762; 41528; 41475; 41138; 40981; 40884; 40753; 40741; 40683; 39385; 38577; 38458; 37531; 36817; 36722; 36360; 35819; 35766; 34861; 34770; 34639; 33921; 33666; 31966; 31787; 30747; 30059; 30043; 29954; 28136; 28041; 27839; 25939; 25912; 25879; 25680; 23696; 23570; 23515; 23316; 22440; 21526; 21336; 20998; 20716; 20575; 20499; 20454; 19828; 19746; 19059; 18308; 17819; 16983; 16499; 16439; 16259; 16139; 15348; 13567; 12702; 11797; 11235; 10909; 10362; 10230; 9833; 8966; 8723; 8467; 8444; 8330; 8201; 8123; 7762; 7717; 7694; 7251; 6698; 5860; 4814; 4747; 4265; 2658; 2534; 2348; 2300; 2216; 2149; 2135; 1803; 1665; 1655; 1245; 1201; 719; 646; 400
pourquoi:65761
pourra:33037
pourrais:83672
pourrait:113044; 37863; 12637
pourri:84879
pourrie:81420; 26100
pourtant:69872; 69787; 14965; 14770; 14123
pouvait:113031; 66663; 50022
pouvez:109511; 593
pouvoir:113345; 112963
pratique:84467; 201
premier:103075; 101268; 101231; 100805; 96312; 96246; 95988; 95701; 95631; 95314; 95177; 91635; 91421; 89273; 87977; 87769; 84796; 84656; 84599; 84492; 82877; 82790; 82438; 82277; 82003; 81990; 81731; 81509; 63962; 63670; 60407; 49011; 48789; 40257; 29886; 13633
premiers:102985; 102413; 101127; 101019; 100737; 100716; 96795; 96500; 96426; 96070; 95879; 95840; 90912; 90876; 90680; 89324; 89201; 84834; 82074; 81835; 81793; 81663; 81397; 81337; 52354; 49253; 49210; 48881; 48824; 43263
prenant:108700; 107770; 101788; 21734; 3889
prend:104608; 104485; 104410; 104276; 103839; 67020; 61533; 59425; 47320; 39365
prendre:105062; 86721; 76193; 70059; 68031; 54618; 49386; 35075; 32322; 26825; 21593; 12135; 1139
prenons:69907
presents:114729
presqu'aucune:52179
presque:76233; 52635; 52605; 52540; 52520; 52480; 52274; 52235; 52198; 52143; 42428; 42422; 40527; 20154; 3953; 1364
preuve:113910; 113870; 113155; 113116; 112754; 112718; 109880; 109842; 107549; 106625; 106609; 106535; 105756; 104261; 103931; 103202; 97489; 97475; 97357; 96810; 96533; 93140; 92871; 91972; 91885; 91831; 91654; 85183; 82305; 82164; 82130; 81414; 81241; 79046; 73993; 53612; 47277; 47176; 46086; 43363; 43348; 41274; 37674; 37047; 36949; 36939; 36231; 33559; 33300; 29715; 25695; 24861; 23720; 22438; 21792; 20571; 19990; 14504; 14265; 11901; 5856; 1342; 548
preuves:112690; 109320; 107536; 83650; 81486; 41179; 39573; 18267; 12865; 11918; 11866; 6897; 4026; 2690; 1283; 758; 709; 375; 350
primes:66504
principal:108053; 102537; 102370; 101619; 101558; 101488; 101211; 99220; 99081; 99055; 98382; 98349; 97860; 97846; 97770; 97553; 96985; 91459; 90804; 68539; 68363; 49614; 48972; 47072; 46541; 46171; 45416; 45270; 42463; 21684; 3691
principaux:102909; 101448; 101411; 97425; 97393; 97031; 96963; 96874; 90762
principe:17785; 1370
priori:113820; 112859; 90132; 72945; 68846; 65452; 52776; 29633; 16349
pris:112434; 104820; 73138; 22356

