

Andrés Zarabozo Martínez

Propulsión. Teoría

Ingeniería Aeronáutica

ETSEIAT

2011

Acerca de estos apuntes

Estos apuntes se han realizado para cubrir el temario de la asignatura “Propulsión”, que se imparte en el cuarto curso de Ingeniería Aeronáutica, en la Escola Tècnica Superior d’Enginyeries Industrial i Aeronàutica de Terrassa, de la Universitat Politècnica de Catalunya (ETSEIAT – UPC).

Licencia

Esta obra está bajo una licencia Attribution-ShareAlike 3.0 Unported (CC BY-SA 3.0) de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite:

http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es_ES

En líneas generales:

Es libre de:

- Compartir – Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
- Transformar la obra y crear obras derivadas.
- Hacer un uso comercial de esta obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento** — Debe reconocer al autor de la obra original (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoya el uso que hace de su obra).
- **Compartir bajo la Misma Licencia** — Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.



0. Índice

0. Índice.....	3
1. Empuje	5
1.1. Ecuaciones de empuje para motores cohete	5
1.2. Empuje de un flujo simple en un turboreactor	7
1.3. Tipos de “Air breathing engines”	9
2. Conceptos básicos de termodinámica	11
2.1. Gas perfecto y caloríficamente perfecto	11
2.2. La ecuación de la energía.....	11
2.3. Casos particulares	13
2.4. Entropía.....	13
2.5. Proceso isentrópico.....	14
2.6. Movimiento isentrópico casi unidimensional.....	14
2.7. Parámetro de flujo de masa.....	14
2.8. Atmósfera estándar internacional	16
3. Turboreactor de flujo simple	17
3.1. Hipótesis.....	17
3.2. Condiciones del flujo libre, etapa 0-1	18
3.3. Entrada o difusor, etapa 1-2	18
3.4. Compresor, etapa 2-3	19
3.5. Cámara de combustión, etapa 3-4.....	19
3.6. Turbina, etapa 4-5.....	20
3.7. Tobera etapa 5-9.....	20
3.8. Ecuación del empuje del turboreactor	22
3.9. Turboreactor ideal.....	23
3.10. Ecuación del empuje para el turboreactor ideal	25
3.11. Optimización del turboreactor	26
4. Turbofán.....	30
4.1. Hipótesis.....	30
4.2. Ecuación del empuje del turbofán.....	31
4.3. Maximizando el empuje.....	34
4.4. Turbofán ideal.....	35
4.5. Diseño para máximo empuje	37

5. Componentes estáticos.....	41
5.1. Difusor subsónico.....	41
5.2. Difusor supersónico	45
5.3. Toberas.....	46
5.4. Cámara de combustión	54
6. Compresores.....	59
6.1. Función.....	59
6.2. Compresor Axial.....	60
6.3. Modelo del compresor: cascada de álabes.....	61
6.4. Grado de reacción.....	64
6.5. Distribución radial.....	65
6.6. Operaciones fuera de diseño	67
6.7. Fán y diferentes compresores.....	71
7. Turbinas.....	72
7.1. Ecuación de Euler en el modelo de cascadas de álabes	72
7.2. Grado de reacción.....	73
7.3. Diseño para máxima potencia	74
8. Actuaciones.....	78
8.1. Actuaciones de turborreactores	78

1. Empuje

1.1. Ecuaciones de empuje para motores cohete

La propulsión es el movimiento generado a partir de una fuerza que da impulso. En las aeronaves el impulso generado por sistemas de propulsión debe poder acelerar el aparato o bien generar suficiente fuerza para poder compensar la resistencia. Algunas aeronaves como los aviones de transporte o de pasajeros suelen volar la mayor parte del tiempo en condiciones de crucero por lo que un exceso de potencia es menos importante que una buena eficiencia y bajo consumo.

Las ecuaciones de empuje de los motores cohete se basan en las leyes de Newton. En especial la tercera ley que es la de acción y reacción. Se eyecta un fluido hacia atrás para que el fluido empuje hacia delante el objeto.

Por definición, el empuje es la proyección en una dirección axial debido a la resultante entre las fuerzas de presión internas y las externas (esta última se consideran constante e iguales a la presión ambiente).

Se estudiará ahora el empuje generado por un motor cohete al ser este el elemento más básico de los sistemas de propulsión por eyección de gas. En la Figura 1.1 se puede observar un diagrama simplificado de cómo es un motor cohete.

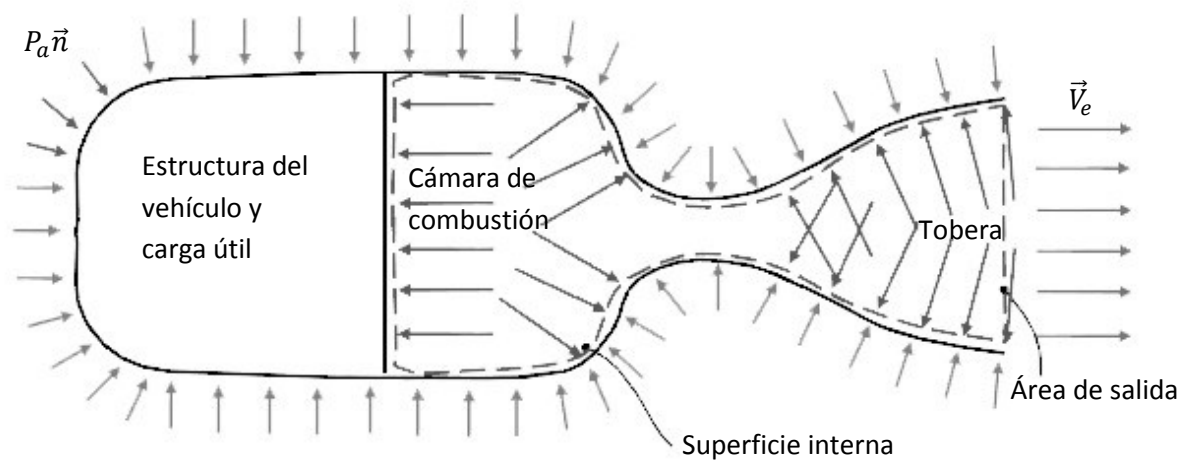


Figura 1.1. Diagrama de un motor cohete

De la figura la única zona que no contiene fluido es la zona de estructura y carga útil del vehículo. Se considera la zona que contiene la cámara de combustión y la tobera como el volumen de control. Se aplica la teoría de cantidad de movimiento en ese volumen de control.

$$\iint_{S_{int} \cup A_e} (-P) \vec{n} ds + \iint_{S_{int}} \vec{\tau} \cdot \vec{n} ds = \iint_{S_{int} \cup A_e} \vec{V} (\rho \vec{V} \cdot \vec{n}) ds$$

LHS RHS

En esta ecuación se han despreciado las fuerzas másicas (como por ejemplo la gravedad) debido a que influyen muy poco respecto a las demás. Las fuerzas viscosas solo están presentes en la pared (por eso no tiene $S_{int} \cup A_e$).

La parte de la izquierda de la integral es LHS ("Left Hand Side"), mientras que la derecha es RHS ("Right Hand Side"). El RHS consiste de dos términos

$$RHS = \iint_{S_{int}} \vec{V}(\rho\vec{V} \cdot \vec{n})ds + \iint_{A_e} \vec{V}(\rho\vec{V} \cdot \vec{n})ds$$

Pero el término de la izquierda se anula ya que el fluido solo sale por el área de salida A_e . El término de la derecha proyectado en la dirección axial queda

$$RHS = \iint_{A_e} \vec{V}(\rho\vec{V} \cdot \vec{n})ds \cdot \vec{i} = \iint_{A_e} \vec{V} \cdot \vec{i} d\dot{m} = - \iint_{A_e} u d\dot{m} = -\dot{m}\bar{u}_e$$

La parte de la izquierda (LHS) se compone de dos términos donde la F_{int} es la resultante de las fuerzas interiores que suma el otro termino que son las fuerzas en la salida. La F_{int} es la parte que esta entre corchetes.

$$LHS = \iint_{A_e} (-P)\vec{n}ds \cdot \vec{i} + \left[\iint_{S_{int}} (-P)\vec{n}ds + \iint_{S_{int}} \vec{\tau} \cdot \vec{n}ds \right] \cdot \vec{i}$$

La integral de la presión a lo largo del área de salida es

$$\iint_{A_e} (-P)\vec{n}ds \cdot \vec{i} = \iint_{A_e} P dA_e = \bar{P}_e \cdot A_e$$

Por lo tanto las fuerzas interiores se obtienen como

$$F_{int} = \bar{P}_e A_e + \dot{m}\bar{u}_e$$

La resultante de las presiones externas proyectadas en eje de la dirección es

$$\vec{F}_{ext} = \iint_{S_{ext}} (-P_a)\vec{n}ds \cdot \vec{i} = -P_a A_e$$

Por último se obtiene la fuerza de empuje del cohete

$$\boxed{F = F_{int} + F_{ext} = \dot{m}\bar{u}_e + (\bar{P}_e - P_a)A_e}$$

En esta expresión se ha utilizado la siguiente igualdad integral

$$0 = \iint_{S_{int} \cup A_e} \vec{n}ds = \iint_{S_{int}} \vec{n}ds - A_e \cdot \vec{i}$$

Se recuerda que \bar{P}_e y \bar{u}_e son respectivamente la presión media y la velocidad media axial. Se debe de recordar que la presión externa ha sido asumida constante (de hecho se ha asumido igual a la presión ambiente) desde el principio del análisis. Las perturbaciones en la presión producidas por el chorro en el exterior tampoco se han tenido en cuenta.

$$\bar{P}_e = \frac{1}{A_e} \iint_{A_e} P ds \quad \bar{u}_e = \frac{1}{\dot{m}} \iint_{A_e} u d\dot{m}$$

1.2. Empuje de un flujo simple en un turborreactor

En el caso de turborreactor, calcular la ecuación del empuje es muy similar. Se pueden de cierta medida extrapolar los resultados añadiendo el término del flujo másico ingerido por el motor.

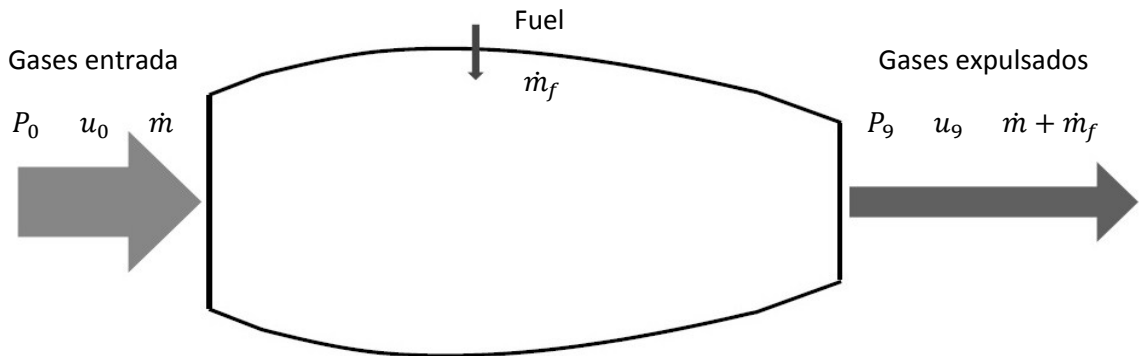


Figura 1.2. Diagrama de los flujos en un turborreactor de flujo simple

El problema es que los datos de entrada del fluido no son conocidos. Por ejemplo la presión de entrada no es igual a la presión atmosférica. Se puede definir un tubo de corriente en la entrada del motor que depende de la cantidad de aire que el motor succiona.

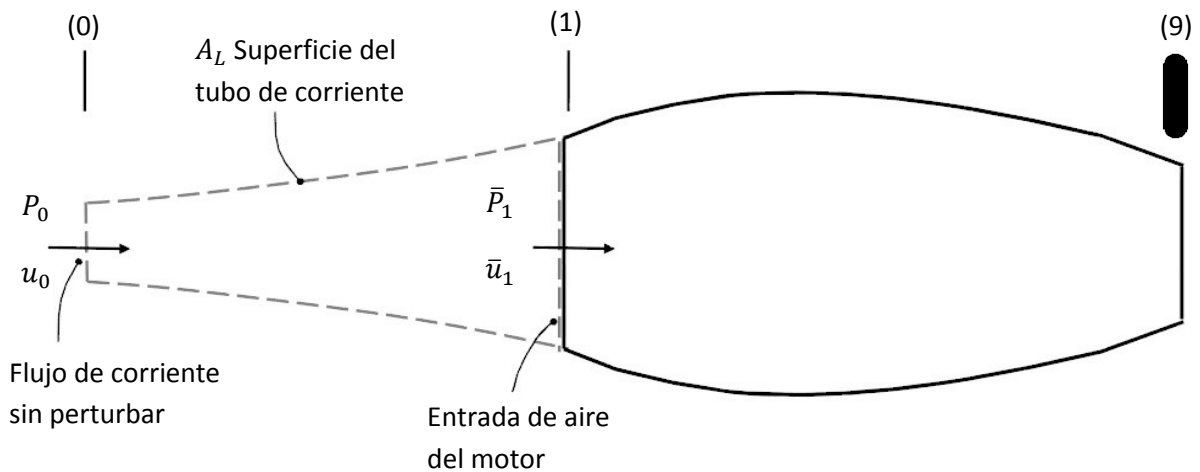


Figura 1.3. Diagrama de la entrada de fluido en un turborreactor

Si se crea un volumen de control englobando ese tubo de corriente. Por Bernouilli se puede observar que cuanto menor sea la sección de entrada del flujo en la parte no perturbada, menor es la velocidad de entrada del motor. En la zona no perturbada las condiciones son las atmosféricas. En ese volumen de control se puede aplicar el teorema de cantidad de movimiento.

Aparte del flujo de aire de entrada a la ecuación del empuje también se le añade el término del flujo de combustible que se inyecta dentro del motor. La resolución es muy similar a la que se hizo en el apartado 1.1. La ecuación del empuje queda

$$F = (\dot{m} + \dot{m}_f)\bar{u}_9 - \dot{m}u_0 + (\bar{P}_9 - P_0)A_9$$

Esta ecuación se puede simplificar aún más. Primero se puede despreciar el flujo másico del combustible ya que es muy pequeño en comparación con el flujo aire de entrada. Además se puede también despreciar la diferencia de presiones de la entrada y de la salida. Cuanto menor sea la diferencia de presiones mayor puede llegar a ser la velocidad de salida del gas, consiguiendo un motor más eficiente. La ecuación simplificada queda

$$F = \dot{m} \cdot (u_9 - u_0)$$

El motor a reactor se compone de las siguientes etapas (también visibles en la Figura 1.4):

- Una zona exterior en la zona delantera donde ya aparece aire perturbado (debido a que vuela en subsónico normalmente) (0-1)
- La zona de entrada o también llamado difusor (1-2)
- Una zona de compresores que aumentan la densidad y presión del aire (2-3)
- Una cámara de combustión donde se inyecta combustible y se aumenta la temperatura del gas (3-4), durante el estudio de esta etapa se considerara que lo en vez de haber una reacción química lo que hay es un flujo de calor.
- Una turbina que extraiga del aire la energía necesaria para mover el compresor (4-5). En la turbina se desea que la presión total disminuya lo menor posible aunque al extraer energía siempre hay una pérdida de presión y temperatura del fluido.
- Finalmente una tobera se encarga de acelerar el fluido para su salida al exterior (5-9). La temperatura total se mantiene constante y la presión total disminuye aunque mucho menor que en la zona de la entrada.

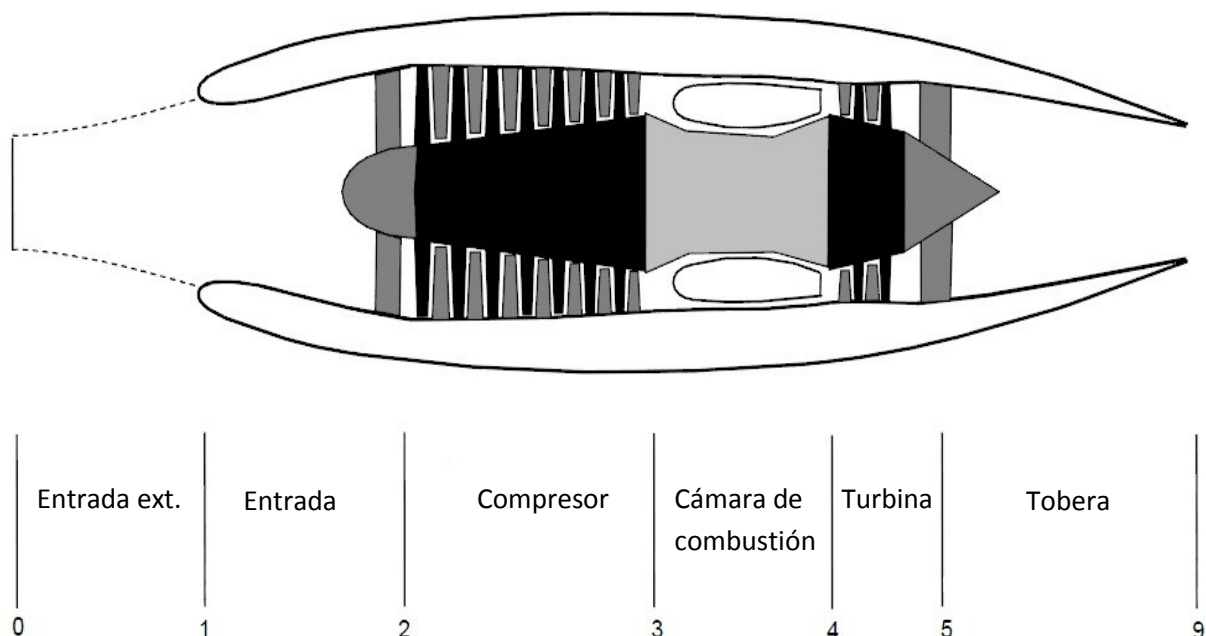


Figura 1.4. Secciones de un turborreactor

1.3. Tipos de “Air breathing engines”

Existen múltiples tipos de motores que se basan en el turboreactor, como por ejemplo:

a. Turbofán

El turbofán es una versión modificada del turboreactor. Se empezó a utilizar por los años 60 para mejorar el rendimiento de los motores (aunque se inventó en los años 40). En este tipo de motor el flujo de entrada se divide en dos caminos separados. Hay dos tipos de turbofán en función de si el flujo primario o el flujo secundario salen juntos o no. Si el flujo es mixto la ecuación del empuje es la misma que la del turboreactor.

En el turboreactor se acelera mucho una pequeña cantidad de aire. Pero también se puede conseguir un empuje sustancial acelerando poco una gran cantidad de aire.

El turbofán se diferencia a nivel de componentes ya que tiene un fan una carcasa exterior extra y varios compresores más.

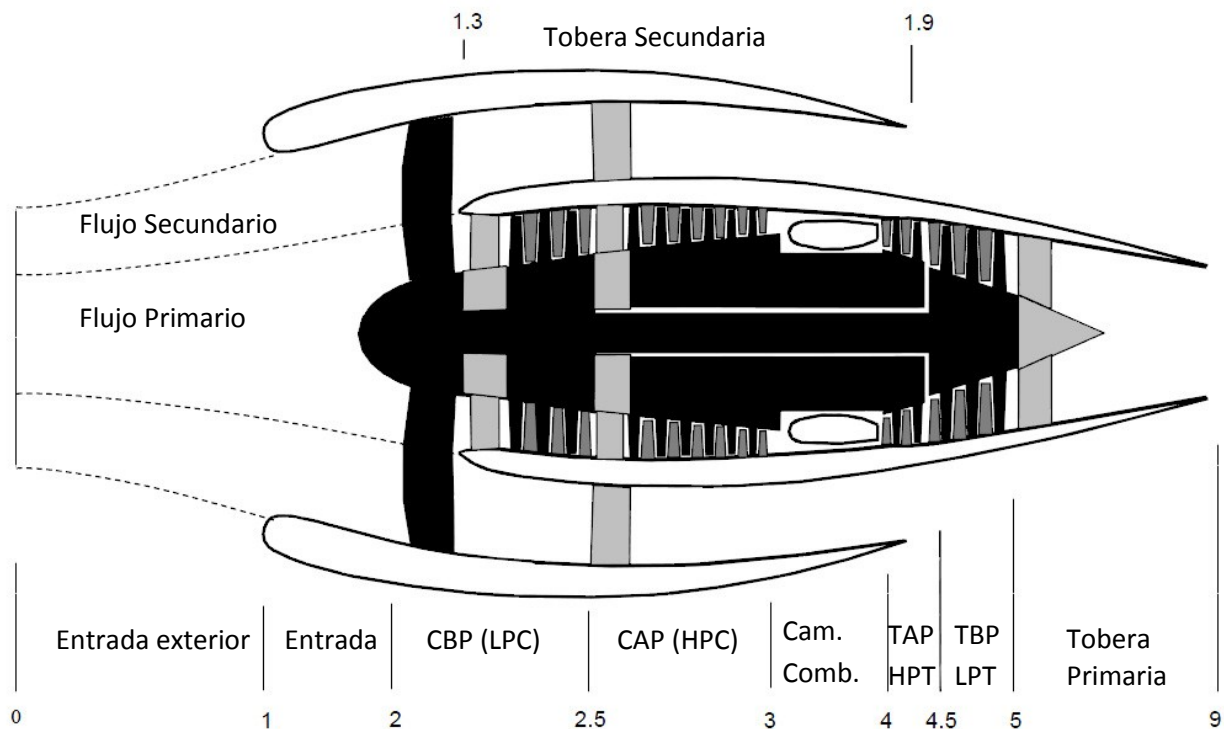


Figura 1.5. Diagrama de las etapas de un turbofán

b. Estatorreactor

Es un tipo de motor parecido al turboreactor que no lleva partes móviles. Este motor solo puede funcionar cuando el aire de entrada tiene velocidades muy altas (del orden del Mach 3). Debido a la alta velocidad el aire se comprime dentro de la zona de entrada. Tiene una cámara de combustión que inyectando combustible y quemándolo aumenta la energía interna del fluido para acelerarlo. Estos motores suelen tener toberas convergentes-divergentes ya que se emplean para maniobras de alta velocidad y con ondas de choque en la tobera.

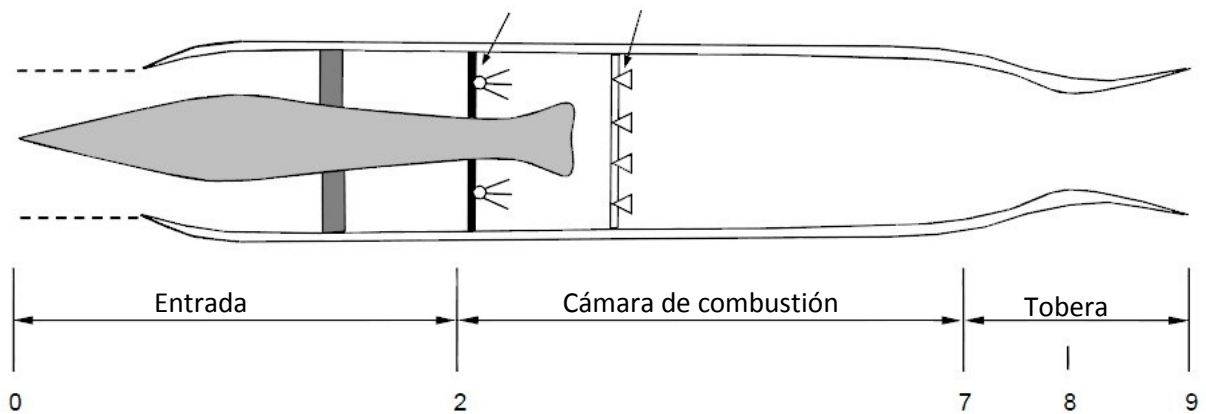


Figura 1.6. Diagrama de las etapas de un estatorreactor

c. Turborreactor con postcombustión

Es igual que el turborreactor pero a la salida de la turbina se pone un postquemador. El postquemador de un motor a reacción es una sección que contiene inyectores de combustible adicionales, y dado que el flujo anterior a la turbina emplea poco oxígeno, el postquemador es, en esencia, un tipo de estatorreactor. Al igual que el estatorreactor estos motores suelen tener toberas convergentes-divergentes.

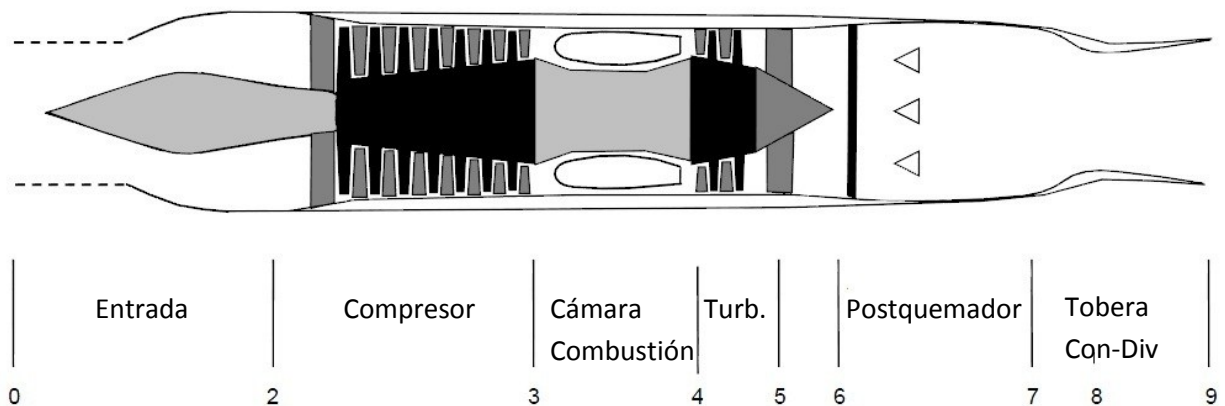


Figura 1.7. Diagrama de las etapas de un turborreactor con postquemador

d. Otros tipos de motores

Se pueden hacer combinaciones con los motores ya descritos, como por ejemplo poner el postquemador en un turbofán. El turbofán en este caso sería de flujo mixto y se juntarían los dos flujos antes del postquemador. También se pueden añadir múltiples compresores y turbinas (de baja y alta presión) para que tenga mejor rendimiento en distintas condiciones de vuelo.

2. Conceptos básicos de termodinámica

2.1. Gas perfecto y caloríficamente perfecto

El gas perfecto es un gas que obedece a la ecuación siguiente, donde la constante R_g no es la constante universal (8,314 J/molK)

$$P = \rho R_g T$$

La constante R_g es la constante del gas en particular ya que es igual a la constante universal pero dividida por la masa molecular del gas. Por ejemplo en el caso del aire $R_g = 287$ J/kgK.

También se definen las constantes específicas tanto para presión constante (c_p) o volumen constante (c_v). Ambas dependen de la temperatura. Se cumplen las siguientes igualdades

$$c_p - c_v = R_g$$

$$du = c_v dT$$

$$dh = c_p dT$$

Las dos últimas relaciones contienen la variable u que define la energía interna y h la entalpia. Si el gas es caloríficamente perfecto se puede definir la constante adiabática γ como

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

Se cumple además que el c_p es constante por lo que

$$c_v = c_p - R_g = ct$$

Y también

$$c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R_g$$

$$c_v = \frac{1}{\gamma - 1} R_g$$

2.2. La ecuación de la energía

Se considera un volumen de control (representado en la Figura 2.1) donde hay una entrada y una salida de fluido, una entrada de calor y de trabajo. El trabajo se representa como \dot{W} , y el calor como \dot{Q} . Para el fluido de entrada y de salida son importantes las variables:

- \dot{m} , flujo másico
- h , entalpia
- v , velocidad

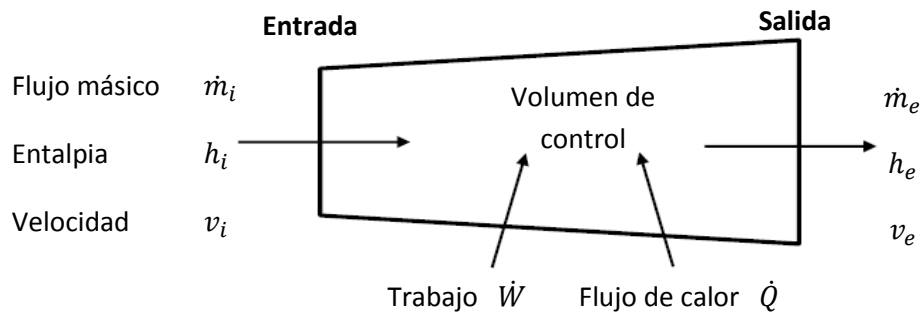


Figura 2.1. Volumen de control

Se utiliza la teoría de conservación de la energía o primera ley de la termodinámica. La cual establece que, al suministrar una determinada cantidad de energía térmica a un sistema, esta cantidad de energía será igual a la diferencia del incremento de la energía interna del sistema menos el trabajo efectuado por el sistema sobre sus alrededores.

$$\Delta U = Q - W$$

De la ecuación de continuidad (o conservación de masa) se define que el flujo de entrada es el mismo que el de salida.

$$\dot{m}_i = \rho_i v_i A_i = \rho_e v_e A_e = \dot{m}_e$$

Utilizando la teoría de conservación de la energía se obtiene la siguiente ecuación

$$\dot{Q} + \dot{W} = \dot{m}_e \left(h_e + \frac{1}{2} v_e^2 \right) - \dot{m}_i \left(h_i + \frac{1}{2} v_i^2 \right)$$

Como se puede observar de la ecuación, la suma de la energía (de trabajo y de calor) es igual a la diferencia entre la energía interna (entalpía y energía cinética) del gas de entrada y la de salida. El trabajo es positivo ya que el volumen de control gana energía.

