LOS PUZZLES EN ALAMBRE COMO RECURSOS DIDÁCTICOS PARA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Carlos Montoya
Pablo Flores

1. PRESENTACIÓN DE LOS PUZZLES EN ALAMBRE

Quien alguna vez haya tenido que trasladar una mesa desde una habitación a otra, a lo largo de un pasillo, sabe que el espacio tridimensional reserva algunas sorpresas que cotidianamente suelen permanecer inadvertidas. Esto también lo saben los aficionados a los **puzzles de alambre**[1].

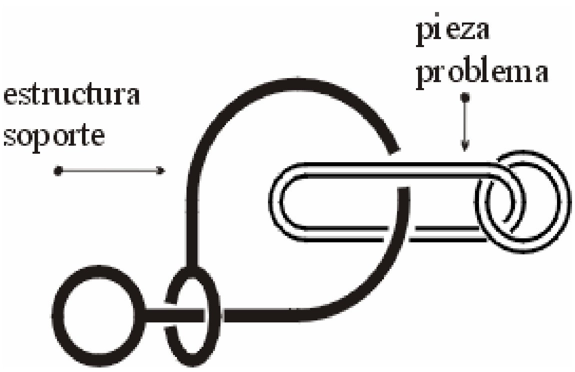

Figura 1: Representación gráfica de un modelo simple de puzzle de alambre.

Estos antiguos juegos artesanales consisten en una estructura compuesta por dos o más piezas de alambre (**Figura 1**). De este conjunto de piezas entrelazadas, el jugador debe separar una de ellas –la *pieza problema*– del resto del conjunto –la *estructura soporte*– sin hacer deformaciones o cortes.

La primera impresión que dan los **puzzles de alambre** parecería indicar que la *pieza problema* no podrá salir de la *estructura base* por encontrarse encerrada, pero la solución de estos juegos no guarda ningún secreto: sólo se trata de encontrar el camino de salida que debe recorrer la *pieza problema* a lo largo de la estructura.

Sin embargo, la búsqueda de este camino pone al jugador frente a desconcertantes problemas en el espacio de tres dimensiones en las que no había reparado. La mejor forma de resolver estos problemas es experimentar de manera lúdica, hasta dar con la solución. Pero en muchas ocasiones, durante los primeros intentos, el jugador suele quedar desconcertado al encontrar una solución inadvertida, sin comprender cómo ocurrió y sin saber cómo volver a la posición inicial.

Estas situaciones generan una curiosidad que invita a avanzar sobre la práctica del juego e intentar comprender su lógica; y es por este camino que, como en tantas otras oportunidades, se encuentran los juegos con las matemáticas.

En este artículo vamos a analizar las características de los puzzles de alambre, trataremos de mostrar algunas de sus cualidades, que les hacen aptos para ser empleados como materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas.

Para argumentar sobre el interés didáctico de unos materiales, el profesor necesita tener claro el *por qué* emplearlos, el *qué* va a enseñar con ellos y el *cómo* utilizarlos. Para ayudar a los profesores de matemáticas en esta reflexión, en el presente artículo comenzamos por presentar los puzzles, y posteriormente trataremos de dar ideas para responder a estas cuestiones. En primer lugar mostraremos sus cualidades e interés matemático (*por qué*). Después analizaremos los apartados de los Currículos de Matemáticas que pueden afrontarse con los puzzles de alambre (*qué*). Y por último describimos un taller realizado en Las Coloradas, Argentina, en el que se han empleado, describiendo la estrategia utilizada (*cómo*).

[1] También conocidos como **rompecabezas** o **laberintos de alambre**, estos juegos pertenecen a una gran familia de juegos de ingenio de encastre, desplazamientos o destrezas similares. Martin Gardner (1986) dice que la primera descripción del rompecabezas "Baguenodier" ("Aros Chinos", entre nosotros) es de Cardano en 1550, lo que muestra que los puzzles en alambre son muy antiguos. Tanto en España como en Argentina, se han difundido gracias a pequeños artesanos, que venden la mercancía en la calle, tras hacerla a los ojos de los paseantes. Actualmente hay empresas de material lúdico que lo fabrican y difunden.

2. DESCRIPCIÓN DE LOS JUEGOS

El universo de los **puzzles de alambre** ofrece una rica variedad de juegos con estructuras y formas diferentes (en algunos casos también se encuentran compuestos por cuerdas o cuerpos de distintos materiales)[2], pero en el presente artículo nos vamos a detener en un grupo de juegos sencillos que comparten una misma *clave de solución*. El representante canónico de este grupo de juegos aparece en la **Figura 1**, mientras que en la **Figura 2** se presentan algunos ejemplos de juegos del mismo tipo.

Hemos seleccionado los puzzles de este grupo para estudiarlos desde el punto de vista didáctico por considerar que las destrezas de resolución necesarias para operar con ellos van a estar presentes en la mayor parte de los demás puzzles de alambres. Además, podemos considerar que este grupo reúne al mayor número de puzzles en alambre y en cuerdas. Su *estructura soporte* se presenta en una gran variedad de situaciones, algunas de ellas muy difundidas.

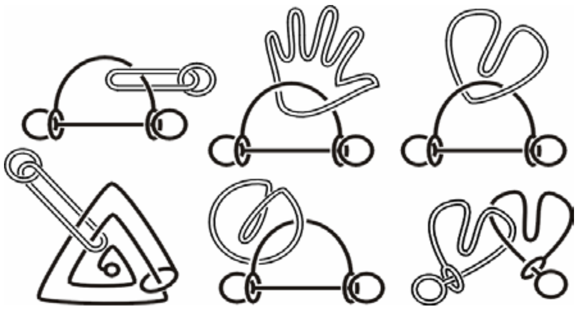

Figura 2: Distintos ejemplos de puzzles de alambre que responden a la representación canónica de la Figura 1. Las *piezas soporte* están representadas en color negro y las *piezas problema* en contorno.

