Profesor: Guillermo Corbacho
gcorbach@uc.cl

Estadística

Datos no Agrupados

El presente trabajo es una recopilación, en su muy amplia mayoría, de ejercicios PSU propuestos –de los cuáles muchas veces el alumno se desazona ante el hecho de no saber resolverlos-. Es por ello que he preferido no solo resolverlos a modo de chequeo visual, sino que también por escrito, así como de explicarlos. De este modo, este material pretende ayudar -a modo de consulta- a internalizar los contenidos que van participando en cada solución. Aunque está ideado también para ser consultado por profesores, dado que, según mi experiencia personal, la preparación en la universidad ha sido más orientada a las matemáticas superiores en lugar de las necesidades prácticas de la educación media. Como sería trabajar directamente dichos contenidos y elaborar y planificar instrumentos de evaluación, así como de guías, no solo por un período de uno, dos, o a lo más tres semestres, dado que tales períodos son insuficientes.

Para su presentación, he subdividido los ejercicios en los siguientes temas, por orden de complejidad.

Temas:

Parinacota, Quilicura 2009

1. Medidas de Tendencia Central

1.1. Ejercicios de Promedio o Media Aritmética

1. Un cazador sale durante cinco noches a los faldeos de un cerro y diariamente trae, el siguiente número de conejos: 15, 17, 13, 18, 17. Luego, la media aritmética del número de conejos cazados diariamente es:
   A) 15.
   B) 15,5
   C) 16
   D) 16,5
   E) 17

   Solución:
   La media aritmética o promedio es $\bar{x} = \frac{15+17+13+18+17}{5} = \frac{80}{5} = 16$.
   Alternativa C).

2. La media aritmética del siguiente grupo de datos 7, 20, 13, 14, 6, 9, 1 es:

   A) 70
   B) 20
   C) 14
   D) 10
   E) 9

   Solución:
   $\bar{x} = \frac{7+20+13+14+6+9+1}{7} = \frac{70}{7} = 10$ Alternativa D)

3. La media aritmética entre los datos: 10 - 15 - 12 - 8 - 4, es:

   A) 7 C) 9 E) 8,9
   B) 8,5 D) 9,8

   Solución:
   $\bar{x} = \frac{10+15+12+8+4}{5} = \frac{49}{5} = 9,8$ Alternativa D).

4. El promedio aritmético de los siguientes puntajes: 12, 15, 23, 18, 32, 48, 9 es:
   A) 61
   B) 20,5
   C) 22,4
   D) 21,4
   E) 25

   Solución:
   $\bar{x} = \frac{12+15+23+18+32+48+9}{7} = \frac{157}{7} \approx 22,4$ Alternativa C).

5. Se sabe que el promedio del siguiente grupo de datos 2, 4, 6, 8, x es 10.
   ¿Cuál de los siguientes valores puede tomar x?
   A) 10
   B) 20
   C) 30
   D) 40
   E) 50

   Solución:
   Siendo 10 un promedio de 5 datos, podemos expresarlo como:
   $$10 = \frac{2+4+6+8+x}{5} \qquad / \bullet 5$$
   $$50 = 20 + x$$
   $$50 - 20 = x$$
   $$30 = x$$
   La alternativa correcta es C).

6. La media entre cinco datos es 5 y se sabe que los cuatro primeros son: 4, 3, 9 y 7, entonces, el dato que falta es:
   A) 2 C) 8 E) 0
   B) 18 D) 7

   Solución:
   La suma de todos los datos debe ser igual al producto de la media con la cantidad total de datos, esto es, si llamamos S a su suma, tendremos:
   $$\begin{aligned} S &= \text{media} \bullet \text{cantidad total de datos} \\ &= 5 \bullet 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$
   Como la suma de los cuatro datos que se tiene resulta ser igual a 4 + 3 + 9 + 7 = 23
   El valor faltante es 2.
   Alternativa A).

7. Un alumno tiene dos notas en matemáticas (con escala de 1 a 7). Si el promedio es 5,5 y la suma de las notas es 11; ¿Cuáles son sus notas?
   A) 4,0 y 7,0
   B) 5,5 y 5,5
   C) 5,0 y 6,0
   D) 4,5 y 6,5
   E) Cualquiera de las anteriores

   Solución:
   No se conoce ninguna nota, solo la suma de ellas y su promedio.
   Pues bien, todas las alternativas (desde la A hasta la D) cumplen con tener una suma de notas igual a 11 y promedio 5,5. Por lo tanto,
   La alternativa correcta es E).

8. En un colegio los alumnos se eximen con promedio 6,4. Si Daniel tiene las siguientes notas en química: 6,3 - 6,0 - 6,8. ¿Qué nota debe sacarse para que le de promedio 6,4 en forma exacta (sin aproximar)?
   A) 6,0 C) 6,4 E) 6,6
   B) 6,3 D) 6,5

   Solución:
   La visión inmediata de las notas nos muestra que las dos últimas, promediadas entre sí, ya dan el 6,4 pedido. Por lo tanto, solo quedaría promediar el 6,3.
   Cómo esta se halla una décima por debajo del 6,4 pedido, la nota faltante debe compensar aquel déficit estando una décima arriba de lo pedido. Es decir, la nota que Daniel debe obtener es un 6,5.
   Alternativa D).

   Observación: si no se desarrolla esta visión inmediata con los datos que se dan, la solución pasa de unos segundos a un minuto o más, como sigue:
   Sea x la nota que Daniel debe sacar para promediar 6,4.
   Entonces:

$$6,4 = \frac{6,3 + 6,0 + 6,8 + x}{4} \qquad / \bullet 4$$
$$25,6 = 19,1 + x$$
$$25,6 - 19,1 = x$$
$$6,5 = x$$

   Alternativa D)

9. La media aritmética de tres números es 2n. Si dos de ellos son –4n y 8n, entonces ¿cuál es el tercero?
   A) 10n
   B) 4n
   C) 2n
   D) n
   E) –6n

   Solución:
   Con -4n hay un déficit -diferencia negativa- respecto a la media indicada en el enunciado del problema, de -6n.
   Con 8n hay un superávit –o diferencia positiva- de +6n.
   Al unir tales diferencias, tal déficit y superávit se anulan mutuamente, con lo que no se necesita compensar ninguna diferencia respecto a la media, en el tercer dato.
   Por lo tanto, el tercer número tiene el mismo valor de la media, esto es, 2n.
   Alternativa C)

   O bien, del modo tradicional:
   Sea x el número buscado. Por definición de media, se tiene.

$$2\text{n} = \frac{-4\text{n} + 8\text{n} + x}{3} \qquad / \bullet 3$$
$$6\text{n} = 4\text{n} + x$$
$$6\text{n} - 4\text{n} = x$$
$$2\text{n} = x$$

   Alternativa C).

10. Carmen ha obtenido las siguientes notas en Historia: 6,5 – 5,0 - 6,2 y 5,5. Para sacar el promedio sólo le falta una nota ¿Cuál será la nota mínima que Carmen debe obtener en la última prueba, si quiere tener un promedio igual a 6,0?
    A) 6,0
    B) 6,2
    C) 6,8
    D) 7,0
    E) ninguna de las anteriores.

    Solución:
    La visión inmediata de las notas nos muestra que tanto la primera como la última promediadas, ya dan como resultado 6,0. Por lo tanto, solo le debe preocupar a Carmen, compensar las dos notas de al medio.
    El 5,0 tiene un déficit de -10 décimas respecto al 6,0.
    El 6,2 tiene un superávit de +2 décimas respecto al 6,0.
    Así que, sumando ambas diferencias respecto a la media, se queda con un déficit de 8 décimas respecto al 6,0. La cuál se puede compensar con un superávit de 8 décimas respecto al 6,0 en la última prueba, esto es, obteniendo un 6,8.
    Alternativa C).