Se definen T_t y P_t como la temperatura y la presión total respectivamente. Son la temperatura y la presión que tendría el fluido si hubiese estado decelerado de forma isentropica hasta llegar a un punto de remanso. Si hubiese una onda de choque T_t se mantendría constante mientras que P_t no. También se define la entalpía total como

$$h_t = c_p T_t$$

Por lo que se puede escribir la ecuación de la energía para un caso más general con múltiples entradas y salidas de fluido como

$$\dot{Q} + \dot{W} = \sum_{j=1}^m \dot{m}_{e,j} (h_t)_{e,j} - \sum_{k=1}^n \dot{m}_{i,k} (h_t)_{i,k}$$

2.3. Casos particulares

Se verán ahora una serie de casos particulares aplicados a la ecuación obtenida en el tema 2.2. Los casos se simplifican utilizando solo una entrada y una salida de flujo.

- a. Al volumen de control solo se le añade calor (no se añade trabajo)

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}(h_{te} - h_{ti}) \\ \Rightarrow \dot{Q} &= \dot{m}c_p(T_{te} - T_{ti})\end{aligned}$$

- b. Al volumen de control se le ejerce trabajo (no se añade calor)

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \dot{m}(h_{te} - h_{ti}) \\ \Rightarrow \dot{W} &= \dot{m}c_p(T_{te} - T_{ti})\end{aligned}$$

- c. Al volumen de control no se le añade ni calor ni trabajo

$$h_{te} = h_{ti} \Rightarrow T_{te} = T_{ti} \Rightarrow T_e + \frac{v_e^2}{2c_p} = T_i + \frac{v_i^2}{2c_p}$$

También se puede llegar a otra igualdad haciendo la siguiente simplificación de la temperatura total.

$$\begin{aligned}T_t &= T + \frac{V^2}{2c_p} \\ &= T + \frac{a^2 M^2}{2c_p} \\ &= T + \frac{\gamma R_g T V^2}{2c_p} \\ &= T \left(1 + \frac{\gamma M^2}{2 \cdot [\gamma / (\gamma - 1)]} \right) \\ &= T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)\end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$T_e \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right) = T_i \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_i^2 \right)$$

2.4. Entropía

En termodinámica, la entropía (simbolizada como S) es una magnitud física que permite, mediante cálculo, determinar la parte de la energía que no puede utilizarse para producir trabajo. Es una función de estado de carácter extensivo y su valor, en un sistema aislado, crece en el transcurso de un proceso que se dé de forma natural. La entropía describe lo irreversible de los sistemas termodinámicos. La entropía física, en su forma clásica, está definida por la ecuación siguiente

$$dS = \frac{\delta Q_{rev}}{T}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \left(dh - \frac{dP}{\rho} \right) \\
 &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{dP}{T\rho} \\
 &= c_p \frac{dT}{T} - \frac{dP}{T\rho} \cdot \frac{R_g}{R_g}
 \end{aligned}$$

Utilizando ahora la ecuación del gas perfecto vista en el tema 2.1.

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - R_g \frac{dP}{P}$$

2.5. Proceso isentrópico

En termodinámica, un proceso isentrópico es aquel en el que la entropía del fluido que forma el sistema permanece constante. De la segunda ley de la termodinámica, se puede decir que

$$\delta Q \leq T dS$$

De esta ecuación se ve que la transferencia de calor es nula por lo que el proceso es también adiabático. De la ecuación obtenida en el tema 2.4, se obtiene

$$c_p \frac{dT}{T} = R_g \frac{dP}{P}$$

A partir de esta ecuación y utilizando la ecuación de los gases perfectos del tema 2.1 se obtienen las siguientes tres igualdades

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

2.6. Movimiento isentrópico casi unidimensional

El movimiento isentrópico casi unidimensional se considera como el movimiento de un fluido dentro de un tubo. Se utilizan las ecuaciones diferenciales de conservación de masa, cantidad de movimiento y energía, obteniendo las siguientes ecuaciones

$$d(\rho v A) = 0 \quad \rho v dv + dp = 0 \quad dh_t = 0$$

A partir de estas ecuaciones se puede llegar a las siguientes relaciones

$$T_t = T + \frac{u^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) = ct$$

$$P_t = P \left(\frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = ct$$

2.7. Parámetro de flujo de masa

La función $\bar{m}(M, \gamma)$ se denomina parámetro de flujo de masa. Se relaciona como el flujo de masa \dot{m} de la siguiente forma.

$$\dot{m} = \frac{\bar{m}(M, \gamma) P_t A}{\sqrt{RT_t}}$$

En el problema 2 del libro “Propulsión. Problemas” se desarrolla la forma de obtener esta expresión y la obtención de la gráfica y tabla con los valores de \bar{m} en función del número de Mach.

La ecuación del parámetro de flujo de masa es

$$\bar{m} = \sqrt{\gamma} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}$$

El parámetro de flujo de masa, con γ constante, tiene máximo en $M = 1$.

$$\frac{d\bar{m}}{dM} = \sqrt{\gamma} \left[\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} - \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} - 1} (\gamma - 1) M^2 \right] = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 - \frac{\gamma + 1}{2} M^2 = 0 \Rightarrow M = 1$$

Para un valor dado de γ , en términos de número de Mach varía como se observa en la Figura 2.2 tabulada para $\gamma = 1.4$. La Tabla 1.1 muestra valores de la función y es muy útil para otros ejercicios.

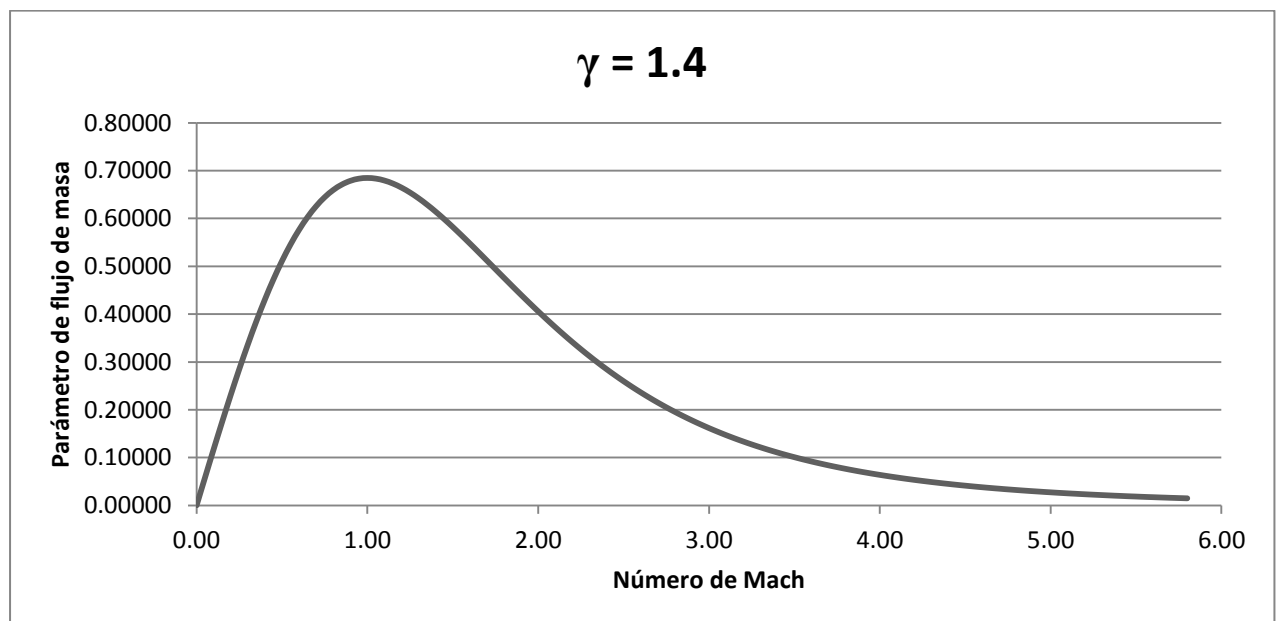


Figura 2.2. Gráfico de \bar{m} en función de M

<i>M</i>	\bar{m}	<i>M</i>	\bar{m}	<i>M</i>	\bar{m}	<i>M</i>	\bar{m}	<i>M</i>	\bar{m}	<i>M</i>	\bar{m}
0.00	0.00000	1.00	0.57870	2.00	0.34294	3.00	0.13666	4.00	0.05399	5.00	0.02315
0.05	0.04993	1.05	0.57753	2.05	0.32881	3.05	0.13031	4.05	0.05164	5.05	0.02224
0.10	0.09940	1.10	0.57415	2.10	0.31504	3.10	0.12426	4.10	0.04940	5.10	0.02138
0.15	0.14799	1.15	0.56878	2.15	0.30164	3.15	0.11849	4.15	0.04727	5.15	0.02055
0.20	0.19528	1.20	0.56161	2.20	0.28863	3.20	0.11301	4.20	0.04524	5.20	0.01976
0.25	0.24085	1.25	0.55286	2.25	0.27604	3.25	0.10778	4.25	0.04331	5.25	0.01901
0.30	0.28437	1.30	0.54272	2.30	0.26387	3.30	0.10281	4.30	0.04147	5.30	0.01829
0.35	0.32549	1.35	0.53139	2.35	0.25213	3.35	0.09808	4.35	0.03972	5.35	0.01759
0.40	0.36393	1.40	0.51905	2.40	0.24082	3.40	0.09359	4.40	0.03805	5.40	0.01693
0.45	0.39947	1.45	0.50588	2.45	0.22993	3.45	0.08931	4.45	0.03646	5.45	0.01630
0.50	0.43192	1.50	0.49203	2.50	0.21948	3.50	0.08523	4.50	0.03494	5.50	0.01570
0.55	0.46114	1.55	0.47765	2.55	0.20945	3.55	0.08136	4.55	0.03350	5.55	0.01512
0.60	0.48704	1.60	0.46288	2.60	0.19983	3.60	0.07768	4.60	0.03212	5.60	0.01456
0.65	0.50959	1.65	0.44784	2.65	0.19062	3.65	0.07417	4.65	0.03080	5.65	0.01403
0.70	0.52880	1.70	0.43264	2.70	0.18181	3.70	0.07084	4.70	0.02955	5.70	0.01352
0.75	0.54470	1.75	0.41739	2.75	0.17339	3.75	0.06767	4.75	0.02836	5.75	0.01303
0.80	0.55739	1.80	0.40216	2.80	0.16534	3.80	0.06466	4.80	0.02722	5.80	0.01257
0.85	0.56698	1.85	0.38704	2.85	0.15765	3.85	0.06179	4.85	0.02613	5.85	0.01212
0.90	0.57362	1.90	0.37210	2.90	0.15032	3.90	0.05906	4.90	0.02509	5.90	0.01169
0.95	0.57746	1.95	0.35738	2.95	0.14333	3.95	0.05646	4.95	0.02410	5.95	0.01128

Tabla 2.1. Valores tabulados de \bar{m} en función de *M*

2.8. Atmósfera estándar internacional

La atmosfera estándar internacional, más conocida por sus siglas en inglés ISA, es un modelo atmosférico terrestre invariante creado por la Organización de Aviación Civil Internacional. Es muy utilizado por la navegación aérea. Todas las ecuaciones de este modelo utiliza el sistema internacional de unidades. Se toman los siguientes datos como constantes

$$g = 9.81 \text{ m/s} \quad R_{\text{aire}} = 287 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K}) \quad \lambda = -6.5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$$

Las condiciones a nivel del mar son

$$T_0 = 288.15 \text{ K} \quad P_0 = 101\,325 \text{ Pa} \quad \rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

En el estudio de esta asignatura se considerará que el motor no operara más alto que la troposfera, que va desde la superficie terrestre hasta 11 000 m (o FL360). Se considera un gradiente de temperatura lineal con $\lambda = -6.5 \cdot 10^{-3} \text{ K/m}$, obteniendo las ecuaciones para las condiciones de la altura de vuelo.

$$T(h) = T_0 + \lambda \cdot h \quad P(h) = P_0 \left(\frac{T_0 + \lambda \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{-g}{R\lambda}} \quad \rho(h) = \rho_0 \left(\frac{T_0 + \lambda \cdot h}{T_0} \right)^{\frac{-g}{R\lambda} - 1}$$

Si se diese el caso que $11\,000 < h < 25\,000 \text{ m}$ se utilizan las siguientes ecuaciones

$$T(h) = 216.65 \text{ K} \quad P(h) = 22\,614 \cdot e^{\frac{-g(h-11\,000)}{RT}} \quad \rho(h) = 0.364 \cdot e^{\frac{-g(h-11\,000)}{RT}}$$

3. Turborreactor de flujo simple

3.1. Hipótesis

Como ya se dijo en el tema 1 (Empuje), el turborreactor está compuesto de seis etapas que figuran en la Figura 3.1. En este tema se estudiará el comportamiento de un turborreactor y de cada etapa utilizando las teorías y ecuaciones de los temas anteriores.

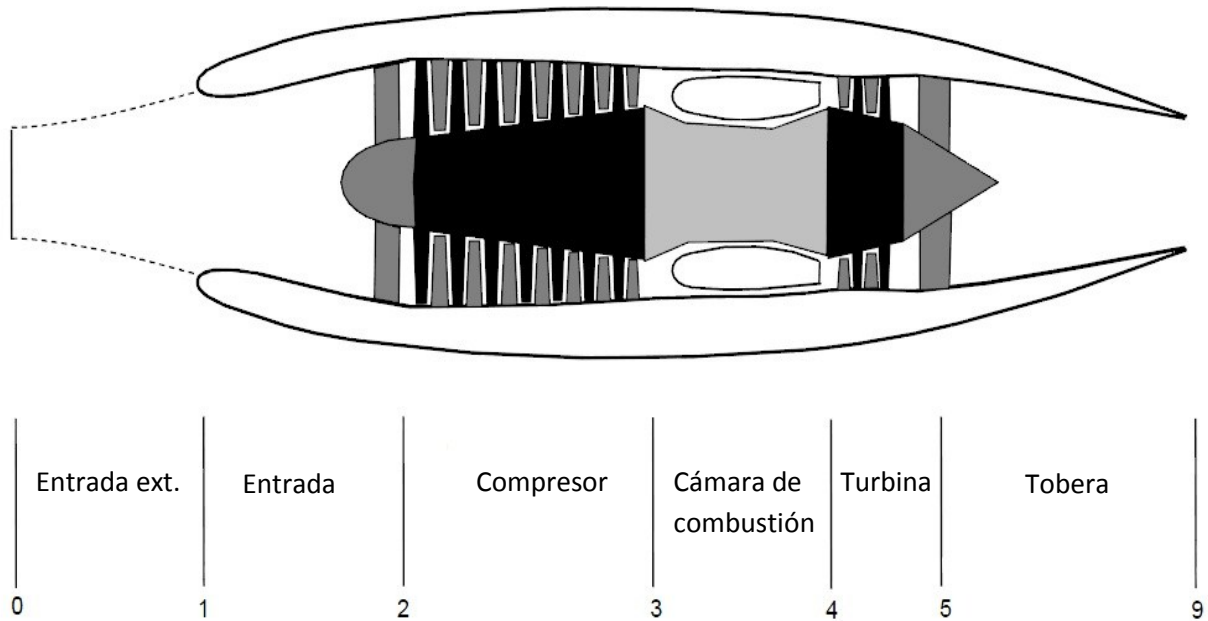


Figura 3.1. Etapas del turborreactor de flujo simple

Como en la mayoría de los estudios en ingeniería se debe simplificar el modelo utilizando una serie de hipótesis:

- Comportamiento casi unidimensional a lo largo del motor
- El gas se considera perfecto y caloríficamente perfecto donde además la constante R_g se mantiene constante a lo largo del motor
- La constante adiabática γ_c (cold) se considera conocida hasta la cámara de combustión y una constante γ_t (hot) a partir de la cámara de combustión hasta la salida
- Las eficiencias de los componentes son conocidas

Para una visión general se puede observar el comportamiento termodinámico de las siguientes etapas en la siguiente tabla.

Etapa	Turborreactor ideal				Turborreactor real			
	Flujo de calor	Potencia en el eje	Evolución termodinámica		Flujo de calor	Potencia en el eje	Evolución termodinámica	
0 – 1	0	0	Isentrópico	$T_{t0} = T_{t1}$ $P_{t0} = P_{t1}$	0	0	Isentrópico	$T_{t0} = T_{t1}$ $P_{t0} = P_{t1}$
1 – 2	0	0	Isentrópico	$T_{t1} = T_{t2}$ $P_{t1} = P_{t2}$	≈ 0	0	No Isentrópico	$T_{t1} \approx T_{t2}$ $P_{t1} > P_{t2}$
2 – 3	0	> 0	Isentrópico	$T_{t2} < T_{t3}$ $P_{t2} < P_{t3}$	≈ 0	> 0	No Isentrópico	$T_{t2} < T_{t3}$ $P_{t2} < P_{t3}$
3 – 4	> 0	0	$P_t = ct$	$T_{t3} < T_{t4}$ $P_{t3} = P_{t4}$	> 0	0	P_t decrece	$T_{t3} < T_{t4}$ $P_{t3} > P_{t4}$
4 – 5	0	< 0	Isentrópico	$T_{t4} > T_{t5}$ $P_{t4} > P_{t5}$	≈ 0	< 0	No Isentrópico	$T_{t4} > T_{t5}$ $P_{t4} > P_{t5}$
5 – 9	0	0	Isentrópico	$T_{t5} > T_{t9}$ $P_{t5} > P_{t9}$	≈ 0	0	No Isentrópico	$T_{t5} \approx T_{t9}$ $P_{t5} > P_{t9}$

Tabla 3.1. Comportamiento de las distintas etapas

3.2. Condiciones del flujo libre, etapa 0-1

Según las condiciones de flujo libre se definen las siguientes dos relaciones

- a. Ratio de la temperatura de remanso y la estática

$$\theta_0 = \frac{T_{t0}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2$$

- b. Ratio de la presión de remanso y la estática

$$\delta_0 = \frac{P_{t0}}{P_0} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Cuando se estudian las partes del motor se utilizan las magnitudes de remanso. a diferencia de las estáticas debido a que por definición es la temperatura que tendría el fluido si se desacelerara de forma adiabática. En el caso de la presión también por definición si es de remanso es la presión que tendría el fluido si se desacelerara de forma adiabática e isentrópica.

Se utilizan las magnitudes de remanso ya que no se pueden despreciar los términos cinéticos (vinculados a la velocidad del fluido). Los términos en magnitudes de remanso tienen de forma implícita una vinculación a la velocidad.

3.3. Entrada o difusor, etapa 1-2

La eficiencia del flujo de entrada se define como

$$\pi_d = \frac{P_{t2}}{P_{t0}}$$

Y normalmente se divide en dos factores

$$\pi_d = \pi_{d_{max}} \eta_r$$

Donde η_r es el factor de recuperación. Este factor es siempre uno cuando $M_0 < 1$, y cuando $M_0 > 1$ es menor que uno, decreciendo en función de M_0 . El valor $\pi_{d_{max}}$ es un valor constante y no depende del número de Mach.

3.4. Compresor, etapa 2-3

En esta etapa hay dos relaciones importantes, la de presión y temperatura.

$$\pi_c = \frac{P_{t3}}{P_{t2}} \quad \tau_c = \frac{T_{t3}}{T_{t2}}$$

Como se ha hecho la suposición de que el proceso es isentrópico se pueden relacionar con dos ratios. Al no ser del todo isentrópico se crean dos variables de eficiencia (la isentrópica η_c y la polytrópica $\eta_{c,p}$).

$$\eta_c = \frac{(T_{t3})_{isent.} - T_{t2}}{(T_{t3})_{real} - T_{t2}} = \frac{(\pi_c)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1}{\tau_c - 1}$$

$$\pi_c = \tau_c^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1} \eta_{c,p}}$$

En esta etapa sólo se añade trabajo y no hay calor. Por lo que el trabajo queda

$$\dot{W}_c = \dot{m}_2 c_p (T_{t3} - T_{t2}) = \dot{m}_2 c_p T_{t2} (\tau_c - 1)$$

3.5. Cámara de combustión, etapa 3-4

Este proceso es una reacción química, es un proceso instantáneo. Aunque a nivel práctico se puede tratar como una adición de calor. La presión total solo puede disminuir al no haber adición de trabajo. Se puede definir un ratio de presiones y de temperatura

$$\pi_b = \frac{P_{t4}}{P_{t3}}$$

$$\theta_b = \frac{T_{t4}}{T_{t3}}$$

Este ratio de temperaturas no es tan cómodo y a veces se utiliza otro ratio que compara la temperatura de salida de la cámara con la temperatura ambiente.

$$\theta_t = \frac{T_{t4}}{T_0}$$

Se define también un factor de eficiencia de la combustión, que es simplemente la diferencia de entalpías entre la entrada y la salida, dividido por el calor generado al quemar el combustible. El

poder calorífico del keroseno (h) es del orden de 43 MJ/kg y se considera como un dato en los problemas.

$$\eta_b = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_f)h_{t4} - \dot{m}h_{t3}}{\dot{m}_f h}$$

3.6. Turbina, etapa 4-5

La formulación de ratios y factores de eficiencia son similares a los calculados en el compresor.

Los ratios de presión y temperatura son

$$\pi_t = \frac{P_{t5}}{P_{t4}} \quad \tau_t = \frac{T_{t5}}{T_{t4}}$$

Igual que en compresor al no ser un proceso perfectamente isentrópico se crean dos factores de eficiencias.

$$\eta_t = \frac{T_{t4} - (T_{t5})_{real}}{T_{t4} - (T_{t5})_{isent}} = \frac{1 - \tau_t}{1 - (\pi_t)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}}}$$

$$\pi_t = \tau_t^{\frac{\gamma_t}{(\gamma_t - 1)\eta_{t,p}}}$$

En la turbina el proceso es casi adiabático por lo que se considera que solo hay un intercambio de trabajo

$$\dot{W}_t = \dot{m}_4 c_{pt} (T_{t4} - T_{t5}) = \dot{m}_4 c_{pt} T_{t4} (1 - \tau_t)$$

La turbina sirve para generar la potencia necesaria del compresor y también para algún sistema auxiliar como bombas de combustible o generadores eléctricos... A nivel práctico de esta asignatura se considera que toda la potencia se destina a mover la turbina y para compensar las pérdidas mecánicas en la transmisión de la potencia (la eficiencia mecánica es η_m).

$$|\dot{W}_c| = \eta_m |\dot{W}_t|$$

Los rendimientos mecánicos son muy altos y en esta asignatura se podrían llegar a considerar igual a uno. Ahora se hace el balance de trabajo de la turbina y se iguala al del compresor.

$$\dot{m}(1 + f)c_{pt}T_{t4}(1 - \tau_t) = \dot{m}c_{pc}T_{t2}(\tau_c - 1)$$

Y ahora simplificando la expresión, se crea una expresión adimensional y resulta muy cómodo el uso de ella.

$$(1 + f) \frac{c_{pt}}{c_{pc}} \frac{\theta_t}{\theta_0} (1 - \tau_t) = (\tau_c - 1)$$

3.7. Tobera etapa 5-9

Una tobera es un dispositivo que convierte la energía potencial de un fluido (en forma térmica y de presión) en energía cinética. El aumento de velocidad que sufre el fluido en su recorrido a lo largo de

la tobera es acompañado por una disminución de su presión y temperatura, al conservarse la energía. En la tobera hay una pérdida de presión de remanso. La presión de remanso en la salida es un dato del problema.

$$\pi_n = \frac{P_{t9}}{P_{t5}}$$

En el estudio de este tema se verán toberas convergentes. En el caso de toberas convergentes solo se pueden tener dos condiciones de salida de flujo, tobera adaptada o crítica¹, condicionados por el número de Mach en la garganta. Normalmente se desea tener condiciones de tobera adaptada, donde la presión de salida es igual a la presión ambiente. El empuje más alto se obtiene siempre cuando la tobera está adaptada.

Las toberas convergentes se utilizan para flujos subsónicos. Si la tobera es convergente se cumple que:

- En la tobera adaptada se tiene la condición de $P_9 = P_0$. La variable que se buscaría en el problema es el número de Mach (≤ 1) en la salida.
- En la tobera crítica, la salida del flujo tiene condiciones sónica ($M_9 = 1$) y se buscaría el cociente P_9/P_0 (> 1).

Para una tobera convergente la condición necesaria y suficiente para que la tobera sea crítica es que se cumpla esto

$$\frac{P_{t9}}{P_0} \geq \left(\frac{1 + \gamma_t}{2} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}}$$

En el caso de tener $\gamma_t = 1.4$

$$\Rightarrow \frac{P_{t9}}{P_0} \geq \left(\frac{1 + 1.4}{2} \right)^{\frac{1.4}{1.4 - 1}} = 1.893$$

Las toberas convergente – divergente utilizan flujos de salida con números de Mach mayores que uno, por lo que no puede haber condición de tobera crítica. Se crean toberas de este tipo para poder tener condición de tobera adaptada para condiciones de flujos muy rápidos. En el cuello de la tobera se alcanzan condiciones sónicas y para poder acelerar más el flujo y disminuir la presión hasta llegar a la condición de $P_9 = P_0$, se utiliza una parte divergente. Este tipo de tobera se busca siempre adaptada. Por lo que $P_9 = P_0$ y además $M_9 > 1$.

Al final lo que importa es si la tobera es crítica o adaptada. Los tipos de tobera se estudian a continuación.