En todos los puzzles de alambre de la Figura 2 se presenta una situación como la siguiente: En la *estructura soporte*, que parecería conformar un cerco sin salida, es posible encontrar ciertos lugares críticos por donde la *pieza problema* puede escapar. Esos lugares se encuentran en sectores de la *estructura soporte* a los que llamaremos *segmento* o *anilla base* y *segmento* o *anilla traba* (**Figura 3**).

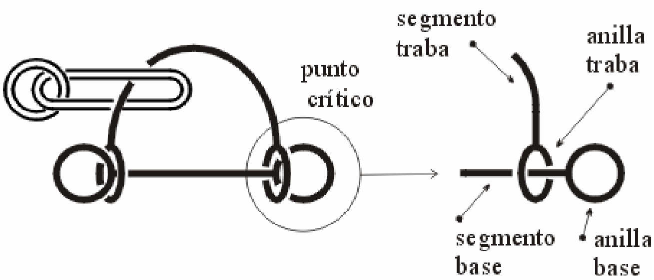

Figura 3: Detalle del punto crítico de la estructura base.

La adecuada disposición de estos sectores configura un espacio por donde la *pieza problema* puede liberarse de la estructura mediante una secuencia de movimientos que consiste en deslizarse por el *segmento base*, introducirse parcialmente en la *anilla traba*, rodear a la *anilla base* y volver a salir por la *anilla traba* (**Figura 4**). La disposición de las piezas de la *estructura soporte* y el movimiento que requiere la *pieza problema* para liberarse es lo que llamamos *clave de solución* y constituye una característica que, con las particularidades que trataremos más adelante, identifica a todos los puzzles del grupo.

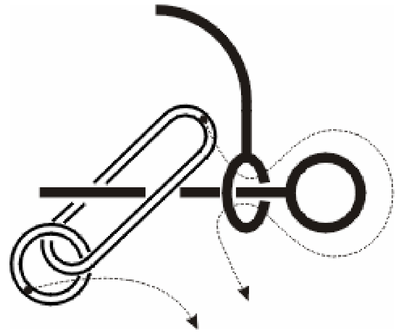

Figura 4: Clave de solución para los puzzles del grupo. Las líneas punteadas indican el recorrido que deben hacer los extremos superior e inferior de la anilla problema.

En la *clave de solución* que identifica a este grupo de juegos se encuentra precisamente la vinculación entre ellos y el conocimiento matemático, dado que los puzzles de alambre pueden ser definidos como

---

[2] En anteriores trabajos hemos presentado los puzzles de alambre y hemos iniciado procesos de clasificación (Montoya y Gómez, 2002; Flores, 2002a). Según estos artículos, hay varios criterios con los que se pueden clasificar estos puzzles, aunque no hemos encontrado ninguno que dé lugar a una clasificación taxativa, ya que no todas las variables contempladas son independientes, por lo que los creadores pueden combinarlas para dar lugar a nuevos modelos.

"estructuras topológico–métricas" (Flores 2002a) y la posibilidad de resolver un puzzle requiere que se cumplan determinadas condiciones en su estructura que remiten a problemas estudiados por la topología y la geometría (Montoya y Gómez, 2002).

3. LOS PUZZLES DE ALAMBRE COMO ESTRUCTURAS TOPOLÓGICO–MÉTRICAS

Ya hemos estudiado algunas características de los puzzles de alambre, y hemos visto que una de ellas, de importancia capital para caracterizarlos, es su naturaleza topológica, es decir, la estructura de enlaces que aparece en el puzzle. Además de los aspectos topológicos, hay que tomar en cuenta aspectos relacionados con la forma y las medidas de las piezas, dado que el material del que están hechos es rígido, y las reglas de juego con los puzzles no permiten deformaciones como las que se aceptan en las transformaciones topológicas. En este apartado vamos a examinar algunas de estas características, comenzando por las topológicas, y continuando por las geométricas. En estas últimas trataremos de contemplar la importancia que tiene la forma de las piezas y las medidas de las mismas, tanto para que el puzzle no sea trivial, como para que tenga solución.

3.1. ASPECTOS TOPOLÓGICOS

La topología es la rama de la matemática que estudia las propiedades del espacio que permanecen inalteradas cuando en éste se producen determinadas alteraciones llamadas transformaciones topológicas. Del conjunto de transformaciones topológicas posibles, los estiramientos, contracciones o torceduras reciben el nombre de *transformaciones continuas*[3], dado que no se contemplan cortes ni autointersecciones. El juego con los puzzles de alambre no admite estas transformaciones, pero tomarnos momentáneamente la libertad de imaginarlos flexibles nos ayudará a analizar su estructura.

Figura 5: Descomposición de un puzzle de alambre mediante *transformaciones continuas*

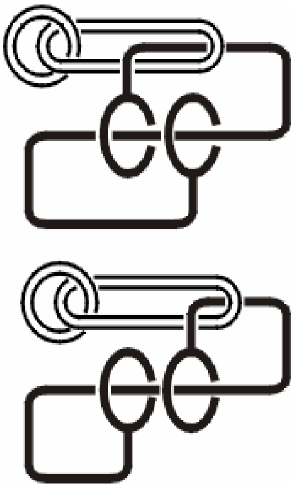

Figura 6: A pesar de su apariencia similar, uno de estos puzzles no cumple con la condición topológica necesaria para tener solución

La impresión de que estos puzzles de alambre son estructuras cerradas sólo se debe a la rigidez del material con los que están construidos. Para ver esto con más claridad, tomemos como ejemplo uno de los juegos representados en la **Figura 2** e imaginemos por un momento que los alambres son elásticos (**Figura 5**). Esto permitiría separar sus partes mediante *transformaciones continuas* y comprobar que se trata de una estructura compuesta por piezas individuales e independientes, que no forman un encadenamiento. Podríamos decir, en cierto sentido, que la *pieza problema*, en la posición inicial del juego, ya se encuentra separada de la *estructura soporte*, puesto que el estado inicial del puzzle de la Figura 5 es topológicamente equivalente al estado final, al cual se llegó sin necesidad de cortar ningún segmento. Esto representa una *condición topológica* necesaria que deben cumplir los puzzles para poder ser resueltos, que no siempre

[3] Las *transformaciones continuas* integran el concepto más amplio de *transformaciones topológicas*. Se denominan *continuas* debido a que de ningún modo admiten cortes ni autointersecciones en los espacios. (COURANT y ROBBINS, 1994). A los propósitos de este artículo, sólo será necesario hacer referencia a las *transformaciones continuas*, cuyo ejemplo más intuitivo es el de deformación.

suele reconocerse a simple vista, aunque enunciada parezca trivial. Por ejemplo, uno de los dos puzzles de la **Figura 6** no cumple esta condición y, en consecuencia, no tiene solución posible.