86743; 86696; 86676; 86657; 86519; 86471; 86439; 86420; 86325; 86260; 86197; 86110; 86033; 85903; 85866; 85649; 85627; 85431; 85396; 85304; 85185; 85113; 84972; 84776; 84642; 84629; 84544; 84360; 84331; 84251; 84157; 84103; 84057; 83935; 83906; 83824; 83703; 83668; 83574; 83438; 83141; 83069; 83022; 82976; 82941; 82915; 82811; 82723; 82602; 82527; 82313; 82239; 82066; 82039; 81953; 81858; 81839; 81797; 81717; 81681; 81592; 81554; 81525; 81363; 80922; 80772; 80727; 80668; 80631; 80579; 80392; 80344; 80080; 80008; 79998; 79968; 79835; 79763; 79652; 79616; 79520; 79366; 79293; 79271; 79245; 79217; 79198; 79146; 79093; 78830; 78818; 78561; 78495; 78321; 78225; 78185; 78173; 78158; 78073; 77925; 77820; 77773; 77603; 77502; 77478; 77347; 77152; 76999; 76928; 76853; 76786; 76718; 76650; 76604; 76557; 76263; 76231; 76189; 76147; 75852; 75733; 75690; 75653; 75202; 75131; 75024; 74725; 74508; 74437; 74221; 74016; 73780; 73738; 73657; 73321; 73206; 73171; 73130; 73107; 73087; 73004; 72978; 72890; 72878; 72823; 72717; 72702; 72635; 72627; 72603; 72562; 72499; 72419; 72233; 72015; 71943; 71703; 71668; 71635; 71611; 71550; 71509; 71479; 71412; 71384; 71291; 71263; 71218; 71087; 70989; 70940; 70895; 70874; 70809; 70710; 70579; 70325; 70276; 70258; 70241; 70158; 70134; 70105; 70085; 69975; 69961; 69924; 69851; 69814; 69777; 69759; 69745; 69698; 69657; 69623; 69601; 69566; 69534; 69387; 69358; 69206; 69032; 68995; 68783; 68594; 68527; 68376; 68344; 68340; 68293; 68210; 68127; 68046; 67954; 67845; 67763; 67712; 67529; 67437; 67071; 66934; 66636; 66604; 66454; 66363; 66203; 66125; 66059; 65999; 65966; 65927; 65841; 65467; 65398; 65321; 65279; 64900; 64715; 64687; 64529; 64435; 64392; 64135; 63972; 63832; 63775; 63680; 63480; 63440; 63371; 63299; 63106; 62964; 62900; 62838; 62761; 62693; 62659; 62601; 62433; 62231; 62200; 62033; 61995; 61880; 61840; 61629; 61428; 61363; 61200; 61066; 61021; 60769; 60753; 60638; 60595; 60209; 60128; 59861; 59681; 59657; 59588; 59575; 59131; 59097; 59007; 58893; 58837; 58482; 58469; 58427; 58211; 58148; 58098; 58066; 57867; 57844; 57689; 57543; 57296; 57212; 56662; 56619; 56325; 56100; 55776; 55707; 55596; 55388; 55040; 54909; 54458; 54291; 54259; 54157; 53566; 53421; 53379; 53239; 53131; 53094; 53028; 52994; 52964; 52798; 52574; 52554; 52499; 52393; 52086; 51994; 51906; 51711; 51684; 51537; 51430; 51401; 51377; 51306; 51026; 50384; 50020; 49851; 49831; 49674; 49650; 49604; 49567; 49481; 49400; 49343; 49331; 49292; 49270; 49190; 49113; 49096; 49038; 49019; 48742; 48727; 48592; 48428; 48399; 48363; 48282; 48242; 48192; 48126; 48114; 48037; 47978; 47956; 47846; 47833; 47796; 47675; 47623; 47608; 47578; 47429; 47352; 47256; 47131; 47046; 47026; 46999; 46949; 46925; 46822; 46744; 46653; 46620; 46586; 46502; 46479; 46409; 46396; 46327; 46290; 46218; 46155; 46002; 45981; 45932; 45894; 45834; 45789; 45758; 45733; 45711; 45682; 45621; 45594; 45396; 45324; 44931; 44606; 44021; 43941; 43879; 43782; 43756; 43484; 43294; 43257; 43195; 43153; 42988; 42762; 42754; 42695; 42677; 42664; 42637; 42629; 42586; 42561; 42473; 42334; 42304; 42290; 42275; 42229; 42148; 41955; 41904; 41726; 41503; 41412; 41386; 41336; 41307; 41062; 41015; 40979; 40855; 40787; 40739; 40705; 40681; 40506; 40465; 40358; 40201; 39924; 39731; 39666; 39506; 39297; 38781; 38664; 38548; 38456; 38030; 37758; 37692; 37234; 37101; 37066; 36919; 36907; 36856; 36782; 36720; 36696; 36593; 36554; 36523; 36486; 36464; 36345; 36303; 36265; 36158; 36115; 35911; 35838; 35764; 35363; 34859; 34768; 34663; 34637; 34605; 34389; 34328; 34141; 34041; 33913; 33488; 33474; 33456; 33282; 33215; 33197; 33006; 32904; 32721; 32689; 32384; 32298; 32249; 32190; 32158; 32085; 32022; 32008; 31970; 31839; 31703; 31617; 31454; 31428; 31397; 31347; 31315; 31252; 31203; 31176; 31120; 31036; 30827; 30787; 30745; 30690; 30645; 30631; 30598; 30583; 30542; 30503; 30443; 30304; 30176; 30129; 30092; 30035; 29922; 29813; 29717; 29693; 29642; 29540; 29486; 29446; 29413; 29175; 28936; 28459; 28407; 28341; 28287; 28273; 28261; 28239; 28172; 28134; 28064; 27995; 27910; 27896; 27863; 27837; 27685; 27662; 27172; 27064; 26909; 26868; 26611; 26597; 26570; 26338; 26235; 26199; 25866; 25592; 25468; 25441; 25380; 25342; 25295; 25251; 25231; 25193; 25172; 25116; 24979; 24794; 24678; 24610; 24572; 24487; 24439; 24423; 24320; 24247; 24225; 24020; 23913; 23877; 23824; 23598; 23578; 23487; 23467; 23442; 23378; 23314; 23272; 23207; 23146; 23113; 23048; 23014; 22921; 22881; 22849; 22686; 22639; 22566; 22529; 22510; 22492; 22203; 22179; 22123; 22057; 22042; 21754; 21555; 21485; 21447; 21414; 21266; 21223; 21203; 21159; 20959; 20788; 20714; 20672; 20573; 20497; 20368; 20290; 20268; 20042; 20014; 20000; 19826; 19638; 19572; 19530; 19506; 19463; 19353; 19322; 19289; 19252; 19192; 19039; 18965; 18868; 18842; 18821; 18798; 18713; 18681; 18651; 18628; 18546; 18438; 18428; 17986; 17930; 17898; 17190; 16908; 16858; 16703; 16678; 16649; 16542; 16497; 16298; 16257; 16184; 16100; 15974; 15962; 15654; 15586; 14954; 14927; 14885; 14867; 14823; 14729; 14698; 14673; 14653; 14333; 14204; 14187; 14040; 14019; 13990; 13968; 13929; 13908; 13811; 13739; 13700; 13620; 13433; 13402; 13346; 13234; 13167; 13110; 13075; 13018; 12976; 12744; 12700; 12680; 12631; 12602; 12560; 12526; 12448; 12380; 12305; 12248; 12235; 12207; 12103; 11982; 11971; 11737; 11314; 11215; 11005; 10943; 10923; 10891; 10835; 10782; 10566; 10394; 10253; 10061; 9811; 9794; 9718; 9542; 9383; 9071; 8809; 8768; 8660; 8633; 8602; 8569; 8465; 8364; 8328; 8291; 8247; 8199; 8154; 8121; 8098; 7835; 7778; 7737; 7678; 7443; 7399; 7380; 7197; 7165; 7101; 7080; 6982; 6854; 6732; 6255; 6241; 6216; 6203; 6179; 6157; 6084; 5976; 5912; 5569; 5479; 5375; 5346; 5316; 5244; 5226; 5207; 5193; 5172; 5107; 4595; 4524; 4387; 4323; 4263; 4233; 4163; 3801; 3578; 3391; 3191; 2903; 2795; 2660; 2583; 2549; 2474; 2366; 2298; 2195; 2164; 2088; 2028; 1879; 1826; 1801; 1768; 1653; 1601; 1403; 1299; 1243; 1082; 798; 729; 312