    La respuesta, con este razonamiento, se logra en segundos, menos de un minuto. Sin embargo, si no se adopta, podemos obtenerla del modo tradicional, aunque sea en más tiempo. Veamos:
    Sea x la última nota, por calcular.
    Entonces, por ser 6,0 el promedio deseado, podemos expresarlo como:

$$6,0 = \frac{6,5+5,0+6,2+5,5+x}{5}$$

$$6,0 = \frac{23,2+x}{5} \qquad / \bullet 5$$

$$30,0 = 23,2 + x$$

$$30,0 - 23,2 = x$$

$$6,8 = x$$

    Alternativa C)

11. El promedio entre un número natural y su antecesor es 3,5. ¿Cuál es el sucesor del número?
    A) 5
    B) 4
    C) 3
    D) 2
    E) 1

    Solución:
    Identificamos un típico problema con enunciado verbal.
    Sea **n** *el* número *natural señalado*. Entonces, su antecesor es n -1.
    El enunciado nos indica que :

$$\frac{n + n - 1}{2} = 3,5 \qquad / \bullet 2$$

$$2n - 1 = 7$$

$$2n = 8$$

$$n = 4$$

    Y su sucesor –por el que preguntan en definitiva–, es uno más, 5.
    Alternativa A)

12. El promedio entre un número natural y su antecesor es 19,5. ¿Cuál es el número?
    A) 21
    B) 20
    C) 19
    D) 18
    E) 17

Solución:
Identificamos un típico problema con enunciado verbal.
Sea **n** *el* número *natural señalado*. Entonces, su antecesor es n –1.
y su promedio es :

$$\begin{aligned} \frac{n + (n-1)}{2} &= 19,5 \qquad / \bullet 2 \\ 2n - 1 &= 39 \\ 2n &= 39 + 1 \\ 2n &= 40 \\ n &= \frac{40}{2} = 20 \end{aligned}$$

Alternativa B)

13. El promedio entre un número natural y su antecesor es 3,5. ¿Cuál es el sucesor del número?
    A) 5
    B) 4
    C) 3
    D) 2
    E) 1

Solución:
Identificamos un típico problema con enunciado verbal.
Sea **n** *el* número *natural señalado*. Entonces, su antecesor es n -1.
El enunciado nos indica que :

$$\begin{aligned} \frac{n + n - 1}{2} &= 3,5 \qquad / \bullet 2 \\ 2n - 1 &= 7 \\ 2n &= 8 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Y su sucesor –por el que finalmente se pregunta–, es uno más, esto es, 5.
Alternativa A)

14. El promedio entre un número natural y su sucesor es 17,5. ¿Cuál es el antecesor del número?
    A) 15
    B) 16
    C) 17
    D) 18
    E) Otro valor.

Solución:
Identificamos un típico problema con enunciado verbal.
Sea **n** *el* número *natural señalado*. Entonces, su sucesor es n+1.

El enunciado nos indica que :

$$\begin{aligned} \frac{n + (n+1)}{2} &= 17,5 \qquad /\bullet 2 \\ 2n+1 &= 35 \\ 2n &= 35-1 \\ 2n &= 34 \\ n &= \frac{34}{2} = 17 \end{aligned}$$

Y su antecesor –por el que se pregunta en definitiva–, es uno menos, esto es, 16.
Alternativa B)

15. Patricia ha obtenido en Matemáticas un promedio semestral de 5,5, con cuatro notas. Si obtuvo dos 6,0 y un 4,8. ¿Cuál fue la cuarta nota?
    A) 5,7
    B) 5,6
    C) 5,5
    D) 5,2
    E) 5,0

Solución:
Respecto al promedio semestral 5,5:
Cada 6,0 da un superávit de +5, los que sumados, dan +10.
El 4,8 da un déficit de -7, los que sumados a +10 anteriores, se tiene un superávit de +3.
Este superávit de +3 décimas se debe compensar con -3 décimas respecto al 5,5 en la 4ta. nota. Para que nos dé justo el promedio semestral indicado. Esto es, con un:
5,5 – 0,3 = 5,2.
La cuál sería la 4ta. nota.
Alternativa D)

O bien del modo tradicional: Sea x la cuarta nota, entonces

$$\begin{aligned} 5,5 &= \frac{6,0+6,0+4,8+x}{4} \\ 5,5 &= \frac{16,8+x}{4} \qquad /\bullet 4 \\ 22,0 &= 16,8+x \\ 22,0-16,8 &= x \\ 5,2 &= x \end{aligned}$$

Alternativa D).

16. Si p es el mayor de tres enteros consecutivos, entonces, el promedio de ellos es
    A) p
    B) p – 1
    C) p – 3
    D) 3p
    E) 3p – 1

Solución:
Los números son: p-2, p-1, p
La media o promedio es en este caso, el término central. Esto porque en torno a el se distribuyen con la misma diferencia el resto de los valores.
Aquí, la media es p-1
La alternativa correcta es B).

Observación:
Ejemplos típicos con números enteros, parecidos al de este problema, en donde la media es a su vez el término central y como veremos después, coincidente con la mediana, son:

2, 3, 4	promedian 3.
-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3	promedian 0.

Etc.

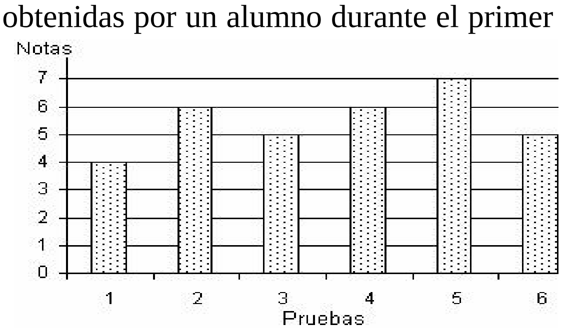
17. El promedio de los datos de la muestra {x, x +1, x –1, 2x – 1, 2x + 1} es:
    A) x
    B) $\frac{x}{5}$
    C) $7x$
    D) $\frac{7x}{5}$
    E) Otro valor.

    Solución:
    Nótese como se anulan, compensándose entre sí, los enteros +1 y –1 consecutivamente, quedando solo por contar las x en el numerador.
    $\bar{x} = \frac{x+x+1+x-1+2x-1+2x+1}{5} = \frac{7x}{5}$
    Alternativa D).

18. Si $x \neq 0$, entonces el promedio entre $\frac{x+a}{x}$ y $\frac{x-a}{x}$ es:
    A) $\frac{1}{4}$
    B) $\frac{1}{2}$
    C) 0
    D) 1
    E) 2

    Solución:
    El promedio de dos números es igual a la suma de ambos dividido por 2.
    Vamos a sumar primero ambos números:
    $\frac{x\cancel{+a}}{x} + \frac{x\cancel{-a}}{x} = \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}$ /Suma con igual denominador.Note como se cancelan entre sí $+a$ y $-a$
    $= 2$
    Y al dividir este resultado por 2, obtendríamos 1.
    Alternativa D)

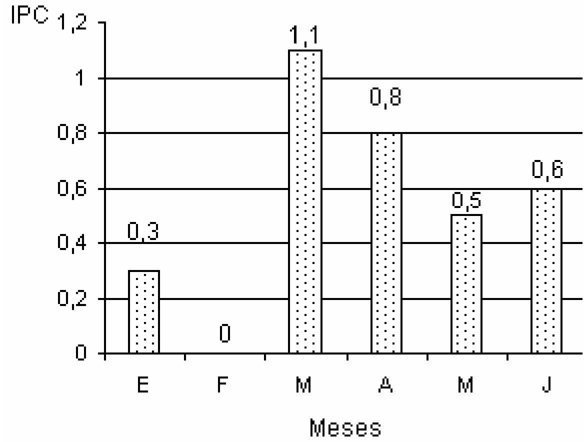
19. El gráfico muestra las seis pruebas parciales obtenidas por un alumno durante el primer semestre. Entonces, el promedio de ellas es:
    A) 5
    B) 5,1
    C) 5,3
    D) 5,4
    E) 5,5



    Solución:
    Note que aunque los datos estén graficados, no son datos agrupados. Ya que el gráfico solo nos indica el orden de las notas en que se obtuvieron: 4; 6; 5; 6; 7 y 5.
    Observe que las dos notas iguales se desprenden de gráficos distintos.
    La media, para datos no agrupados, viene dada por
    $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\text{n}} = \frac{4+6+5+6+7+5}{6} = \frac{33}{6} = 5{,}5$ Alternativa D).

20. El gráfico representa los valores del IPC -índice de precios al consumidor, el cual refleja el porcentaje de aumento en el costo de vida de la población-, correspondiente al primer semestre de cierto año. ¿Cuál es la media aproximada durante esos meses?