- a. Tobera crítica (solo para toberas convergentes)

Se conoce que $M_9 = 1$. Utilizando la formulación de la temperatura total

¹ Recordar que en inglés: matched nozzle es tobera adaptada y choked nozzle es tobera crítica.

$$T_{t9} = T_9 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{t9}}{T_9} = \frac{\gamma_t + 1}{2}$$

Como el proceso es isentrópico

$$\frac{P_9}{P_{t9}} = \left(\frac{T_9}{T_{t9}} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_9}{P_0} = \frac{P_{t9}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_t + 1} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}}$$

b. Tobera adaptada

De este tipo de tobera se sabe que $P_9 = P_0$. Al ser un proceso isentrópico se obtiene.

$$\Rightarrow \frac{T_{t9}}{T_0} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2$$

$$\Rightarrow M_9 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_t - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} - 1 \right]}$$

En todos los casos se puede escribir

$$\frac{P_{t9}}{P_0} = \frac{P_{t0}}{P_0} \frac{P_{t2}}{P_{t0}} \frac{P_{t3}}{P_{t2}} \frac{P_{t4}}{P_{t3}} \frac{P_{t5}}{P_{t4}} \frac{P_{t9}}{P_{t5}} = \delta_0 \pi_d \pi_c \pi_b \pi_t \pi_n$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \theta_t \tau_t$$

3.8. Ecuación del empuje del turborreactor

Del tema 1 se recuerda que la ecuación del empuje del turborreactor es

$$F = (\dot{m} + \dot{m}_f) u_9 - \dot{m} u_0 + A_9 (P_9 - P_0)$$

Para adimensionalizar esta expresión lo primero que se hace es dividir la fuerza por $\dot{m} a_0$. Donde a_0 es la velocidad del sonido en la entrada del tubo de corriente ($a_0 = \sqrt{\gamma T R_0}$).

$$\frac{F}{\dot{m} a_0} = (1 + f) \frac{u_9}{a_0} - M_0 + \frac{A_9 P_9}{\dot{m} a_0} \left(1 - \frac{P_0}{P_9} \right)$$

Recordando que

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0} \quad M_0 = \frac{u_0}{a_0} \quad f = \frac{\dot{m}_f}{\dot{m}}$$

Ahora se busca adimensionalizar la parte de la derecha. Los factores no dimensionales pueden escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{a_0} &= M_0 \sqrt{\frac{\gamma_t RT_0}{\gamma_c RT_0}} \\ &= M_0 \sqrt{\frac{\gamma_t}{\gamma_c}} \sqrt{\frac{T_0}{T_0}} \\ \frac{A_9 P_9}{\dot{m} a_0} &= \frac{(1+f) A_9 \rho_9 RT_0}{\rho_9 u_0 A_9 a_0} \\ &= \frac{(1+f) RT_0}{u_0 a_0} \frac{1}{a_0} \\ &= \frac{(1+f) RT_0}{u_0 \gamma_c RT_0} \\ &= \frac{(1+f)}{M_0} \sqrt{\frac{1}{\gamma_c \gamma_t}} \sqrt{\frac{T_0}{T_0}} \end{aligned}$$

La fracción del combustible f puede encontrarse haciendo un balance de energía en la combustión, asumiendo que es adiabática, h es el poder calorífico de la combustión y η_b es la eficiencia de la combustión.

$$\begin{aligned} \dot{m} h_{t3} + \dot{m}_f \eta_b h &= (\dot{m} + \dot{m}_f) h_{t4} \\ \Rightarrow c_{pc} T_{t3} + f \eta_b h &= (1+f) c_{pc} T_{t4} \\ \Rightarrow f &= \frac{c_{pt} T_{t4} - c_{pc} T_{t3}}{\eta_b h - c_{pt} T_{t4}} \end{aligned}$$

Se puede ahora encontrar una expresión para f agrupándolo en términos adimensionales.

$$f = \frac{\frac{c_{pt}}{c_{pc}} \theta_t - \theta_0 \tau_c}{\frac{\eta_b h}{c_{pc} T_0} - \frac{c_{pt}}{c_{pc}} \theta_t}$$

3.9. Turborreactor ideal

El turborreactor ideal es un modelo de referencia. Se utiliza para comparar el turborreactor real con uno que sería de máxima eficiencia. Se utilizan las siguientes suposiciones:

- Eficiencias unitarias en cada componente
- El ratio de la presión total es igual a la unidad para cada uno de los componentes estáticos
- La masa de combustible que se inyecta es negligible

- La constante adiabática es constante, además tanto para la zona fría como caliente es la misma
- La tobera está adaptada

Si se utilizan todas estas suposiciones aplicadas a las ecuaciones descritas para cada etapa se obtiene un ciclo ideal visible en la Figura 3.2 (donde también se puede comparar con el ciclo real). En esta figura las líneas discontinuas describen isóbaras (presión constante).

Como se puede comprobar en la Figura 3.2 (en la siguiente página), en un motor ideal tanto la presión como la temperatura de remanso se mantienen constantes hasta la entrada de la cámara de combustión. En el motor real solo se mantiene la temperatura de remanso, la presión de remanso disminuye un poco. En el motor ideal, el proceso de combustión sigue una isóbara. Una vez llegado a la turbina, el trabajo se saca de una disminución de temperatura. En las siguientes etapas las magnitudes de remanso no varían.

Se puede comprobar como los procesos del ciclo real se desvían de un poco del ideal. El ciclo ideal ayuda para el diseño de los procesos del motor no ideal. Por ejemplo la T_3 se busca que coincida con la isóbara del proceso ideal. También se puede observar un comportamiento muy similar entre las etapas 5 y 9.

El ciclo no ideal genera más entropía que el ciclo ideal aunque esta puede verse que es pequeña entre etapas.

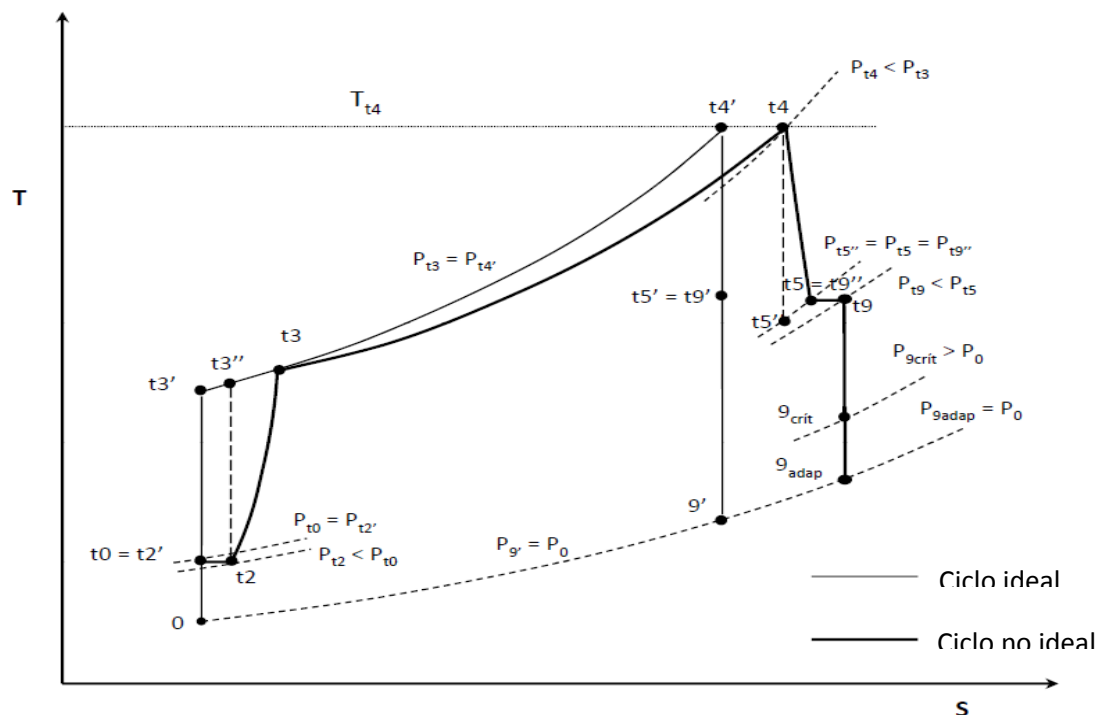


Figura 3.2. Ciclo ideal vs ciclo no ideal

3.10. Ecuación del empuje para el turborreactor ideal

Al igual que con el turborreactor, se adimensionaliza la ecuación del empuje.

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = \frac{u_9}{a_0} - M_0 = M_9 \sqrt{\frac{T_9}{T_0}} - M_0$$

Como el motor es ideal la relación de presiones queda como $\delta_0 \pi_c \pi_t$ y que en las otras etapas no hay pérdidas de presión.

$$\begin{aligned} M_9 &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[(\delta_0 \pi_c \pi_t)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [\theta_0 \tau_c \tau_t - 1]} \\ \frac{T_9}{T_0} &= \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_9^2} \theta_t \tau_t \\ &= \frac{\theta_t \tau_t}{\theta_0 \tau_c \tau_t} \\ &= \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} \end{aligned}$$

Introduciéndolo en la ecuación del empuje

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [\theta_0 \tau_c \tau_t - 1]} \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} - M_0$$

Introduciendo el balance de potencia entre el compresor y la turbina

$$\tau_t = 1 - \frac{\theta_0}{\theta_t} (\tau_c - 1)$$

Finalmente el empuje adimensional queda

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\theta_t + \theta_0 - \theta_0 \tau_c - \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} \right]} - M_0$$

Como se puede ver este ratio es del empuje entre un flujo másico lo que nos daría una idea de lo grande que debe ser el motor.

La fracción de combustible puede calcularse mediante el balance de energía de la combustión. Y después calcular el empuje específico. Este empuje se define respecto al flujo de combustible ya que es lo que realmente cuesta dinero en las operaciones.

$$f = \frac{c_p T_0}{h} (\theta_t - \theta_0 \tau_c)$$

Esto permite calcular el impulso específico

$$\begin{aligned} I_{sp} &= \frac{F}{\dot{m}_f g} \\ &= \frac{a_0}{g} \frac{F}{\dot{m} a_0} \frac{\dot{m}}{\dot{m}_f} \\ &= \frac{a_0}{g} \frac{F}{\dot{m} a_0} \frac{1}{f} \end{aligned}$$

Finalmente

$$I_{sp} = \frac{a_0 h}{g c_p T_0} \frac{\sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\theta_t + \theta_0 - \theta_0 \tau_c - \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} \right]} - M_0}{\theta_t - \theta_0 \tau_c}$$

3.11. Optimización del turborreactor

Un primer planteamiento sería optimizar el impulso específico. De la ecuación del empuje, dadas unas condiciones de vuelo ($M_0, T_0 \dots$) y la temperatura a la salida de la cámara de combustión θ_t , se puede seleccionar un τ_c de forma que se maximice el impulso específico.

$$\begin{aligned} &\left(\theta_t + \theta_0 - \theta_0 \tau_c - \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} \right)_{max} \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau_c} \left(\theta_t + \theta_0 - \theta_0 \tau_c - \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} \right) &= 0 \\ \Rightarrow -\theta_0 + \frac{\theta_t}{\theta_0 (\tau_c)_{opt}^2} &= 0 \\ \Rightarrow (\tau_c)_{opt} &= \frac{\sqrt{\theta_t}}{\theta_0} \end{aligned}$$

si se dice que el motor ha sido optimizado para máxima empuje adimensional se utiliza la fórmula $(\tau_c)_{opt} = \sqrt{\theta_t}/\theta_0$. En caso contrario esta fórmula no se utiliza.

Sustituyendo la relación de temperaturas en la ecuación del empuje se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\dot{m} a_0} \right)_{max} &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\theta_t + \theta_0 - \sqrt{\theta_t} - \frac{\theta_t}{\sqrt{\theta_t}} \right]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [\theta_0 + \theta_t - 2\sqrt{\theta_t}]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [\theta_0 + (\sqrt{\theta_t} - 1)^2 - 1]} \frac{(\theta_0 - 1)}{(\theta_0 - 1)} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2(\theta_0 - 1)}{\gamma-1} \left[\frac{(\theta_0 - 1)}{(\theta_0 - 1)} + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1} \right]} - M_0 \end{aligned}$$

$$= M_0 \sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} - M_0$$

El impulso específico para máximo empuje es

$$\begin{aligned} (I_{sp})_{F_{max}} &= \frac{a_0 M_0 h \sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} - 1}{g c_p T_0 \theta_t - \sqrt{\theta_t}} \\ &= \frac{(\gamma - 1) u_0 h \sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} - 1}{g a_0^2 \theta_t - \sqrt{\theta_t}} \\ &= \frac{(\gamma - 1) u_0 h}{g a_0^2} \frac{1}{\theta_t - \sqrt{\theta_t}} \frac{\frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} + 1} \\ &= \frac{(\gamma - 1) h M_0}{g} \frac{2}{a_0 (\gamma - 1) M_0^2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} + 1} \end{aligned}$$

Finalmente

$$(I_{sp})_{F_{max}} = \frac{2h}{g u_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right)} + 1}$$

Este impulso queda en función de dos parámetros (θ_t y θ_0). Para maximizar el impulso se intenta optimizar para θ_t . Se deriva respecto a θ_t .²

$$\frac{\partial}{\partial \theta_t} (I_{sp})_{F_{max}} = \frac{2h}{g u_0} \left[\frac{-\frac{\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(\theta_0 - 1) \sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_t - 2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0 - 1}}} + \sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_t - 2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0 - 1}} + 1}{2\theta_0^{3/2} \left(\sqrt{\frac{\theta_0 + \theta_t - 2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0 - 1}} + 1\right)^2} \right] = 0$$

² Esta derivada es un poco complicada y larga de desarrollar. Para una posible resolución visitar este link: [http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivate+\(1-1/sqrt\(x\)\)/\(sqrt\(1%2B\(sqrt\(x\)-1\)^2/\(a-1\)\)%2B1](http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivate+(1-1/sqrt(x))/(sqrt(1%2B(sqrt(x)-1)^2/(a-1))%2B1)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\frac{\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t}-1)^2}{(\theta_0-1)\sqrt{\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}}} + \sqrt{\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}} + 1 = 0 \\
&\Rightarrow -\frac{\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t}-1)^2}{(\theta_0-1)\sqrt{\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}}} + \sqrt{\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}} + 1 = 0 \\
&\Rightarrow -\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t}-1)^2 + (\theta_0-1)\left(\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}\right) + (\theta_0-1)\sqrt{\frac{\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}}{\theta_0-1}} = 0 \\
&\Rightarrow -\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t}-1)^2 + (\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t}) + \sqrt{(\theta_0-1)(\theta_0+\theta_t-2\sqrt{\theta_t})} = 0 \\
&\Rightarrow -\sqrt{\theta_t}(\sqrt{\theta_t}-1)^2 + [(\theta_0-1) + (\sqrt{\theta_t}-1)^2] + \sqrt{(\theta_0-1)[(\theta_0-1) + (\sqrt{\theta_t}-1)^2]} = 0 \\
&\Rightarrow -(\sqrt{\theta_t}-1)^3 + (\theta_0-1) = -\sqrt{(\theta_0-1)^2 + (\theta_0-1)(\sqrt{\theta_t}-1)^2} \\
&\Rightarrow (\sqrt{\theta_t}-1)^6 - 2(\sqrt{\theta_t}-1)^3(\theta_0-1) + (\theta_0-1)^2 = (\theta_0-1)^2 + (\theta_0-1)(\sqrt{\theta_t}-1)^2 \\
&\Rightarrow (\sqrt{\theta_t}-1)^4 - 2(\sqrt{\theta_t}-1)(\theta_0-1) = (\theta_0-1)
\end{aligned}$$

Finalmente

$$(\theta_0 - 1) = \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^4}{2\sqrt{\theta_t} - 1}$$

Sustituyendo este valor en el impulso específico máximo queda

$$\begin{aligned}
[(I_{sp})_{max}]_{F_{max}} &= \frac{2h}{gu_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t}-1)^2}{\theta_0-1}\right)} + 1} \\
&= \frac{2h}{gu_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{\theta_t}-1}{(\sqrt{\theta_t}-1)^2}\right)} + 1} \\
&= \frac{2h}{gu_0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}\right)(\sqrt{\theta_t}-1)}{\sqrt{\left((\sqrt{\theta_t}-1)^2 + 2\sqrt{\theta_t}-1\right)} + (\sqrt{\theta_t}-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2h \sqrt{\theta_t} - 2 + 1/\sqrt{\theta_t}}{gu_0 \sqrt{\theta_t} + (\sqrt{\theta_t} - 1)} \\
 &= \frac{2h \sqrt{\theta_t} - 2 + 1/\sqrt{\theta_t}}{gu_0 (2\sqrt{\theta_t} - 1)} \\
 \Rightarrow [(I_{sp})_{max}]_{F_{max}} &= \frac{2h \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}\right)^2}{gu_0 \left(2 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}\right)}
 \end{aligned}$$

Resumiendo, dado el turborreactor ideal óptimo (optimizando doblemente), se utiliza el siguiente diagrama para resolver τ_c , para un número de Mach dado.

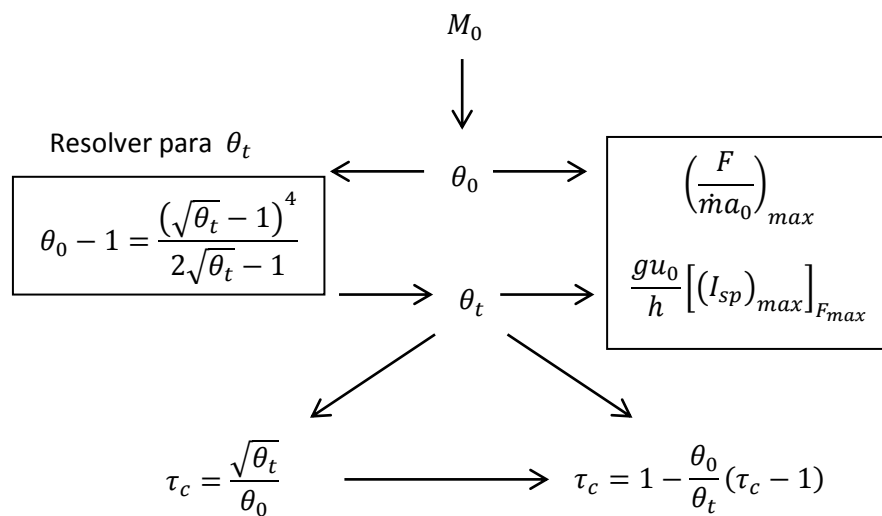


Figura 3.3. Diagrama de resolución

La siguiente tabla muestra como los parámetros de diseño para un turborreactor ideal óptimo cambian de acuerdo al número de Mach de diseño. Se debe notar que tanto el empuje como el impulso específico para las condiciones de diseño crecen de forma monótona respecto al número de Mach. Además se puede observar que el turborreactor ofrece buenas opciones propulsivas para altos números de Mach.

M_0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
θ_0	1.05	1.2	1.45	1.8	2.25	2.8	3.45
θ_t	2.4719	3.4544	4.3869	5.3052	6.2214	7.1410	8.0666
$T_{t4}(K)^3$	543.8	760.0	965.1	1167.2	1368.7	1571.0	1774.7
τ_c	1.4974	1.5488	1.4444	1.2796	1.1086	0.9544	0.8232
τ_t	0.7887	0.8093	0.8531	0.9051	0.9607	1.0179	1.0756
F (no dim.)	0.8738	1.1647	1.3605	1.5345	1.6730	1.7940	1.9020
I_{sp} (no dim.)	0.1942	0.2919	0.3587	0.4090	0.4489	0.4817	0.5095

Tabla 3.2. Parámetros de diseño del turborreactor en función de M_0

³ Asumiendo $T_0 = 220$ K (temperatura de crucero típica).

4. Turbofán

4.1. Hipótesis

El turbofán es un motor basado en el turboreactor. Se divide el flujo del difusor en un flujo primario y flujo secundario. El turbofán que se ve en la Figura 4.1 es de flujos separados. Las condiciones de salida de los dos flujos no tienen por qué ser las mismas. El flujo primario penetra al núcleo del motor (compresores y turbinas) y el flujo secundario se deriva a un conducto anular exterior y concéntrico con el núcleo. Los turbofanes tienen varias ventajas respecto a los turboreactores: consumen menos combustible, lo que los hace más económicos, producen menor contaminación y reducen el ruido ambiental.

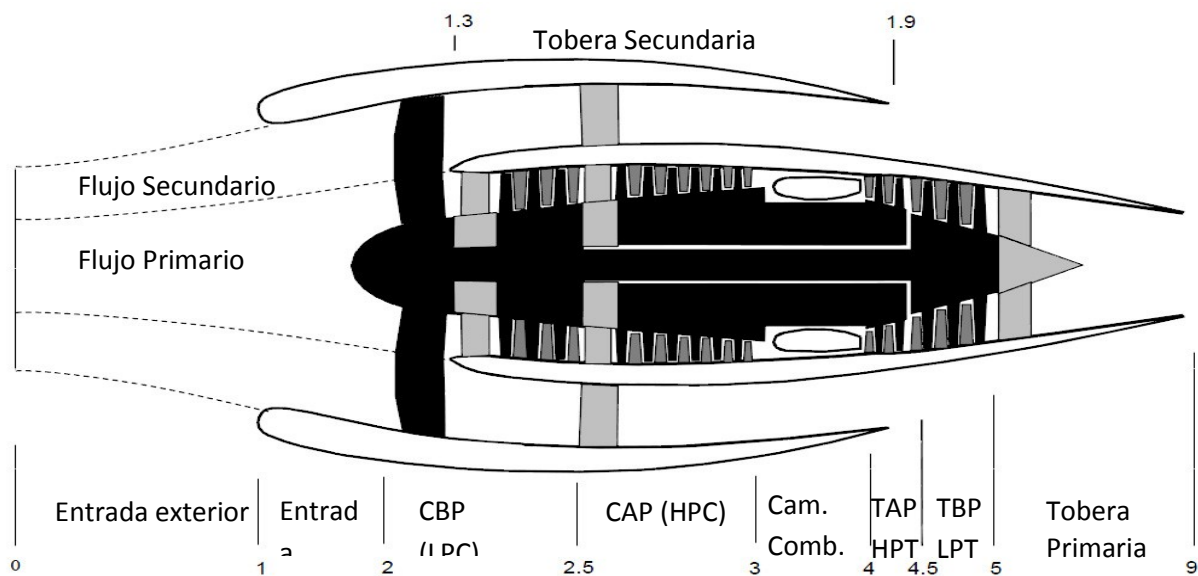


Figura 4.1. Etapas de un turbofán

Como en la mayoría de los estudios en ingeniería se debe simplificar el modelo utilizando una serie de hipótesis:

- e. Comportamiento casi unidimensional a lo largo del motor
- f. El gas se considera perfecto y caloríficamente perfecto donde además la constante R_g se mantiene constante a lo largo del motor
- g. La constante adiabática γ_c (cold) se considera conocida hasta la cámara de combustión y una constante γ_t (hot) a partir de la cámara de combustión hasta la salida
- h. Las eficiencias de los componentes son conocidas

Es importante que paramétricamente el π_c ya incluye el efecto de compresión del fan. Así queda una expresión similar a la del turboreactor.

$$\pi_c = \frac{P_{t3}}{P_{t2}}$$

El parámetro α es la relación de derivación del Fan. El flujo primario es \dot{m} y el secundario es $\alpha \cdot \dot{m}$.

La potencia de expansión global de la turbina se destina ahora no solo al compresor (que pueden ser varios), pero también al fan.

Potencia de la turbina = compresión del flujo primario + compresión del flujo secundario

$$\dot{m}(1+f)c_{pt}T_{t4}(1-\tau_t) = \dot{m}c_{pc}T_{t2}(\tau_c - 1) + \alpha\dot{m}c_{pc}T_{t2}(\tau_f - 1)$$

$$\Rightarrow \tau_t = 1 - \frac{c_{pc}\theta_0}{c_{pt}\theta_t} \frac{1}{1+f} [(\tau_c - 1) + \alpha(\tau_f - 1)]$$

4.2. Ecuación del empuje del turbofán

Al haber dos flujos en el turbofán el empuje total es la suma de los flujos.

$$F = F_p + F_s$$

Donde

$$F_p = (\dot{m} + \dot{m}_f)u_9 - \dot{m}u_0 + A_9(P_9 - P_0)$$

$$F_s = \alpha\dot{m}(u_{19} - u_0) + A_{19}(P_{19} - P_0)$$

De forma similar al estudio del turborreactor se adimensionaliza la ecuación del empuje.

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = (1+f)\frac{u_9}{a_0} - M_0 + \frac{P_9A_9}{\dot{m}a_0}\left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right) + \alpha\left(\frac{u_{19}}{a_0} - M_0\right) + \frac{P_{19}A_{19}}{\dot{m}a_0}\left(1 - \frac{P_0}{P_{19}}\right)$$

Para el flujo primario, el factor adimensional de la parte derecha de la ecuación es similar al del turborreactor, dadas por las siguientes ecuaciones.

$$\frac{u_9}{a_0} = M_9 \sqrt{\frac{\gamma_t}{\gamma_c}} \sqrt{\frac{T_9}{T_0}}$$

$$\frac{A_9P_9}{\dot{m}a_0} = \frac{1+f}{M_9} \sqrt{\frac{1}{\gamma_c\gamma_t}} \sqrt{\frac{T_9}{T_0}}$$

$$f = \frac{\frac{c_{pt}}{c_{pc}}\theta_t - \theta_0\tau_c}{\frac{\eta_b h}{c_{pc}T_0} - \frac{c_{pt}}{c_{pc}}\theta_t}$$

De forma similar, para el flujo secundario se pueden definir las siguientes ecuaciones.

$$\frac{u_{19}}{a_0} = M_{19} \sqrt{\frac{T_{19}}{T_0}}$$

$$\frac{A_{19}P_{19}}{\dot{m}a_0} = \frac{\alpha}{\gamma_c M_{19}} \sqrt{\frac{T_{19}}{T_0}}$$

De forma similar al estudio del turborreactor, todos los parámetros adimensionales pueden ser expresados como funciones del número de Mach y otros parámetros adimensionales básicos. Las expresiones dependen mucho de las condiciones de operación de ambas toberas (críticas o adaptadas) ambas son independientes de la otra.

El análisis de la tobera del flujo primario es el mismo que en el turborreactor. Hay que recordar que para saber si la tobera es crítica se tiene que cumplir

$$\frac{P_{t9}}{P_0} \geq \left(\frac{1 + \gamma_t}{2} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}}$$

Para el flujo primario

- a. Tobera crítica (solo para toberas convergentes)

Se conoce que $M_9 = 1$. Utilizando la formulación de la temperatura total

$$\begin{aligned} T_{t9} &= T_9 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \right) \\ \Rightarrow \frac{T_{t9}}{T_9} &= \frac{\gamma_t + 1}{2} \end{aligned}$$

Como el proceso es isentrópico

$$\begin{aligned} \frac{P_9}{P_{t9}} &= \left(\frac{T_9}{T_{t9}} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \\ \Rightarrow \frac{P_9}{P_0} &= \frac{P_{t9}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_t + 1} \right)^{\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1}} \end{aligned}$$

- b. Tobera adaptada

De este tipo de tobera se sabe que $P_9 = P_0$. Al ser un proceso isentrópico se tiene

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{T_{t9}}{T_0} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \\ \Rightarrow \left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \\ \Rightarrow M_9 &= \sqrt{\frac{2}{\gamma_t - 1} \left[\left(\frac{P_{t9}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} - 1 \right]} \end{aligned}$$

En ambos casos se puede escribir

$$\frac{P_{t9}}{P_0} = \frac{P_{t0}}{P_0} \frac{P_{t2}}{P_{t0}} \frac{P_{t3}}{P_{t2}} \frac{P_{t4}}{P_{t3}} \frac{P_{t5}}{P_{t4}} \frac{P_{t9}}{P_{t5}} = \delta_0 \pi_a \pi_c \pi_b \pi_t \pi_n$$

$$\frac{T_9}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \frac{T_{t9}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_9^2} \theta_t \tau_t$$

Para el flujo secundario

- a. Tobera crítica (solo para toberas convergentes)

Se conoce que $M_{19} = 1$.

$$\Rightarrow \frac{T_{t19}}{T_{19}} = \frac{\gamma_c + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{19}}{P_0} = \frac{P_{t19}}{P_0} \left(\frac{2}{\gamma_c + 1} \right)^{\frac{\gamma_c}{\gamma_c - 1}}$$

- b. Tobera adaptada

Se sabe que $P_{19} = P_0$.

$$\Rightarrow M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma_c - 1} \left[\left(\frac{P_{t19}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma_c - 1}{\gamma_c}} - 1 \right]}$$

En ambos casos se puede escribir

$$\frac{P_{t19}}{P_0} = \frac{P_{t0}}{P_0} \frac{P_{t2}}{P_{t0}} \frac{P_{t13}}{P_{t2}} \frac{P_{t19}}{P_{t13}} = \delta_0 \pi_d \pi_f \pi_n$$

$$\frac{T_{19}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{19}^2} \frac{T_{t19}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{19}^2} \theta_0 \tau_f$$

Recordar, el balance expansión – compresión

$$\tau_t = 1 - \frac{c_{pc}}{c_{pt}} \frac{\theta_0}{\theta_t} \frac{1}{1 + f} [(\tau_c - 1) + \alpha(\tau_f - 1)]$$

También hay que acordarse de que los ratios de presión del compresor y de la turbina están relacionados con sus respectivos ratios de temperaturas a través de las relaciones isentrópicas o politrópicas.

Finalmente se consigue una ecuación adimensional para el empuje, escrita como una función de parámetros adimensionales.

$$\frac{F}{\dot{m} a_0} = \tilde{F} \left(M_0, \alpha, \tau_f, \tau_c, \theta_t, \frac{h}{c_{pc} T_0} \right)$$

Esta ecuación es útil para el diseño del motor, tomando los parámetros α , τ_f , τ_c , y θ_t por separado como parámetros independientes. Una vez estos parámetros se fijan para unas condiciones de

vuelo de referencia M_0 y T_0 , el motor está completamente determinado (incluyendo el flujo de masa, que define su tamaño).