queconque:68522

quel:110940; 109380; 95173; 84428; 84003; 69494; 68023; 66669; 59959; 54988; 49235; 36821; 8727

quelconque:106510; 96649; 94708; 86305; 85801; 84479; 69913; 68056; 66921; 52782; 42840; 26954; 16253

quelconques:80157

quelles:89567; 26829

quelque:114445; 113118; 76247; 65954; 48499; 44105; 29689; 28657; 24263; 16959

quelques:109975; 104707; 99392; 91336; 77981; 76227; 67902; 56102; 54998; 32482; 29269; 18288; 7863; 2635; 668; 524

quelquesoit:68910

quels:32216

question:106428; 96687; 73477; 73416; 47420

questions:68274; 16212; 15881; 15844

qui:114439; 114403; 114173; 113304; 113180; 113086; 113056; 113018; 112919; 112781; 112242; 111770; 110758; 110381; 110357; 110104; 110047; 109897; 109747; 109039; 108876; 108866; 108854; 108611; 108094; 107740; 107193; 107130; 106435; 105864; 105763; 105405; 104812; 104629; 104592; 104528; 104202; 104164; 103945; 103501; 103257; 103214; 103115; 102992; 102965; 102940; 102839; 100739; 100527; 100329; 99404; 97491; 96502; 96466; 96434; 96376; 96248; 96216; 96192; 95824; 95045; 94856; 94764; 94153; 93947; 93931; 93612; 93465; 92632; 92330; 92139; 92075; 91870; 91690; 91501; 91365; 91232; 90872; 90694; 90649; 90293; 88973; 88830; 88625; 87889; 87842; 87505; 87467; 85577; 85376; 85131; 85082; 84928; 84893; 84856; 84836; 84658; 84615; 84605; 84589; 84500; 84438; 84420; 84391; 84297; 84013; 83995; 83966; 83872; 83535; 83408; 83344; 83277; 83100; 83041; 82686; 82593; 82562; 82544; 82515; 82352; 82307; 82132; 81588; 81291; 81243; 81033; 80979; 80901; 80895; 80878; 80841; 80833; 80698; 80639; 80279; 80225; 80170; 79860; 79783; 79389; 78288; 77404; 77306; 76308; 76255; 76115; 75887; 75316; 75008; 74721; 74594; 73575; 73256; 73148; 73068; 72955; 72654; 72223; 72188; 71810; 71458; 71068; 70538; 69556; 69245; 69114; 68777; 68418; 68408; 68313; 68252; 68186; 67619; 67318; 67212; 67195; 67026; 66345; 66115; 66095; 65263; 65205; 65080; 65061; 65033; 64933; 64859; 64851; 64831; 64652; 64550; 64523; 64351; 63908; 62180; 61548; 61119; 60421; 60411; 60365; 60346; 60321; 59743; 59423; 58813; 58234; 57954; 57497; 57236; 56919; 56909; 56803; 56259; 55873; 55737; 55026; 53813; 52760; 52462; 52368; 52166; 51778; 51504; 51141; 51091; 50960; 50784; 50241; 50160; 50125; 49962; 49760; 49458; 48910; 48869; 48600; 47731; 47397; 47348; 47336; 46061; 45641; 45631; 44741; 44284; 43949; 43900;