    A) 0,7
    B) 0,6
    C) 0,5
    D) 0,4
    E) 0,3



<u>Solución</u>:
La media viene dada por

$$x = \frac{0,3+0++1,1+0,8+0,5+0,6}{6}$$
$$= \frac{3,3}{6}$$
$$= 0,55$$

No está entre las alternativas. Notamos que todas las alternativas están con un solo valor decimal. Pero el enunciado nos pide un valor aproximado.
En nuestro resultado, observamos que la centésima es mayor o igual a cinco, por lo tanto se aproxima a la décima anterior, asignándole un valor numérico más, quedando el resultado aproximado en 0,6.
Alternativa B).

21. H es un conjunto de números consecutivos entre –5 y 6, incluyendo ambos números. ¿Cuál es la media aritmética de los elementos de H?

A) $\frac{6}{11}$	C) $\frac{31}{11}$	E) $\frac{31}{12}$
B) 0,5	D) 0,6	

<u>Solución</u>: Por definición, la media es la suma de los números entre -5 y 6 inclusive, dividido por la cantidad de números que hay entre ambos inclusive.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=-5}^{i=6} i}{N}$$

Donde N = Es la cantidad de datos entre -5 y 6. Todos consecutivos.
= Los números distintos de cero son 6 – (- 5) = 11.
Más otro número que es el cero.
= 12 números en total.

Además, al sumar, los números entre -5 y 5 se anulan mutuamente entre sí, quedando solo el número 6.

Por lo que $\bar{x} = \frac{\sum_{i=-5}^{i=6} i}{N} = \frac{6}{12} = 0,5$.

Alternativa B).

22. Felipe, Paloma y Martina pesan 55, 35 y 18 kilogramos, respectivamente. ¿Cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) la media aritmética de sus pesos?

I) $\frac{55+35+18}{3}$ II) 3(10 + 2) III) $\frac{55}{3}+\frac{35}{3}+6$

A) Sólo I.
B) Sólo III.
C) Sólo I y II.
D) Sólo I y III.
E) I, II y III.

Solución:

La media viene dada por $\bar{x} = \frac{55+35+18}{3} = \frac{108}{3} = 36$.

Analicemos cada expresión matemática:

- $\frac{55+35+18}{3}$ Es la expresión que corresponde a la media. I) es verdadera.
- $3(10 + 2) = 30 + 6 = 36$ II) es verdadera.
- $\frac{55}{3}+\frac{35}{3}+6 = \frac{55+35}{3}+6 = \frac{90}{3}+6 = 36$ III) es verdadera.

Alternativa E).

23. Si **x** es la media aritmética de los números **r**, **s** y **t** ¿cuál(es) de las siguientes igualdades es (son) verdadera(s) ?

I) $x = \frac{r+s+t}{3}$

II) (x – r) + (x – s) + (x – t) = 0

III) $x+10 = \frac{r+s+t+10}{3}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) I, II y III

Solución: (Analizando cada alternativa).

I) es verdadera, por definición de media.

II) $(x - r) + (x - s) + (x - t) = 0$

$$3x = r + s + t$$

$$x = \frac{r+s+t}{3}$$

Que indica que x es la media de r, s y t. Por lo tanto, II) es verdadera.

III) Vamos a despejar x para ver si adquiere una expresión reconocida de media

$$x + 10 = \frac{r+s+t+10}{3} \qquad / \bullet 3$$

$$3x + 30 = r + s + t + 10$$

$$3x = r + s + t - 20$$

$$x = \frac{r+s+t-20}{3}$$

Lo que no corresponde con la definición de media. Luego, es sólo I) y II).

Alternativa D).

24. La edad promedio de un grupo de 5 amigos es de 17,4 años. Si se incorpora al grupo un amigo de 18 años, ¿cuál es la edad promedio del nuevo grupo?
    A) 17,5 años.
    B) 17,7 años.
    C) 21,0 años.
    D) 5,9 años.
    E) 20,4 años.

<u>Solución</u>:
Sean $\bar{x}$ y S la media y la suma, respectivamente, de las edades del grupo de 5 amigos.
Entonces,

$$\bar{x} = \frac{S}{5}$$
$$17,4 = \frac{S}{5}$$
$$17,4 \bullet 5 = S$$
$$87 = S$$

Si a la suma de las edades de los 5 alumnos se agrega un amigo de 18 años, la suma final será S' = 87 + 18 = 105

El promedio de las edades para los ahora seis alumnos es: $\bar{x} = \frac{105}{6} = 17,5$ años.

Alternativa A).

25. La media aritmética de un conjunto de 8 números es 30. Se agregan al conjunto los números 32 y 18, ¿cuál es la media aritmética de los elementos de este nuevo conjunto?
    A) $26,\overline{6}$
    B) 32
    C) 18
    D) 30
    E) 29

<u>Solución</u>:

$$\bar{x} = \frac{S}{8}$$

Donde S corresponde a la suma del conjunto de ocho números.

$$30 = \frac{S}{8}$$
$$\Rightarrow S = 30 \bullet 8$$
$$\Rightarrow S = 240$$

Si se agregan los números 32 y 18 obtendremos 10 números, y su media se obtiene de:

$$\bar{x} = \frac{S + 32 + 18}{10} = \frac{240 + 32 + 18}{10} = 29$$

Alternativa E).

26. Cinco amigas se reúnen a almorzar. Si la media aritmética de sus edades es 34 años y las edades de tres de ellas son 28, 30 y 32. ¿Cuál es la media aritmética de las edades de las otras dos?
    A) 40
    B) 50
    C) 60
    D) 70
    E) 80

    Solución:
    Sean A, B, C, D y E las cinco personas. Entonces,
    $$34 = \frac{A+B+C+D+E}{5} \Rightarrow A+B+C+D+E = 34 \bullet 5$$
    $$A+B+C+D+E = 170$$
    Sean D y E las edades desconocidas de las dos personas, entonces, reemplazando las tres edades conocidas en la expresión anterior, tenemos
    $$28+30+32+D+E = 170$$
    $$90+D+E = 170$$
    $$D+E = 80$$
    El promedio de estas dos edades es $\bar{x} = \frac{D+E}{2} = \frac{80}{2} = 40$
    Alternativa A).

27. El promedio de 3 números es p, si uno de los números es q, otro es 3 veces la mitad de q, ¿Cuál es el valor del tercer número?
    A) $3p - \frac{5}{3}q$
    B) $\frac{3}{2}(2p-q)$
    C) $p - \frac{5}{2}q$
    D) $3p - \frac{5}{2}q$
    E) $p - \frac{5q}{3}$

    Solución:
    Sea x el término buscado. Del enunciado tenemos:
    $$p = \frac{q + 3\frac{q}{2} + x}{3} = \frac{\frac{2q+3q+2x}{2}}{3} = \frac{5q+2x}{6} \qquad / \bullet 6$$
    $$\Rightarrow 6p = 5q + 2x$$
    $$\Rightarrow 6p - 5q = 2x$$
    $$\Rightarrow 3p - \frac{5q}{2} = x$$
    Alternativa D).

28. El promedio de los pesos de 4 maletas es de 50 kg. Si los pesos de tres de ellas son 45 kg, 55 kg y 35 kg, respectivamente, ¿cuál es el peso de la cuarta maleta?
    A) 75 kg
    B) 65 kg
    C) 55 kg
    D) 85 kg
    E) 62,5 kg

    Solución:
    Sea x el número buscado. Entonces,
    $$\bar{x} = \frac{45+55+35+x}{4}$$
    $$\Rightarrow 4\bar{x} = 45+55+35+x$$
    $$\Rightarrow 4 \bullet 50 = 135 + x$$
    $$\Rightarrow 200 = 135 + x$$
    $$\Rightarrow 65 = x$$

    Alternativa B).

    Otra forma:
    El peso total de las maletas equivale a multiplicar por cuatro el peso promedio de las maletas:
    $4 \bullet 50$ Kg. = 200 Kg.
    Si sumamos el peso de las maletas que nos dan, notamos que es 135 Kg. Falta considerar entonces un peso de 65 Kg.
    Alternativa B).

