

Los Números Naturales (tipos de números)

Por: José Acevedo J.

Existe una clase de números con los que estamos muy familiarizados, estos son los bien llamados números naturales, diariamente hacemos usos de tales numerales, ya que son los que utilizamos para contar (números cardinales), es decir: 1, 2, 3, 4, 5...y así seguimos, sumando 1 al anterior para obtener el siguiente, este proceso se repite hasta el infinito, es decir que no existe un último número natural. Es preciso señalar que no todos los matemáticos reconocen al número cero como un natural, sin embargo, dependiendo de la situación, hay veces que es mejor reconocerlo como tal.

Nota:

Los números naturales pertenecen a un conjunto mayor de números, los números enteros, estos últimos abarcan al cero y a los números negativos. Como en este escrito no haremos uso alguno de los numerales negativos ni tampoco del mencionado cero (aunque ya se dijo que en ocasiones es preferible considerarle un natural), hemos preferido usar el conjunto de los números naturales en vez del conjunto de los enteros.

Al efectuar las operaciones de adición y multiplicación con números naturales, se obtiene un resultado que también es un número natural, razón por la cual decimos que dichas operaciones son internas al conjunto de los números naturales.

La adición en el conjunto de los números naturales

En el conjunto de los números naturales la adición cumple las propiedades: conmutativa, asociativa y elemento neutro.

Conmutativa: el orden de los sumandos no altera la suma.

Sean a y b elementos del conjunto de los números naturales, entonces se cumple que:

$$a + b = b + a$$

Asociativa:

Sean a , b y c elementos del conjunto de los números naturales, entonces se cumple que:

$$(a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

Elemento neutro de los naturales en la suma:

Sea b un elemento perteneciente al conjunto de los naturales, si le sumamos 0 a b el resultado será igual a b , por lo que decimos que el 0 es el elemento neutro de la adición en el conjunto de los naturales.

$$b + 0 = b$$

La multiplicación en el conjunto de los números naturales

En el conjunto de los números naturales la multiplicación cumple las propiedades: conmutativa, asociativa, elemento neutro y distributiva del producto respecto de la suma.

Conmutativa: el orden de los factores no altera el producto.

Sean a y b elementos del conjunto de los números naturales, entonces se cumple que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Asociativa:

Sean a , b y c elementos del conjunto de los números naturales, entonces se cumple que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot c) \cdot b$$

Elemento neutro de los naturales en la multiplicación:

Sea b un elemento perteneciente al conjunto de los naturales, si multiplicamos a por 1 el resultado será igual a b , por lo que decimos que el 1 es el elemento neutro de la multiplicación en el conjunto de los naturales.

$$b \cdot 1 = b$$

Distributiva del producto respecto de la suma en el conjunto de los naturales:

Sean a , b y c elementos del conjunto de los números naturales, entonces se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Tipos de Números

En el conjunto de los naturales existe una amplia variedad de números cuyas características particulares los distinguen de otros números dentro de dicho conjunto. Tales Características nos permiten dividirlos en subconjuntos cuyas denominaciones varían según las propiedades o características que posea cada subconjunto. De acuerdo a lo dicho, en el conjunto de los números naturales podemos encontrar los siguientes tipos de números:

Números Primos: son aquellos números cuyo único divisor propio es el 1, en otras palabras son aquellos números que sólo pueden ser divididos por sí mismos y por el 1. El numeral 2 es el único primo par que existe.

Ejemplo:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

El matemático griego Euclides, demostró que existen infinitos números primos.

Por miles de años los números primos han cautivado a matemáticos y profanos, quienes se han dejado seducir por las intrínsecas características que poseen los siempre enigmáticos primos.

Números Perfectos: En matemáticas se le llama número perfecto a aquel natural que es igual a la suma de sus divisores propios, es decir todos los números naturales que lo dividen diferentes del número dado, si tomamos el 28 y buscamos sus divisores propios, sin incluir el 28, tenemos:

1, 2, 4, 7, 14

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Por lo tanto, siguiendo la definición de número perfecto, podemos afirmar que el 28 es uno de ellos.