30743; 29173; 28231; 27993; 27835; 25378; 25191; 25127; 23561; 23111; 23061; 22637; 19461; 16098; 14202; 12421; 12263; 8766; 8119; 6214

s'ensuivrait:82939

s'envoyer:20061

s'est:83127; 52788

s'expriment:55629

s'il:113110; 95704; 91485; 77164; 67096; 50007; 48674; 10296

s'ils:62157; 878

s'immobiliser:32965

s'injecter:73072

s'occupe:97649; 68148; 50162

s'y:18304

s¡t:61213

s¿e:86681

sait:86183; 72597; 68842; 55467; 51904; 50005; 48054; 37736; 36718; 23376

salement:103232

sans:112712; 112256; 110297; 110247; 110166; 109931; 107530; 103004; 102975; 102876; 99857; 95670; 82147; 81608; 77757; 69082; 64422; 64194; 63904; 63584; 60311; 60174; 55664; 40774; 37216; 33278; 15853; 13146; 9923; 8414; 2780; 2746; 234

satisfaite:3565

satisfaites:52880; 3421

sauf:95035; 78730; 48672

saugrenues:82212

savoir:113864; 108624; 91483; 91446; 87941

scalaire:35040

science:112694

scientifique:112446; 49946

sec:3039

section:105862; 96520; 91323; 87006; 81209; 75536; 73485; 71696; 62628; 51080; 49894; 49738; 47122; 39579; 37296; 37191; 37174; 36043; 35176; 31696; 31660; 31637; 31468; 30991; 26098; 18283; 17298; 14257; 11895; 11702; 4036; 2998

sections:108817; 96820; 86973; 48068

segment:71425; 70995; 34083; 2092

segments:71121; 71058; 2069

selon:104663; 55731; 51817; 51543; 39361; 16363

semblant:26844

semble:108880; 91471; 73736

semblent:113306

semi:18460

sens:113192; 109765; 108577; 108382; 99300; 99293; 97655; 95956; 73444; 50065; 50028; 49944; 37707; 37307; 30291; 28701; 24839; 5257

sera:111027; 109929; 109393; 103725; 103589; 90510; 90170; 88252; 73639; 53039; 29969; 17035; 16485; 11345; 5259; 2502

seraient:13063

serais:47166

serait:114260; 100498; 82961; 82701; 58543; 40320; 37826; 25523; 13026; 10014; 9984; 8430; 8395

seront:99408; 50127; 33207; 430

sert:112758; 72475

servait:91874

servant:41447

servent:96592; 93614; 398

servi:83131; 52792; 48352

servir:33116

ses:114790; 105776; 103713; 103370; 103317; 103277; 96791; 95209; 90752; 87714; 85490; 75591; 65359; 60085; 59427; 57893; 56833; 16365; 808; 694

seul:111595; 90690; 80287

seul":69058

seule:114169; 69017; 68182; 67759; 57251; 46556; 25799; 18110

seulement:97776; 97559; 96852; 96777; 91256; 89185; 84139; 68171; 66268; 63836; 38676; 26449; 26064

seuls:82070

sev:39997; 39961; 39918; 39760; 32231; 32218; 31508; 21964

siglant:66213

sigles:76448

sigma:54641

signale:68991; 62657; 6867

signaler:496

signe:37928; 34623; 34617; 34570; 519

signes:55813; 55764; 2948; 2817

signifie:111502; 111457; 110037; 109224; 97612; 79785; 69124; 58771; 55386; 51375; 45744; 45619; 31157; 29461; 16540; 14384; 9516; 8600; 6939; 3278; 3246; 3157

signifient:3129; 3086

signle:2344

similaire:89460

simple:104721; 93144; 73750; 73561; 68050; 67882; 66634; 66423; 65801; 64365; 62121; 51147; 37688; 35897; 31088; 9300; 8978; 2370

simplement:67180; 65611; 51471; 17606; 4990

simplificateur:36961

simplifient:56114

simplifier:70677

simuler:96596; 95529

simulons:65970

singleton:42535; 29894; 5769

singletons:78854; 68456

singulier:87601; 60377

sinon:104505; 86479; 81565; 74587; 48828; 40295; 35884; 33033; 25013; 20699; 19524

situation:108230; 82358; 32756

situations:50351

situe:73428; 73397

situent:4030

slogan:36955

smith:91032

soient:91505; 89571; 39747; 37147; 33022; 13411

soin:42888; 41613

soit:114544; 114181; 114015; 113636; 112451; 109041; 108004; 106677; 104717; 102149; 102074; 100741; 99620; 97177; 97035; 95963; 92732; 91975; 90020; 86819; 85069; 84949; 84579; 84482; 83548; 83043; 82688; 81620; 80565; 80330; 77615; 75603; 69971; 69435; 68500; 68348; 68303; 68225; 65234; 62013; 58013; 57622; 51003; 47437; 47338; 45946; 44231; 43526; 42531; 42191; 41313; 40626; 38137; 37903; 33852; 33718; 33427; 32629; 31490; 31134; 30637; 30517; 29697; 28847; 25141; 24768; 24404; 23708; 22008; 21637; 21437; 20702; 20627; 20428; 19051; 18874; 17587; 16310; 16237; 14841; 13986; 13583; 13491; 13224; 12942; 11202; 7387; 7144; 7125; 7051; 5877; 5714; 4783; 4772; 4714; 4693; 4255; 2123; 1848; 1724; 1379