29. El promedio de siete números es 43. Si tres de los números son 40, 51 y 46, ¿cuál es el promedio de los otros números?
    A) 36
    B) 41
    C) 43
    D) 44
    E) 48

    Solución:
    $\bar{x} = \frac{S}{n}$ Donde S es la suma de todos los números

    $43 = \frac{S}{7} \quad \Rightarrow S = 43 \bullet 7 = 301$

    $\Rightarrow 40 + 51 + 46 + A + B + C + D = 301$ Donde A, B, C y D son los
    $137 + A + B + C + D = 301$ números desconocidos.
    $A + B + C + D = 301 - 137$
    $A + B + C + D = 164$ Es la suma de ellos.

    Y el promedio de estos 4, viene dado por: $\bar{x} = \frac{164}{4} = 41$

    Alternativa B).

30. Un grupo de 4 personas suben un ascensor haciendo una masa promedio de 68 Kg. En uno de los pisos se baja una de ellas y el peso promedio de los que siguen sube a 75 Kg. ¿Cuál es la masa de la persona que se bajó?
    A) 40 Kg.
    B) 47 Kg.
    C) 66 Kg.
    D) 28 Kg.
    E) 7 Kg.

    Solución:
    Sean A, B, C y D las cuatro personas. Entonces,

    $$68 = \frac{A+B+C+D}{4} \Rightarrow A+B+C+D = 68 \bullet 4$$

    $$A+B+C+D = 272$$

    Sea D la persona que se baja en uno de los pisos, entonces

    $$A+B+C = 272 - D \qquad \text{(I)}$$

    Además,

    $$\frac{A+B+C}{3} = 75 \Rightarrow A+B+C = 225 \qquad \text{(II)}$$

    Reemplazando el lado izquierdo de la igualdad (II) por su equivalente del lado derecho de la igualdad (I), obtenemos
    $272 - D = 225$
    $272 - 225 = D$
    $47 = D$
    La masa de la persona que se bajó es de 47 Kg.
    Alternativa B).

31. En una universidad, el equipo de babyfútol de Arquitectura enfrenta a su similar de Pedagogía -5 jugadores por equipo-. La edad promedio del equipo de Arquitectura es 19 años y el de Pedagogía 25 años.
    En el segundo tiempo se producen los siguientes cambios:
    - En Arquitectura entra un jugador de 22 años y sale uno de 17 años.
    - En Pedagogía sale uno de 25 años y entra uno de 20 años.

    ¿En que razón quedan los promedios de edad después de estos cambios?
    A) 5 : 4
    B) 5 : 6
    C) 3 : 4
    D) 6 : 7
    E) 1 : 1

Solución:

$\bar{x} = \dfrac{S}{n}$ Donde *S* es la suma de los datos. En este caso, de las edades.

- Para alumnos de Arqueología:

$19 = \dfrac{S_A}{5} \Rightarrow S_A = 19 \bullet 5 = 95$ Donde S_A es la suma de las edades de los alumnos de Arqueología.

Entra uno de 22 y sale uno de 17. Esto es, la suma aumenta en 5 unidades.

$S_A = 100 \Rightarrow \overline{x_A} = \dfrac{100}{5} = 20$

- Para alumnos de Pedagogía:

$25 = \dfrac{S_P}{5} \Rightarrow S_P = 25 \bullet 5 = 125$ Donde S_P es la suma de sus edades.

Sale uno de 25 y entra uno de 20. Es decir, la suma disminuye en 5 unidades.

$S_P = 120 \Rightarrow \overline{x_P} = \dfrac{120}{5} = 24$

La razón entre sus medias es $\dfrac{\overline{x_A}}{\overline{x_P}} = \dfrac{20}{24} = \dfrac{5}{6}$

Alternativa B).

32. En un grupo de 10 niños sus edades son las siguientes. 8; 9; 8; 7; 9; 10; 9; 8; 9 y 11. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) El 40% de los niños tiene menos de 9 años.

II) Los niños de 8 años son el 75% de los que tienen 9.

III) El promedio (media) de sus edades es 9 años.

A) Sólo I
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Solo II y III
E) I, II y III

<u>Solución</u>:

- Hay 4 edades de un total de 10, que son menores que 9 años. Las que representan el 40% de los niños. Por lo tanto, I) es verdadera.
- Hay 3 niños de 8 años, los que equivalen al 75% de los 4 niños que tienen 9 años. La aseveración II) es verdadera.
- $\bar{x} = \dfrac{8+9+8+7+9+10+9+8+9+11}{10} = \dfrac{88}{10} = 8{,}8$ años.

La alternativa III) es falsa. Por lo tanto, la alternativa correcta es B).

33. Carlos olvidó una de sus ocho notas del primer semestre. Sin embargo, recuerda las otras siete, que son: 7— 6,2 — 5,8 — 6,5 — 6,3 — 6,1. — 5,6. Y sabe por otra parte que su promedio semestral es 6,1. Recordemos que en el cálculo del promedio semestral, se aproxima o trunca la centésima, por lo tanto, la nota que olvidó es:

I) 5,3
II) Cualquiera nota dentro del intervalo [4.9 , 5.6]
III) 5,7

A) Solo I
B) Solo II
C) I y II
D) I y III
E) I, II y III

<u>Solución</u>:

Si se aproxima la centésima, entonces $6{,}05 \approx 6{,}1$ y $6{,}14 \approx 6{,}2$.
Por lo tanto debemos considerar que el promedio real debe ser cualquier nota perteneciente al intervalo [6.05, 6.14].

Veamos los valores extremos: Sea x la nota que Carlos olvidó.

- Cuando $\bar{x} = 6{,}05$

$$\frac{7+6{,}2+5{,}8+6{,}5+6{,}3+6{,}1+5{,}6+x}{8} = 6{,}05$$

$$43{,}5 + x = 48{,}4$$

$$x = 48{,}4 - 43{,}5$$

$$x = 4{,}9$$

- Cuando $\bar{x} = 6{,}14$

$$\frac{7+6{,}2+5{,}8+6{,}5+6{,}3+6{,}1+5{,}6+x}{8} = 6{,}14$$

$$43{,}5 + x = 49{,}12$$

$$x = 49{,}12 - 43{,}5$$

$$x = 5{,}62$$

La nota que olvidó Carlos está en el rango o intervalo [4.9, 5,62[Las alternativas I) y II) tienen valores que están dentro del intervalo. Por lo tanto, la alternativa correcta es C).

1.2. *Ejercicios de Mediana*

34. En la tabla se registra el largo de los saltos que realizaron 5 niños.
En relación con los datos registrados en la tabla.
¿Cuál es la mediana?
A) 2 [m]
B) 2,05 [m]
C) Aprox. 2,2 [m]
D) Un número menor a 2 [m]
E) Ninguna de las anteriores.

Niños	Metros [m]
Carlos	1,9
Ricardo	2,35
Andrés	2
Matías	2,05
Pablo	2,47

Solución:
Primero debemos ordenar de manera creciente (o decreciente) la longitud de los saltos.
Dicho orden es, en [m]: 1,9 – 2 – 2,05 – 2,35 – 2,42
La definición de mediana nos señala que es el valor central de los datos ordenados.
En este caso, el valor central es 2,05 [m]
Alternativa B).

35. En el conjunto de valores 3, 4, 5, 6, 4, 7, 8, 4, 6, 9, 10, la mediana es:
A) 4
B) 5
C) 5,5
D) 6
E) 7

Solución:
La mediana es el término central de una ordenación numérica –en el caso de un número par de números, es el promedio de los dos términos centrales.
Así que primero debemos ordenar de manera creciente o decreciente el listado de números.
Lo haremos de manera creciente:

3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10

Como la cantidad de números es 11, impar, hay un solo término central. Su posición en el listado es igual a la parte entera de la cantidad de valores dividido por 2, más una posición adelante. Esto es, si n = 11 es la cantidad de valores, tenemos:

$\left[\frac{n}{2}\right]+1=\left[\frac{11}{2}\right]+1=5+1=6$ El sexto de la ordenación, el cual resulta ser 6.

La alternativa es D).