4.3. Maximizando el empuje

El máximo empuje se consigue cuando las dos toberas están adaptadas. En el caso de la ecuación del empuje es

$$F = \dot{m}(1+f)u_9 + \alpha\dot{m}u_{19} - \dot{m}(1+\alpha)u_0$$

El incremento en energía cinética del flujo es

$$\Delta E = \frac{1}{2}\dot{m}(1+f)u_9^2 + \frac{1}{2}\alpha\dot{m}u_{19}^2 - \frac{1}{2}\dot{m}(1+\alpha)u_0^2$$

Se define el rendimiento propulsor como

$$\begin{aligned}\eta_p &= \frac{Fu_0}{\Delta E} \\ &= \frac{2[(1+f)u_9 + \alpha u_{19} - (1+\alpha)u_0]u_0}{(1+f)u_9^2 + \alpha u_{19}^2 - (1+\alpha)u_0^2}\end{aligned}$$

A la hora de maximizar este rendimiento para unas condiciones dadas de α y ΔE , se tiene que tener en cuenta que la función depende de dos variables u_9 y u_{19} . Se toma primero la ecuación del incremento de energía y se pone una de las dos variables en función de la otra, por ejemplo $u_9 = u_9(u_{19})$. Se deriva la ecuación respecto u_{19} .

$$\begin{aligned}\dot{m}(1+f)u_9 du_9 + \alpha\dot{m}u_{19} du_{19} &= 0 \\ \Rightarrow du_9 &= -\frac{\alpha u_{19}}{(1+f)u_9} du_{19}\end{aligned}$$

La condición de máximo empuje es

$$\begin{aligned}\frac{dF}{du_{19}} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dF}{du_{19}} &= \dot{m}(1+f)\frac{du_9}{du_{19}} + \alpha\dot{m} = 0 \\ \Rightarrow (1+f)\frac{du_9}{du_{19}} + \alpha &= 0 \\ \Rightarrow -(1+f)\frac{\alpha u_{19}}{(1+f)u_9} + \alpha &= 0\end{aligned}$$

Obteniendo que el empuje máximo se obtiene teniendo las mismas velocidades de salida para los dos flujos.

$$\Rightarrow u_{19} = u_9$$

El mismo resultado puede obtenerse calculando las derivadas parciales de la eficiencia respecto a u_9 y u_{19} .

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_p}{\partial u_9} = \frac{\partial}{\partial u_9} \left(\frac{F u_0}{\Delta E} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_9} \Delta E - \frac{\partial(\Delta E)}{\partial u_9} F = 0 \\ \frac{\partial \eta_p}{\partial u_{19}} = \frac{\partial}{\partial u_{19}} \left(\frac{F u_0}{\Delta E} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial u_{19}} \Delta E - \frac{\partial(\Delta E)}{\partial u_{19}} F = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1+f)\Delta E - 2(1+f)u_9 F = 0 \\ \alpha \Delta E - 2\alpha u_{19} F = 0 \end{cases}$$

Finalmente $u_{19} = u_9$.

4.4. Turbofán ideal

Como un modelo de referencia, el turbofán ideal está basado en las siguientes suposiciones:

- Eficiencias unitarias para cada componente
- Ratios de presión total iguales a uno para cada componentes estáticos
- Fracción de fuel negligible, $1 + f \approx 1$
- La misma constante adiabática para todo el motor, $\gamma_t = \gamma_c = 1.4$
- Toberas adaptadas tanto para el flujo primario como secundario, $P_9 = P_0$ y $P_{19} = P_0$
- Velocidades de salida iguales para ambos flujos, $u_9 = u_{19}$

La ecuación del empuje adimensional queda

$$\frac{F}{\dot{m} a_0} = \frac{u_9}{a_0} - M_0 + \alpha \frac{u_{19}}{a_0} - \alpha M_0$$

Como las velocidades de escape de ambos flujos son iguales, esta ecuación se puede dejar solo en función de u_{19} .

$$\begin{aligned} \frac{F}{\dot{m} a_0} &= (1 + \alpha) \left(\frac{u_{19}}{a_0} - M_0 \right) \\ &= (1 + \alpha) \left(M_{19} \sqrt{\frac{T_{19}}{T_0}} - M_0 \right) \end{aligned}$$

Donde

$$M_{19} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[(\delta_0 \pi_f)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} [\theta_0 \tau_f - 1]}$$

$$\frac{T_{19}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{19}^2} \theta_0 \tau_f = \frac{\theta_0 \tau_f}{\theta_0 \tau_f} = 1$$

Se necesita explotar la igualdad de velocidades de salida de ambos flujos.

$$\begin{aligned}
 M_9 \sqrt{\frac{T_9}{T_0}} &= M_{19} \sqrt{\frac{T_{19}}{T_0}} \\
 \Rightarrow M_9^2 \frac{T_9}{T_0} &= M_{19}^2 \frac{T_{19}}{T_0} \\
 \Rightarrow \frac{2}{\gamma-1} (\theta_0 \tau_c \tau_t - 1) \frac{\theta_t}{\theta_0 \tau_c} &= \frac{2}{\gamma-1} (\theta_0 \tau_f - 1) \\
 \Rightarrow \tau_f &= \frac{\tau_c (\theta_t \tau_t + 1) - \theta_t / \theta_0}{\theta_0 \tau_c}
 \end{aligned}$$

El balance de potencia entre compresor y turbina es

$$\tau_t = 1 - \frac{\theta_0}{\theta_t} [\tau_c - 1 + \alpha (\tau_f - 1)]$$

Cuando τ_t se sustituye en la expresión para τ_f

$$\begin{aligned}
 \tau_f &= \frac{\tau_c [\theta_t (1 - \frac{\theta_0}{\theta_t} [\tau_c - 1 + \alpha (\tau_f - 1)]) + 1] - \theta_t / \theta_0}{\theta_0 \tau_c} \\
 &= \frac{\theta_t - \theta_0 (\tau_c - 1 + \alpha \tau_f - \alpha) + 1 - \theta_t / (\theta_0 \tau_c)}{\theta_0} \\
 \Rightarrow \tau_f (1 + \alpha) &= \frac{\theta_t + \theta_0 (1 + \alpha - \tau_c) + 1 - \theta_t / (\theta_0 \tau_c)}{\theta_0} \\
 \Rightarrow \tau_f &= \frac{\theta_t + \theta_0 (1 + \alpha - \tau_c) + 1 - \theta_t / (\theta_0 \tau_c)}{\theta_0 (1 + \alpha)}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora esta expresión en la ecuación el empuje, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
 \frac{F}{\dot{m} a_0} &= (1 + \alpha) (M_{19} - M_0) \\
 \Rightarrow \frac{F}{\dot{m} a_0} &= (1 + \alpha) \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma-1} [\theta_0 \tau_f - 1]} - M_0 \right) \\
 \Rightarrow \frac{F}{\dot{m} a_0} &= (1 + \alpha) \left(\sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\theta_0 \frac{\theta_t + \theta_0 (1 + \alpha - \tau_c) + 1 - \theta_t / (\theta_0 \tau_c)}{\theta_0 (1 + \alpha)} - 1 \right]} - M_0 \right) \\
 \Rightarrow \frac{F}{\dot{m} a_0 (1 + \alpha)} &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\theta_t + \theta_0 (1 - \tau_c) - \theta_t / (\theta_0 \tau_c) + \alpha (\theta_0 - 1)}{(1 + \alpha)} \right]} - M_0
 \end{aligned}$$

4.5. Diseño para máximo empuje

En la ecuación el empuje, dadas unas condiciones de vuelo (M_0 y T_0), una relación de derivación α y un ratio de temperaturas de combustión θ_t , seleccionando un τ_c para maximizar el empuje adimensional. Para maximizar el empuje adimensional se debe maximizar lo siguiente

$$[\theta_t + \theta_0(1 - \tau_c) - \theta_t/(\theta_0\tau_c) + \alpha(\theta_0 - 1)]_{max}$$

Se deriva respecto a τ_c para obtener $(\tau_c)_{opt}$.

$$\frac{\partial}{\partial \tau_c} [\theta_t + \theta_0(1 - \tau_c) - \theta_t/(\theta_0\tau_c) + \alpha(\theta_0 - 1)] = 0$$

$$\Rightarrow -\theta_0 + \frac{\theta_t}{\theta_0\tau_c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \theta_0^2\tau_c = \theta_t$$

$$\Rightarrow (\tau_c)_{opt} = \frac{\sqrt{\theta_t}}{\theta_0}$$

Sustituyendo ahora este $(\tau_c)_{opt}$ en la ecuación del empuje queda

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\dot{m}a_0(1+\alpha)}\right)_{max} &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\theta_t + \theta_0(1 - \sqrt{\theta_t/\theta_0}) - \theta_t/(\theta_0\sqrt{\theta_t/\theta_0}) + \alpha(\theta_0 - 1)}{(1+\alpha)} \right]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\theta_t + \theta_0 - \sqrt{\theta_t} - \sqrt{\theta_t} + \alpha(\theta_0 - 1)}{(1+\alpha)} \right]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{\theta_t + \theta_0 - 2\sqrt{\theta_t} + (1-1) + \alpha(\theta_0 - 1)}{(1+\alpha)} \right]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2 + (1+\alpha)(\theta_0 - 1)}{(1+\alpha)} \right]} - M_0 \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma-1} \left[\frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)} + (\theta_0 - 1) \right]} - M_0 \end{aligned}$$

Sabiendo que

$$\theta_0 = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\gamma-1} = \frac{M_0^2}{\theta_0 - 1}$$

Reemplazando en el empuje

$$\begin{aligned} \left(\frac{F}{\dot{m}a_0(1+\alpha)}\right)_{max} &= \sqrt{\frac{M_0^2}{\theta_0 - 1} \left[\frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)} + (\theta_0 - 1) \right]} - M_0 \\ &= M_0 \left[\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} - 1 \right] \end{aligned}$$

El empuje específico para máximo empuje es

$$\begin{aligned} (I_{sp})_{F_{max}} &= \frac{(1+\alpha)a_0M_0h}{g c_p T_0} \frac{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} - 1}{\theta_t - \sqrt{\theta_t}} \\ &= \frac{(1+\alpha)(\gamma - 1)u_0h}{g a_0^2} \frac{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} - 1}{\theta_t - \sqrt{\theta_t}} \\ &= \frac{(1+\alpha)(\gamma - 1)u_0h}{g a_0^2} \frac{1}{\theta_t - \sqrt{\theta_t}} \frac{\frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} + 1} \\ &= \frac{(\gamma - 1)M_0h}{g a_0} \frac{2}{(\gamma - 1)M_0^2} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} + 1} \end{aligned}$$

Finalmente el impulso específico queda

$$(I_{sp})_{F_{max}} = \frac{2h}{g u_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{(1+\alpha)(\theta_0 - 1)}} + 1}$$

Esta expresión a su vez se puede optimizar para θ_t . Se deriva el empuje específico

$$\frac{\partial}{\partial \theta_t} (I_{sp})_{F_{max}} = 0$$

Esta derivada y su posterior resolución para encontrar la expresión del $(\theta_t)_{max}$ son casi iguales que en el estudio del turborreactor. Simplemente hay que sustituir $(\theta_0 - 1)$ por $(1 + \alpha)(\theta_0 - 1)$, donde ambos se consideran constantes. Obteniendo finalmente

$$(\alpha + 1)(\theta_0 - 1) = \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^4}{2\sqrt{\theta_t} - 1}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación del impulso específico se obtiene

$$\begin{aligned} [(I_{sp})_{max}]_{F_{max}} &= \frac{2h}{gu_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}{\theta_0 - 1}\right) + 1}} \\ &= \frac{2h}{gu_0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{2\sqrt{\theta_t} - 1}{(\sqrt{\theta_t} - 1)^2}\right) + 1}} \\ &= \frac{2h}{gu_0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}\right)(\sqrt{\theta_t} - 1)}{\sqrt{\left((\sqrt{\theta_t} - 1)^2 + 2\sqrt{\theta_t} - 1\right) + (\sqrt{\theta_t} - 1)}} \\ &= \frac{2h}{gu_0} \frac{\sqrt{\theta_t} - 2 + 1/\sqrt{\theta_t}}{\sqrt{\theta_t} + (\sqrt{\theta_t} - 1)} \\ &= \frac{2h}{gu_0} \frac{\sqrt{\theta_t} - 2 + 1/\sqrt{\theta_t}}{2\sqrt{\theta_t} - 1} \\ \Rightarrow [(I_{sp})_{max}]_{F_{max}} &= \frac{2h}{gu_0} \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}\right)^2}{2 - \frac{1}{\sqrt{\theta_t}}} \end{aligned}$$

Esta expresión es idéntica a la obtenida para el turborreactor.

Dado un Mach de vuelo M_0 y una relación de derivación α los parámetros del turbofán óptimo ideal se encuentra aplicando el siguiente algoritmo.

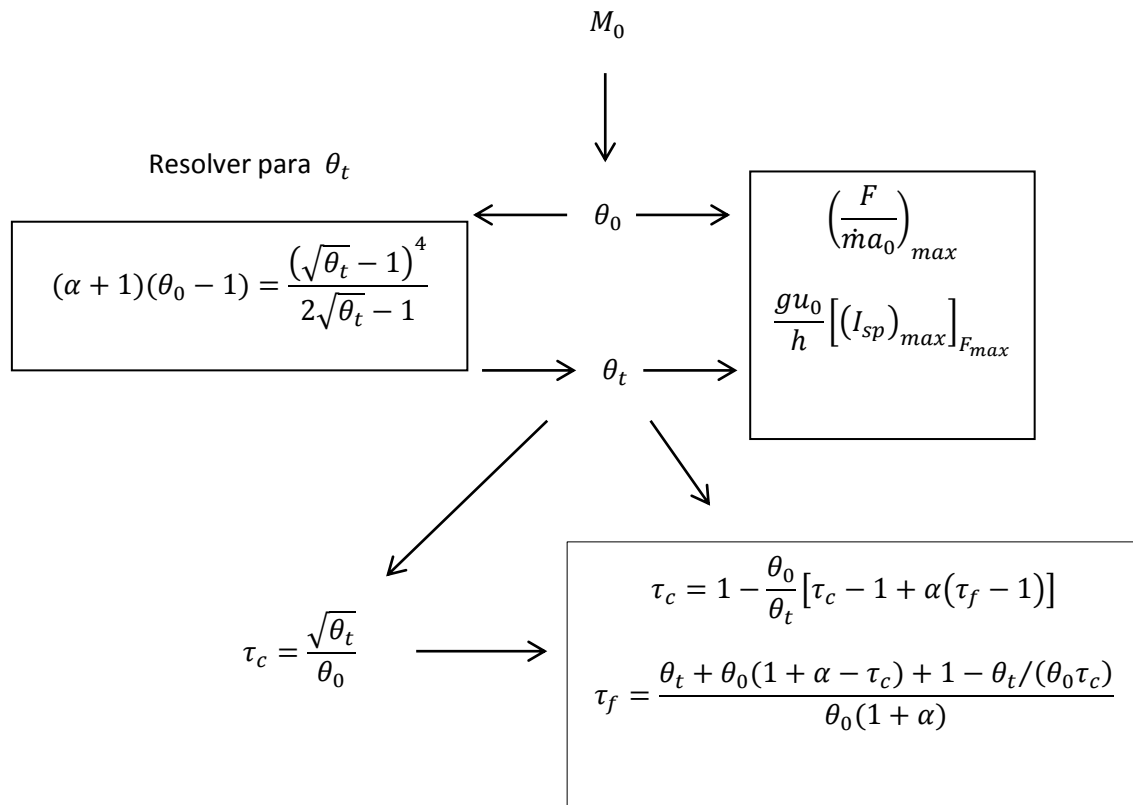


Figura 4.2. Diagrama de resolución

La siguiente tabla muestra como los parámetros de diseño para un turbofán ideal óptimo cambian con respecto a la relación de derivación α para un Mach de diseño ($M_0 = 0.8$). Se asume que $T_0 = 220$ k, una temperatura típica de crucero. Notar que tanto el empuje como el impulso específico para las condiciones de diseño crecen de forma monótona con la relación de derivación.

α	0	2	4	6	8	10	12
θ_0	1.128	1.128	1.128	1.128	1.128	1.128	1.128
θ_t	3.012	4.1756	4.9182	5.5188	6.0380	6.5028	6.9280
$T_{t4}(K)$	675.7	918.6	1082.0	1214.1	1328.4	1430.6	1.1817
τ_f	1.5020	1.3217	1.2629	1.2305	1.2092	1.1936	1.1817
τ_c	1.5536	1.8115	1.9660	2.0826	2.1784	2.2607	2.3334
τ_t	0.7967	0.7808	0.784	0.787	0.7799	0.7813	0.7829
F_{nd} (no dim.)	1.0631	0.7667	0.6570	0.5929	0.5490	0.5161	0.4902
$F_{nd}(1 + \alpha)$	1.0631	2.3001	3.2849	4.1506	4.9408	5.6772	6.3721
I_{sp} (no dim.)	0.2580	0.3452	0.3892	0.4190	0.4415	0.4596	0.4747

Tabla 4.1. Parámetros de diseño del turbofán en función de α

5. Componentes estáticos

5.1. Difusor subsónico

La función del difusor como ya se explicó brevemente en el tema del turborreactor sirve para suministrar de aire al compresor o fan a un número de Mach (subsónico y a ser posible constante) para el correcto funcionamiento del motor. También mantiene un flujo limpio y por lo tanto con mínimas pérdidas en el rango de números de Mach, incluyendo condiciones estáticas.

Los difusores son virtualmente adiabáticos ($\tau_d \approx 1$), pero los efectos de viscosidad y compresibilidad a velocidades supersónicas hacen que la presión de remanso disminuya. Como recordatorio se repiten las ecuaciones del difusor que ya se habían visto para el turborreactor.

$$\pi_d = \frac{P_{tw}}{P_{to}} \quad \pi_d = \pi_{d_{max}} \eta_r$$

Donde el factor de recuperación

$$\eta_r \begin{cases} = 1 \text{ para } M_0 < 1 \\ < 1 \text{ para } M_0 > 1 \end{cases}$$

Para un número de Mach dado, despreciando pérdidas en la presión de remanso, utilizando las ecuaciones de continuidad del flujo, vistas en el libro "Propulsión. Problemas" se obtienen las siguientes igualdades, se recuerda que \bar{m} es el parámetro de flujo de masa.

$$A_1 = A_0 \frac{\bar{m}_0}{\bar{m}_1} \quad A_2 = A_1 \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2}$$

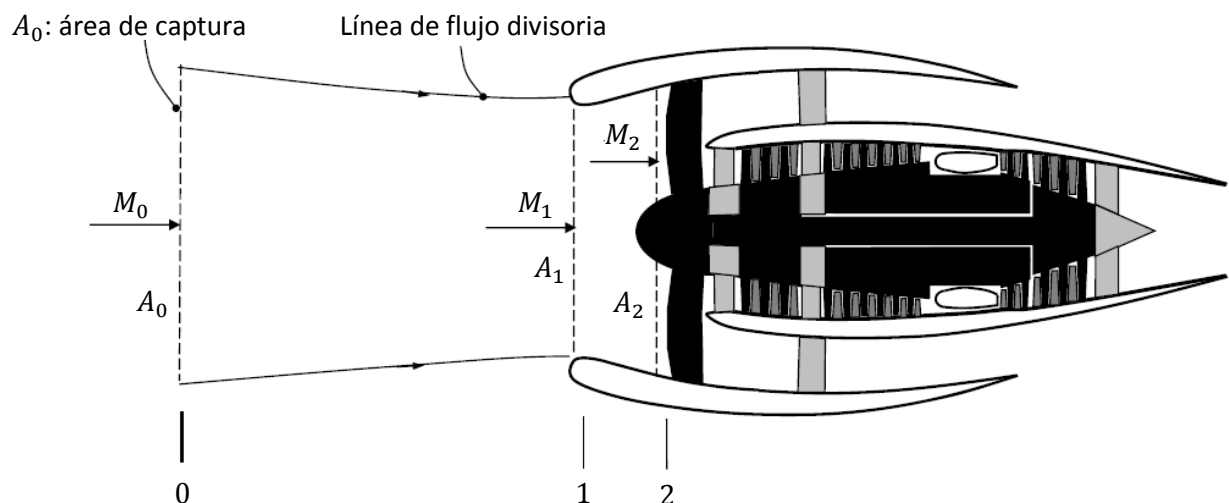


Figura 5.1. Turbofán

Para evitar efectos transónicos, M_1 no debe exceder 0.8. Este limita el área en el punto más estrecho del difusor. Como M_2 se considera constante (alrededor de 0.5), se obtiene

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\bar{m}_2}{\bar{m}_1} \approx 0.78$$

Las líneas de corriente del flujo de entrada dependen de la velocidad de vuelo, así como del régimen de operación (este último tiene menor transcendencia) $A_0/A_1 = \bar{m}_1/\bar{m}_2$. En las siguientes figuras se muestra claramente como el ratio de áreas varia.

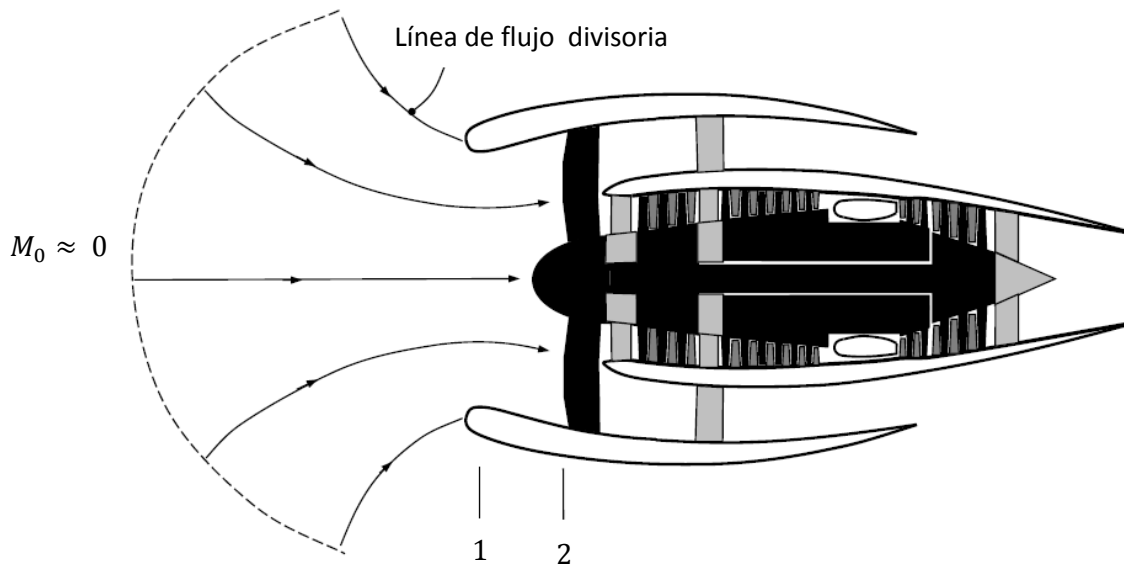


Figura 5.2. Operación estática o con baja velocidad: $A_1/A_0 = \bar{m}_0/\bar{m}_1 \approx 0$

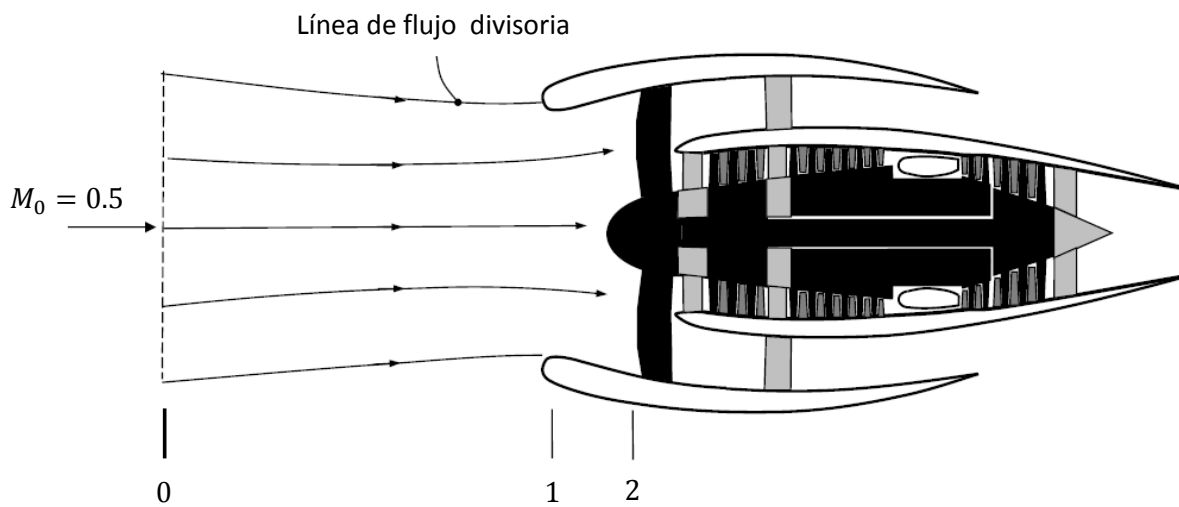


Figura 5.3. Operación con velocidad media: $A_1/A_0 = \bar{m}_0/\bar{m}_1 \approx 1$

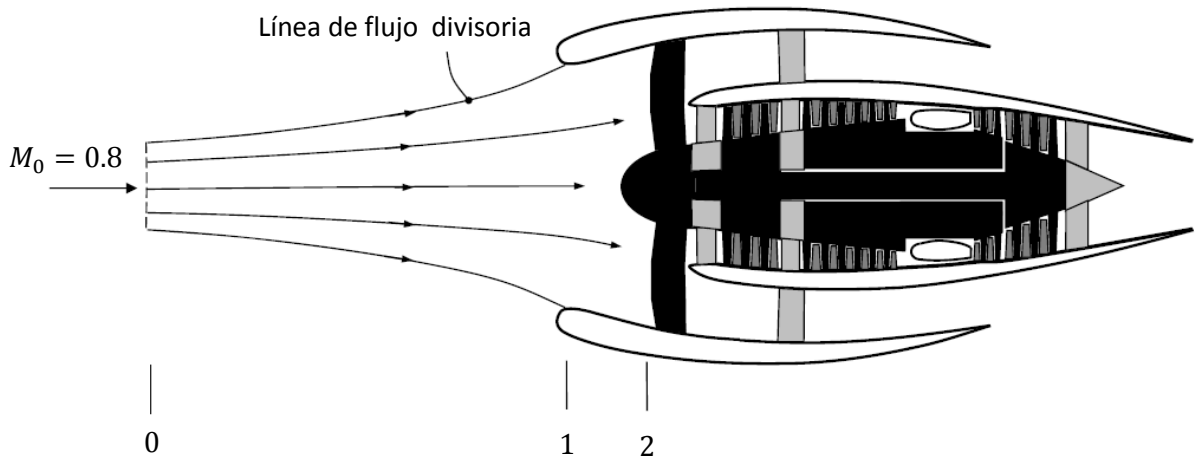


Figura 5.4. Operación con velocidad alta: $A_1/A_0 = \bar{m}_0/\bar{m}_1 > 1$

Empuje instalado

Como su nombre lo indica, el empuje no instalado es simplemente el actual empuje producido por el motor instalado en el avión. Se recuerda que para un vuelo subsónico el diagrama del aire que precede al motor se representa mediante la siguiente figura.