3.2. GEOMETRÍA DE LOS PUZZLES DE ALAMBRE

Los análisis topológicos que ensayamos más arriba no explican todo lo que encierran los puzzles de alambre, pues sus materiales no admiten las deformaciones que son el objeto de la geometría elástica. Es en este punto donde nos encontramos con ciertas condiciones que imponen al juego los aspectos geométricos de los puzzles.

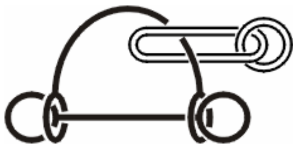

Figura 7: Puzzle seleccionado para ejemplificar aspectos geométricos

La geometría es la rama de la matemática que se encarga del estudio de las formas y sus medidas. En este caso, las piezas de los puzzles de alambre tienen formas y medidas determinadas, que deben guardar una cierta relación entre ellas, para cumplir con una doble y paradójica función: determinar el grado de dificultad del puzzle, a la vez que hacer posible su resolución. Desarrollaremos estos aspectos geométricos tomando como ejemplo el puzzle de la **Figura 7**.

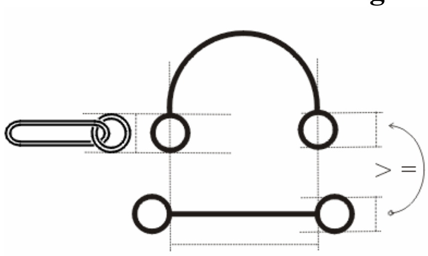

Figura 8: Restricciones geométricas en los puzzles de alambre

Las restricciones geométricas (**Figura 8**) que impiden una solución trivial son las siguientes:

a) El diámetro de las *anillas base* debe ser mayor o igual al de las *anillas traba*. Esto impide que la estructura se pueda desmontar.
b) El diámetro mayor de la *pieza problema* deber ser mayor o igual al de la *anilla traba*. Esto impide la salida de la *pieza problema* por simple deslizamiento.

Ahora veremos las relaciones geométricas que permiten la solución (**Figura 9**). Éstas se encuentran directamente vinculadas con los movimientos necesarios para liberar la pieza y se establecen entre un determinado sector de la *pieza problema*, que denominaremos *sector clave*, y el *lugar crítico* de la estructura soporte.

a) La forma y las dimensiones *del sector clave* de la pieza problema deben permitirle pasar a través de la anilla traba.
b) La longitud del *sector clave* de la pieza problema debe ser mayor que la distancia que existe entre la anilla traba y el extremos saliente de la anilla base.
c) La forma y las dimensiones de la anilla base deben permitirle introducirse en el sector clave de la *pieza problema*.

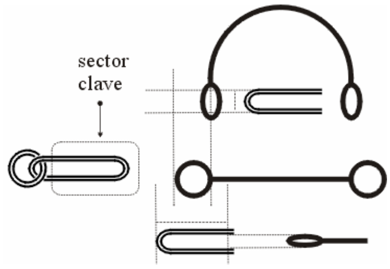

Figura 9: Relaciones geométricas entre el sector clave y el lugar crítico que permiten la solución del puzzle

Estas tres condiciones geométricas que permiten que el puzzle tenga solución deben presentarse simultáneamente, ya que si una sola de ellas no se cumpliese, la solución se tornaría geométricamente imposible.

Aunque las piezas de la **Figura 2** tengan distintas formas, verifican estas condiciones. En la *pieza problema* con forma de "mano", el sector clave está representado por un dedo, y en la que tiene forma de "corazón", por la hendidura central. En el puzzle de laberinto triangular, el obstáculo que presenta la *anilla base* está enfatizado por el laberinto que se inicia en el interior de la *anilla traba*.

3.3 COMBINACIONES TOPOLÓGICO–MÉTRICAS

Planteadas las *condiciones topológicas* y *geométricas* para la construcción y solución de los puzzles de alambre, es posible combinarlas imaginativamente para obtener nuevos modelos de puzzles o explorar posibles soluciones a puzzles complejos a partir de otros más sencillos.

Mientras se mantengan las relaciones geométricas entre el sector clave de la *pieza problema* y el lugar crítico de la estructura soporte (las *condiciones geométricas*) un puzzle podrá tomar diferentes formas mediante *transformaciones continuas* sin que se altere su clave de solución. Con los puzzles de la Figura 2 podemos tomar algunos ejemplos que mostramos en la **Figura 10**.

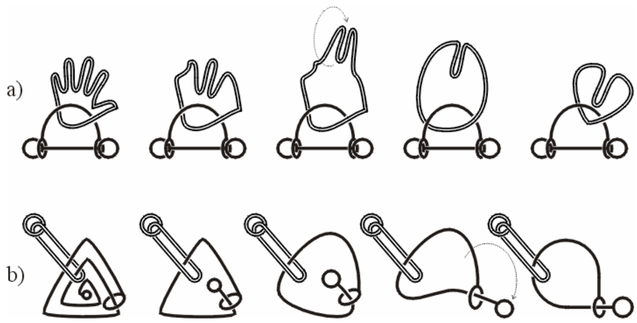

Figura 10: Comparación y obtención de nuevos puzzles mediante *transformaciones topológicas continuas*
a) *Transformaciones continuas* de la *anilla problema* conservando las condiciones geométricas del *sector clave*.
b) *Transformaciones continuas* de la *estructura base* conservando las condiciones geométricas del *lugar crítico.*

4. ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y PUZZLES DE ALAMBRE

Tal como hemos mostrado en el apartado anterior, la resolución, el análisis y el estudio de los puzzles de alambre requiere apreciar aspectos topológicos (huecos, posiciones, enlaces, etc.) y geométricos (formas y distancias). En lo que sigue, realizaremos un recorrido por el Área de Matemática, tal como es presentada en los Diseños Curriculares de España y Argentina, con el objeto de señalar los conocimientos geométricos y topológicos que constituyen el conjunto de herramientas teóricas necesarias para abordar los problemas que presentan los puzzles de alambre, lo que nos permitirá argumentar sobre la pertinencia de su empleo como material manipulativo en la enseñanza de las matemáticas.