Los primeros cuatro números perfectos son:

$$6 = 2^1 \cdot (2^2 - 1)$$

$$28 = 2^2 \cdot (2^3 - 1)$$

$$496 = 2^4 \cdot (2^5 - 1)$$

$$8128 = 2^8 \cdot (2^7 - 1)$$

Incluso existe una fórmula que nos genera números perfectos pares:

$$Np = 2^{n-1} (2^n - 1)$$

Siempre que $(2^n - 1)$ sea un número primo la fórmula nos generará un número perfecto, a tales números primos se le conoce con el nombre de primos de Mersenne, en honor al monje del siglo XVII que estudió las propiedades de dichos números, Marin Mersenne. Los números perfectos pares tienen muchas propiedades interesantes entre ellas podemos citar:

- a) Son números triangulares.
- b) Son números Hexagonales.
- c) Son números combinatorios.
- d) El dígito correspondiente a las unidades siempre es 6 ó 8.

Hasta la fecha, julio del 2011, se desconoce si existen números perfectos impares, de existir tales números deben ser muy grandes, otra cuestión que permanece abierta (no se ha podido demostrar) es la existencia de infinitos números perfectos. Quién sabe, quizás tú amigo lector sea quien dé respuesta a tales interrogantes.

Números Abundantes: son aquellos naturales para los que se cumple que la suma de sus divisores propios es mayor que el número dado.

Ejemplo:

Los divisores propios de 20 son: 10, 5, 4, 2, 1.

$10 + 5 + 4 + 2 + 1 = 22$; $20 < 22$, entonces el 20 es un número abundante.

Número Deficientes: son aquellos naturales para los que se cumple que la suma de sus divisores propios es menor que el número dado.

Ejemplo:

Los divisores propios de 16 son: 8, 4, 2, 1.

$8 + 4 + 2 + 1 = 15$; $16 > 15$, entonces el 16 es un número deficiente.

Todos los números que son potencia de 2, es decir los números que pueden ser representados como: 2^n , son números deficientes. Si observamos el ejemplo, notaremos que la suma de los divisores propios de 16 es igual a 15, es decir que sólo le faltó una unidad para que el resultado fuera un número perfecto, todas las potencias de dos cumplen con esta última propiedad.

Números amigos: Si tenemos una pareja de números naturales y se cumple que la suma de los divisores propios de cada uno de ellos da como resultado el otro número, entonces tenemos una pareja de números amigos.

Ejemplo:

Los divisores propios de 220 son: 110, 55, 44, 22, 20, 11, 10, 5, 4, 2, 1.

$1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

Los divisores propios de 284 son: 142, 71, 4, 2, 1.

$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$.

Por lo que decimos que: 220 y 284 son números amigos.

Números sociables: tienen la misma propiedad que los números amigos, pero a diferencia de estos últimos los números sociables forman grupos más grandes, es decir: la suma de los divisores del primer número da el segundo, la suma de los del segundo da el tercero, y así repetidamente.

Ejemplo:

12496, 14288, 15472, 14536, 14264.

Números Semiperfectos: todo número natural que es igual a la suma de algunos de sus divisores propios recibe el nombre de número semiperfecto.

Ejemplos:

Los divisores propios del 30 son: 15, 10, 6, 5, 3, 2, 1.

$15 + 10 + 5 = 30$; por lo que concluimos que 30 es un número semiperfecto.

Los divisores propios de 18 son: 1, 2, 3, 6, 9.

Para este se cumple que $9 + 6 + 3 = 18$; por lo que 18 es un número semiperfecto.

De este conjunto en particular, nos dedicaremos a estudiar los números semiperfectos (N_s) que son múltiplos de un algún número perfecto (N_p). Es decir los números semiperfectos para los que se cumple la siguiente relación:

$N_s = a * N_p$, tal que a es un número natural mayor que 1.

A este subconjunto de números pertenecen: 12, 18, 24, 30, 56, 84, 112... $a * N_p$.

Conjetura de los números semiperfectos (conjetura de Santo Domingo)

Dado un número semiperfecto que a la vez es múltiplo de un número perfecto, esto es:

$$N_s = a * N_p$$

Podemos decir que:

Si $(a * N_p)/2$ es par, existen por lo menos a maneras diferentes de representar el producto $(a * N_p)$ con los divisores propios de este producto.

Ejemplo:

$$48 = 8 * 6$$

Los divisores propios de 48 son: 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.