soleil:112629; 112561

solution:107187; 106173; 75425; 73939; 73925; 73726; 73625

somme:94234; 90720; 42992; 42836; 30214

sommes:107392; 89069; 89008; 54622

son:114309; 108652; 102861; 102552; 95219; 86923; 83717; 82501; 70613; 66993; 66973; 65069; 60261; 60134; 60060; 58343; 50097; 38126; 34479; 33164; 33155; 32916; 32906; 32900; 25839; 22090; 1920

sonne:32848

sont:114113; 113734; 112244; 109737; 108671; 108395; 107474; 107443; 107416; 106876; 105780; 105491; 104535; 104245; 104129; 102994; 102987; 102967; 102950; 102942; 102907; 102841; 102661; 102178; 101446; 101409; 101354; 100967; 97423; 97206; 97029; 96961; 96868; 96797; 96619; 96476; 96428; 96378; 96368; 95887; 95842; 94890; 91666; 90910; 90874; 90760; 90676; 89884; 89408; 89124; 88873; 88824; 88159; 87722; 87428; 87420; 87338; 87103; 84395; 83970; 83658; 83300; 82858; 82746; 82564; 82080; 80250; 79928; 76321; 73875; 73103; 72225; 72025; 71564; 70542; 68458; 68152; 67886; 67320; 67214; 67202; 67158; 66571; 66547; 64861; 64833; 63536; 62687; 62674; 58236; 57910; 57411; 57238; 56978; 55875; 55837; 55398; 54494; 52878; 52582; 52566; 52370; 50361; 50152; 50049; 49849; 49218; 49156; 48606; 48602; 48462; 47733; 45989; 45253; 43557; 43112; 41191; 39522; 39305; 38943; 37155; 37018; 35404; 35168; 35154; 34912; 32577; 32210; 30451; 29275; 26744; 26445; 26423; 26274; 24158; 20143; 18151; 17604; 16804; 16768; 15418; 15290; 15262; 15236; 15210; 14488; 12800; 11656; 10878; 9554; 8901; 5284; 4941; 4309; 3980; 3417; 964; 768; 377; 352