4.1 Los puzzles de alambre en el currículo de matemáticas de Argentina

En el marco de la llamada transformación educativa, iniciada con la promulgación de la discutida Ley Federal de Educación, en la República Argentina se desarrolló un proceso de transformación curricular tomando como base los Contenidos Básicos Comunes para el Nivel Inicial y la Educación General Básica (CBC) aprobados por la XXII Asamblea Extraordinaria del Consejo Federal de Cultura y Educación. A partir del año 1995 cada jurisdicción inició un proceso de adecuación y elaboración curricular sobre los CBC que concluyó con la elaboración de un Diseño Curricular provincial.

En la provincia del Neuquen, jurisdicción en donde se desarrolló la experiencia didáctica que se describe en este artículo, la Ley Federal de Educación encontró su mayor resistencia por parte del sector docente hasta el punto de estar su aplicación actualmente suspendida. No obstante, los procesos de elaboración curricular siguieron adelante y hoy coexisten en la provincia diferentes documentos reconocidos con distinto grado de legitimidad. Entre ellos, el Diseño Curricular para la provincia del Neuquen (Consejo Provincial de Educación, 1999) desarrollado en el marco de la llamada transformación educativa es el que registra la última fecha de actualización.

El Diseño Curricular para la provincia del Neuquen presenta el área de Matemática organizada en distintos ejes. El estudio del espacio está abordado principalmente por el eje

Geometría. La Topología se encuentra ausente como disciplina, pero existen referencias a nociones topológicas elementales que están planteadas desde el campo de la Geometría.

En la caracterización del eje Geometría, propone que su enseñanza se organice a partir de situaciones problemáticas espaciales, en donde los conceptos geométricos resulten instrumentos privilegiados para anticipar la solución del problema. En este contexto de trabajo, se procura que el alumno pase de un control empírico a un control por medio de razonamientos, permitiéndose enriquecer sus experiencias y apoyarse sobre su saber empírico para estructurar el saber geométrico. Ese salto cualitativo se traduce por la posibilidad de:

- Reconocer, describir, reproducir o transformar objetos y figuras.
- Probar enunciados, usando las condiciones necesarias y suficientes.
- Prever la posibilidad o no de la realización efectiva de una construcción y realizarla.

La descripción de un objeto está definida como

> *...una actividad de comunicación en donde se pasa de un objeto físico y sensible a un discurso sobre ese objeto o sobre la imagen o la representación que se ha hecho cada uno* (Consejo Provincial, 1999, p. 139).

La descripción permite identificarlo, reproducirlo o representarlo utilizando el lenguaje geométrico. La construcción manual y organizada de puzzles es una actividad que se presenta muy atractiva a los niños y demanda tareas comunicativas con las que pueden desarrollar la práctica de un lenguaje matemático preciso.

El diseño sostiene que para que los alumnos

> *...puedan progresar en el estudio de la geometría es muy importante que hayan podido construir un sistema mental de referentes a partir de las experiencias con el espacio físico.* (Consejo Provincial, 1999, p. 139).

Estas experiencias sensibles están privilegiadas en el primer ciclo (de 6 a 8 años) pues son las que deben permitir a los niños coordinar las informaciones que obtienen del entorno a partir de los sentidos, con su acción y con la palabra. El juego con puzzles de alambre ofrece la posibilidad de explorar un espacio tridimensional cercano y manipulable. En la medida que los niños se familiaricen con los puzzles, podrán describir las operaciones que con ellos se realizan descentrando poco a poco su lenguaje, desde una visión subjetiva hacia otra objetiva y matemática.

Las nociones espaciales de ubicación y orientación que en el primer ciclo contribuyen al dominio del espacio tienen su continuidad en el segundo ciclo y en el tercero, a través de la incorporación de contenidos cada vez más complejos como, por ejemplo, la representación tridimensional.

Algunos de los contenidos propuestos en el eje de Geometría que contemplan los procesos señalados anteriormente, son los siguientes:

> *Orientación y ubicación de los objetos en el espacio. Representaciones verbales y gráficas de recorridos en el espacio próximo. Puntos de referencia. Codificación de desplazamientos.* Interpretación, utilización y elaboración de códigos para describir la ubicación de un objeto en el espacio. *Cuerpos.* Descripción oral. *Figuras planas. Clasificación en convexas y no convexas. Clasificación en polígonos y no polígonos. Identificación y denominación de figuras. Reproducción usando diferentes técnicas.* […] *Representaciones gráficas de recorridos.* (Consejo Provincial, 1999, p. 131- 132).

Las nociones espaciales también son abordadas desde el eje Medidas comprendido en el área de Matemática. Allí se hace referencia a la posibilidad de utilizar inicialmente unidades no convencionales con la finalidad de reflexionar sobre las reglas de cambio y progresar hacia la consolidación de la práctica en los sistemas convencionales. Esto tiene particular interés, dado que las relaciones métricas que conservan las piezas de los puzzles son relativas y se pueden definir por comparación. Algunas de las actividades iniciales propuestas para el primer ciclo son la clasificación y ordenación de objetos por su longitud, por comparación directa o utilizando una unidad no convencional o las convencionales más usuales.