36. La siguiente tabla registra –ordenados de mayor a menor- los puntajes por 38 estudiantes en un test de Biología.

Nº	Estudiantes	Calificación	Nº	Estudiantes	Calificación
1	Edgardo S.	112	20	David H.	80
2	Nancy M.	109	21	Eduardo F.	78
3	Carlos B.	106	22	José L.	75
4	Mildred C.	105	23	Rosa M.	75
5	Roberto C.	104	24	Marta V.	75
6	Silvia H.	100	25	Enrique S.	74
7	Jaime D.	97	26	Graciela S.	72
8	Juan D.	97	27	Manuel S.	71
9	Diego F.	95	28	Ricardo G.	70
10	Roberto G.	95	29	Pedro H.	69
11	Dolores T.	93	30	Roberto S.	68
12	Arnoldo T.	91	31	Bárbara B.	66
13	David A.	90	32	Lila S.	62
14	Carmen O.	89	33	Roberto D.	59
15	Roberto B.	84	34	Jorge P.	59
16	Raúl U.	84	35	Rafael P.	58
17	Juan C.	83	36	Gonzalo M.	51
18	Diana D.	82	37	Gabriel G.	47
19	Pablo S.	81	38	Patricio H.	44

Entonces, la mediana de la distribución es:

A) 80,5
B) (112 + 44)/2
C) 75
D) No existe mediana en este caso.
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Como hay un número par de estudiantes (38), la mediana será en dichos casos SIEMPRE igual al promedio de los dos datos centrales (calificaciones del nº 19 y nº 20), es decir:

$$M_d = \frac{81+80}{2} = \frac{161}{2} = 80,5$$

Alternativa A).

37. La mediana del conjunto de los nueve primeros números primos es:

A) 7
B) 9
C) 11
D) 13
E) 15

Solución:
Hay que recordar que los números primos son enteros solos divisibles por 1 y por sí mismos. Y donde, además, 1 no es considerado primo.
Los primeros nueve primos, ordenados de manera ascendente son:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
De estos, el término central es 11.
Alternativa C).

38. La mediana de los siguientes datos es: x, x – 1, x + 2, x + 3, x –2
    A) x
    B) x - 2
    C) x + 3
    D) x - 1
    E) x + 2

Solución:
Ordenar los términos en forma creciente x – 2, x – 1, x, x + 2, x + 3.
Notamos que hay 5 números, un número impar de datos, por lo que hay un solo término central, el ocupa la posición:
$\left[\dfrac{\text{n datos}}{\text{mitad}}\right] = \left[\dfrac{5}{2}\right] = [2,5] = 3$ era posición [ ] es la parte entera del número contenido en los corchetes.
El valor central corresponde al valor del tercer dato y es x.
Por lo tanto, la mediana es x.
Alternativa A).

39. Obtenga la mediana de los siguientes datos:
a, b, c, d, a -2 si b > c > d > a
    A) a
    B) b
    C) c
    D) d
    E) Falta información.

Solución:
A la información sobre el ordenamiento de los datos agregamos:

$$a > a - 2.$$

Y finalmente, todos los datos ordenados, de mayor a menor, son:
b, c, d, a, a – 2
La mediana ocupa el término central de un ordenamiento y es en este caso el número señalado por la letra d.
Por lo tanto, la alternativa correcta es D).

La alternativa E) como correcta induce al error. Podría creerse que nada afirma que los datos sean cuantitativos, pudiendo ser cualitativos y en tal caso, no habría mediana.
Pero del momento que hay una relación de orden en los datos, ello hace referencia a una variable cuantitativa, por lo tanto, existe mediana, siendo la indicada anteriormente.

1.3. *Ejercicios Combinados de Mediana con Media*

40. De los siguientes datos: $a-2$, $a+4$, $a-3$, la mediana y la media son, respectivamente
    A) $3a-1$, $a-2$
    B) $a-2$, $\frac{3a-1}{3}$
    C) $a+4$, $\frac{3a-1}{3}$
    D) $3a-1$, $a+4$
    E) $a+4$, $3a-1$

    Solución:
    Para hallar la mediana, ordenamos de menor a mayor: $a-3$, $a-2$, $a+4$.
    La mediana es el término central:
    $$a-2.$$
    La media es
    $$\bar{x} = \frac{a-2+a+4+a-3}{3} = \frac{3a-1}{3}$$
    La alternativa es B).

41. Los puntajes obtenidos por 10 alumnos en un examen fueron: 57, 38, 60, 60, 57, 56, 88, 100, 55 y 58. Si se acordó que aprobaran aquellos alumnos, cuyos puntajes fueran al menos un punto mayor que la mediana o la media aritmética, ¿cuántos alumnos aprobaron el examen?
    A) 2
    B) 3
    C) 4
    D) 5
    E) 6

    Solución:
    Para obtener la media aritmética o promedio tenemos
    $$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{57+38+60+60+57+56+88+100+55+58}{10}\\ &= \frac{629}{10}\\ &= 62{,}9\\ &\approx 63\end{aligned}$$

    La regla indica que aprueban aquellos que tienen a lo menos un punto más. Esto es, sobre 63 puntos. Hay dos alumnos que están sobre puntaje.

    Mientras que la mediana se obtiene de ordenar de manera ascendente (o descendente) y ver el o los términos centrales.
    38 – 55 – 56 – 57 – 57 – 58 – 60 – 60 – 88 – 100

    La mediana viene dada por el promedio de los valores centrales, (57+58)/2 = 57,5 ptos.
    Los alumnos que están sobre el puntaje y con un punto de diferencia (esto es, a partir de 57,5 + 1 = 58,5 ptos.) son cuatro alumnos.

    En nuestro caso, tenemos criterios que consideran a dos o cuatro alumnos
    El conectivo "o" hace referencia a una unión de conjuntos o proposiciones. Es el más amplio en relación al conectivo "y". Que considera a conjuntos y proposiciones con más limitantes.
    Como el enunciado indica el uso del conectivo "o". Entre Dos o Cuatro alumnos, el conjunto más amplio es de cuatro alumnos.
    Alternativa C).

1.4. *Ejercicios de Moda*

42. El profesor de matemática comenta "La nota que mas se repitió en la prueba fue un 6.0" Si quisiéramos interpretar los datos estadísticamente podríamos decir que la nota 6.0 es:
    A) Promedio
    B) Mediana
    C) Desviación estándar
    D) Varianza
    E) Moda

Solución:
La definición de moda nos dice que es el valor que más se repite en una muestra. Por lo tanto, lo que profesor señala en otras palabras es la moda del curso.
Esto es, alternativa E).

43. En la serie de números 11, 12, 12, 14, 14, 14, 18, 18 el valor de la moda es(son):
    A) 11 y 18 C) 12 E) 13
    B) 14 D) 14 y 12

Solución:
La moda es el valor que más se repite en la muestra. En nuestro caso, es 14.
Alternativa B).

44. La frecuencia que presenta la moda en la muestra {2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 7, 7} es:
    A) 2 C) 4 E) 7
    B) 3 D) 5

Solución:
La moda es 4, pues se repite mayor número de veces que los otros números. La frecuencia con la cual se repite es 3.
Alternativa B).

45. La moda de la siguiente muestra $\frac{a-1}{1-a}$, $-1, 2, 3, -(x+2)^0$
    A) -1
    B) 2/5
    C) 2
    D) 3
    E) No tiene moda la muestra.

Solución:
Aparentemente, ningún valor se repite. Por lo que parecería que no hubiese moda en la muestra de valores. Sin embargo, esto se vienen con una fracción algebraica y otra potencia que podemos simplificar y resolver respectivamente, antes de decir la última palabra.

El primer dato es $\frac{a-1}{1-a} = \frac{-(1-a)}{1-a} = -1$

El último dato es $-(x+2)^0 = -1$ (por propiedad de potencia, $a^0 = 1$. Donde en este caso el signo menos se halla fuera de la base de la potencia y por tanto, no se ve afectado por la acción del exponente cero). Por lo tanto, la muestra está compuesta por:

-1, -1, 2, 3, -1

Y el dato que más se repite es -1.
Por lo tanto, la moda es tal valor y la alternativa correcta es A).

1.5. *Ejercicio Combinado de Moda con Mediana*

46. Se considera el siguiente conjunto: {2, 2, 5, 7, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 18, 20}. La moda y la mediana son, respectivamente:
    A) 9 y 7
    B) 9 y 9
    C) 5 y 10
    D) 12 y 9
    E) 9 y 20

    Solución:
    La moda es el valor que más se repite, que en el conjunto es el valor 9.
    Los datos ya se hallan ordenados. Y siendo un número impar de datos, el valor central es la mediana. En nuestro conjunto de trece datos, el valor central lo ocupa el séptimo, que es 9.
    Alternativa B).