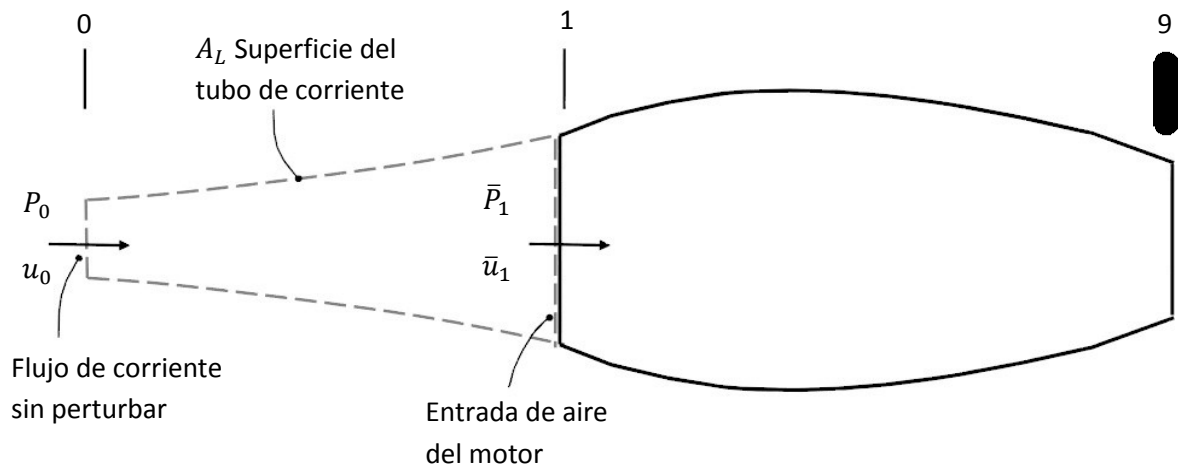


Figura 5.5. Recordatorio del diagrama de entrada del aire

Se recuerda también la ecuación del empuje calculada al principio de este libro.

$$F_{(\text{no instalado})} = (\dot{m} + \dot{m}_f)u_9 - \dot{m}u_0 + (P_9 - P_0)A_9$$

EL empuje calculado no es el empuje real porque el empuje implícitamente incluye la integral de la sobrepresión a lo largo de los límites del tubo de corriente. Obviamente esta superficie no es una pared solida del motor, de ahí que la integral de la sobrepresión debe sustraerse del empuje.

$$\text{Inlet Drag} = \iint_{A_L} (P - P_0)\vec{n}ds \cdot \vec{i}$$

Esta integral se llama resistencia de entrada porque el tubo de corriente diverge, la velocidad disminuye y la presión aumenta. De ahí que la presión dentro del tubo sea mayor que la presión ambiente (del flujo sin perturbar) y la resultante de la fuerza apunta en dirección contraria al empuje. Hay que tener en cuenta que esta fuerza no está generada en el motor y por lo tanto este no se entera de que esta. De ahí que una primera corrección a la fuerza instalada es restar este término a la fuerza no instalada.

En caso de un número Mach bajo (incluyendo condiciones estática) el factor $P - P_0$ es negativo pero el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{i}$ es negativo (tubo convergente), así que la integral sigue siendo negativa.

Una segunda corrección tiene que con el flujo aerodinámico (tridimensional) en la punta de entrada del difusor. En condiciones de crucero, el punto de remanso está situado en la cara interior, lo cual fuerza una aceleración del flujo para rodear la punta. Eso reduce la presión local, produciendo una fuerza de succión, de ahí que la segunda corrección de la fuerza instalada se denomine en inglés "*Forebody suction*" o succión delantera. Esta succión va en la dirección del empuje por lo que se debe sumar.

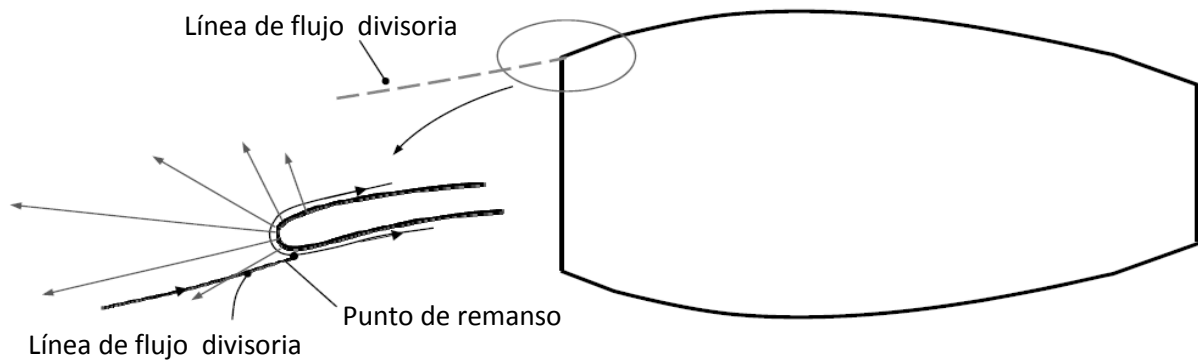


Figura 5.6. Succión delantera

Una tercera corrección tiene que ver con los efectos de presión en la parte posterior del carenaje del motor. En condiciones transónicas el flujo (localmente supersónico) debe pasar por una expansión y sistema de choque para rellenar el espacio que no ocupa el motor rápidamente y además realinearse con la dirección axial. Como consecuencia se forma una baja presión que genera una succión trasera o en inglés "*Forebody Suction*".

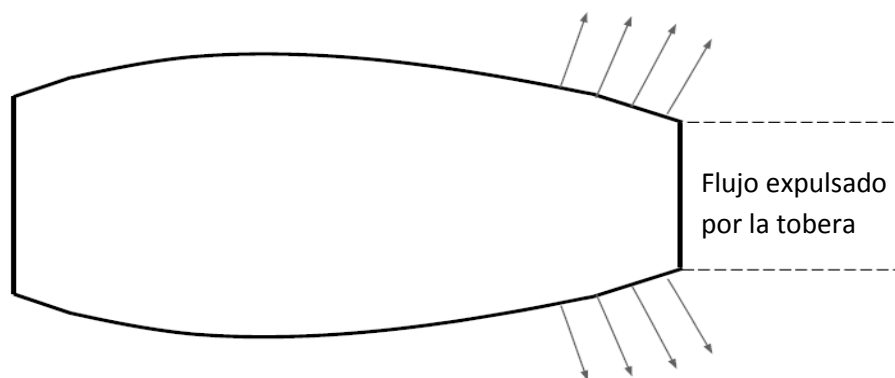


Figura 5.7. Succión trasera

La cuarta y última correcciones tienen que ver con las interacciones entre el motor y el resto de la aeronave. En particular, la causa más influyente es la interacción entre el flujo alrededor del ala y el flujo alrededor del carenaje. Este efecto crea lo que se denomina como resistencia de interferencia y puede ser positiva o negativa.

Concluyendo la fuerza instalada queda

$$F_{inst} = F_{no\ inst} - (\text{Inlet Drag} - \text{Forebody Suction}) + \text{Aft. Body suction} \pm \text{Intefg. Drag}$$

5.2. Difusor supersónico

Compresión externa

Este tipo de difusor disminuye el número de mach en el difusor hasta convertirlo en subsónico cuando llegue al fan o al compresor. La onda de choque suele estar fuera del motor lo que genera un flujo de aire del tubo de corriente que no entra en el motor ("*spilled airflow*"). Se suele tener un factor de recuperación aceptable hasta $M_0 = 1.6$. Debido a la onda de choque hay una pérdida de la presión de remanso ($\eta_r < 1$).

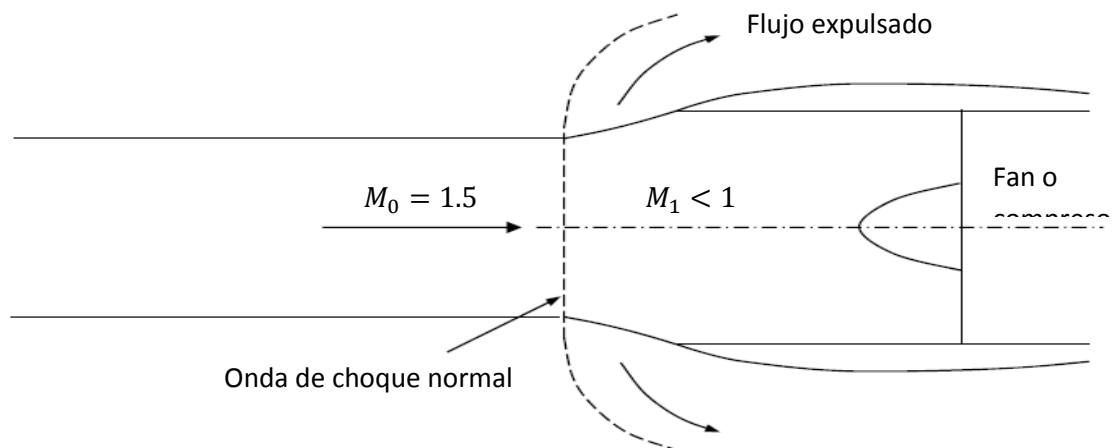


Figura 5.8. Compresión externa debido a vuelo supersónico

Compresión externa e interna

Este tipo de difusor se utiliza para números de Mach por encima de $M_0 = 2.5$. Al tener velocidades muy altas el aire se comprime en el difusor y no requiere de compresor. Los estatorreactores son un claro ejemplo de motores que utilizan este sistema.

Los temas de onda de choque no se verán en este libro. Simplemente se va a ver una pequeña muestra de los distintos dispositivos.

Un ejemplo es el que se puede ver en la Figura 0.9. En este difusor se tienen tres ondas de choque oblicuas. Se pierde más presión de remanso con tres ondas de choque oblicuas que con una, eso significa que tiene un factor de recuperación mayor lo que lo hace más eficiente para estas condiciones.

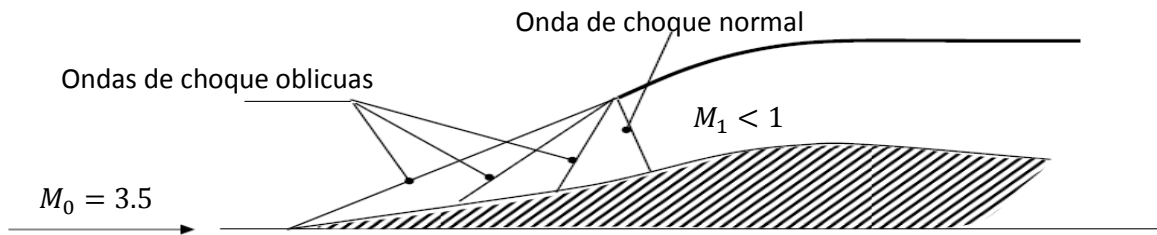


Figura 5.9. Ejemplo de compresión externa e interna con tres ondas de choque oblicuas

Existen tres tipos de modos de operación:

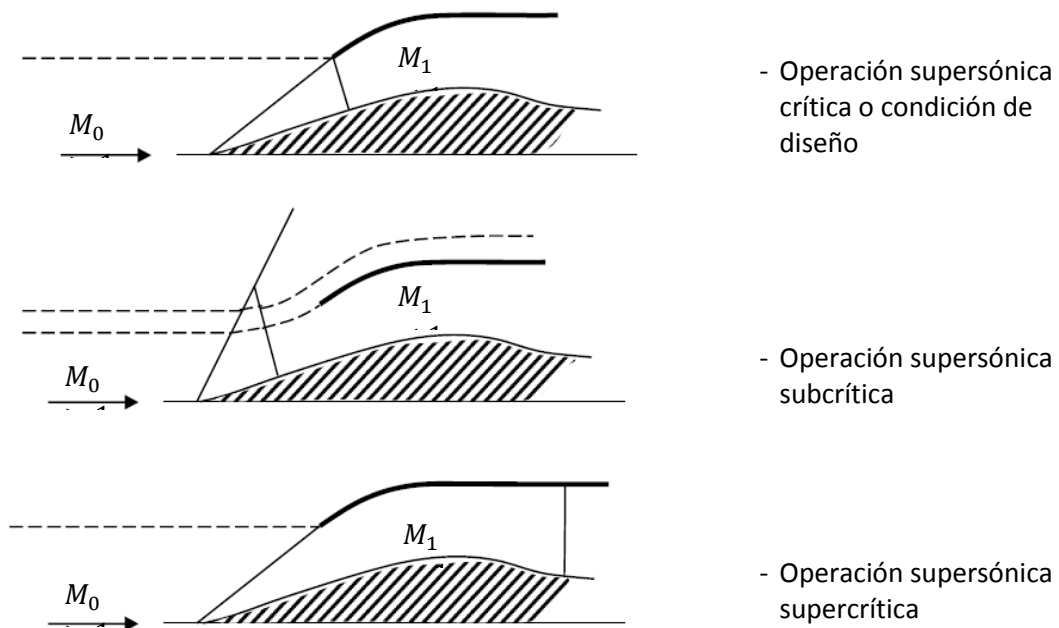


Figura 5.10. Modos de operaciones de compresión externa e interna

5.3. Toberas

Como ya se dijo, las funciones de la tobera son:

- Convertir la energía térmica del fluido en energía cinética
- Crear la presión correcta para el óptimo funcionamiento de las turbomáquinas que la preceden
- Producir el empuje, y en algunos casos empuje en otras direcciones (como la reversa en el aterrizaje)
- Promover la mezcla interior de los chorros de los dos flujos en unos tipos de turbofán

Las toberas son virtualmente adiabáticas ($\tau_n \approx 1$). Pero se tienen ciertos problemas debido a la viscosidad del fluido, se forman gradientes negativos de presión alrededor de los bordes creando un área de flujo menor de la actual. Además se genera una pequeña pérdida en la presión total. Se mide la eficiencia como

$$\pi_{np} = \frac{P_{t9}}{P_{t5}} < 1 \quad \pi_{ns} = \frac{P_{t19}}{P_{t13}} < 1$$

Generalmente el valor de estas eficiencias es de 0.99 para ambas toberas.

Tobera convergente

La presión neta ($P - P_0$) actuando en la superficie interna de la tobera empuja hacia atrás. Como se puede ver en la siguiente figura.

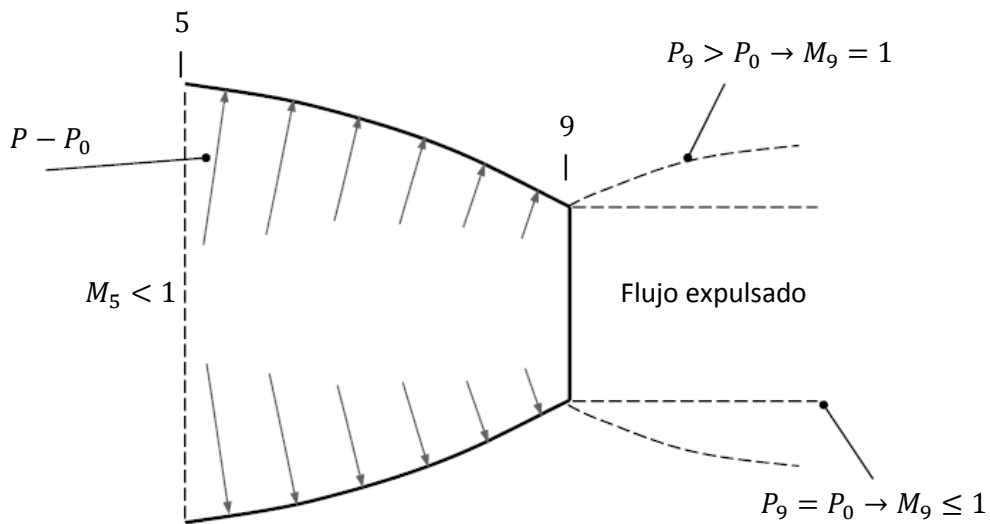


Figura 5.11. Tobera convergente

Tobera convergente – divergente

El empuje de una tobera convergente crítica ($M_9 = 1$) podría ser incrementado utilizando un conducto divergente al final de la tobera. En la garganta se forman las condiciones sónicas.

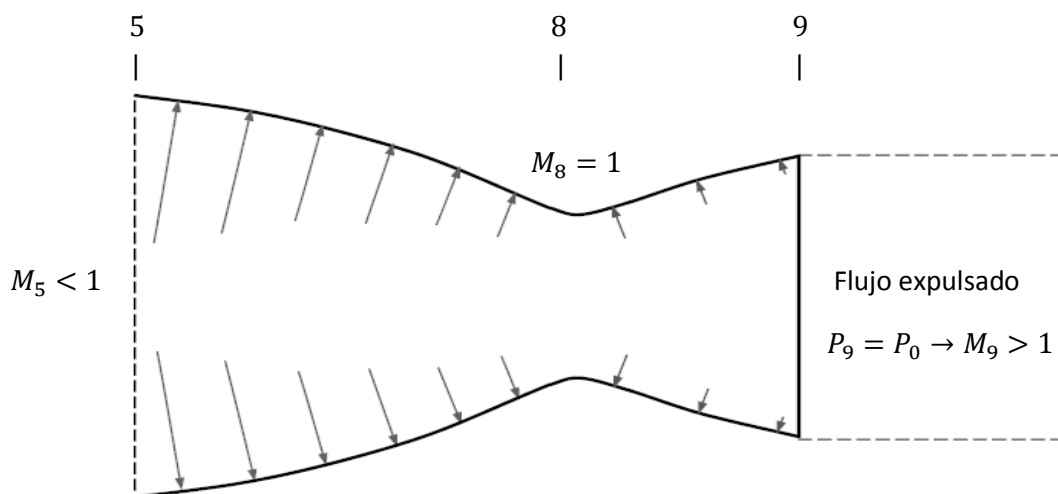


Figura 5.12. Tobera convergente divergente

Si la tobera es adaptada se cumple

$$(M_9)_{ad.} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_{t5}}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]} \quad \left(\frac{A_9}{A_8} \right)_{ad.} = \frac{\bar{m}_8}{\bar{m}_9}$$

Si el ratio A_9/A_8 es mayor que el correspondiente al de $P_9 = P_0$, entonces en alguna porción del conducto la presión disminuiría hasta la presión ambiente, y la diferencia entre $P_9 - P_0$ sería negativa. En este caso se dice que la tobera está sobre expandida. En la siguiente figura se puede observar la zona sobre expandida, donde el área rallada succiona.

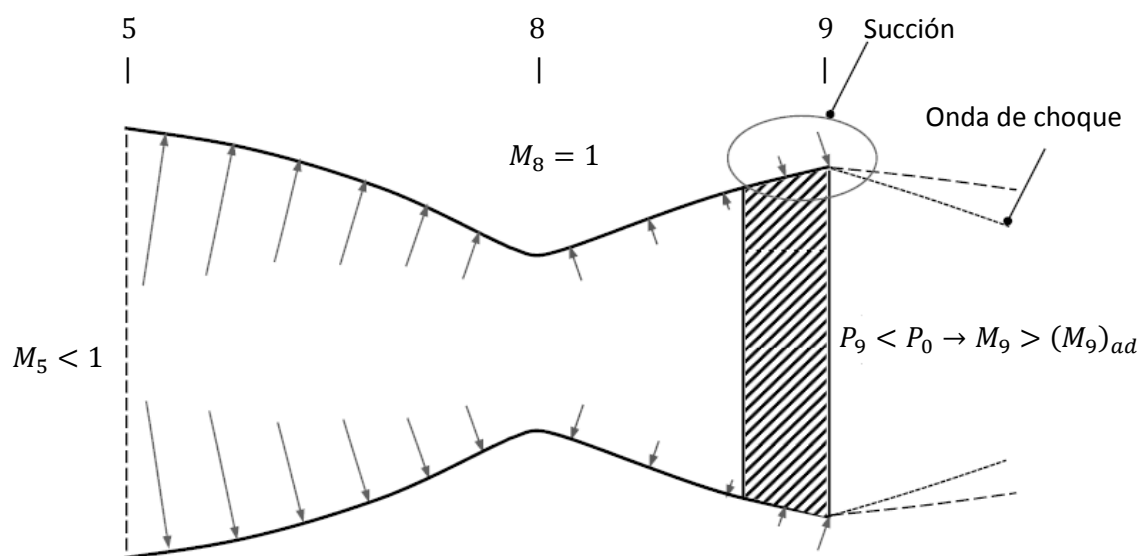


Figura 5.13. Succión trasera en una tobera sobreexpandida

A diferencia de las toberas convergentes, estas pueden tener otras condiciones que no sean las de condiciones críticas o adaptadas.

Para calcular este tipo de tobera pero conociendo el ratio P_9/P_0 se hace lo siguiente.

Al ser un proceso isentrópico

$$\frac{T_{t9}}{T_9} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \right) \quad \frac{P_9}{P_{t9}} = \left(\frac{T_9}{T_{t9}} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Por lo que se puede relacionar con la relación conocida P_9/P_0 de la siguiente forma

$$\Rightarrow \frac{P_9}{P_0} = \frac{P_{t9}}{P_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_9^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Y el número de Mach de salida es

$$\Rightarrow M_9 = \sqrt{\left[\left(\frac{P_{t9} P_0}{P_0 P_9} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}} - 1 \right] \frac{2}{\gamma_t - 1}}$$

La relación de temperaturas queda

$$\rightarrow \frac{T_9}{T_0} = \frac{1}{\left(\frac{P_{t9} P_0}{P_0 P_9} \right)^{\frac{\gamma_t - 1}{\gamma_t}}} \theta_t \tau_t$$

Recordar que en el caso del flujo secundario esta relación sería

$$\rightarrow \frac{T_{19}}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_c - 1}{2} M_{19}^2} \theta_0 \tau_f$$

Efecto de la inadaptabilidad de la presión en el empuje

Motores diseñados para vuelo supersónico suelen tener toberas complejas con sección variable para mantener las condiciones de tobera adaptada. Los motores para vuelo subsónico normalmente tienen toberas convergentes fijas (más ligeras), teniendo condiciones críticas y el flujo está poco expandido (teniendo expansión externa), con $P_9 > P_0$.

Para estudiar solo el efecto de la inadaptabilidad de la presión en el empuje, se define el empuje bruto para un turborreactor como

$$F_G = F_{bruto} = F_{no\ inst} + \dot{m}u_0 = (\dot{m} + \dot{m}_f)u_9 + (P_9 - P_0)A_9$$

Para los parámetros dados θ_0 , τ_c y θ_t , para los cual el ratio de presiones P_{t0}/P_0 es mayor que el valor crítico, el empuje dependerá solo del tipo de tobera, y entonces tiene sentido computar el empuje bruto como

$$\frac{F_G}{(F_G)_{mat}} \leq 1$$

Donde

$$\begin{aligned} \frac{F_G}{F_{Gad}} &= \frac{\dot{m}u_9 + (P_9 - P_0)A_9}{\dot{m}u_{9ad}} \\ &= \frac{u_9}{u_{9ad}} + \left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right) \frac{A_9 P_9}{\dot{m} a_0} \frac{a_0}{u_{9ad}} \\ &= \frac{M_9}{M_{9ad}} \frac{\sqrt{\gamma_t R T_9}}{\sqrt{\gamma_t R T_{9ad}}} + \left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right) \frac{(1+f)}{M_9} \sqrt{\frac{1}{\gamma_c \gamma_t}} \sqrt{\frac{T_9}{T_0}} \frac{a_0}{M_{9ad} a_{9ad}} \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{M_9}{M_{9ad}} \sqrt{\frac{T_9}{T_0} \frac{T_0}{T_{9ad}}} + \left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right) \frac{(1+f)}{M_9 M_{9ad}} \sqrt{\frac{1}{\gamma_c \gamma_t}} \sqrt{\frac{T_9}{T_0} \frac{\sqrt{\gamma_c R T_0}}{\sqrt{\gamma_t R T_{9ad}}}} \right]$$

$$= \sqrt{\frac{T_9}{T_0}} \left[\frac{M_9}{M_{9ad}} \sqrt{\frac{T_0}{T_{9ad}}} + \left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right) \frac{(1+f)}{M_9 M_{9ad}} \sqrt{\frac{1}{\gamma_c \gamma_t}} \sqrt{\frac{T_0}{T_{9ad}} \frac{\gamma_c}{\gamma_t}} \right]$$

Los diagramas siguientes se refieren a un turborreactor, y se han graficado asumiendo comportamiento ideal, con $\theta_t = 6.25$ y buscando el τ_c óptimo para cada número de Mach M_0 . Recordando que

$$(\tau_c)_{opt} = \frac{\sqrt{\theta_t}}{\theta_0}$$

Se consideran cuatro escenarios

- Tobera convergente (en este ejemplo siempre es crítica)
- Tobera poco expansionada con $P_9 = 2P_0$
- Tobera adaptada (con $P_9 = P_0$)
- Tobera sobre expansionada con $P_0 = 1.5P_9$