Dentro del área de Matemática, el currículum prevé la posibilidad de compartir la construcción de las nociones espaciales con otras áreas o disciplinas. En este sentido, las oportunidades que ofrecen los puzzles de alambre permiten establecer vínculos con Educación Plástica (Área de Educación Artística) y con Educación Física. A Educación Plástica concierne lo que se refiere al conocimiento y representación del espacio bi y tridimensional. Algunos de los contenidos compartidos son: la línea (recta, curva), la representación en el espacio bidimensional, la representación en el espacio tridimensional, construcción, la forma (abierta, cerrada, regular, irregular), los puntos de vista (arriba, abajo, cerca, lejos), el plano. En el campo de la Educación Física, donde se procura la adquisición de un esquema corporal dinámico adaptado a las relaciones espaciales, es posible implementar juegos similares al de la Figura 3, en donde se recrean las situaciones de los puzzles a escala corporal.

4.3. Los puzzles de alambre en el currículo de matemáticas de España

En España, el Ministerio de Educación y Ciencia elabora Decretos que regulan la enseñanza de las distintas disciplinas en todo el territorio nacional. Posteriormente, las comunidades autónomas desarrollan estos Decretos, adaptándolos a su idiosincrasia particular. Para estudiar la posible utilización de los puzzles de alambre en la educación matemática en Enseñanza Primaria, vamos a analizar el Decreto del Ministerio y la forma en que lo ha adaptado el Gobierno andaluz.

En el Decreto de Enseñanza Primaria Español (MEC, 1991) no se hace alusión a los aspectos topológicos, probablemente porque las relaciones topológicas básicas (proximidad, dentro/fuera, etc.) se han considerado específicamente en la Educación Infantil. Sin embargo los puzzles en alambre son una buena ocasión para identificar formas en figuras manipulativas, todo ello con una funcionalidad (sacar la pieza problema), que además es lúdica, para conseguir el objetivo 9.

> Objetivo 9: *Identificar formas geométricas en su entorno inmediato, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para incrementar su comprensión y desarrollar nuevas posibilidades de acción en dicho entorno*. (BOE, 1991, p. 31)

Tal como se observa en el análisis de los puzzles de alambre, la estimación de medidas y la posterior constatación de las relaciones entre tamaños se pone en juego en la fase de *exploración* libre del taller con los puzzles. Además hay que identificar la forma para seleccionar la parte de la *pieza problema* que permite realizar algún movimiento. Esta percepción se materializa al *construir* posteriormente los puzzles.

Los contenidos matemáticos del Diseño Curricular Base Español refrendan este interés, sin hacer alusión directa, ya que los puzzles son objetos con los que se realiza un análisis geométrico de la forma y medida de objetos, con lo que permiten afrontar los bloques 2 y 4:

> Bloque 2: ***La Medida***
> *Procedimientos: Elaboración y utilización de estrategias personales para llevar a cabo mediciones de manera exacta y aproximada.*
> Bloque 4: ***Formas geométricas y situación en el espacio***
> *Conceptos: Regularidades y simetrías;*
> *Procedimientos: Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en figuras y cuerpos geométricos*
> *Actitudes: 2) Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones a situaciones*

problemáticas relacionadas con la organización y utilización del espacio. (BOE 1991, p. 32).

En el taller que describimos en el punto siguiente se han explotado los puzzles de alambre en procesos cíclicos (Montoya y Gómez 2001, Flores 2002b): *Experimentación* (juego libre y comunicación) – *Representación* – *Elaboración*. Estos ciclos facilitan que el jugador se cree imágenes mentales de los puzzles que le permitan relacionar las figuras con las transformaciones de las mismas que se ejecutan en la fase de experimentación. Tanto si consideramos el proceso global del ciclo, como si analizamos cada fase, observaremos que la resolución de los puzzles de alambre exige un ejercicio de ensayo y error, representación mental de las figuras (con la consiguiente retención de formas), y de análisis de las características de las piezas, con objeto de buscar otros puzzles semejantes que sirvan de apoyo para la búsqueda de nuevas estrategias de resolución. Si logramos que los alumnos eviten enfrentarse a los puzzles con una actitud competitiva, tendente solamente a separar la *pieza problema* a cualquier precio, estaremos colaborando a que se sometan a unas reglas y una disciplina para resolver los retos que se le presentan, con lo que atenderemos a las actitudes que se proponen en el Decreto de Educación Primaria (MEC, 1991).

En el Diseño Curricular Base de la Educación Primaria en Andalucía (Junta de Andalucía, 1992), se añaden nuevas consideraciones. Un objetivo realza la importancia de crear destrezas de orientación en el espacio:

> *4. Elaborar estrategias personales de (...) orientación en el espacio y aplicarlas a la resolución de problemas sencillos.* (Junta de Andalucía 1992, p. 114)

El Bloque 6 de contenidos propone llevar a cabo un proceso gradual de relación con las formas del entorno, que parte de la percepción intuitiva para llegar a la construcción de relacione topológicas:

> *Bloque 6:* ***Conocimiento, orientación y representación espacial****;*
> *Introducción: Al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y representación espacial el alumno progresará, en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva construcción de* ***nociones topológicas****, proyectivas y euclidianas, que le facilitarán su adaptación y utilización del espacio*. (Junta de Andalucía, p. 114)

Posteriormente se indican tres aspectos o dimensiones que permiten organizar la enseñanza para conseguir que el alumno se relacione con los objetos, en el medio: fortalecimiento de las relaciones topológicas, coordinación de diferentes perspectivas desde la que se perciben las formas y la introducción de referentes para situar los objetos en el espacio. La primera de ellas está relacionada con el trabajo con los puzzles de alambre:

> ***Percepción, conocimiento y generalización de nociones topológicas básicas y aplicación de las mismas al conocimiento del medio****: Durante toda esta etapa se propondrán situaciones en las que intervengan nociones como proximidad, separación, orden, cerramiento, continuidad,... Se comenzará a vivenciarlas mediante juegos y actividades donde los alumnos hayan de situarse, aproximarse, desplazarse, etc. Posteriormente lo harán con objetos y elementos reales, estableciendo relaciones espaciales como cerca, lejos, dentro, fuera, sobre, debajo, delante, etc. Seguidamente se tratará, en situaciones contextualizadas, la relativización de estos conceptos, invitándoles a la secuenciación, clasificación y representación de las relaciones en orden a un referente establecido. Se trabajará la representación oral y gráfica de las acciones realizadas, mediante signos y códigos elaborados por los propios alumnos. Ello facilitará la representación mental de estas nociones*. (Junta de Andalucía 1992, p. 114).