survenir:96139
survenue:50087
survient:72074
symbole:79870
symboles:55658
symbolique:112391; 29860
synonymes:440
tacite:9770; 620
tacitement:109941; 108870; 10251
tacites:109312; 9006
tant:65862; 9736
tard:15053
tartanpion:16316
tas:97436
tatonnement:97470
technique:16178
techniques:32538
tel:113476; 113124; 112831; 111974; 111970; 111859; 111336; 111266; 111142; 111129; 109127; 109090; 108735; 108712; 108255; 108139; 108104; 107922; 107880; 107695; 107594; 107306; 107210; 107145; 106735; 106667; 106015; 105958; 104897; 104822; 104470; 104383; 104301; 103473; 102305; 102062; 101696; 101195; 100452; 99940; 99721; 99677; 99507; 98129; 97318; 97243; 96024; 95990; 95608; 95595; 94953; 94201; 93573; 93403; 92832; 92724; 92455; 92278; 92000; 90893; 90593; 89550; 88775; 88734; 86821; 86775; 86694; 86674; 86655; 86517; 86437; 86258; 85901; 85647; 85111; 84809; 84627; 84542; 84358; 84329; 84249; 83933; 83904; 83822; 83701; 83067; 82913; 82037; 81647; 81552; 80770; 80725; 80666; 80342; 79966; 79614; 79518; 79291; 79269; 79196; 79091; 78276; 77818; 77601; 77578; 77500; 76851; 76784; 76716; 76602; 76145; 75850; 75731; 75688; 75084; 74219; 74014; 72625; 71941; 71609; 71410; 71382; 71216; 70807; 70708; 70239; 70132; 69849; 69812; 69757; 69655; 69621; 69599; 69356; 69204; 67710; 66452; 63970; 63678; 63438; 63297; 62962; 62431; 62229; 62031; 61993; 61713; 61198; 61064; 61019; 60864; 60767; 60207; 60079; 59816; 59778; 59655; 59573; 59472; 59129; 59095; 58948; 58891; 58625; 58467; 58209; 58146; 58064; 56617; 56323; 54907; 54289; 54146; 53842; 53564; 49648; 49479; 49398; 49341; 49017; 48725; 48426; 48190; 48155; 47976; 47954; 47831; 47794; 47576; 46923; 46742; 46618; 46584; 46477; 46153; 45930; 45892; 45787; 45756; 45680; 45592; 44929; 44019; 43939; 43754; 43193; 42584; 42471; 42273; 42146; 41953; 41902; 41410; 41334; 41060; 40977; 40679; 40265; 40199; 40031; 37911; 37836; 37240; 37236; 36484; 36343; 36301; 35836; 34857; 34766; 34661; 34039; 32719; 32296; 32156; 31174; 30688; 30643; 30581; 29538; 29484; 29411; 28457; 28405; 28339; 28170; 27908; 27894; 27861; 27683; 26299; 26197; 25864; 25590; 25439; 25293; 25229; 25170; 24792; 24676; 24608; 24570; 24437; 23911; 23875; 23781; 23465; 23440; 23270; 23205; 23144; 23046; 22919; 22879; 22847; 22564; 22508; 22490; 22040; 21752; 21445; 21221; 20957; 20712; 20266; 20012; 19287; 19250; 19037; 18963; 18866; 18840; 18819; 18711; 18679; 18649; 18626; 18567; 18436; 18426; 17984; 17928; 17896; 16701; 16676; 16495; 14952; 14185; 14038; 14017; 13988; 13927; 13906; 13758; 13737; 13618; 13400; 13232; 13165; 13016; 12742; 12600; 12378; 11969; 11312; 11003; 10921; 10833; 10392; 8658; 8631; 8463; 8362; 8197; 8152; 7397; 7195; 7099; 7078; 6730; 6177; 6155; 6082; 5567; 5477; 4321; 4231; 4161; 3799; 1799
telle:99788; 94754; 89340; 86031; 77923; 77771; 77476; 76648; 76555; 76020; 75200; 67527; 67131; 63773; 63369; 63104; 62898; 62836; 62759; 61878; 61837; 61361; 59859; 59679; 58835; 54456; 54257; 53129; 53026; 52992; 49268; 49036; 48240; 46325; 43482; 43151; 42986; 42832; 41501; 39662; 37250; 37246; 36591; 32687; 31452; 25114; 24318; 23312; 21606; 19824; 19636; 18796; 15652; 14865; 14821; 13698; 13073; 12698; 12446; 12303; 12233; 9792; 8567; 7163; 5910; 5373; 4261; 2472; 2296; 2162; 1824; 1718; 1651; 1241; 1080
tellement:2874
telles:93263; 91011; 89028; 75022; 53092; 52084; 51535; 45709; 43780; 35261; 30302; 28934; 27062; 26568; 24977; 14925; 14727; 14331; 12205; 9381; 8245; 7441; 6980; 5344; 4522; 1599; 1401
tels:114560; 114000; 113967; 113806; 113621; 113588; 112465; 112377; 107839; 107067; 106993; 106791; 106088; 105598; 105336; 105035; 102442; 100856; 98031; 96163; 94310; 88926; 88398; 88331; 88118; 86801; 86323; 86195; 85394; 85302; 84774; 83572; 83436; 82809; 81837; 81795; 81523; 80577; 78319; 77345; 76997; 76926; 75651; 75129; 74506; 74435; 73655; 73319; 73105; 72231; 71261; 70156; 70083; 66057; 65997; 65277; 64133; 61627; 60593; 59005; 55705; 53419; 53377; 47606; 45112; 42760; 42752; 42693; 42635; 42627; 42559; 42302; 42227; 41013; 40703; 38546; 37756; 36156; 34603; 34387; 31837; 30127; 30090; 29198; 29117; 28285; 27723; 27170; 23485; 21553; 21483; 21264; 20786; 20670; 20040; 19351; 19190; 17188; 16296; 14696; 13431; 13344; 12678; 12524; 10941; 10564; 9069; 5974; 5314
temps:87301; 32926; 32519; 847; 264
tend:28781; 28767; 23421; 23407; 23391; 22712; 22694; 21426
tendance:55565
tensoriel:92094; 90521; 90178; 89939
tenter:595
terme:41541; 10876
termes:112731; 101792; 98183; 98050; 73545; 58827; 52031; 49835; 42400; 38001; 35526
terminaison:114349
terminologie:47262
test:103971; 103089; 102922; 97405; 96900; 96846; 96705; 95936; 95804; 95522; 95462; 95454; 95415; 95338; 95320; 95274; 95246; 95201; 95146; 87937; 68297
tests:103290; 103031; 102948; 102836; 96590; 96364; 95533; 95116
tex:114805
texte:114755; 114735; 113916
them:109002; 108906; 107723; 107561; 106938; 106919; 105908; 105873; 105833; 105794; 105541; 105502; 104251; 104234; 103330; 103239; 97587; 97523; 97409; 97372; 96880; 96827; 96803; 96762; 96392; 96352; 95942; 95868; 91736; 91715; 91313; 91298; 91270; 91241; 89113; 89088; 88810; 88691; 88532; 88281; 87982; 87962; 87919; 87882; 86092; 85967; 85843; 85755; 85606; 85525; 85496; 85439; 85331; 85212; 85175; 85150; 84936; 84911; 84556; 84474; 83627; 83495; 83490; 83387; 83324; 83229; 82345; 82321; 81404; 81371; 80424; 80399; 79024; 79001; 77244; 77215; 77208; 77145; 77139; 77083; 77077; 77036; 77029; 76960; 76954; 76898; 76892; 76831; 76825; 76764; 76757; 76696; 76690; 76631; 76625; 76582; 76576; 76538; 76532; 76487; 76157; 76104; 75823; 75808; 75442; 75400; 74660; 74628; 73946; 73855; 53707; 53670; 53662; 53637; 53605; 53588; 53057; 53007; 50895; 50812; 50807; 50711; 50609; 50544; 50539; 50508; 50503; 50441; 48684; 48648; 46961; 46902; 46514; 46454; 45559; 45468; 43578; 43433; 43274; 43129; 43017; 42922; 40598; 40544; 39532; 39425; 39418; 39253; 39248; 39173; 39168; 39119; 39114; 39066; 38255; 38097; 37667; 37547; 37413; 37319; 36218; 36192; 35755; 35702; 35431; 35414; 33701; 33608; 33533; 33411; 33366; 33318; 32735; 32615; 30960; 30902; 28999; 28949; 25740; 25711; 25660; 25625; 24855; 24730; 24389; 24307; 23736; 23624; 22807; 22772; 21932; 21861; 21099; 21059; 20895; 20870; 20560; 20543; 20114; 20095; 19706; 19669; 19117; 19097; 18920; 18773; 18529; 18496; 18236; 18167; 18162; 18126; 18121; 18089; 18084; 18025; 18020; 17948; 17943; 17844; 17839; 17641; 17266; 17229; 16612; 16593; 15712; 15440; 15435; 15398; 15393; 15345; 15340; 15302; 15297; 15275; 15270; 15251; 15246; 15225; 15220; 15201; 15196; 15170; 15165; 15092; 14474; 14448; 11840; 11716; 11711; 11639; 11634; 11564; 11559; 11513; 11508; 11462; 11457; 11413; 8048; 8011; 7028; 7006; 5009; 4896; 4647; 4487; 4344; 4252; 4246; 4181; 4176; 4120; 4115; 4056; 3860; 3825; 1271; 1221; 123
then:104100; 104036; 103142; 103102; 95569
tire:51177
titre:1766
tocdepth:86
tomber:51393
toologie:9701
toologiques:9695
topologie:85587; 74811; 66944; 52986; 47391; 45525; 45233; 42124; 42088; 41142; 40888; 39136; 39072; 38900; 33596; 33571; 32526; 32434; 28627; 27214; 27113; 27098;