1.6. *Ejercicios Combinados entre Media, Mediana y Moda*

47. ¿En cuál de los siguientes conjunto de datos la media, la mediana y la moda coinciden?
    A) 3, 4, 5, 9, 10, 11
    B) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
    C) 6, 3, 4, 6, 8, 9, 6
    D) 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5
    E) 2, 4, 6, 8, 10, 12

Solución:
Da la impresión de que el ejercicio parece largo, tedioso y desubicado en un contexto de resolver en breve tiempo, respecto al contexto, que es la Psu. Pues si así fuese, tendríamos que hacer 5 cálculos de media de datos por lo menos, en este ejercicio. Fácil, pero descontextualizado.
Es precisamente el contexto lo que ilumina nuestra comprensión de lo rápido que es. La clave para lo pedido es comenzar por la moda. Notaremos que sólo C) y D) tienen moda. Con valores 6 y 5 respectivamente.
Por último, en lugar de reordenar datos en C) –lo que es útil para hallar su mediana- notamos que tanto C) y D) tienen 7 datos. Por lo tanto, para que sus respectivos promedios sean iguales a las modas halladas, las sumas de todos sus datos debiesen ser iguales a:

Suma de números =	Nº de datos	*	moda		(por ser supuestamente igual a la media)
	7	*	6	= 42	en C)
	7	*	5	= 35	en D)

Y solo los datos en C) suman 42, mientras que en D) estos suman 25, no 35.
La alternativa D) queda descartada.
La alternativa correcta es C).

48. A la serie de datos 7 — 6 — 5 — 4 — 5 se le agregan dos más, siendo después de ello su Mediana igual a 6, su Promedio 7 y su Moda 5. Por ello, los datos que se agregaron fueron:
    I. 5 y 17
    II. 9 y 13
    III. 8 y 14

    A) Solo I
    B) Solo II
    C) Solo III
    D) I y II
    E) II y III

Solución:
- Una vez que se han agregado dos datos a la serie, el conjunto tendría 7 datos. Si el promedio de tales datos es 7, entonces su suma debe ser igual al nº de datos por su promedio. Esto es, 7 * 7 = 49.
  Como la suma de los 5 datos originales es 27, los dos datos que se agreguen deben sumar la diferencia entre las suma final y original de los datos, esto es: 49 – 27 = 22.
- Además, si se ordena la serie original de datos, tenemos:

  4 – 5 – 5 – 6 – 7.

Para que finalmente sea 6 la mediana, (el valor que quede al centro en tal ordenamiento), los dos datos que se agreguen deben quedar a la derecha. Es decir, ambos números no pueden ser menores que 6.
Mirando las opciones de parejas de números que se dan, solo II) y III) satisfacen lo indicado.
La opción correcta es E).

49. a, b y c representan respectivamente la media, la mediana y la moda de las alturas de 10 personas, tal que b < a < c. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es siempre verdadera?
    A) Hay más personas cuyas alturas son mayores que a.
    B) La persona más alta tiene estatura c.
    C) a es el promedio de b y c.
    D) La persona más baja tiene estatura menor que a.
    E) Si todas las personas estuviesen ordenadas ascendente o descendentemente, la persona del medio tendría estatura a.

Solución:
Fíjese que da lo mismo si las estaturas fuesen de personas, caballos, etc. Lo que importa es la comparación entre sí de la media, la mediana y la moda, dentro de una muestra.
La afirmación que tiene certeza de cumplirse -si los números de la muestra no son todos iguales, tal como se indica en el enunciado)- es que siempre existirá un valor por lo menos, que será menor que la media.
Alternativa D).

50. ¿Cuál(es) de las afirmaciones siguientes es (son) SIEMPRE(S) verdadera(s)?
    I) La moda es el valor central de los datos.
    II) La media es siempre menor que la moda.
    III) Puede haber más de una moda en un grupo de datos.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo III.
    D) I y II.
    E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Analicemos cada afirmación.
- El valor central de los datos es la mediana, no la moda. I) es falsa.
- Mostremos a través de un contraejemplo, un caso en que la media no es menor que la moda:

0, 1, 1, 3, 5 La moda es 1 y la media es $10/5 = 2$. II) es falsa.
- Aunque no sea siempre ni necesario, puede haber más de una moda en una muestra.

Ejemplo: 0, 1, 1, 3, 3 Las modas son 1 y 3. III) es verdadera.

Sólo III) es verdadera.
Alternativa C).

51. Entre los valores de una muestra, SIEMPRE está presente:
    I) La media.
    II) La moda.
    III) La mediana.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo III.
    D) I y III.
    E) Ninguna.

Solución:
A través de un simple contraejemplo, abordaremos cada una de las alternativas.
Dada la muestra 1, 2, 3 y 4.

- $\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2,5$ Valor que no se halla en la muestra.
  Por lo tanto, I) es falsa.
- La muestra indicada no tiene moda.

II) también es falsa.

- La mediana, en una cantidad par de datos, viene dada por el promedio de los términos centrales
  $M_D = \frac{2+3}{2} = 2,5$ que como vimos y vemos, no se halla en la muestra.
  Por lo tanto, III) también es falsa.

Alternativa E).

52. Los datos siguientes corresponden al tiempo en minutos que un trabajador debe esperar su medio de locomoción para ir al trabajo, durante quince días laborales:
    20, 5, 12, 8, 5, 8, 4, 10, 3, 8, 6, 18, 2, 10, 14.
    Entonces la Media, la Mediana y la Moda para este conjunto de datos son, respectivamente:

	Media	Mediana	Moda
A)	$8,8\overline{3}$	8	8
B)	8	$8,8\overline{6}$	8
C)	$8,8\overline{6}$	5	10
D)	$8,8\overline{6}$	8	8
E)	8,5	8	10

Solución:

- La suma de todos los tiempos de espera es 133 mm., por lo que su promedio es:
  $\bar{x} = \frac{133}{15} = 8,8\overline{6}$
- Ordenamos de menor a mayor los quince tiempos de espera para obtener la mediana:
  2 – 3 – 4 – 5 – 5 – 6 – 8 – 8 – 8 – 10 – 10 – 12 – 14 – 18 - 20
  La Mediana es el valor de la variable que ocupa la posición central.
  En este caso, $M_d = 8$.
- El valor que aparece con mayor frecuencia es la moda, de manera que Mo = 8.

Por lo tanto, los datos pedidos son:
$8,8\overline{6}$; 8; 8
Alternativa D).

1.7. *Ejercicios de Cuartiles*

53. Los cuartiles Q_1, Q_2 y Q_3 del siguiente conjunto de números {8, 12, 14, 21, 24, 32, 33, 44, 47, 48} son respectivamente:

	Q_1	Q_2	Q_3
A)	44	28	14
B)	14	28	44
C)	14	32	47
D)	12	24	44
E)	8	28	48

Solución: cuyo método es difundido en el texto escolar del Ministerio de Educación para los 4tos. Medios durante el 2005 – 06, a cargo en su edición, de una conocidísima Editorial Nacional (pág.32).
Notemos que los valores están ordenados de menor a mayor. De no estarlo, habría que ordenarlos en tal sentido o viceversa.
La cantidad de datos es número par, por lo que la mediana (que es el segundo cuartil, Q_2) será el promedio de los dos valores centrales del conjunto:

$$Q_2 = \frac{24+32}{2} = 28$$

El primer cuartil, Q_1, es a su vez la mediana del conjunto de valores menores que Q_2 = 28.
{8, 12, 14, 21, 24} como es una cantidad impar de valores, la mediana es directamente su valor central, 14.
Así, $Q_1 = 14$.
No es necesario proseguir, si miramos las alternativas, solo B) cumple con los dos primeros cuartiles hallados.
Si queremos finalizar por hallar el tercer cuartil, Q_3, este será la mediana de los valores mayores a la mediana de todo el conjunto de datos, esto es, mayores a $Q_2 = 28$.
{32, 33, 44, 47, 48} es una cantidad impar de valores, por lo que su mediana es directamente su valor central, 44. Esto es, $Q_3 = 44$.