El esquema del taller que presentamos pone a los alumnos en situación de afrontar problemas reales de naturaleza geométrica, que exigen la realización de ciclos de aproximación a las formas, medidas y disposiciones topológicas que siguen el esquema trazado en este Decreto de Matemáticas en Educación Primaria (Junta de Andalucía, 1992).

En resumen, en el currículo español de matemáticas para la Educación Primaria (niños de 6 a 12 años de edad) se insiste en aspectos del estudio métrico y geométrico que pueden abordarse con tareas lúdicas relacionadas con el análisis, clasificación y resolución de puzzles de alambre. En el Currículo andaluz para el mismo nivel (Junta de Andalucía, 1992), se alude específicamente a que se propongan actividades que favorezcan en el niño la interiorización consciente de dimensiones topológicas, y a ello puede colaborar de manera evidente trabajar en el aula de matemáticas con puzzles de alambre.

5. UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA CON PUZZLES DE ALAMBRE: TALLER EN LAS COLORADAS

En el mes de octubre del año 2001, se organizó un pequeño taller extraescolar y optativo de juego y construcción con puzzles de alambre con niños de 4º Grado de la Escuela N° 88 de Las Coloradas (Provincia del Neuquen, Patagonia Argentina). La propuesta hacia los alumnos consistió en poder jugar y aprender a construir los juegos. Pero, además de ofrecer a los alumnos un espacio de recreación y aprendizaje con un material de interés, para el docente coordinador consistió en una actividad exploratoria con el propósito de poder observar qué sucedía en la interacción de los niños con los juegos en situación de aprendizaje. Para esto se plantearon algunas preguntas orientadoras de la práctica y la observación:

- ¿Qué nuevos problemas espaciales, motrices y comunicativos presentan los juegos?
- ¿Qué estrategias se ponen en práctica para la resolución de estos problemas?
- ¿Qué aspectos de los juegos permiten desarrollar actividades de enseñanza–aprendizaje?

El taller se desarrolló en cuatro encuentros semanales, en los cuales se pudo realizar un registro parcial en video. Las actividades realizadas durante estos cuatro encuentros se podrían analizar en cuatro etapas diferentes y consecutivas: *Juego libre, Comunicación, Representación gráfica y Construcción*. Dado que los puzzles en alambre son "solitarios", la primera etapa corresponde al momento de acción individual, incorporando las etapas de juego libre y juego reglado de Dienes (1971). La concepción constructivista del aprendizaje nos hizo proponer una etapa de comunicación entre los sujetos (Vygotsky, 1993), por mostración y verbalización. Durante esta etapa se va percibiendo la necesidad de un nuevo lenguaje, que permite pasar a una etapa de representación, correspondiente a los procesos de explicitación, en las fases del aprendizaje de Van Hiele (Alsina y otros, 1987), y a la etapa de representación de Dienes (1971). Aunque nuestra intención no es formalizar los aprendizajes, sí tenemos intención de que se afiancen, por lo que recurrimos a una etapa de construcción, en la que se produce una cierta *integración* (última fase del modelo de aprendizaje de los Van Hiele, Alsina y otros, 1987), pragmática, ya que requiere que se pongan en juego los elementos aprendidos en las anteriores.

Primera Etapa: *El Juego Libre*

El taller se inició presentando a los niños un conjunto de puzzles simples para que explorasen el juego libremente. En esta etapa se observó que la mayoría de los niños (que concurrieron al taller) tendían a compenetrarse en la actividad con alta concentración. Curiosamente, durante las primeras interacciones con los puzzles, se observaron formas de proceder que también se dan en los adultos. Una de ellas consiste en realizar movimientos improvisados y repetitivos, como insistentes tanteos a ciegas. Estas parecen ser las primeras acciones necesarias para comenzar a reconocer los límites de la estructura espacial que se tiene en las manos. Estos intentos simples van haciéndose cada vez más complejos, ya que la *pieza problema* comienza a buscar curvas y agujeros en la estructura. Algunos niños preguntaron si el puzzle efectivamente se podía resolver, pues consideraban que la posibilidad de que no tuviese solución era aceptable en el marco reglado de juego.

Cuando se ejecutan estos tanteos, suele ocurrir que la solución sobrevenga sin haberla previsto y ésta también es una situación que se observa en adultos. La expresión de sorpresa también se reitera. A partir de aquí comienza la etapa complementaria de la resolución del juego que consiste en volver a colocar la *pieza problema* en la posición inicial.

La recomposición del puzzle es un desafío muy interesante, pues consiste en la operación inversa de la que se realizó para sacar la *pieza problema*. En este caso, se observó que ningún niño preguntó si era posible volver a colocarla, pues dieron por sentado la reversibilidad de la operación, lo cual se asienta en una noción intuitiva de conservación de las propiedades topológicas durante las transformaciones continuas.

No obstante, esta operación presentó muchas dificultades. Una de ellas podría basarse en la idea, forjada en el sentido común, de que todo lo que ingresa a un espacio debe hacerlo desde afuera hacia adentro. Es así que en los primeros intentos de recomponer el puzzle suelen ensayarse movimientos como los señalados en la **Figura 11.a)**, sin advertir aún que es necesario realizar un movimiento previo, en sentido contrario **(Figura 11.b)**. También se observó una tendencia a introducir la *pieza problema* en la *anilla base*.