Combinando sus divisores propios para que nos den el número dado, tenemos:

- 1) $24 + 16 + 8 = 48$
- 2) $24 + 16 + 6 + 2 = 48$
- 3) $24 + 16 + 4 + 3 + 1 = 48$
- 4) $24 + 12 + 4 + 8 = 48$
- 5) $24 + 12 + 4 + 6 + 2 = 48$
- 6) $24 + 8 + 6 + 2 + 4 + 3 + 1 = 48$

$$7) 16 + 8 + 12 + 4 + 6 + 2 = 48$$

$$8) 16 + 8 + 12 + 3 + 1 + 6 + 2 = 48$$

$$4 * 28 = 112$$

112 se puede expresar como:

$$1) 56 + 28 + 16 + 8 + 4$$

$$2) 56 + 28 + 16 + 7 + 1 + 4$$

$$3) 56 + 28 + 14 + 2 + 8 + 4$$

$$4) 56 + 28 + 14 + 2 + 7 + 1 + 4$$

Si $(a * N_p)/2$ es impar, el número de combinaciones que se pueden obtener con los divisores propios del número dado, que sumados den dicho número, es siempre menor o igual al coeficiente **a**.

Ejemplo:

$$3 * 6 = 18$$

Los divisores propios de 18 son: 9, 6, 3, 2, 1

$$1) 9 + 6 + 3 = 18$$

$$2) 9 + 6 + 2 + 1 = 18$$

Como se puede notar el número de combinaciones posible es menor el coeficiente impar 3.

Números Dúos Perfectos:

Dentro de los números abundantes y más específicamente dentro del conjunto de los números semiperfectos, existe todo un conjunto de números con propiedades singulares, a estos números el autor los ha denominado como **números dúos perfectos**.

Si N_p es un número perfecto, entonces $2N_p$ es un número dúo perfecto.

Para denominar un número dúo perfecto usaremos la notación N_q , por lo que:

$$N_q = 2N_p$$

Ejemplos:

$$N_p = 6, \text{ entonces } N_q = 2(6) = 12$$

Los divisores propios de 12, son:

$$6, 4, 3, 2, 1$$

Si sumamos tales números obtenemos:

$6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$, entonces $16 > 12$, por lo que el 12 es un número abundante.

Es aquí donde nos preguntamos, ¿Qué hace que un número sea dúo perfecto si la suma de sus divisores propios es siempre mayor que dicho número?

Si observamos los divisores propios de 12, notaremos que hay tres números pares y sólo dos impares, esta cantidad es constante para los impares que siempre serán un primo de Mersenne y el uno; si tomamos sólo los divisores pares de 12 y lo sumamos, entonces la suma de todos ellos será igual a 12.

$$6 + 4 + 2 = 12$$

Otra característica distintiva de los números dúo perfectos es que sólo uno de sus divisores propios lo convierte en números abundantes, es decir que existen sólo dos posibles maneras de expresar el números dúo perfecto mediante la suma de sus divisores propios, de aquí el nombre de dúo perfecto. Al divisor que convierte el número dúo perfecto en abundante lo denominaremos sobrante (D_s), para encontrar el número sobrante dentro de los divisores propios de un número N_q , usaremos la siguiente fórmula:

$$D_s = P_m + 1$$

Donde:

D_s = divisor sobrante y P_m = primo de Mersenne.

El divisor sobrante de 12 es 4.

$$P_m = 3$$

$$D_s = P_m + 1$$

Si apartamos este número de los divisores propios de 12, la suma de los restantes será igual a 12, es decir que existen dos maneras diferentes de expresar los números N_q por medio de la suma de sus divisores propios, de aquí su otro nombre, dúos perfectos.

$$12 = 6 + 3 + 2 + 1$$

$$N_p = 28, \text{ entonces } N_q = 2(28) = 56$$

Los divisores propios de 56 son:

28 14 8 7 4 2 1, entonces $28 + 14 + 8 + 7 + 4 + 2 + 1 = 64$ (56 es un número abundante).

Sumando sólo los divisores propios pares de 56.