une:114619; 114345; 114301; 114250; 113886; 113445; 113254; 113114; 112933; 112682; 112653; 112122; 112089; 111958; 111924; 111619; 111518; 109723; 108949; 108571; 108374; 108278; 108018; 107552; 107510; 107185; 107046; 106572; 106548; 106227; 106171; 106054; 105852; 105765; 105427; 105261; 104719; 104596; 103701; 103571; 103493; 103411; 103378; 103200; 102868; 101088; 100124; 99757; 99577; 99316; 97487; 96816; 96659; 96639; 96531; 96492; 94760; 94715; 94232; 93995; 93182; 93138; 92940; 92916; 92785; 92552; 92378; 92037; 92006; 91762; 91755; 91652; 91627; 91415; 91396; 91361; 90629; 90317; 90215; 89949; 89316; 88957; 88886; 87364; 87004; 86910; 86857; 86025; 85939; 85920; 85880; 85781; 85692; 85667; 85567; 85245; 84860; 83790; 83248; 82965; 81440; 80969; 80819; 80702; 80643; 79678; 79633; 79579; 79473; 79301; 79119; 78908; 78890; 78453; 78423; 78391; 78366; 78329; 78034; 77907; 77763; 77709; 77516; 77456; 77355; 77192; 77170; 77103; 77055; 77007; 76936; 76874; 76807; 76739; 76667; 76514; 76342; 76304; 76096; 76018; 75955; 75470; 75423; 75304; 75218; 75192; 74872; 74771; 74617; 74380; 74298; 74262; 73937; 73923; 73758; 73724; 73618; 73583; 73570; 73024; 72851; 72669; 72507; 71865; 71844; 71806; 71103; 70384; 69277; 69154; 69132; 68903; 68400; 68309; 67850; 67583; 67487; 67228; 67129; 67107; 66372; 65983; 65897; 65593; 65076; 64921; 64914; 64735; 64544; 64445; 64359; 64337; 64290; 64190; 64016; 63931; 63894; 63757; 63713; 63420; 63343; 63196; 63164; 63088; 62882; 62814; 62743; 62551; 62313; 61664; 61582; 61512; 61459; 61436; 61391; 61350; 61291; 61257; 61224; 61111; 60969; 60317; 59941; 59901; 59735; 59598; 59407; 59300; 59255; 58817; 58718; 58695; 58396; 58365; 58115; 57958; 57638; 57592; 57571; 57098; 56795; 55743; 55723; 55471; 55457; 55431; 55414; 54681; 54600; 54576; 54437; 54408; 54241; 53971; 53937; 53848; 53809; 53747; 53599; 53320; 53119; 53014; 52980; 52864; 51794; 51291; 51183; 51038; 50926; 50887; 50593; 50216; 49744; 49245; 49172; 48356; 48286; 48232; 48064; 47661; 47174; 47086; 46880; 46862; 46264; 45817; 45408; 45373; 45284; 44996; 44567; 44036; 44005; 43814; 43679; 43528; 43460; 43361; 43069; 42970; 42932; 42820; 42490; 41873; 41815; 41701; 41489; 41272; 41128; 40876; 40801; 40669; 40582; 40482; 40390; 40146; 40039; 39690; 39637; 39471; 39452; 39177; 39009; 38818; 38163; 38064; 37850; 36436; 36241; 36041; 35992; 35721; 35601; 35338; 35108; 34671; 34583; 34403; 33947; 33757; 33557; 33521; 33433; 33298; 32772; 32665; 32348; 32062; 31715; 31444; 31407; 31080; 30730; 30606; 30552; 30475; 30147; 29944; 29713; 29057; 29027; 29016; 28854; 28591; 27794; 27776; 27717; 27592; 27563; 27392; 27180; 27021; 26985; 26625; 26396; 26239; 25317; 25143; 25092; 24739; 24501; 24464; 23998; 23728; 23517; 23357; 23294; 22613; 22543; 22436; 22137; 21997; 21703; 21651; 21512; 21471; 21292; 21250; 21173; 21128; 21086; 20747; 20489; 20438; 20376; 20309; 20162; 20135; 20028; 19988; 19910; 19816; 19622; 19412; 19378; 18458; 18378; 16854; 16606; 16397; 16174; 15514; 15368; 15329; 15173; 15118; 14900; 14847; 14661; 14618; 14603; 14263; 14133; 14111; 13679; 13644; 13589; 13503; 13251; 13213; 13184; 13128; 13047; 12993; 12614; 12427; 12219; 11899; 11860; 11754; 11690; 11679; 11550; 11499; 11446; 11368; 11223; 11041; 10959; 10868; 10169; 9892; 9874; 9532; 9470; 9411; 9265; 8861; 8553; 8512; 8432; 7988; 7376; 7362; 7316; 7131; 7015; 6819; 6573; 6518; 6399; 6272; 6027; 6004; 5902; 5883; 5720; 5639; 5361; 4699; 4550; 4395; 4370; 3730; 3488; 3376; 3199; 2528; 2466; 2426; 2283; 2131; 2052; 1758; 1631; 1346; 1340; 1311; 1306; 1229; 1191; 1035; 945; 915; 853; 587; 320; 271