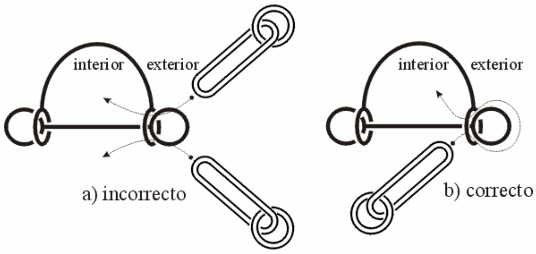

Figura 11: a) Primeros intentos de recomponer el puzzle, desde afuera hacia adentro. b) Forma correcta de recomponer el puzzle; obsérvese que es el recorrido inverso a la clave de solución. El primer paso, objetando el sentido común, tiene dirección dentro–fuera.

Segunda Etapa: Comprensión y Comunicación de la resolución

En esta etapa, la mayoría de los niños lograron resolver el juego con seguridad, sin necesidad de realizar ningún tanteo. Ello se alcanza después de haber realizado la operación de liberar la pieza y volver a colocarla varias veces. Algunos niños retiraban lentamente la pieza problema cuando advertían que estaba a punto de salir de la *estructura*, y de esa forma observaban con detenimiento cómo ocurría la salida. Una vez que la pieza era liberada, si no la alejaban demasiado de la estructura, lograban identificar enseguida el camino inverso. Aparentemente, esa posición les permitía reconstruir mentalmente el recorrido recientemente realizado, para volver a la posición inicial realizando los movimientos inversos.

Cuando hubieron resuelto varios puzzles diferentes (todos con la misma clave de solución) algunos niños fueron capaces de identificar lo que hemos llamado el *sector clave* y señalarlo en distintas *piezas problema*. De este modo pudieron jugar a intercambiar la *pieza problema* y colocarla en diferentes estructuras bases o realizar encadenamientos de juegos, generalizando la forma de solución.

No obstante, se observó que los niños que descubrían que en el puzzle con forma de mano uno de los “dedos” funcionaba como *sector clave* no atribuían inmediatamente esa propiedad a cualquiera de los otros cuatro “dedos” (o los espacios entre “dedos”).

Como era de esperar, no todos los niños llegaron al mismo tiempo a esta etapa. Los niños que aún no habían afianzado los pasos consultaban a quienes ya lo lograron, o bien observaban y trataban de repetir los movimientos que realizaba algún compañero sobre un puzzle similar. Seguidamente son capaces de repetir los movimientos observados y resolver el puzzle. Atendiendo a las consultas, los que ya habían llegado a dominar el puzzle realizaban indicaciones o demostraciones. Se producía así una serie de intercambios de experiencias que demandaban un lenguaje capaz de describir los nuevos objetos y las operaciones realizadas con ellos. En estas conversaciones, los alumnos dan muestras de estar interiorizando (Vygotsky, 1993) y construyendo un espacio lógico–matemático a través de un proceso de abstracción reflexiva originado en las propias acciones sobre los objetos (Gálvez; 1998, Dickson y otros, 1991). En el párrafo que sigue se puede apreciar la explicación de una alumna del taller acerca de la similitud entre dos *piezas problema* y su clave de solución.

> **Daniela (9 años)**: *Es lo mismo que el corazón, la manita* (se refiere a las dos *piezas problema* que tienen esa forma) *[...] Tiene el agujerito, lo mete para… eh… hay como una curvita, así,* (va apoyando su explicación con movimientos de sus manos) *hay que meterlo para adentro, correrlo para el otro lado, bajarlo para abajo y ya lo sacas.*

Esta explicación, en la que se observa un esfuerzo por describir la experiencia espacial, da cuenta de que la niña ha conocido y comprendido los vericuetos espaciales que depara el juego. Este puede ser el momento de iniciar un proceso de apropiación sintáctica y semántica del lenguaje matemático para construir, desde el lenguaje natural y cotidiano, un lenguaje formal y preciso con mayor potencial descriptivo y comunicativo desarrollado, a su vez, sobre soportes gráficos o concretos que allanen el dificultoso camino que representa la exposición oral.

Tercera Etapa: Representación gráfica de los puzzles

Una vez comprendida la solución de los puzzles, se propuso a los alumnos que dibujasen algunos modelos como paso previo a la construcción real. En los primeros dibujos se observaron dificultades comunes. En principio los niños no llegaban a diferenciar detalles de los enlaces necesarios para la construcción de los puzzles, ni las formas de las piezas que eran esenciales para la resolución del juego. Las partes que presentaron mayor dificultad en su representación fueron las de los lugares críticos. En esos sectores, la representación gráfica de algunos segmentos presentaba discontinuidades **(Figura 12.a)**. En otros casos la dificultad estaba en representar la ortogonalidad entre el segmento y la anilla **(Figura 12.b).** Finalmente, se observó que las representaciones gráficas espontáneas no conservaban la proporcionalidad entre el *sector clave* y el *lugar crítico* y entre la *anilla traba* y la *anilla base*, es decir que no representaron las relaciones geométricas necesarias para poder resolver los juegos.

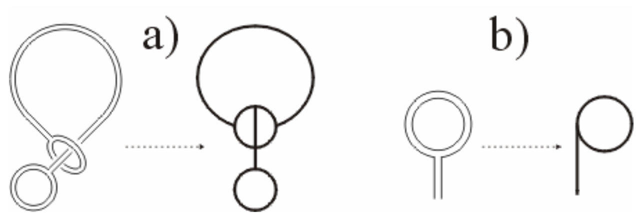

Figura 12: representaciones gráficas espontáneas: a) estructura con discontinuidad de segmentos y b) unión de segmento y anilla

En una segunda fase se pidió a los alumnos que, en las intersecciones, diferenciaran con una pequeña discontinuidad los segmentos que pasan por delante de los que pasan por detrás, tal como se presentan las figuras en este trabajo. Esta tarea fue realizada con facilidad, aunque hubo que dibujar en primer lugar el puzzle con todas sus intersecciones continuas con lápiz y luego repasar los segmentos con tinta deteniéndose en las intersecciones, para analizar si se continúa el trazo o se deja abierto.

Como cierre de las actividades gráficas, se pidió que representaran sobre los dibujos realizados el camino que recorre la anilla problema para salir de la estructura. Aquí se presentaron muchas dificultades que obligaron a volver a manipular los puzzles y a reflexionar nuevamente sobre los movimientos con los que ya estaban familiarizados empíricamente.