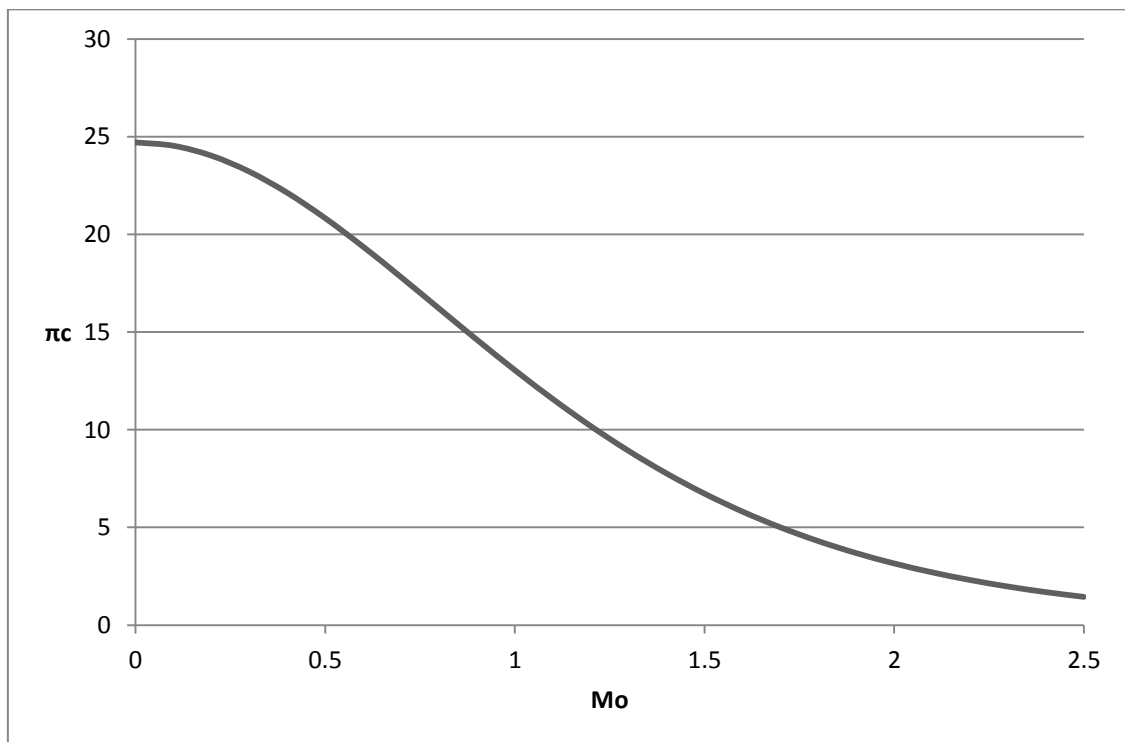


Figura 5.14. Ratio de presiones del compresor

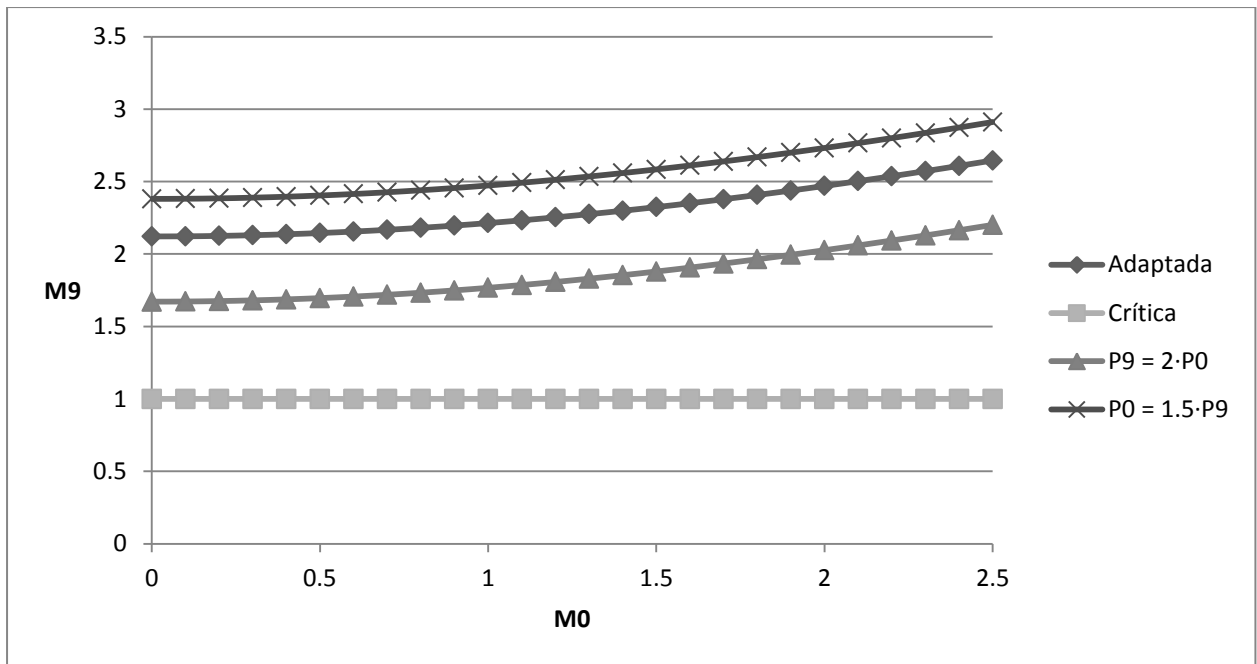


Figura 5.15. Número de Mach de salida

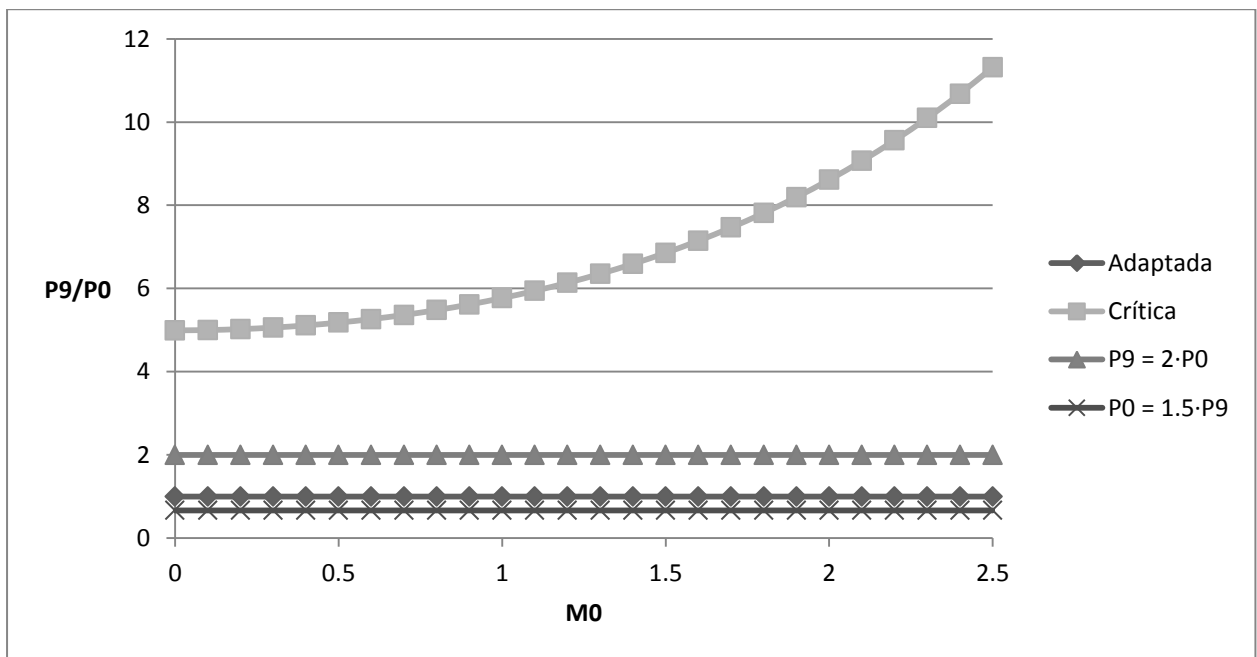


Figura 5.16. Ratio de presiones

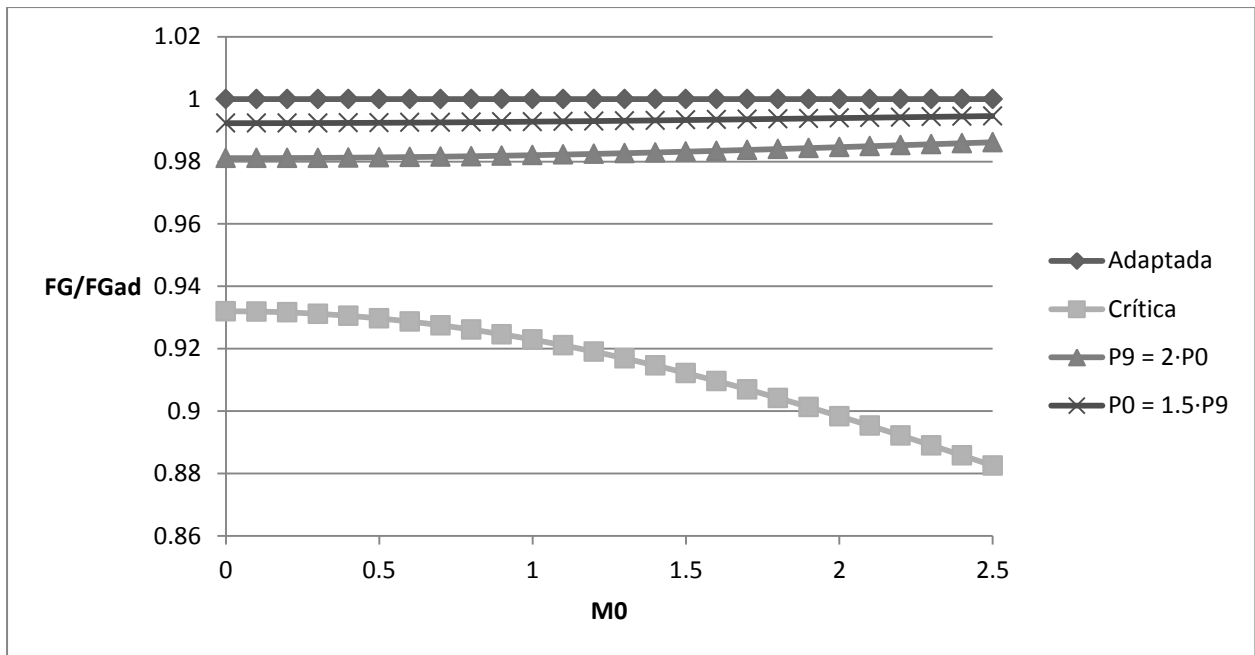


Figura 5.17. Ratio de empuje bruto

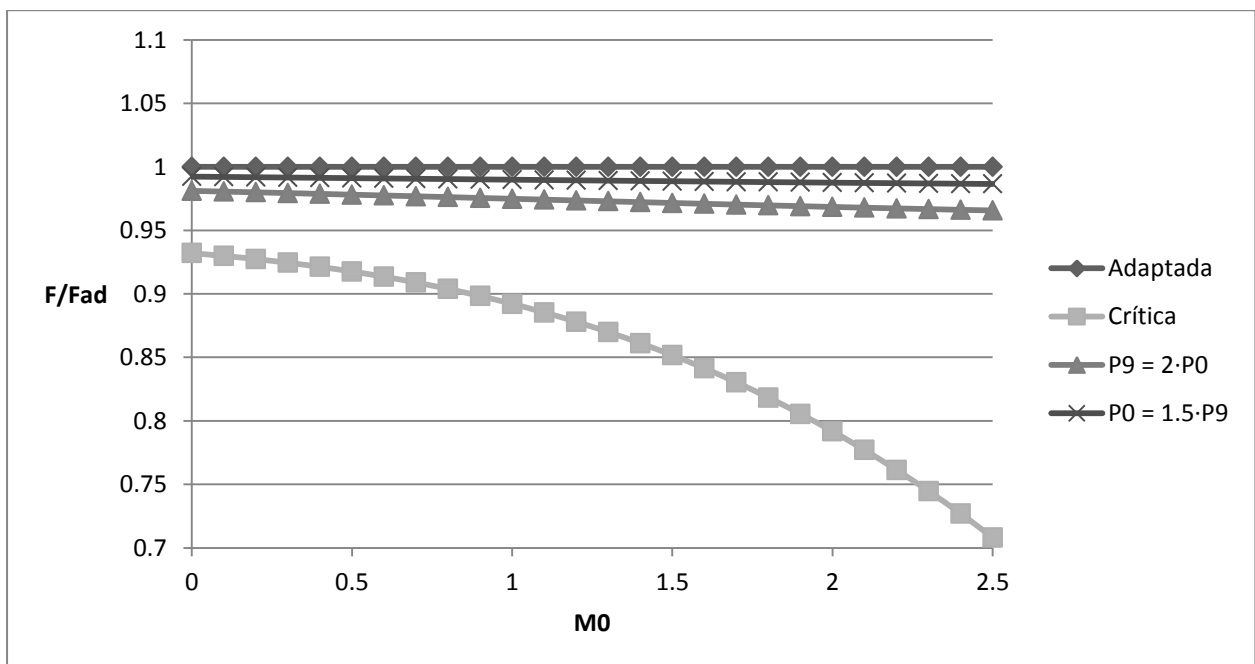


Figura 5.18. Ratio de empuje neto

Similarmente el efecto de la inadaptabilidad de la presión para un turbofán se analiza en el siguiente ejemplo con

$$\alpha = 7.5 \quad \pi_f = 1.9 \quad \pi_c = 30 \quad \theta_t = 7.5$$

Se consideran dos escenarios:

- Tobera convergente, con ambas toberas críticas
- Tobera adaptada

Se ve de los gráficos que el efecto de la inadaptabilidad en el empuje decrece cuando crece el número de Mach. Pero la caída del empuje (respecto a la tobera adaptada) es del orden del 2.1% para $M_0 = 0.8$ y 2.5% para $M_0 = 0.85$. Desde un punto de vista práctico, estos valores son aceptables y no justifican la necesidad de unas toberas más complejas y pesadas con geometría variable.

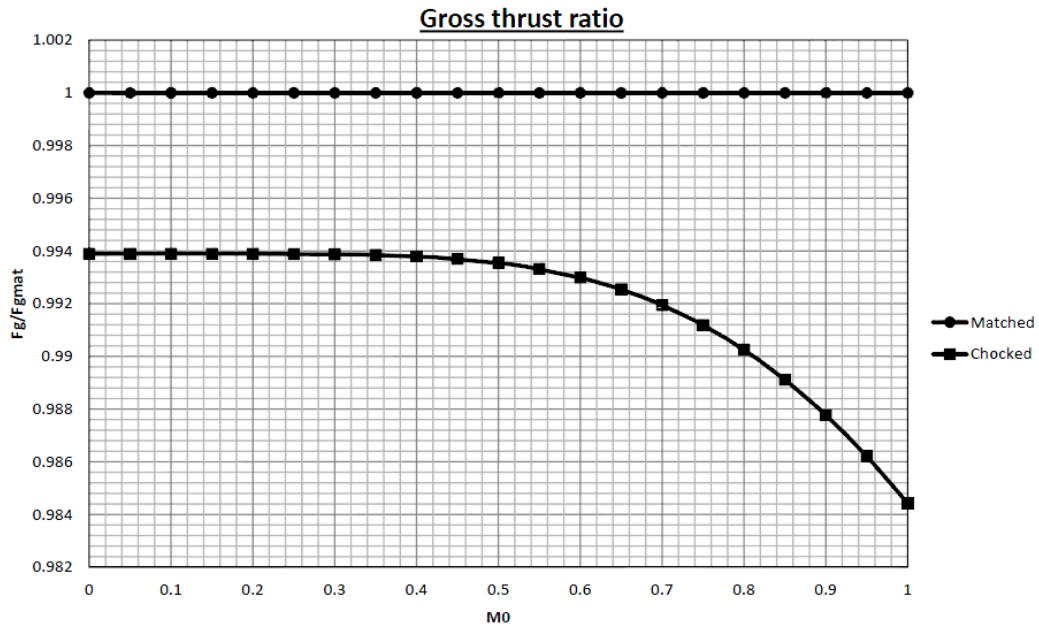


Figura 5.19. Ratio de empuje bruto

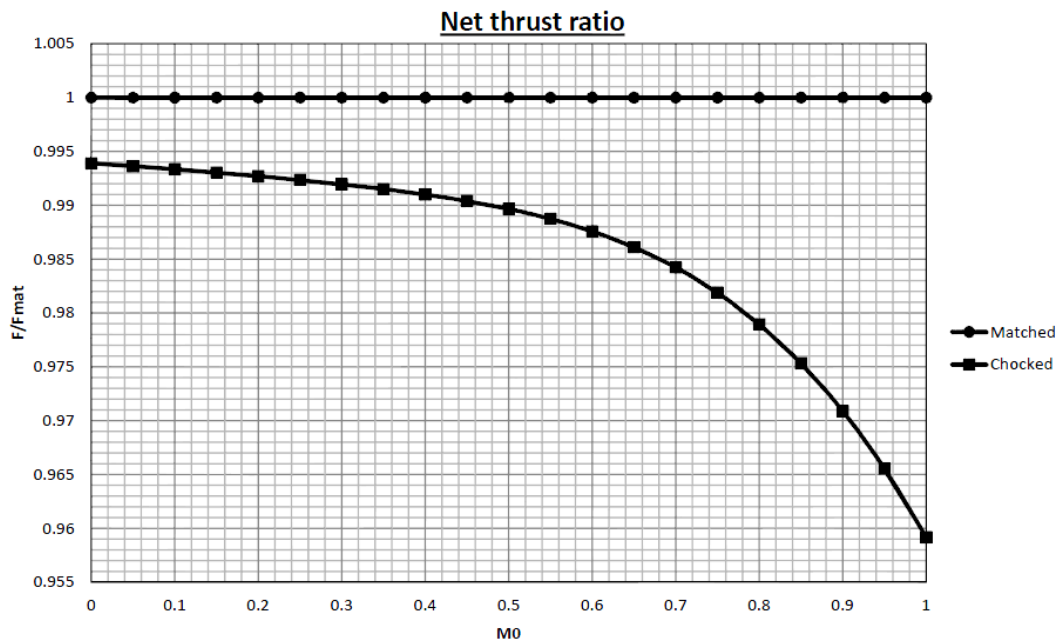


Figura 5.20. Ratio de empuje neto

5.4. Cámara de combustión

Las funciones y requerimientos de las cámaras de combustión son:

- Asegurar que el motor se puede encender tanto en el suelo como en altitudes de crucero. Debido a la baja densidad del aire, puede ser casi imposible encender un motor que se haya apagado (causado por el apagado de la combustión en la cámara).
- Asegurar una estabilidad en la combustión, pese a que la relación de flujos de combustible y aire es muy bajo este puede estar rozando los límites de estabilidad de la combustión.
- Tener vidas útiles muy elevadas (unas 20 000 horas y 5 000 ciclos), a pesar de los choques térmicos extremos que tiene.
- Reducir lo máximo posible la generación de gases contaminantes (como hidrocarburos, monóxido de carbono, óxidos de nitrógeno...) durante todas las posibles condiciones de operación.
- Producir una temperatura de salida de la cámara que, aparte de ser constante y que no varíe con fluctuaciones temporales, tenga una distribución radial para un mejor funcionamiento de la turbina que precede.
- Conseguir todo lo descrito pero con un mínimo volumen y masa. Como medida de la intensidad de combustión en un turborreactor, la potencia química por unidad de volumen normalmente excede los $1\,000\text{ MW/m}^3$

Las siguientes figuras muestran los componentes de una cámara de combustión y sus distintas etapas.

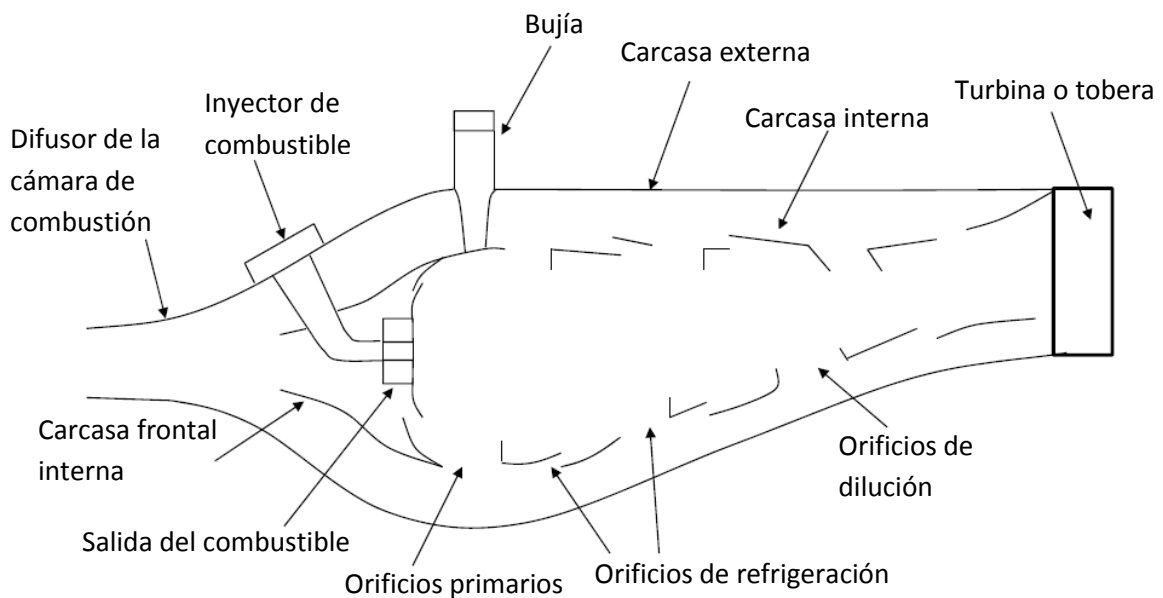


Figura 5.21. Partes de la cámara de combustión

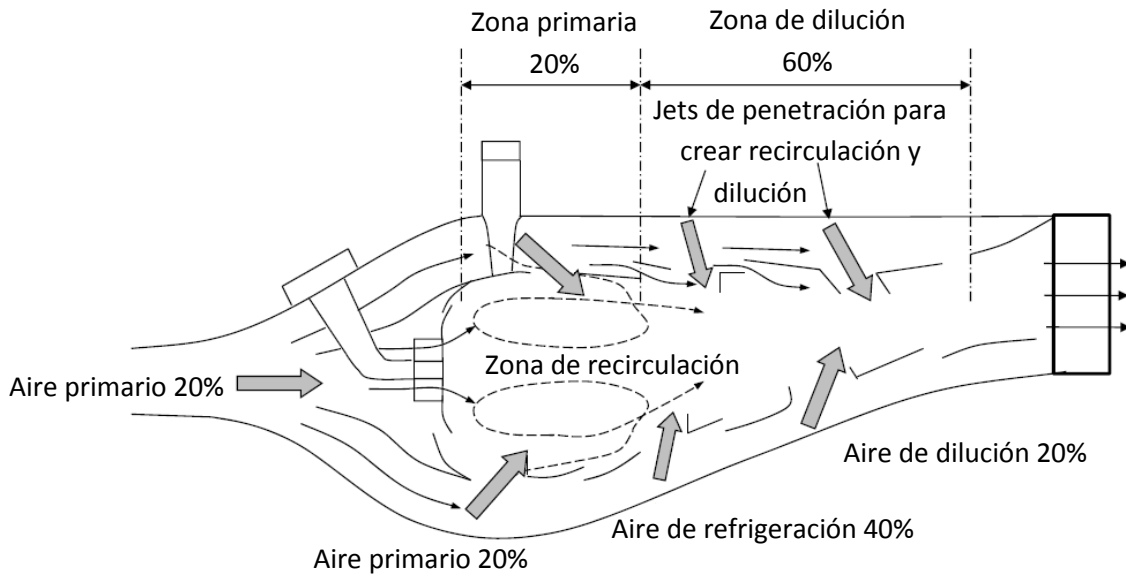


Figura 5.22. Flujo en la cámara de combustión

El ratio de presiones de la cámara y su eficiencia son

$$\pi_b = \frac{P_{t4}}{P_{t3}} \quad \eta_b = \frac{(\dot{m} + \dot{m}_f)h_{t4} - \dot{m}h_{t3}}{\dot{m}_f h}$$

Unos valores típicos en motores reales son $\pi_b \approx 0.96$ y $\eta_b \approx 0.99$.

Tipos de cámaras de combustión

Existen tres tipos de cámaras de combustión

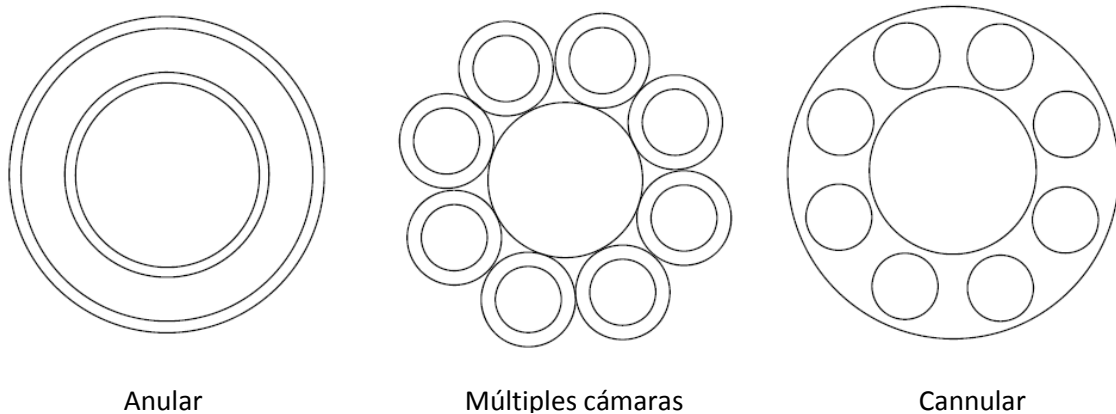


Figura 5.23. Tipos de cámara de combustión

Dimensionalización del combustor

Para el siguiente estudio se supondrá que el combustor es de tipo anular, de cilindro vacío solo limitado por las paredes interior y exterior.

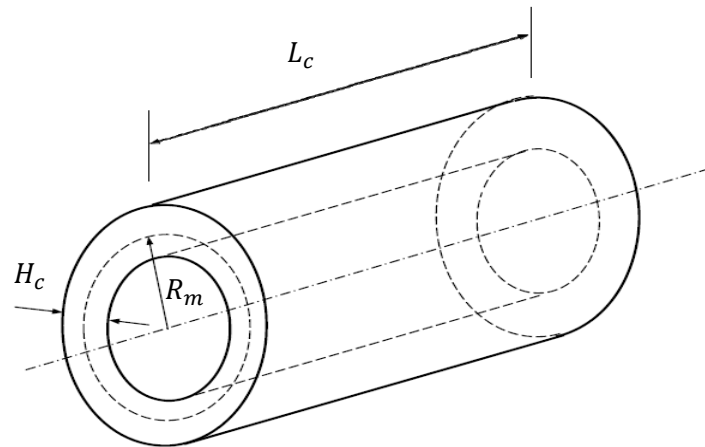


Figura 5.24. Cámara de combustión simplificada

La sección de paso del fluido en la cámara es

$$A_c = 2\pi R_m H_c$$

Donde

$$R_m = \frac{(R_e^2 - R_i^2)}{2H_c}$$

Por lo tanto el volumen de la cámara es

$$V_c = L_c \cdot A_c = 2\pi R_m L_c$$

EL flujo másico en el combustor es

$$\dot{m} = \rho_a u_c A_c = \rho_a u_c 2\pi R_m L_c$$

Donde ρ_a es la media entre la densidad del aire y la de la cámara

$$\rho_a \approx \frac{\rho_{t3} + \rho_{t4}}{2}$$

Reacción en la cámara

La reacción química que tiene lugar en la cámara de combustión es extremadamente compleja. Tiene un flujo altamente turbulento en donde grandes torbellinos se rompen en muchos pequeños. Se deben usar dos tiempos característicos: el tiempo de mezclado y el tiempo de la reacción química.

El tiempo de mezclado (τ_m) es un tiempo característico obtenido por la velocidad de un gran torbellino u_t (del orden de la velocidad axial media del combustor u_c) y la escala integral de la turbulencia l_c (del orden de la longitud del grosor del combustor H_c).

$$\tau_m = \frac{l_t}{u_t}$$

El tiempo de reacción (τ_{reac}) un tiempo característico obtenido de la velocidad de reacción \dot{n}_{prod} , siendo esta una función de la presión y de la temperatura. Para una combustión con hidrocarburos y aire $\alpha \approx 2$.

$$\dot{n}_{prod} \propto P^\alpha f(T) e^{-A/RT}$$

Se pueden hacer dos análisis asintóticamente cualitativos, el primero asumiendo que $\tau_r \ll \tau_m$ (combustor de mezclado limitado) y el segundo que $\tau_r \gg \tau_m$ (combustor de velocidad de reacción limitada).

Para el primer caso, el combustor de mezclado limitado, la potencia química generada por unidad de tiempo puede estimarse como

$$\frac{P}{V} = \frac{(E/V)}{\tau_m}$$

Con

$$\begin{aligned} \frac{E}{V} &= \frac{\dot{m}_f h}{V} = \frac{f \dot{m} h}{V} = \rho_a f h \\ \Rightarrow \frac{P}{V} &= \frac{\rho_a f h u_t}{l_t} \end{aligned}$$

Introduciendo unos valores típicos como los siguientes

$$\rho_a = 3 \text{ kg/m}^3 \quad f = 0.027 \quad h = 43 \cdot 10^6 \text{ J/kg} \quad u_t \approx u_c \approx 50 \text{ m/s} \quad l_t \approx H_c \approx 0.1 \text{ m}$$

Se obtiene, sabiendo que la potencia de una central nuclear es de 1 GW

$$\Rightarrow \frac{P}{V} \approx 1.7 \cdot 10^9 \text{ W/m}^3 = 1.7 \text{ GW/m}^3$$

La longitud se puede estimar como

$$L_c = \frac{V_c}{A_c} = \frac{1}{A_c} \frac{P}{P/V} = \frac{1}{A_c} \frac{\dot{m} f h}{(\rho_a f h u_t)/l_t} = \frac{1}{A_c} \frac{\rho_a u_c A_c l_t}{\rho_a u_t} \propto H_c$$

El resultado muestra que para un combustor de mezcla limitada, la longitud se escala con el grosor $L_c \propto H_c$.

Para el caso opuesto, un combustor con velocidad de reacción limitada, la potencia química generada se obtiene dividiendo por el otro tiempo característico.

$$\frac{P}{V} = \frac{(E/V)}{\tau_{reac}}$$

El tiempo de reacción se puede estimar como

$$\tau_{reac} \approx \frac{n_{prod}}{\dot{n}_{prod}}$$

Donde n_{prod} es el número de densidad de las moléculas del producto (H_2O , CO_2), que es proporcional a ρ_a y por lo tanto también es proporcional a la presión P .

$$\tau_{reac} \approx \frac{n_{prod}}{\dot{n}_{prod}} \propto \frac{\rho_a}{P^2 f(T) e^{-A/RT}} \propto \frac{1}{\rho_a} C(T)$$

Donde $C(T)$ es una función decreciente respecto a la temperatura.

La longitud se obtiene

$$L_c = \frac{V_c}{A_c} = \frac{1}{A_c} \frac{P}{V} \propto \frac{1}{A_c} \frac{\rho_a u_c A_c f h}{\rho_a f h} \frac{1}{\rho_a} C(T) = \frac{C(T) u_c}{\rho_a}$$

Así, para un combustor con velocidad de reacción limitada, su longitud es independiente al tamaño del motor. En particular, bajo los requerimientos de diseño usuales que aseguran que el motor pueda reencenderse a gran altura (con baja ρ_a), muchos motores con diferentes tamaños pueden tener cámaras de combustión de longitudes similares.

6. Compresores

6.1. Función

Las funciones del compresor son:

- Aumentar la presión del aire antes de introducirlo en la cámara de combustión
- Minimizar las pérdidas e intentar que el proceso sea lo más parecido a un proceso isentrópico posible

Los compresores son casi adiabáticos para un ratio de temperaturas τ_c , pero los efectos de compresibilidad y viscosidad causan una pérdida en el ratio de presiones de remanso π_c .

La eficiencia se consigue minimizando pérdidas al paso de una isobara a otra. Cuanto menos se tenga que incrementar la temperatura total para ese cambio de isobara menos energía se habrá utilizado.

La eficiencia del compresor se puede expresar de dos formas:

- Eficiencia isentrópica

$$\eta_c = \frac{\pi_c^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\tau_c - 1} \approx 0.86$$

- Eficiencia politrópica

$$\eta_{p,c} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\ln \pi_c}{\ln \tau_c} \approx 0.90$$

La relación entre ambas es

$$\eta_c = \frac{\tau^{\eta_{p,c}} - 1}{\tau_c - 1}$$

Existen dos tipos de compresores:

- Compresor axial: es el más utilizado en los motores actuales incluyendo todos los turbofanés y turbohélices de tamaño medio y grande y la mayoría de los pequeños. Tienen eficiencias altas y capacidad para grandes cantidades de flujo de aire.
- Compresor centrifugador: se utiliza en los pequeños motores para las últimas etapas.