unes:56104

unification:107554

uniforme:107518; 103963; 23681; 15506; 14377; 9455

uniformes:103023

union:44998; 5924

unions:4472

unique:112356; 111305; 87187; 69156; 60124; 58720; 39818; 35726; 27565; 26764; 22092; 11448

uniquement:39367

unitaire:95193

univers:76109; 75848; 75617; 73050; 71101; 70602; 70562; 70509; 67294; 67047; 65870

universel":26927

universelle:73768; 2848

uof:51465; 21772; 21319

uplet:111950; 111920; 87081; 64620; 64173; 64026

uplets:56204

usage:240

usuelle:66952; 17254; 13296; 9101; 9031

usuelles:8992; 6351

usuels:18480

utile:91526; 49872

utiles:99410

utilisant:20613; 291

utilisations:80312

utilise:88206; 67861; 46212; 33563

utilisent:112228; 109426; 88855; 10212; 7688

utiliser:113388; 94570; 43373

vais:89980; 80380; 69102; 65726; 35355; 31062

valable:66113; 49508; 40764; 38019; 36016; 23568

valables:55877

valant:110934; 69488; 37529; 20996; 7249; 4812; 4745

valeur:89575; 72799; 67720; 66724; 23359; 10961; 10629; 2530

valeurs:65625; 59511; 59429; 43172

valide:114183; 65782; 64548; 28734

vaste:678

vaut:108662; 108644; 96194; 48138

vect:17399

vecteur:86303; 86256; 86203; 40173; 35795; 35781; 22469

vectoriel:108918; 86152; 85980; 40772; 40311; 39631; 38889; 35028; 31651; 31415; 30024; 22960; 22779; 22419; 21904

vectorielle:22461; 22396

vectoriels:89697; 89471; 37107; 18137; 17276

verbatim:43417; 43388; 41665; 41640; 41240; 41215; 38298; 38263; 29774; 29743

verra:5101

vers:96568; 91581; 41400; 37311; 35745; 35605; 35488; 28783; 28769; 24255; 23423; 23409; 23393; 22714; 22696; 22518; 21783; 21428; 21324; 10899; 2484

version:66642; 14269; 11692; 11681; 2888

versions:14494

vert:381

veulent:112027; 60348

veut:113357; 112812; 112610; 109749; 97046; 92889; 89746; 82482; 68901; 55682; 24223; 24177; 9714; 1078

veut":32958; 31351

veux:107139

via:89822; 62311

vide:113496; 107604; 101123; 101105; 101015; 100712; 99583; 99455; 76844; 76777; 76709; 76595; 71830; 63432; 62868; 61825; 58402; 58371; 58333; 58182; 58121; 57598; 57577; 57104; 57050; 56964; 56885; 56590; 50636; 42318; 42195; 21583; 20724; 20654; 20639; 19035; 15598; 14975; 14781; 11144

vides:75599; 73317; 71712; 70546; 63081; 62807; 62736; 59321; 10314

vie:112700; 49914; 894

viens:90828

vient:112534; 52762; 48276; 48108; 42658; 2985

vigueur:80014

violemment:73185; 63238

violet:109014; 108304; 107809; 106950; 106639; 105919; 105738; 105551; 104700; 103337; 97632; 96887; 93965; 93226; 91910; 86624; 86103; 85855; 85616; 85343; 84946; 84576; 84089; 83688; 82464; 81495; 80431; 79031; 75837; 75557; 75461; 74749; 71747; 71350; 71150; 70672; 60835; 59729; 59361; 58872; 57021; 53728; 48948; 47222; 47015; 46526; 46098; 45573; 45207; 44147; 43610; 42449; 42162; 41679; 41300; 40615; 39622; 38317; 37423; 35876; 34367; 33710; 31747; 31115; 29787; 29024; 28080; 27657; 26115; 25752; 24913; 24401; 23744; 22815; 21941; 21146; 20904; 20696; 20122; 19714; 19129; 18541; 18335; 16624; 14528; 12931; 11930; 8060; 7040; 5165; 4667; 1778; 1376; 356; 343; 23

virgule:322

virtuel:35797; 35650; 16574; 16550; 15811; 11351; 11271; 3899; 3875; 3614

virtuels:26740