Cuarta etapa: Construcción de los puzzles

La última actividad del taller consistió en la construcción de puzzles de alambre. En esta última tarea, que para los niños resultó tan atractiva como el juego mismo, fue necesario desarrollar algunas técnicas y habilidades motrices relacionadas con el uso de herramientas como pinzas, alicates y otros elementos utilizados para dar formas curvas a los alambres. Así como en la representación gráfica, en la reproducción material los niños no siempre tuvieron en cuenta las relaciones geométricas de las piezas. Pero estos errores fueron advertidos cuando intentaron resolver los puzzles recién construidos. Esto llevó a nuevas reflexiones informales sobre los aspectos geométricos, que hasta ahora no habían sido tenidas en cuenta. De este modo, se pudo llevar a cabo la construcción de juegos como el que tiene forma de mano, logrando que sea un solo dedo de la anilla problema, o un solo lugar crítico de la estructura el que permitiera la solución.

Comentarios finales

Esta experiencia es sólo un ejemplo de escenarios que pueden presentarse al operar con estos juegos en una situación de enseñanza / aprendizaje. Hasta ahora podemos constatar que los puzzles representan un objeto de interés para los niños y los predispone a explorar activamente sus posibilidades de solución, que, como hemos visto, están ligadas a aspectos topológicos y geométricos. Los puzzles ponen de evidencia conflictos en la relación con el espacio y sobre todo en la representación que los niños hacen de él. Los procesos de comunicación –tanto orales cómo gráficos– que se desarrollan sobre los nuevos problemas promueven la abstracción reflexiva de las propiedades espaciales y demandan la apropiación progresiva de un lenguaje que permita una mayor precisión y entendimiento.

REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos presentado un grupo de puzzles de alambre y hemos desarrollado su interés formativo en la educación matemática en la enseñanza obligatoria, especialmente en la Educación Primaria. Estos puzzles plantean verdaderos retos, a través de actividades lúdicas que despiertan la curiosidad y el interés de los alumnos, haciéndolos propensos a explorar algunas cualidades del espacio tridimensional. Ello nos hace justificar (*porqué*) el empleo de los puzzles en la enseñanza de las matemáticas: las experiencias realizadas nos han mostrado que es posible introducirlos y que llegan a motivar a los niños.

Hemos mostrado el interés matemático de los puzzles ligado a sus cualidades topológico-métricas, que pone a los alumnos frente a originales situaciones problemáticas en el espacio tridimensional mediante las cuales pueden desarrollar un conjunto de aprendizajes contemplados en los Diseños Curriculares oficiales. Aunque no está extendido entre los profesores el empleo de los puzzles, y por tanto se puede ver como superfluo por la comunidad educativa, nuestra experiencia y análisis nos ha proporcionado la ocasión de desarrollar destrezas y habilidades espaciales que se contemplan en los Currículos oficiales (*qué*).

Finalmente, la experiencia didáctica que presentamos a través del taller de construcción de juegos muestra la posibilidad de concretar estas prácticas. Como todo recurso didáctico, los puzzles de alambre tienen que formar parte de unidades didácticas bien definidas, en las que se incorporen para lograr finalidades formativas seleccionadas, superando su mero papel lúdico, pero aprovechando este componente. Tal como hemos visto, las etapas propuestas en el taller se relacionan con las señaladas en otros documentos sobre enseñanza de la geometría (Alsina y otros, 1987).

Esperamos que esta propuesta invite a docentes e investigadores a indagar en las propiedades de los puzzles de alambre y sus vinculaciones con la Didáctica de las Matemáticas en la construcción del pensamiento espacial.

Referencias bibliográficas

ALSINA, C., BURGUÉS, C. Y FORTUNY, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid, Síntesis.

CONSEJO PROVINCIAL DE EDUCACIÓN. PROVINCIA DEL NEUQUEN (1999) *Educación General Básica. Diseño Curricular***.** Neuquen. Argentina.

COURANT, R. y ROBBINS, H. (1994). Topología. En NEWMAN, J. R.(Ed.), *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. Tomo 4. 173-191. Grijalbo. Barcelona.

DICKSON, L., BROWN, M. Y GIBSON, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona. Labor-MEC.

DIENES, Z.P. (1971). *Las seis etapas del aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, Teide.

FLORES, P. (2002a). Laberintos con alambre. Estructuras topológico – métricas*. SUMA 41*. 29-35.

FLORES, P. (2002b). Taller de resolución de problemas: Puzzles en alambre. En Cardeñoso, J.M. y otros (Eds.). *Investigación en el aula de Matemáticas. Resolución de Problemas*. 113-116. Granada, SAEM THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.

GÁLVEZ, G. (1998): La Geometría, La psicogénesis de las nociones espaciales y la enseñanza de la geometría en la escuela elemental. En PARRA, C. y SAIZ, I. (Comps.): *Didáctica de las Matemáticas***.** *Aportes y reflexiones***.**273-299**.** Paidós Educador. Buenos Aires.

GARDNER, M. (1986). *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas*. Labor, Barcelona.

GÓMEZ, G. (2000). *Nudos en el nivel medio superior*. Comunicación presentada en la RELME 14, Panamá, 17 al 21 de julio del 2000.

JUNTA DE ANDALUCÍA (1992). *Currículum de Educación Primaria. Área de Matemáticas*. Decreto 105/92, de 9 de Junio de 1992, Anexo II. *BOJA 56*. 40860-41014. Publicado en Junta de Andalucía: *Decreto de Educación primaria*. Bytgraf, Sevilla.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991). *Educación Primaria. Matemáticas*. Real Decreto 1344/1991 de 6 de Diciembre. *BOE 220*, suplemento. 31-35.

MONTOYA, C. y GÓMEZ, G. (2001). *Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre*. Comunicación presentada en la RELME 15, Buenos Aires, 23 al 27 de julio de 2001.

VYGOTSKY, Lev S. (1993) *Pensamiento y Lenguaje*. Ediciones Librerías Fausto. Buenos Aires.