Los turbohélices no se van a estudiar en este libro.

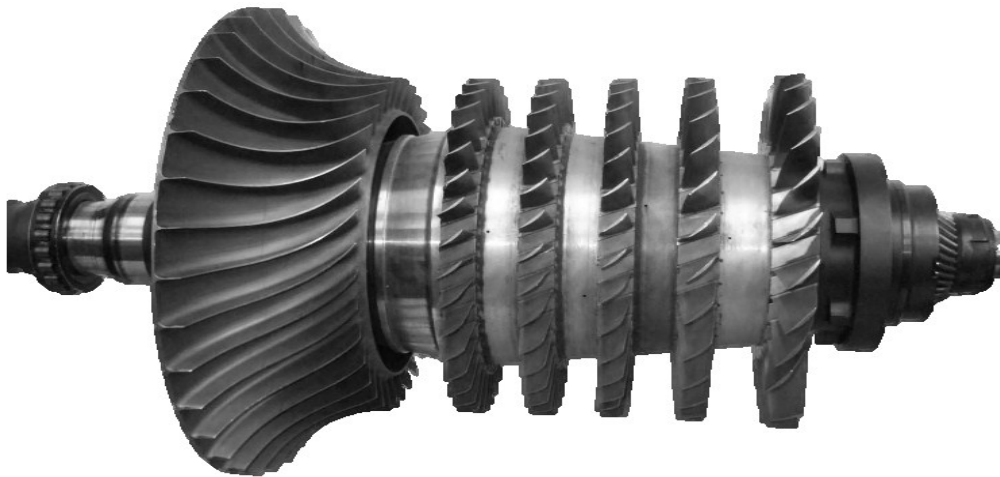


Figura 6.1. Compresor combinado, en la izquierda se ve el compresor centrífugador y en la parte de la derecha se puede observar la parte del rotor de compresor axial

6.2. Compresor Axial

Los compresores axiales comprenden un número de etapas, cada una de las cuales consiste en una rueda móvil o rotor y una fija o estator. Los álabes del rotor están montados sobre un tambor y del estator sobre la carcasa. La acción difusora del estator convierte la energía cinética absoluta del fluido en un aumento de presión mientras que el rotor reduce la energía cinética relativa aumentando la absoluta. Para simplificar, el rotor aumenta la energía cinética del fluido para que el estator la utilice y aumente la presión.

La ecuación de Euler es una consecuencia de la ecuación de la energía en régimen permanente aplicada a un volumen de control encerrando la entrada y salida del rotor.

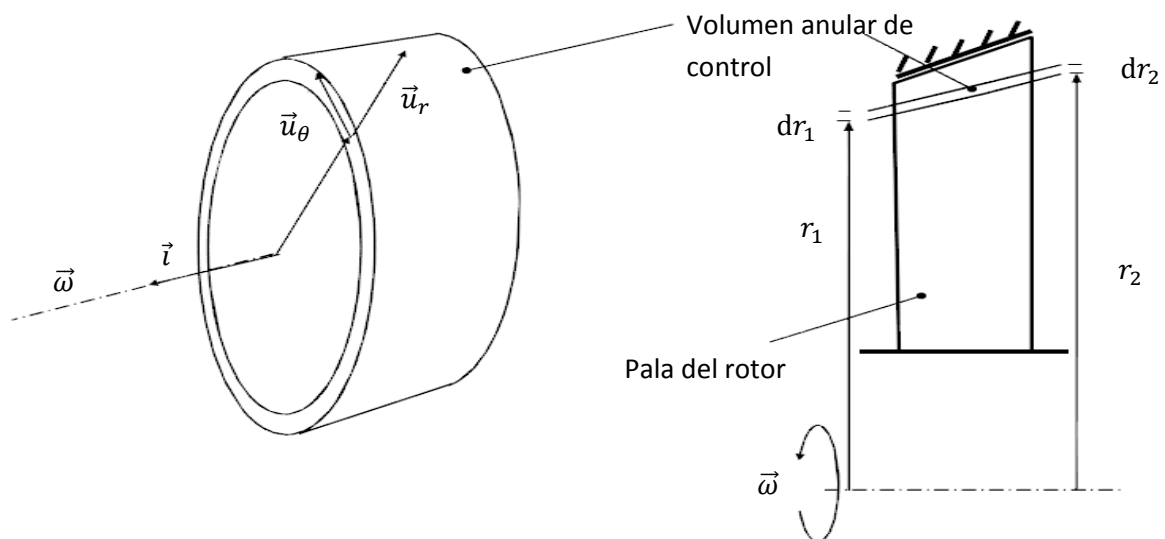


Figura 6.2. Esquema del tubo de entrada y de una pala del compresor

De la ecuación de continuidad se tiene

$$\partial \dot{m} = \rho_1 u_1 2\pi r_1 dr_1 = \rho_2 u_2 2\pi r_2 dr_2$$

Con ausencia de transferencia de calor, la ecuación de la energía queda

$$\partial \dot{W} = \partial \dot{m}(h_{t2} - h_{t1})$$

La potencia mecánica producida por un elemento de pala es

$$\partial \dot{W} = \omega \partial M$$

Donde ∂M es el momento axial. Se puede encontrar encontrando las velocidades tangenciales en la entrada y la salida.

$$\partial M = \partial \dot{m}(r_2 v_2 - r_1 v_1)$$

Finalmente se obtiene la ecuación de Euler para turbomáquinas.

$$h_{t2} - h_{t1} = \omega(r_2 v_2 - r_1 v_1)$$

Si el gas es caloríficamente perfecto

$$c_p(T_{t2} - T_{t1}) = \omega(r_2 v_2 - r_1 v_1)$$

El radio medio se define como

$$r_m = \frac{r_h + r_t}{2}$$

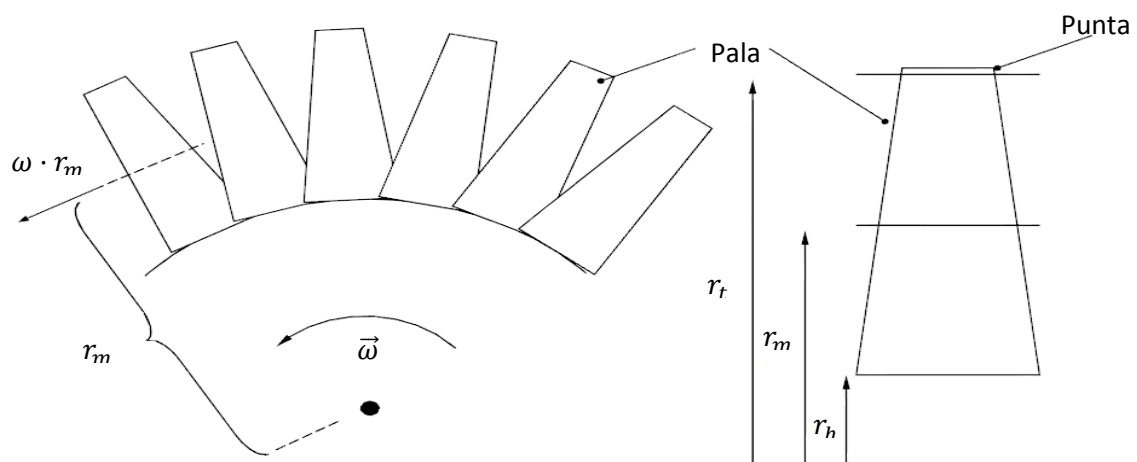


Figura 6.3. Diagrama del rotor

6.3. Modelo del compresor: cascada de álabes

El compresor se modela en un análisis de cascadas bidimensional de álabes. Si las velocidades radiales de los flujos radiales apreciables debido a las variaciones del radio son omitidas y las superficies de corriente son cilíndricas, el desarrollo de una sección cilíndrica, como la mostrada en la siguiente figura, se pueden desarrollar en un plano de cascadas bidimensional.

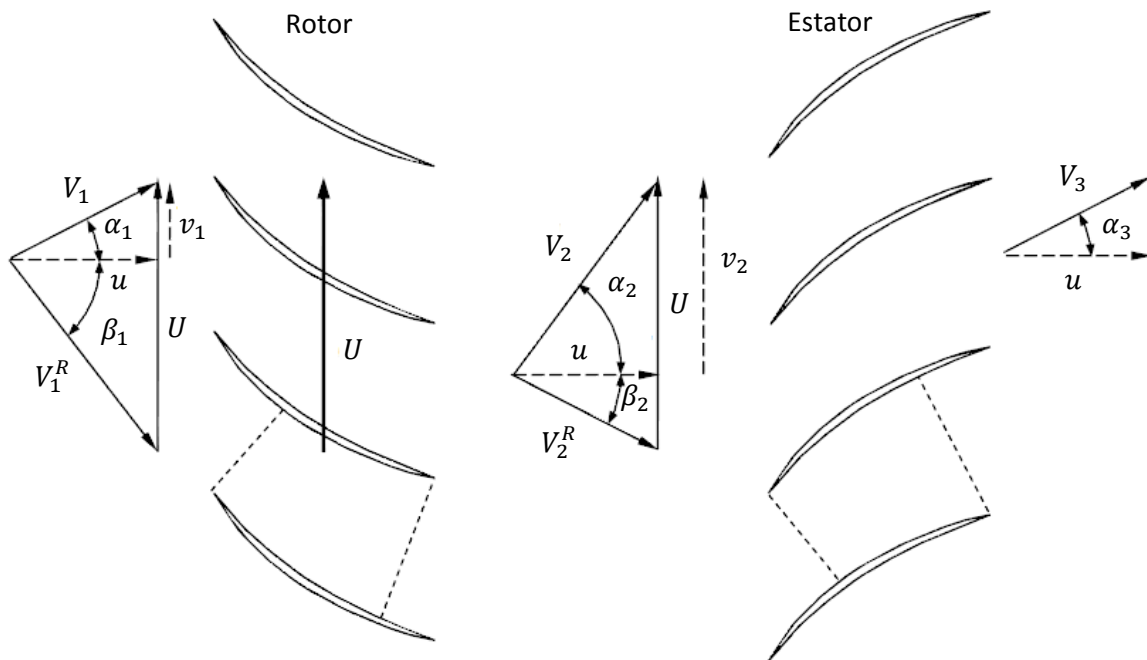


Figura 6.4. Modelo de cascada de álabes

Las velocidades absolutas y relativas se relacionan de la siguiente forma

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_1^R + \vec{U} \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_2^R + \vec{U}$$

Las velocidades tangenciales pueden variar a lo largo del compresor. El compresor se diseña para que la velocidad v_2 sea mayor que v_3 . De la figura se ve que las velocidades tangenciales son

$$u_1 = V_1 \cos \alpha_1 \quad v_1 = V_1 \sin \alpha_1 = u_1 \tan \alpha_1$$

$$u_2 = V_2 \cos \alpha_2 \quad v_2 = V_2 \sin \alpha_2 = u_2 \tan \alpha_2$$

La relación de temperaturas de remanso, asumiendo que el radio medio del compresor se mantiene constante, es

$$\tau_s = \frac{T_{t3}}{T_{t1}} = \frac{T_{t2}}{T_{t1}} = 1 + \frac{U(v_2 - v_1)}{C_p T_{t1}}$$

Se debe recordar que en ausencia de transferencia de calor, la temperatura total se mantiene constante a lo largo del compresor.

Tanto la velocidad relativa a través del rotor, como la velocidad absoluta a través del estator decrecen. Así, en ambos caso la presión estática aumenta.

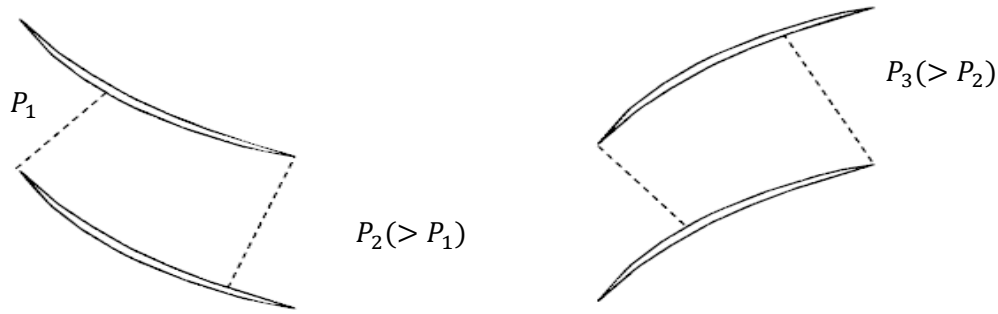


Figura 6.5. Perfiles de álabes del rotor (izquierda) y estator (derecha)

La energía cinética (absoluta) del flujo aumenta por a través del rotor. Así, la presión de remanso también aumenta. Pero los efectos viscosos causan una disminución de la relación de presión. De forma similar este efecto se percibe en el estator.

Para una fila de estator la pérdida de presión se define como

$$\phi_{c,s} = \frac{P_{t2} - P_{t3}}{P_{t2} - P_2}$$

Para una fila de rotor se aplica la misma definición, pero considerando la presión total de forma relativa

$$\phi_{c,r} = \frac{P_{t1}^R - P_{t2}^R}{P_{t1}^R - P_1}$$

Tanto $\phi_{c,s}$ depende de los ángulos de incidencia del flujo, en el caso del rotor, $\phi_{c,r}$ depende del ángulo de incidencia relativo. Se puede demostrar que la pérdida de presión implica un incremento global de entropía para la etapa igual a

$$\Delta S_{et.} = R \left[\phi_{c,r} \left(1 - \frac{P_1}{P_{t1}^R} \right) + \phi_{c,s} \left(1 - \frac{P_2}{P_{t2}} \right) \right]$$

La eficiencia isentrópica para una etapa se define como

$$\eta_{et.} = \frac{\pi_s^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\tau_s - 1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\tau_s}{\tau_s - 1} R \left[\phi_{c,r} \left(1 - \frac{P_1}{P_{t1}^R} \right) + \phi_{c,s} \left(1 - \frac{P_2}{P_{t2}} \right) \right]$$

También la eficiencia politrópica se define como

$$\eta_{p,et.} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\ln \pi_s}{\ln \tau_s} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\phi_{c,r} \left(1 - \frac{P_1}{P_{t1}^R} \right) + \phi_{c,s} \left(1 - \frac{P_2}{P_{t2}} \right)}{\ln \tau_s}$$

A veces se utiliza una eficiencia politrópica del rotor η_p^r y otra para la etapa completa $\eta_p^{et.}$. Las relaciones de temperatura y presión de remanso se relacionan de la siguiente forma

- Para el rotor

$$\frac{P_{t2}}{P_{t1}} = \left(\frac{T_{t2}}{T_{t1}}\right)^{\frac{\gamma\eta_p^r}{\gamma-1}} = \tau_s^{\frac{\gamma\eta_p^r}{\gamma-1}}$$

- Para la etapa completa

$$\frac{P_{t3}}{P_{t1}} = \left(\frac{T_{t3}}{T_{t1}}\right)^{\frac{\gamma\eta_p^{et.}}{\gamma-1}} = \tau_s^{\frac{\gamma\eta_p^{et.}}{\gamma-1}}$$

Teniendo muchas etapas se puede ver en la siguiente figura como se relacionan las temperaturas y presiones totales

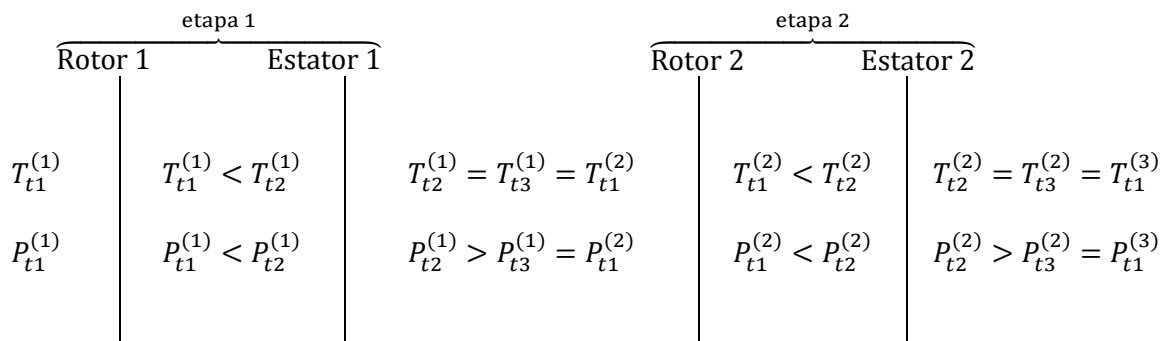


Figura 6.6. Evolución de las presiones y temperaturas a través de varias etapas

Normalmente compresores están creados para que las condiciones de diseño de los triángulos de velocidad para todas las etapas sean idénticas. A esto se le llama etapas repetidas. Obteniendo las siguientes similitudes entre etapas

$$V_1^{(1)} = V_1^{(2)} = \dots = V_1^{(n)}$$

$$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \dots = \alpha_1^{(n)}$$

Una simplificación menos importante, es el uso de la misma geometría para el rotor y el estator, denominada filas repetidas. Dejando

$$\alpha_1^{(1)} = \beta_2^{(1)} \quad \beta_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \quad v_2 = U - v_1$$

6.4. Grado de reacción

El grado de reacción se define como

$$R = \frac{\text{incremento de la entalpía estática del rotor}}{\text{incremento de la entalpía estática de la etapa}}$$

Para un compresor de filas repetidas se tiene

$$R = \frac{c_p(T_2 - T_1)}{c_p(T_3 - T_1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(T_{t2} - \frac{V_2^2}{2c_p}\right) - \left(T_{t1} - \frac{V_1^2}{2c_p}\right)}{\left(T_{t3} - \frac{V_3^2}{2c_p}\right) - \left(T_{t1} - \frac{V_1^2}{2c_p}\right)} \\
&= \frac{T_{t2} - T_{t1} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2c_p}}{T_{t3} - T_{t1} - \frac{V_3^2 - V_1^2}{2c_p}} \\
&= 1 - \frac{u^2 + (U - v_1)^2 - u^2 - v_1^2}{2c_p(T_{t3} - T_{t1})} \\
&= 1 - \frac{U(U - 2v_1)}{2c_p(T_{t3} - T_{t1})} \\
&= 1 - \frac{U(v_2 - v_1)}{2c_p(T_{t3} - T_{t1})} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Para filas repetidas entonces las temperaturas estáticas y de remanso pueden calcularse fácilmente de la siguiente forma

$$\begin{cases}
T_{t1}^{(j)} = T_{t1}^{(1)} + (j - 1)\Delta T_t \\
T_{t2}^{(j)} = T_{t1}^{(1)} + j\Delta T_t \\
T_{t3}^{(j)} = T_{t1}^{(1)} + j\Delta T_t
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
T_1^{(j)} = T_1^{(1)} + (j - 1)\Delta T_t \\
T_2^{(j)} + \frac{\Delta T_t}{2} = T_1^{(1)} + \left(j - \frac{1}{2}\right)\Delta T_t \\
T_3^{(j)} = T_1^{(1)} + j\Delta T_t
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
M_1^{(j)} = M_1^{(1)} \sqrt{\frac{T_1^{(1)}}{T_1^{(1)} + (j - 1)\Delta T_t}} \\
M_3^{(j)} = M_1^{(1)} \sqrt{\frac{T_1^{(1)}}{T_1^{(1)} + j\Delta T_t}}
\end{cases}$$

6.5. Distribución radial

El modelo estudiado hasta ahora (cascadas de álabes) se representa como el flujo alrededor de radio medio del alabe (r_m).

$$r_m = \frac{r_h + r_t}{2}$$

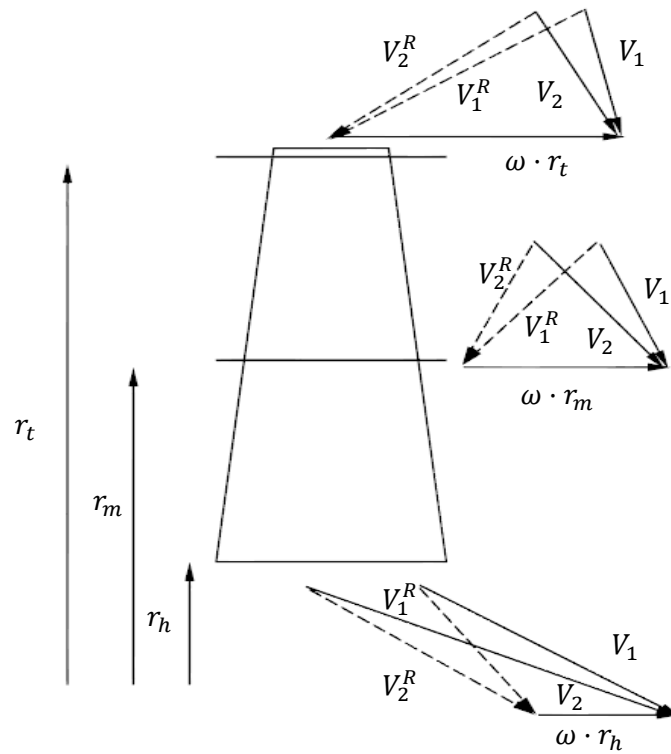


Figura 6.7. Distribución radial en el modelo de cascadas de álabes

Si la diferencia de velocidades ($v_2 - v_1$) fuese el mismo para otra sección radial, de acuerdo con la ecuación Euler ($c_p(T_{t2} - T_{t1}) = \omega r(v_2 - v_1)$) la temperatura total se incrementaría más por la punta del álabe que cerca eje.

La diferencia de presiones ($P_{t2} - P_{t1}$) crearía un flujo recirculatorio (hacia atrás en las puntas). Para prevenir esto, la mayoría de compresores se diseñan para que el producto del radio por la diferencia de velocidades ($r \cdot (v_2 - v_1)$) se mantenga constante en la dirección radial.

$$r(v_2 - v_1) = r_m(v_{2m} - v_{1m})$$

Esto se podría conseguir con cualquier distribución del tipo

$$v_1 = \bar{v}(r) - (v_{2m} - v_{1m}) \frac{1}{2r}$$

$$v_2 = \bar{v}(r) + (v_{2m} - v_{1m}) \frac{1}{2r}$$

Para mantener el flujo axial con deflexiones radiales negligible, debe haber un gradiente de presiones radial positivo para contrarrestar la fuerza centrífuga.

$$\frac{dP}{dr} = \frac{\rho v^2}{r}$$

La variación radial de la entalpia se define entonces como

$$dh = \frac{dP}{\rho} = \frac{v^2}{r} dr$$

Para una variación radial de la entalpía de remanso (h_t) nula y una velocidad axial constante (u) se debe cumplir

$$h_t = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

$$0 = dh + udu + vdv = \frac{v^2}{r} dr + vdv$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$v = \frac{k}{r}$$

Donde k es una constante que depende del caso particular, por lo que se obtiene

$$v_1 = \frac{k_1}{r} \quad v_2 = \frac{k_2}{r}$$

6.6. Operaciones fuera de diseño

Normalmente el compresor se diseña para que, en operación de diseño, la velocidad sea constante a través del compresor. De la ecuación de continuidad aplicada entre la primera y última etapa se tiene

$$\rho_{1D}^{(1)} A_1^{(1)} = \rho_{3D}^{(n)} A_3^{(n)}$$

Por lo que se fija la variación de área de la siguiente forma

$$\frac{A_3^{(n)}}{A_1^{(1)}} = \left(\frac{\rho_1^{(1)}}{\rho_3^{(n)}} \right)_D$$

Cuando la velocidad del compresor está por debajo de la de diseño (o nominal) entonces la relación de presiones decrece, y entonces también lo hace la densidad. La ecuación de continuidad queda

$$\rho_1^{(1)} A_1^{(1)} u_1^{(1)} = \rho_3^{(n)} A_3^{(n)} u_3^{(n)} \Rightarrow \frac{u_3^{(n)}}{u_1^{(1)}} = \frac{\rho_1^{(1)}}{\rho_3^{(n)}} \left(\frac{\rho_3^{(n)}}{\rho_1^{(1)}} \right)_D > 1$$

Por lo que la velocidad axial se incrementa a lo largo del compresor.

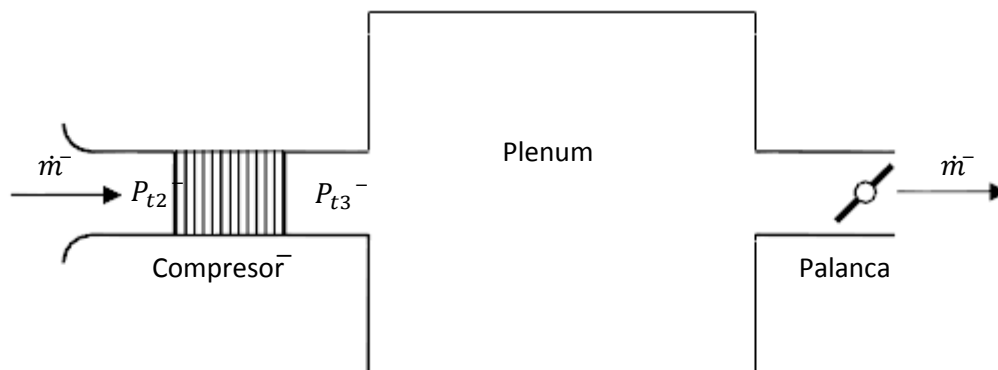
En la siguiente tabla se pueden ver los distintos triángulos de velocidades para distintas operaciones.

	Primera etapa (<i>f</i>)	Etapa media (<i>m</i>)	Última etapa (<i>i</i>)
Diseño $\omega = \omega_D$ $u_f = u_m = u_l$			
Baja potencia $\omega < \omega_D$ $u_f < u_m < u_l$			
Bajo π_c , pero $\omega = \omega_D$ $u_f < u_m < u_l$			

Tabla 6.1. Triángulos de velocidades para distintas operaciones

Para una operación de baja velocidad (caso de operación de baja potencia) la velocidad axial crece a lo largo del compresor, de ahí que el ángulo relativo β_1 de las últimas etapas es menor que en las primeras. El ángulo de incidencia de las etapas delanteras puede ser tan alto que se genere una entrada en pérdida del flujo.

En el tercer caso (bajo π_c) se tiene velocidad de giro nominal pero con operación de baja relación de compresión, esto se puede conseguir en ensayos en el que el compresor funciona gracias a un motor externo y el flujo de aire se puede controlar con una palanca.



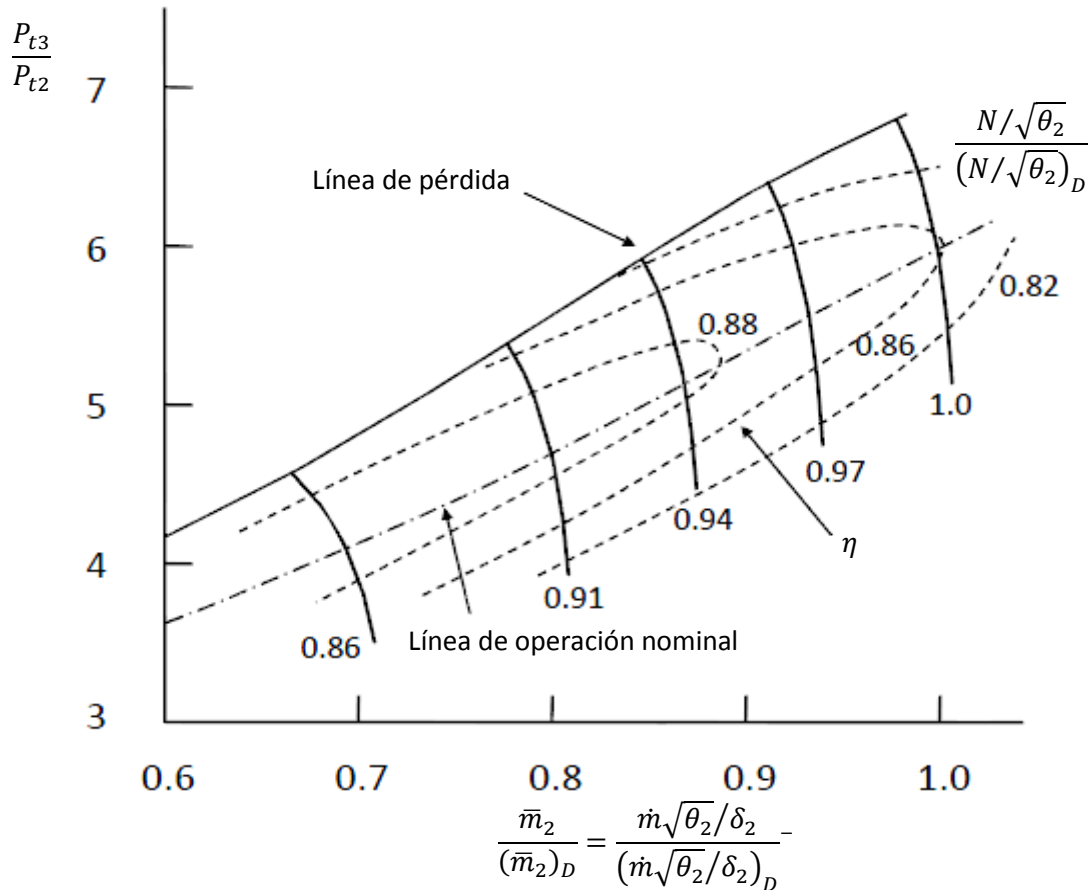


Figura 6.8. Diagrama del aparato del ensayo y resultados del mapa del compresor

Empezando por la última etapa, la velocidad axial aumenta en respuesta a la palanca (si se abriese), pero la presión y la densidad decrecen, por lo que no significa necesariamente que aumenta el flujo másico (simplemente se ha aumentado el área de paso). Las etapas que están más adelantadas tendrán pérdidas de presiones menores que la última etapa, y cuando la información, sobre este aumento de área de salida, llega a la entrada del compresor, la velocidad y presión estarán muy poco afectadas (así que la palanca no afecta en la entrada). La pérdida en la relación de presión total se tiene casi con flujo de entrada constante.