Los valores buscados son $Q_1 = 14$, $Q_2 = 28$, $Q_3 = 44$.
Alternativa B).

2da Solución: Sugerida señalada por la colega **Gabriela Tapia Aqueveque**. El procedimiento que indica puede hallarse también en "Econometría" de Dominick Salvatore, serie de compendios Schaum – McGraw–Hill; 1990, pág. 17; para el hallazgo de cuartiles en datos no agrupados:

- "Para $Q_1 : 25\% \bullet n = \frac{25}{100} \bullet 10 = \frac{10}{4} = 2{,}5$

  El promedio del segundo y tercer dato: $Q_2 = \frac{12+14}{2} = 13$"

Personalmente, debo añadir que la adaptación de la fórmula para datos agrupados nos da también una idea de cómo obtener cuartiles en datos no agrupados:

$$Q_1 = I_i + \left(I_{i+1} - I_i\right) \bullet \frac{25\% \bullet n - F_i}{F_{i+1} - F_i}$$

Donde I_i e I_{i+1} son el dato anterior y posterior al valor resultante del $25\% \bullet n$; con n total de datos. F_i y F_{i+1} son las frecuencias acumuladas de la posición anterior, e inmediatamente posterior al del 25% de los datos. Para el primer cuartil:

$$Q_1 = 12 + (14-12) \bullet \frac{2{,}5-2}{3-2} = 12 + (2) \bullet \frac{0{,}5}{1} = 12 + 1 = 13$$

- "

- El segundo cuartil es mejor conocido como la mediana:

$$Q_2 : 50\% \bullet n = \frac{\cancel{50}^{1}}{_{2}\cancel{100}} \bullet 10 = \frac{10}{2} = 5$$

Como la cantidad total de datos es par, entonces será el promedio del 5 y 6 dato.

$$Q_2 = \frac{24+32}{2} = 28\text{”}$$

- El tercer cuartil viene dado por el valor del 75% de los datos.

$$Q_3 : 75\%\ n = \frac{75}{100} \bullet 10 = \frac{\cancel{75}\,3}{_{4}\cancel{100}} \bullet 10 = \frac{3}{4} \bullet 10 = 7,5$$

Q_3 del promedio del séptimo y octavo dato $= \frac{33+44}{2} = \frac{77}{2} = 38,5$.

Nuevamente adaptando la fórmula para datos agrupados, me hallo con una concordancia en el resultado anterior:

$$Q_3 = I_i + (I_{i+1} - I_i) \bullet \frac{75\% \bullet n - F_i}{F_{i+1} - F_i} \qquad \text{con } 75\%\ n = 7,5$$

$$Q_3 = 33 + (44-33) \bullet \frac{7,5-7}{8-7} = 33 + (11) \bullet \frac{0,5}{1} = 33 + (11)0,5 = 33 + 5,5 = 38,5$$

Según este método, el ejercicio no contendría la solución correcta entre sus alternativas.

En la actualidad (2009), el último texto de apoyo a Profesores y Estudiantes entregado por el Ministerio de Educación, esta vez a cargo de otra conocidísima Editorial, no contribuye a dilucidar cual de los métodos o "soluciones alternativas" que se citan para el hallazgo de cuartiles en datos no agrupados sea el correcto. Este último texto presenta la solución en un único ejercicio (como en todos los textos consultados), para dicha cuestión. El ejercicio en cuestión presenta "convenientemente" datos numéricos en el que ambos métodos -que por lo general presentan soluciones distintas-, no resulten así en el ejercicio indicado. Pero lamentablemente, es como lavarse las manos. No puede haber métodos "correctos" que en la mayoría de los casos harán mención a valores distintos. ¿Quién o que editorial será clara en difundir el procedimiento correcto en la actualidad, a este respecto?
Contrariamente, hallar cuartiles en datos agrupados esta muy claro en la literatura matemática y en textos escolares de educación secundaria. Su método se basa en identificar bien las partes que componen la expresión de la fórmula y reemplazar en ella. En todo caso, no se suelen medir en la Psu.

Por último, hay que indicar que no se puede contar con las funciones cuartil y percentil de Excel para dilucidar cual de los distintos métodos indicados es el correcto. Tales funciones no ayudan, sino que por el contrario, entorpecen la definición de cual método es correcto. Ello porque entregan otro conjunto de valores de la misma distribución ordenada de datos.

8	12	14	21	24	32	33	44	47	48

Q1	15,75
Q2	28,00
Q3	41,25

Sepa moya el porqué en Q_1 y Q_3.

54. El rango intercuartil de los datos: 3,46 5,27 6,33 6,88 7,21 9,82 12,63 es:
    A) 9,17
    B) 3,42
    C) 5,75
    D) 4,55
    E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Al igual que el ejercicio anterior, este ha sido presentado por Editorial Zigzag, del texto escolar difundido por el Ministerio de Educación como apoyo para Profesores y estudiantes de 4to. Medio; Pág.32. (2005–6)
Resolviendo por el método presentado por ellos –ya que el ejercicio ha sido pensado en la difusión de este método, tenemos que la mediana –en la cuál todos estamos de acuerdo- es el único término central en una distribución ordenada e impar de datos. En este caso, tal término es 6,88.

$$Q_2 = 6{,}88.$$

El término central de los valores que están por debajo de Q_2, es decir de:
3,46 5,27 6,33 es $Q_1 = 5{,}27$

El término central de los valores que están por sobre Q_2, es decir de:
7,21 9,82 12,63 es $Q_3 = 9{,}82$

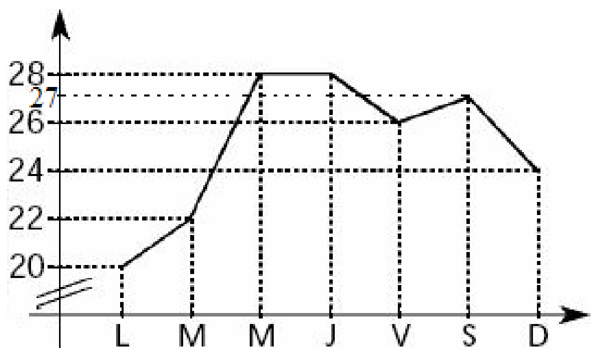
Debemos hallar los valores de ambos cuartiles.
Los cuartiles son $Q_1 = 5{,}27$ $Q_2 = 6{,}88$ $Q_3 = 9{,}82$.

Así, el rango intercuartil es $R_{IC} = Q_3 - Q_1 = 9{,}82 - 5{,}27 = 4{,}55$
Alternativa D).

2. Medidas de Dispersión

2.1. *Ejercicios de rango con ejercicios de medidas de tendencia central*

55. El grafico ilustra las temperaturas máximas durante una semana en una ciudad. A partir de el ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?
    I. El rango de temperaturas es de 8º.
    II. La menor máxima se registró el día lunes.
    III. El promedio de la máxima fue 24º.



A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y II
E) I, II y III

Solución:
Note que aunque los datos estén graficados, no son datos agrupados. Ya que el gráfico solo nos indica el orden en que se registraron las temperaturas:
20 – 22 – 28 – 28 – 26 – 27 – 24
El listado es claramente de datos no agrupados.
Pues bien, hecha esta aclaración, vamos a analizar cada una de las afirmaciones:

I) El rango de una distribución viene dado por la diferencia entre el mayor y menor valor que toma la variable. En este caso, temperatura en grados. Donde 28º – 20º = 8º
Es verdadera.

II) La menor altura del polígono de frecuencias tiene un valor de 20º, asociada al día lunes.
Es verdadera.

III) Dado que nos dan un promedio estimativo, vamos a corroborarlo rápida e intuitivamente como sigue:

Respecto 24:	Lunes tiene una diferencia de	-4	Tenemos una diferencia de	-4.
	Martes una diferencia de	-2	En total, llevamos una de	-6.
	Miércoles una de	+4	En total, una diferencia de	-2.
	Jueves una de	+4	En total, una de	+2.
	Viernes una de	+3	Llevamos en total una de	+5.
	Sábado una de	+2	Sumamos una diferencia de	+7.

Domingo tiene una temperatura igual a 24. No aporta diferencia alguna con el supuesto promedio.
La suma de las diferencias diarias respecto al promedio sugerido es: +2 grados.
Para que 24 sea el promedio, la suma de las diferencias de temperatura en la semana respecto a el deben ser igual a 0.
Por lo tanto, III) es falsa.