$28 + 14 + 8 + 4 + 2 = 56$, entonces 56 es un número dúo perfecto.

$$P_m = 7$$

$$D_s = P_m + 1, \text{ entonces } D_s = 7 + 1 = 8$$

$$28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 56$$

$$N_q = 992$$

$$992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$$

$$992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 31 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$$

En resumen podemos decir que un número natural es dúo perfecto si la suma de todos sus divisores propios pares es igual al número dado y al mismo tiempo posee un único divisor sobrante D_s .

Como podemos observar los números primos de Mersenne están estrechamente ligados con los números dúos perfectos por lo que podemos relacionarlos mediante la siguiente fórmula:

$$N_q = P_m (P_m + 1)$$

Como:

$$P_m = 2^x - 1, \text{ tal que } x \text{ es un número primo.}$$

Podemos decir que:

$$N_q = 2^x (2^x - 1)$$

Otra propiedad de los números dúos perfectos la podemos encontrar en la suma de números pares consecutivos.

Supongamos que se nos pide encontrar la suma de los primeros 5 pares consecutivos, la respuesta no se hace esperar y procedemos a sumar los 5 primeros pares, es decir:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$$

Ahora imaginemos que se nos pide sumar todos los pares del 2 hasta el 100, esta vez dar la respuesta nos tomaría mucho más tiempo si seguimos el procedimiento anteriormente mostrado, razón por la cual debemos buscar una manera más eficiente de efectuar los cálculos.

Sea m el último de los términos pares y $m/2$ igual al número de términos, se cumple entonces que:

$$K = m * (m/2 + 1)/2$$

$$K = (m + 2) * m/4 = (m + 2)/2 * m/2$$

Donde:

m = último término de la serie.

k = suma de todos los términos pares (iniciando desde el 2).

Como m es un número par, la fórmula se reduce a:

$$K = (z + 1) * z$$

Esta última fórmula coincide con la dada para obtener números dúbos perfectos, cuya relación es:

$N_q = P_m (P_m + 1)$, por lo que podemos decir que los números dúbos perfectos pueden ser expresados como sumas de números pares consecutivos, cuyo primer término es el 2. Dicho en otras palabras, siempre que la cantidad de términos sea un número primo de Mersenne, la suma, partiendo desde el 2, será un número dúb perfecto.

Ejemplos:

$2 + 4 + 6 = 12$; suma de 3 términos pares consecutivos.

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 56$; suma de 7 términos pares consecutivos.

Para obtener el número 992, se necesita la suma de 31 términos pares consecutivos, partiendo desde el 2.

Otra propiedad que poseen los números dúbos perfectos es que la suma de todos sus divisores propios siempre nos da una potencia de 2.

Ejemplos:

$N_q = 12$, entonces $6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$

$N_q = 56$, entonces $28 + 14 + 7 + 8 + 4 + 2 + 1 = 64$

Es decir que:

$$N_q + D_s = 2^y$$

Nota:

En otros escritos el autor ha llamado a los números dúbos perfectos como números cuasi perfectos, este último nombre no resulta ser el más apropiado ya que puede causar confusión con otro conjunto de números cuyas propiedades son muy diferentes de los que aquí se han mostrado.

Como hemos podido notar, los números naturales están rodeados de propiedades sumamente interesantes, la rama de las matemáticas que estudia dichas propiedades se conoce como **Teoría de Números**, muchos pueden caer en el error de pensar que dicha rama es infructífera, sumamente abstracta y vaga, pues aquellos que lo piensan están equivocados, los números son la base de las matemáticas, por lo tanto el estudio de sus propiedades nos ayuda a tener una mejor idea de lo que es

la matemática, que como ciencia nunca dejará de evolucionar de otra forma no sería ciencia. Decir que la teoría de números es una rama estéril, es como afirmar que el átomo y demás partículas subatómicas no deben ser estudiados, pues así como estas son partes esenciales de la materia, así mismo lo son los números para las matemáticas.

Nunca podré entender cómo es que tantas personas se cuestionan sobre si son útiles o no ciertas ramas de las matemáticas, pero las mismas no se cuestionan si las sinfonías de Beethoven o las obras de Miguel Ángel o de cualquier otro artista son útiles, por sobre todo las matemáticas son un arte y un matemático es un artista que desecha las partes sobrantes para revelar la verdadera cara de su gran obra que en algunos caso puede ser tan deliciosa para los sentidos como la propia Monalisa.