Soluciones de baja potencia

Las configuraciones, para relaciones de presiones bajas (de unos 4), pueden llevar a la pérdida de rotación. Esto no es un gran problema siempre que no se llegue al surge que es mucho más grave. En todo caso se deben tomar estrategias cuando la relación pasa los 6. Se suelen usar dos soluciones que intentan reducir el ángulo de incidencia en las primeras etapas:

- Sistema de doble compresor: se tienen dos compresores independientes, el compresor de baja presión (en la parte delantera) y el compresor de alta presión (justo después). Ambos compresores ajustan sus respectivas velocidades de rotación, así se puede tener menores velocidades en el primer compresor y mayores velocidades en el compresor trasero

- Palas variables en el estator: para configuraciones de baja potencia, se pone este dispositivo en las primeras etapas. Se utilizan para aumentar el ángulo α_1 y de ahí el ángulo relativo β_1 y el ángulo de incidencia.

Limitaciones del compresor

Grandes ángulos de incidencia pueden causar una separación del flujo en las palas. Para una velocidad rotacional dada, el ángulo de incidencia es alto cuando la velocidad axial es baja, y entonces incrementando la relación de presiones. En mapas de compresores, las pérdidas se forman a lo largo de una línea definida (línea de pérdida o “*stall line*”) que es casi paralela a la línea de diseño. Esta línea operacional tiene que ver con la continuidad de flujos entre el compresor, la turbina y la tobera

Perdida de rotación

La incipiente separación primero causa que las secciones del rotor en pérdida operen sin casi flujo, mientras que el resto funcione en condiciones normales. Las regiones en pérdida se mueven hacia atrás en el marco rotaciones a unos $0.4 - 0.6 \omega$.

La pérdida de rotación no tiene mucha importancia desde el punto de vista dinámico, que tiende a despreciarse debido al rápido movimiento. Pero, las pérdidas en la actuación del compresor crecen fuertemente, y además no es fácil de rectificar, excepto parando y reiniciando la máquina.

Surge

El surge una oscilación global que afecta a todo el sistema de bombeado (compresor y la tobera de la turbina crítica), que tiene que ver con la relación entre la inercia del flujo y la capacidad de paso del flujo.

A diferencia de la pérdida de rotación, el surge involucra muy bajas frecuencias de oscilación, incluyendo reverso del flujo a través del compresor que pueden llegar a ser destructivos mecánicamente.

Cuando se llega a la pérdida, el motor puede llegar a pérdida de rotación o surge. Se define el parámetro B de Gretzer como

$$B = \frac{\omega r}{a} \sqrt{\frac{V_p}{V_c}}$$

Donde

- a es la velocidad del sonido del combustor
- V_p es el volumen del combustor
- V_c es el volumen del flujo del compresor

Para un compresor de una sola etapa los valores de B por debajo del valor crítico ($B_{crit} \approx 0.8$) tienden a la pérdida de rotación, mientras que valores mucho más por debajo tienden al surge. Para compresores multietapa el valor de B_{cri} se reduce con un factor entre \sqrt{N} y N.

6.7. Fán y diferentes compresores

En los turbofanes y algunos turborreactores existen varios compresores que se denominan como compresor de baja presión (o “booster”) y compresor de alta presión. Normalmente para mover estos compresores se tienen también dos turbinas diferenciadas que se denominan turbina de alta presión y turbina de baja presión. La turbina de alta presión mueve el compresor de alta presión y la turbina de baja presión mueve el compresor de baja presión y el fan si se tiene uno, esta turbina tiene muchas etapas ya que requiere extraer mucha potencia.

El fán se utiliza para separar el flujo en el primario y secundario, pero también funciona como un compresor de un sólo rotor. De ahí que las dos variables más importantes del fán sean la relación de derivación α y la relación de presiones π_f .

Al tener palas de radios muy elevados se tienen velocidades muy elevadas en las puntas de las palas, eso puede llevar a tener problemas debido a la compresibilidad del aire. Se suele jugar con las geometrías de las palas para intentar disminuir este efecto, aumentando mucho el coste de estas piezas.

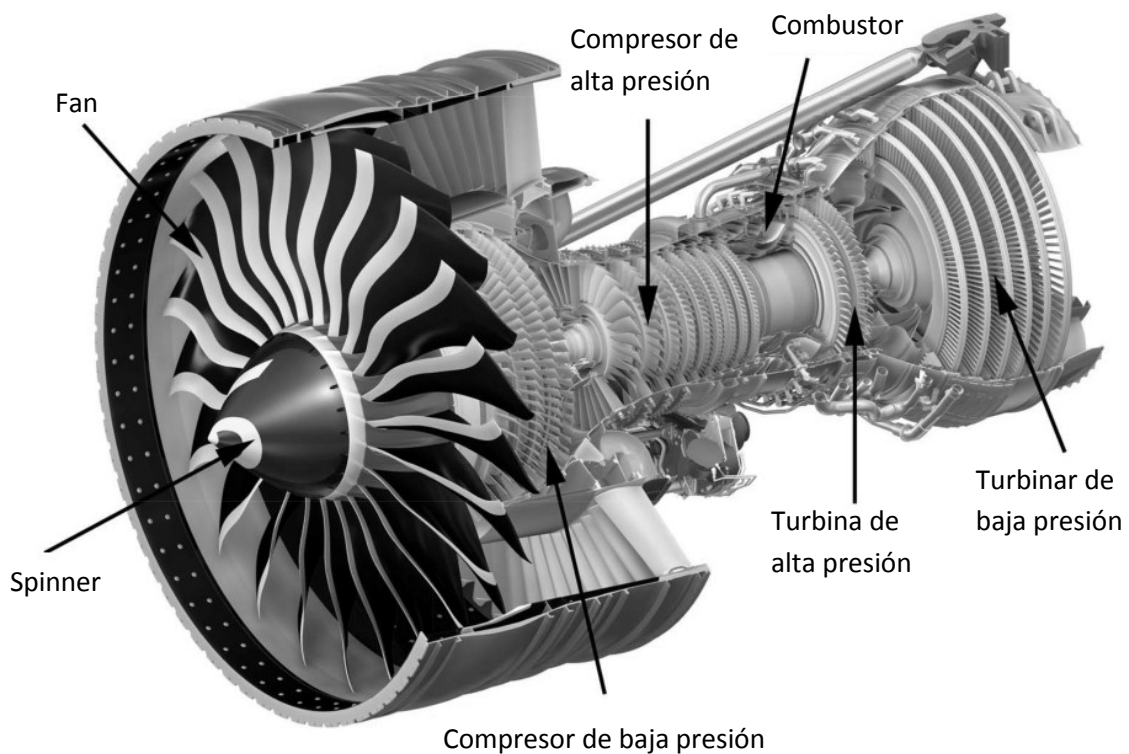


Figura 6.9. Componentes de un turbofán

7. Turbinas

7.1. Ecuación de Euler en el modelo de cascadas de álabes

Las turbinas extraen energía de los gases de alta presión y temperatura, provenientes de la cámara de combustión, para utilizarla en los compresores (y el fán si se tiene uno). Cada turbina está formada por un cierto número de etapas, en general, bastante inferior al número de etapas del compresor al que le da la potencia. Eso se debe a que en las turbinas el gradiente de presiones es favorable, lo que reduce el riesgo de desprendimiento de la capa límite de los álabes, siendo posible, altas relaciones de expansión por etapa (y por tanto más trabajo por etapa).

Cada etapa de turbina consta de un estator y un rotor. La disposición es al revés que en los compresores. La siguiente figura muestra la nomenclatura que se utilizará para el modelo de cascadas (similar a la estudiada en los compresores).

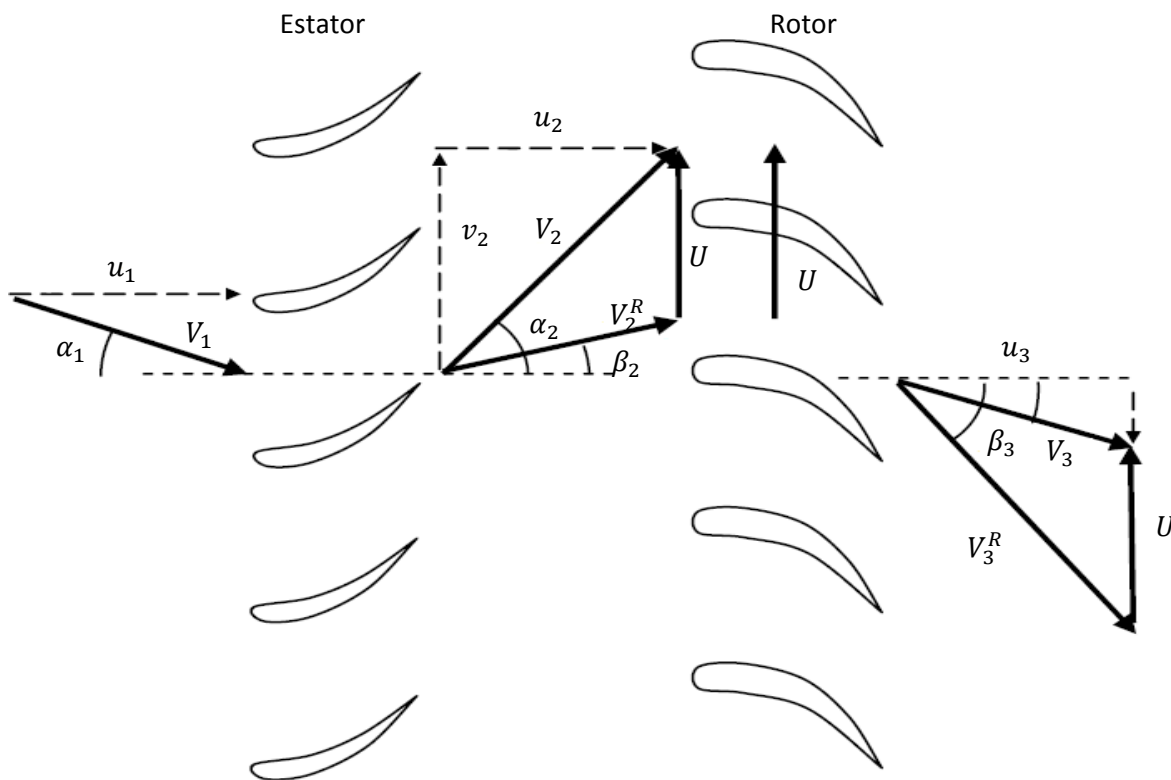


Figura 7.1. Modelo de cascada de álabes de la turbina

La ecuación de Euler, aplicada en el rotor de la turbina (sabiendo que $U = \omega r$) es

$$c_p(T_{t3} - T_{t2}) = U(v_3 - v_2)$$

A diferencia del estudio del compresor, la diferencia de velocidades ($v_3 - v_2$) es negativa, por lo tanto la temperatura de salida será menor que la de entrada ($T_{t3} - T_{t2}$). Eso es debido a que el flujo pierde energía pero se la da a la turbina en forma de trabajo.

La mayoría de turbinas se diseñan bajo el criterio de que, a la salida del rotor, el flujo sea axial. En la práctica la componente de velocidad tangencial es pequeña en la salida del rotor ($v_3 \ll v_2$). Se

puede hacer entonces la simplificación que $\alpha_3 \approx 0$, y por tanto también que $\alpha_1 = 0$. La ecuación de Euler queda

$$c_p(T_{t2} - T_{t3}) = Uv_2 = UV_2 \sin \alpha_2$$

$$\Rightarrow c_p T_{t2} \left(1 - \frac{T_{t3}}{T_{t2}}\right) = UM_2 \sqrt{\gamma_t RT_2} \sin \alpha_2$$

Se definen los siguientes parámetros para una etapa de la turbina

$$\tau_t = \frac{T_{t3}}{T_{t2}} \quad M_T = \frac{U}{\sqrt{\gamma_t RT_2}}$$

Y recordando que

$$c_{pt} = \frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1} R \quad T_{t2} = T_2 \left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2\right)$$

La ecuación de Euler queda

$$c_p T_{t2} \left(1 - \frac{T_{t3}}{T_{t2}}\right) = UM_2 \sqrt{\gamma_t RT_2} \sin \alpha_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_t - 1} R\right) T_{t2} (1 - \tau_t) = M_T (\gamma_t RT_2) M_2 \sin \alpha_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\gamma_t - 1}\right) (1 - \tau_t) = \frac{T_2}{T_{t2}} M_T M_2 \sin \alpha_2$$

Finalmente

$$\Rightarrow 1 - \tau_t = \frac{(\gamma_t - 1) M_T M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}$$

7.2. Grado de reacción

Se define el grado de reacción (del criterio de Kerrebrock) como

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3}$$

Se hace la suposición de que la turbina tiene etapas repetidas, teniendo $V_1 = V_3$.

$$h_{t1} - h_{t3} = h_1 + \frac{V_1^2}{2} - h_3 - \frac{V_3^2}{2} = h_1 - h_3$$

Por otro lado, si la componente axial de la velocidad u es constante, se tiene

$$V_2^2 = v_2^2 + u^2 \quad V_3^2 = v_3^2 + u^2 \approx u^2$$

Obteniendo entonces

$$h_2 - h_3 = h_{t2} - \frac{V_2^2}{2} - h_{t3} + V_3^2 = h_{t2} - h_{t3} - \frac{v_2^2}{2}$$

El grado de reacción finalmente queda

$$R = \frac{h_2 - h_3}{h_1 - h_3} = \frac{h_{t2} - h_{t3} - \frac{v_2^2}{2}}{h_1 - h_3} = 1 - \frac{v_2}{2U} = 1 - \frac{M_2 \sin \alpha_2}{2M_T}$$

En la práctica el grado de reacción suele estar muy cerca de 0.5.

7.3. Diseño para máxima potencia

Como las turbinas no están sujetas a las mismas limitaciones que el compresor en el tema de las relaciones de presiones por el tema, tiene sentido intentar maximizar el trabajo que se puede extraer por etapa (dado un flujo másico \dot{m}). Se recuerda la ecuación de Euler calculada en el apartado 7.1.

$$1 - \tau_t = \frac{(\gamma_t - 1)M_T M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}$$

Se considerará un valor dado para el parámetro M_T . Por tanto, la potencia será máxima cuando también lo sea el parámetro y definido como

$$y = \frac{1 - \tau_t}{(\gamma_t - 1)M_T} = \frac{M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}$$

Se definen las secciones de entrada (s_1) y salida (s_2) del estator como se muestran en la siguiente imagen.

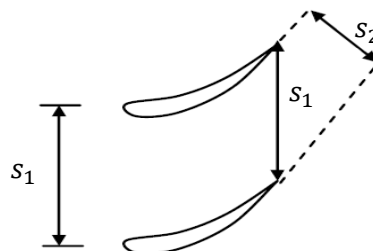


Figura 7.2. Secciones de paso del flujo en el estator

A través del estator se tiene que la relación de áreas es

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{H_2 s_2}{H_1 s_1} = \frac{H_2}{H_1} \cos \alpha_2$$

Se define X como la relación de alturas de la salida y la entrada del estator, es un parámetro libre de diseño.

$$X = \frac{H_2}{H_1}$$

Considerando la aproximación de que las magnitudes de remanso se mantienen a través del estator (realmente la presión total disminuye ligeramente), se tiene

$$\begin{aligned}\frac{A_2}{A_1} &= X \cos \alpha_2 = \frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma_t + 1}{2(\gamma_t - 1)}} \\ \Rightarrow \cos^2 \alpha_2 &= \frac{1}{X^2} \frac{M_1^2}{M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma_t + 1}{\gamma_t - 1}} \\ \Rightarrow \sin^2 \alpha_2 &= 1 - \frac{1}{X^2} \frac{M_1^2}{M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma_t + 1}{\gamma_t - 1}}\end{aligned}$$

La función que se debe maximizar (y) queda

$$\begin{aligned}y &= \frac{M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2} \\ \Rightarrow y^2 &= \frac{M_2^2 - \frac{M_1^2}{X^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma_t + 1}{\gamma_t - 1}}}{\left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2 \right)^2}\end{aligned}$$

Para un valor dad de M_1 , el máximo se encuentra derivando⁴ la expresión anterior respecto a M_2^2 y se iguala a 0.

$$\begin{aligned}\frac{dy^2}{dM_2^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2}{3 - \gamma_t} \left(1 - \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2 \right) &= \frac{M_1^2}{X^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma_t + 1}{\gamma_t - 1}}\end{aligned}$$

Que da un valor de para y_{max}

$$y_{max}^2 = \frac{M_{2_{opt}}^2 - \frac{2}{3 - \gamma_t} \left(1 - \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2 \right)}{\left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2 \right)^2}$$

⁴ La derivada se puede ver en la siguiente página web:

[http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivate+\(x^2+-+a\(b%2Bc*x^2\)^d\)/\(b%2Bc*x\)^2](http://www.wolframalpha.com/input/?i=derivate+(x^2+-+a(b%2Bc*x^2)^d)/(b%2Bc*x)^2)

$$\begin{aligned}
&= \frac{(3 - \gamma_t)M_{2_{opt}}^2 - [2 - (\gamma_t - 1)M_{2_{opt}}^2]}{(3 - \gamma_t) \left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2\right)^2} \\
&= \frac{2M_{2_{opt}}^2 + (1 - \gamma_t)M_{2_{opt}}^2 - 2 + (\gamma_t - 1)M_{2_{opt}}^2}{(3 - \gamma_t) \left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2\right)^2} \\
&= \frac{2}{3 - \gamma_t} \frac{M_{2_{opt}}^2 - 1}{\left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2\right)^2}
\end{aligned}$$

En función de M_1 , teniendo en cuenta la relación que liga $M_{2_{opt}}$ con M_1 y X , se puede comprobar que la función y tiene una tendencia a decrecer. Llegado a este punto, aun se tiene la libertad de escoger M_1 . Una forma de hacerlo es fijar R y M_T , y determinar M_1 a partir de la expresión del grado de reacción (R). Pero, por otro lado, incrementar M_1 implica incrementar la relación \dot{m}/A_1 suponiendo $M_1 < 1$ (de la fórmula de \bar{m}_1). Por tanto, en vez de fijar R , un criterio alternativo para elegir M_1 podría ser maximizar el siguiente cociente

$$\frac{\dot{W}_t}{A_1} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} \frac{\dot{m}}{A_1}$$

Con

$$\frac{\dot{W}}{\dot{m}} = c_p T_{t2} (1 - \tau_t) = \frac{UM_2 \sqrt{\gamma_t RT_{t2}} \sin \alpha_2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}} \quad \frac{\dot{m}}{A_1} = \frac{P_{t1}}{\sqrt{RT_{t1}}} \bar{m}_1(M_1)$$

Resulta

$$\frac{\dot{W}_t}{A_1} = \frac{\dot{W}}{\dot{m}} \frac{\dot{m}}{A_1} = \frac{UM_2 \sqrt{\gamma_t RT_{t2}} \sin \alpha_2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}} \cdot \frac{P_{t1}}{\sqrt{RT_{t1}}} \bar{m}_1(M_1)$$

Sabiendo que

$$M_T = \frac{U}{\sqrt{\gamma_t RT_2}}$$

Se obtiene

$$\frac{\dot{W}_t}{A_1} = \frac{M_T \sqrt{\gamma_t RT_2} M_2 \sqrt{\gamma_t RT_{t2}} \sin \alpha_2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}} \cdot \frac{P_{t1}}{\sqrt{RT_{t1}}} \bar{m}_1(M_1)$$

Así, para unos valores dados de M_T , T_{t1} (igual a T_{t2}) y P_{t1} se tiene que el parámetro w a maximizar es

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\dot{W}_t/A_1}{\sqrt{\gamma_t M_T P_{t1}} \sqrt{\gamma_t R T_{t2}}} \\
 &= \frac{\frac{M_T \sqrt{\gamma_t R T_2} M_2 \sqrt{\gamma_t R T_{t2}} \sin \alpha_2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}} \cdot \frac{P_{t1}}{\sqrt{R T_{t1}}} \bar{m}_1(M_1)}{\sqrt{\gamma_t M_T P_{t1}} \sqrt{\gamma_t R} \sqrt{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}} \\
 &= \frac{M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2} \bar{m}_1(M_1) \\
 &= \frac{M_2 \sin \alpha_2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2} \frac{M_1}{\left(1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma_t + 1}{2(\gamma_t - 1)}}}
 \end{aligned}$$

El primer factor es precisamente el parámetro y , que ya está maximizado. Si ahora se quiere maximizar el parámetro w teniendo en cuenta la relación

$$\frac{2}{3 - \gamma_t} \left(1 - \frac{\gamma_t - 1}{2} M_{2_{opt}}^2\right) = \frac{M_1^2}{X^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma_t - 1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma_t + 1}{\gamma_t - 1}}$$

Se obtiene la relación

$$\frac{\gamma_t^2 - 1}{4} M_{2_{opt}}^4 - \left(\frac{\gamma_t^2}{2} + \frac{3\gamma_t}{2} - 1\right) M_{2_{opt}}^2 + 2\gamma_t = 0$$

La siguiente tabla muestra resultados numéricos de la optimización para valores distintos de γ_t .

γ_t	1.3	1.4
$M_{1_{opt}}(X = 1)$	0.4112	0.4293
$M_{1_{opt}}(X = 1.379)$	0.8190	0.7071
$M_{2_{opt}}$	1.319	1.291
$\alpha_{2_{opt}}$	46.16°	45°
ω_{max}/X	0.2833	0.2637
$M_{T(1-R_{opt})}$	0.4780	0.4564
$= 0.5 M_{2_{opt}} \sin \alpha_{2_{opt}}$		

Tabla 7.1. Resultados numéricos

Hay que destacar que el valor óptimo del número de Mach de salida es siempre supersónico, $M_{2_{opt}} > 1$.

8. Actuaciones

8.1. Actuaciones de turborreactores

El desarrollo de este tema es solo para turborreactores de flujo simple. Para el turbofán se hace de forma análoga pero obteniendo más ecuaciones.

Se parte de la fuerza adimensional sin considerar sangrado de aire.

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = (1 + f) \frac{u_9}{a_0} - M_0 + (1 + f) \frac{1}{\gamma_c} \frac{T_9}{T_0} \frac{a_0}{u_9} \left(1 - \frac{P_0}{P_9}\right)$$

Se dedujo en el tema de turborreactores de flujo simple que esta fuerza adimensional se puede poner en función de los siguientes parámetros.

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = f(M_0, \theta_t, \tau_c, f, \tau_t, \text{geometría, parám. efic.})$$

Se consideran que los parámetros de geometría y eficiencia están fijados.

$$\Rightarrow \frac{F}{\dot{m}a_0} = f(M_0, \theta_t, \tau_c, f, \tau_t)$$

Del estudio del turborreactor se toman tres expresiones:

- La expresión para la fracción de masa de combustible es

$$f = \frac{\frac{c_{pt}}{c_{pc}} \theta_t - \theta_0 \tau_c}{\frac{\eta_b h}{c_{pc} T_0} - \frac{c_{pt}}{c_{pc}} \theta_t}$$

- La igualdad de potencia del compresor y turbina es

$$\tau_c = 1 + (1 + f) \frac{c_{pt}}{c_{pc}} \frac{\theta_t}{\theta_0} (1 - \tau_t)$$

- La continuidad de flujos en la entrada de la turbina y la garganta de la tobera es

$$\bar{m}(M_4, \gamma_t) \frac{P_{t4} A_4}{\sqrt{RT_{t4}}} = \bar{m}(M_8, \gamma_t) \frac{P_{t8} A_8}{\sqrt{RT_{t8}}}$$

Se pueden obtener formalmente estas expresiones de forma que sean una función que sea igual a cero.

$$f_1(M_0, \theta_t, \tau_t, f, m h / c_{pc} T_0) = 0 \quad f_2(M_0, \theta_t, \tau_c, f, \tau_t) = 0 \quad f_3(M_4, M_8, A_8/A_4, \tau_t) = 0$$

Como hipótesis se fija la sección característica de la turbina en un lugar del estator donde se tiene número de Mach unitario.

$$M_4 = 1$$

Si la tobera es convergente divergente se puede afirmar que en la garganta hay condiciones sónicas (sino no tendría sentido poner esta tobera). Si la tobera fuese convergente y adaptada el cálculo de actuaciones es más complejo. Por lo tanto se hace la hipótesis que las condiciones de la garganta son críticas.

$$M_9 = 1$$

Al utilizar estas hipótesis utilizando la tercera expresión se obtiene una función que solo depende de

$$f_3(A_0/A_4, \tau_t) = 0$$

Como el primer término es constante, significa que τ_t también es constante. Por eso independientemente de las condiciones de vuelo, las condiciones de la turbina son constantes, siempre recordando las dos hipótesis que se han hecho.

$$\tau_t = ct$$

Las otras dos ecuación se transforman ahora en

$$\tau_c = g_1(M_0, \theta_t, h/c_{pc} T_0) \quad f = g_2(M_0, \theta_t, h/c_{pc} T_0)$$

Por lo tanto el empuje adimensional se puede dejar en función de solo tres variables.

$$\frac{F}{\dot{m}a_0} = f(M_0, \theta_t, h/c_{pc} T_0)$$

Como el número de Mach va ligado a la temperatura ambiente T_0 y para un combustible dado ($h \approx 43 \text{ MJ/kg}$), para un número de Mach de vuelo dado, la única variable independiente es θ_t .

Al final lo que se quiere obtener es el valor de τ_c para distintas condiciones de vuelo.

$$\tau_c = 1 + (1 + f) \frac{c_{pt} \theta_t}{c_{pc} \theta_0} (1 - \tau_t)$$

En caso de hacer análisis rápidos, para ahorrar cálculos largos, se suele ignorar f en la ecuación de la igualdad de trabajo entre turbina y compresor. En análisis más precisos no se debe hacer esta suposición.

Si se diese el caso que $M_9 < 1$, se tendría el τ_t en función de ese número de Mach por lo que se debería corregir ese valor para cada cambio de M_9 .

Para encontrar el caudal másico se parte de las condiciones de referencia (por ejemplo las de diseño).

$$\dot{m}_{ref}(1 + f_{ref}) = \bar{m}(M_4 = 1, \gamma_t) \left(\frac{P_{t4} A_4}{\sqrt{RT_{t4}}} \right)_{ref}$$

Tomando unas condiciones arbitrarias

$$\dot{m}(1 + f) = \bar{m}(M_4 = 1, \gamma_t) \frac{P_{t4} A_4}{\sqrt{RT_{t4}}}$$

Se dividen las dos expresiones obteniendo

$$\rightarrow \dot{m} = \dot{m}_{ref} \frac{1 + f_{ref}}{1 + f} \frac{P_{t4}}{(P_{t4})_{ref}} \sqrt{\frac{(T_{t4})_{ref}}{T_{t4}}}$$

Si se hace la aproximación de que se puede despreciar la fracción del combustible (solo para análisis rápidos) todos los valores adimensionales anteriores (excepto f) solo dependen de M_0 y θ_t .