Así, solo I) y II) son verdaderas.
Alternativa D).

Observación:
Por supuesto que también podríamos verificar la certeza o falsedad de III) usando la operación aritmética: $\bar{x} = \frac{20+22+28+28+26+27+24}{7} = \frac{175}{7} = 25 \neq 24$.
Pero cuando nos dan una un supuesto promedio o media, para datos no agrupados, el método "intuitivo" es más rápido que la forma tradicional para verificar la certeza o falsedad del mismo.

56. Se registra el tiempo X que una muestra de 7 estudiantes emplea en responder una prueba. La información es la siguiente, en minutos: X: 40, 25, 28, 37, 30, 51, 34
Al respecto, es posible afirmar que, en la muestra:

I: El tiempo mediano de respuesta fue de 37 minutos.

II: El rango de tiempo de respuesta fue de 26 minutos.

III: El tiempo medio de respuesta fue de 35 minutos.

Es (son) correcta (s):

A) Sólo I.
B) Sólo I y II
C) Sólo I y III
D) Sólo II y III
E) I, II y III

Solución:
Al ordenar los datos, tenemos: 25, 28, 30, 34, 37, 41, 51. El término mediano es el dato central en tal ordenación, esto es, 34 minutos. I) es falsa.

El rango viene dado por la diferencia entre los valores extremos: 51 – 25 = 26 minutos.
II) es verdadera.

El tiempo medio viene dado por el promedio de los tiempos.
$\overline{x} = \dfrac{40+25+28+37+30+51+34}{7} = \dfrac{245}{7} = 35$ III) Es verdadera.

Luego, como II) y III) son verdadera, la alternativa correcta es D).

57. Se tienen los números $\sqrt{18}$, $\sqrt{8}$ y $\sqrt{32}$. Entonces:

I) Su mediana es igual a su media aritmética.

II) Su media aritmética es $3\sqrt{2}$.

III) Su rango es $2\sqrt{2}$

Es (son) correcta(s):

A) Sólo I.
B) Sólo II.
C) Sólo I y II.
D) Sólo II y III.
E) I, II y III.

Solución:

$$\left.\begin{aligned}\text{Notemos que: } \sqrt{18} &= \sqrt{9\bullet 2} = 3\sqrt{2}\\ \sqrt{8} &= \sqrt{4\bullet 2} = 2\sqrt{2}\\ \sqrt{32} &= \sqrt{16\bullet 2} = 4\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \overline{x} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{3} = \frac{9\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}.$$

La media es $3\sqrt{2}$ y si ordenamos de menor a mayor los números, notaríamos que $3\sqrt{2}$ estaría al medio en tal ordenación.
I) y II) son verdaderas.

El rango es la diferencia entre el mayor y menor término y en nuestro caso es:
$4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. III) es verdadera.
Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

58. El número de televisores vendidos diariamente por una multitienda durante una semana es: x = 18, 13, 12, 16, 24, 10.
Es posible afirmar que:
    I) El promedio de televisores vendidos en la semana es de 15,5 diarios.
    II) El número mediano de televisores vendidos en la semana es de 14,5.
    III) El rango en el número de televisores vendidos diariamente es de 14 televisores.

Es(son) verdadera(s):
A) Sólo I.
B) Sólo I y II.
C) Sólo I y III.
D) Sólo II y III.
E) I, II y III.

Solución:
Analicemos cada afirmación.

- El promedio viene dado por $\bar{x} = \dfrac{18+13+12+16+24+10}{6} = \dfrac{93}{6} = 15{,}5$

  I) es verdadera.
- Si ordenamos en orden ascendente la cantidad de televisores vendidos tenemos
  10, 12, 13, 16, 18, 24
  Como tenemos una cantidad par de datos, la mediana viene dada por el promedio de los datos centrales, $\dfrac{13+16}{2} = 14{,}5$

  II) es verdadera.
- El rango de televisores vendidos es la diferencia entre la mayor cantidad y el menor valor de televisores vendidos: 24 – 10 = 14.
  III) es verdadera.

Por lo tanto, la alternativa correcta es E).

2.2. *Ejercicios de Desviación Estándar con medidas de tendencia central*

59. Si en un conjunto de datos todos ellos tienen el mismo valor, entonces ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones respecto de esos datos es(son) siempre verdadera(s)?
    I) La media aritmética es cero.
    II) La desviación estándar es cero.
    III) Mediana – Moda = 0.

    A) Sólo I.
    B) Sólo II.
    C) Sólo I y II.
    D) Sólo II y III.
    E) I, II y III.

    Solución:
    Analicemos cada una de las alternativas.
    I) Que todos los valores sean iguales no implica que la media y todos los datos sean cero. Esto último no siempre se puede afirmar. Por lo tanto, I) es falsa.
    II) Como todos los datos son iguales, no hay desviación alguna respecto a la media. Por lo tanto, II) es verdadera.
    III) Mediana – Moda = 0
    $\Rightarrow$ Mediana = Moda
    Como todos los datos son iguales, la diferencia entre la mediana y la moda es cero. Por lo tanto, III) es verdadera.
    Siendo II) y III) verdaderas, la alternativa correcta es D).

60. Si en una muestra, la media es igual a la moda y a la mediana, siempre se verifica que:
    I. Los datos son iguales.
    II. La desviación típica o estándar es 0.
    III. La muestra tiene un solo dato.

A) Sólo I	C) I y III	E) Todas son falsas.
B) I y II	D) I, II y III	

    Solución:
    Analicemos cada alternativa a través de un contraejemplo:
    I) es falsa. En la muestra de valores
    $$1 - 1 - 3 - 3 - 3 - 5 - 5$$
    Tenemos que la media es igual a la moda e igual a la mediana y no todos los datos son iguales.
    II) es falsa, pues la media es 3 y hay valores distintos a ella, por lo que la desviación típica es distinta de cero.
    III) es falsa, el contraejemplo que se presenta no tiene un solo dato.

    Por lo tanto, la alternativa es E).

El ejercicio que se presenta a continuación es distinto al anterior en la afirmación III).

61. Si en una muestra la media, moda y mediana son iguales, siempre se verifica que:
    I. Los datos son iguales.
    II. La desviación típica o estándar es 0.
    III. La moda es por lo menos uno de los datos de la muestra.

    A) Sólo I
    B) Sólo II
    C) Sólo III
    D) Sólo I y II
    E) I, II y III

Solución:
Analicemos cada alternativa a través de un contraejemplo:
En la muestra de valores

$$1 - 1 - 3 - 3 - 3 - 5 - 5$$

Tenemos que la media es igual a la moda e igual a la mediana y no todos los datos son iguales.
Por lo tanto, I) es falsa.
Con esto se descartan las alternativas A), D) y E).
Nos quedan las alternativa B) y C).

La media es 3 y hay valores distintos a él, por lo que la desviación típica es distinta de cero.
Por lo tanto, II) es falsa.
Con esto se descarta la alternativa B).
Nos queda únicamente la alternativa C).

2.3. *Ejercicio de Desviación Media*

62. La desviación media para el conjunto de datos {3, 7, 10, 12} es:
    A) 8
    B) 3
    C) 5
    D) -4
    E) 0

Solución:

La desviación media viene dada por $DM = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{|x_i - \overline{x}|}{n}$. Claramente se requiere el cálculo de la media primero.

$\overline{x} = \frac{3+7+10+12}{4} = \frac{32}{4} = 8$

Luego, $DM = \frac{|3-8|+|7-8|+|10-8|+|12-8|}{4} = \frac{5+1+2+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Alternativa B).

2.4. *Ejercicio de Varianza*

63. Se sabe que la varianza de un conjunto de datos no se expresa en la misma unidad que éstos. Si un conjunto de datos se expresa en metros. ¿En qué unidad de medida se expresará la varianza?
    A) cm
    B) m^2
    C) m^3
    D) m^4
    E) no se puede determinar.

Solución:
SIEMPRE la varianza tendrá el *doble del exponente* que tiene la variable con la cuál se trabaja.
Así, si la unidad de la variable es el metro con exponente uno: $m = m^1$
Su varianza tiene como unidad: $m^{1 \bullet 2} = m^2$
Esta es, alternativa B).