**Ejercicio 1.**

$$\boldsymbol{f(z)} = \begin{cases} \mathbf{0} & -\boldsymbol{\pi} < z < 0 \\ \mathbf{4\boldsymbol{\pi} - 3z} & \mathbf{0} \leq \boldsymbol{z} < \boldsymbol{\pi} \end{cases}$$

Se calculan los coeficientes $a_0,\ a_n,\ b_n$ para construir la serie de Fourier de $f(z)$ con $p = \pi$.

Para $a_0$ se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\ dz + \int_{0}^{\pi}(4\pi - 3z)dz\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[4\pi z - \frac{3z^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{5\pi}{2}$$

Para $a_n$ se tiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(z)cosnz\ dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0\ dz + \int_{0}^{\pi}(4\pi - 3z)cosnz\ dz\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(4\pi - 3z)\frac{sen\ nz}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} sen\ nz\ dz\right]$$

Por lo tanto el resultado para $a_n$ es:

$$a_n = -\frac{3}{n\pi}\frac{\cos nz}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{3 - 3(-1)^n}{n^2\pi}.$$

Donde $\cos n\pi = (-1)^n$

Ahora por ultimo hay que calcular a $b_n$.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(4\pi - 3z)sen\ nz\ dz = \frac{4 - (-1)^n}{n}.$$

Por lo tanto con los resultados obtenidos para los coeficientes la serie nos queda de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3 - 3(-1)^n}{n^2\pi}cosnz + \frac{4 - (-1)^n}{n}sen\ nz.$$

Ejemplo extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen

$$f(m) = 3m + 6\pi \qquad -\pi < m < \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(m)dm = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m + 6\pi)\ dm\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{3m^2}{2} + 6\pi m\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{3\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2}\right] + [6\pi^2 + 6\pi^2]\right] = \frac{1}{\pi}[12\pi^2] = 12\pi$$

Ahora se calculara a $a_n$ y $b_n$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(m) cosnm\ dm = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m + 6\pi)\ cosnm\ dm\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 3m\ cosnm\ dm + \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi\ cosnm\ dm\right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo nos queda:

$$u = m \quad dv = cosnm$$
$$du = dm \quad v = \frac{1}{n} sennm$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v\ du.$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{6\pi}{n} sen\ nm + \frac{3m}{n} sen\ nm - 3\int \frac{1}{n} sen\ nm\ dm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[\frac{x}{\pi n} sen\ nx + \frac{3}{\pi n^2}\cos nx + \frac{1}{n} sen\ nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando con los límites de integración nos queda:

$$a_n = \frac{3(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{3(-1)^n}{\pi n^2} = 0$$

Y se hace lo mismo para $b_n$:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(m) sen\ nm\ dm = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m + 6\pi) sen\ nm\ dm\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 3m\ sen\ nm\ dm + \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi\ sen\ nm\ dm\right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo tenemos que:

$$u = m \quad dv = sen\ nm$$
$$du = dm \quad v = -\frac{1}{n} cosnm$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v\ du.$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{6\pi}{n}\cos nm - \frac{3m}{n} cosnm + \ 3\int \frac{1}{n} cos\ nm\ dm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[-\frac{3m}{\pi n} cos\ nm + \frac{3}{\pi n^2} sennm - \frac{6}{n} cos\ nm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando con los limites de integración nos queda:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{3\pi(-1)^n}{n} - \frac{6\pi\ (-1)^n}{n} - \frac{3\pi(-1)^n}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n} = \frac{-6(-1)^n\pi}{n}\right]\right]$$
$$= \frac{6(-1)^{n+1}}{n}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es:

$$\boldsymbol{f(m) = 6\pi + 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen\ nm}$$

$$f(h) = \begin{cases} 4 & -5 < h < 0 \\ 2 + 8h & 0 < h < 5 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(h)dh = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4dh + \int_{0}^{5} (2 + 8h)dh\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[4h|_{-5}^{0} + 2h|_0^5 + \frac{8h^2}{2}\Big|_0^5\right] = \frac{1}{5}\left[20 + 10 + \frac{200}{2}\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{260}{2}\right) = 26$$

Ahora se calculara a $a_n$ y $b_n$:

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4cos\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_0^5 2cos\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_0^5 8h\, cos\frac{n\pi}{5}h\, dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = cos\frac{n\pi}{5}h$$
$$du = dh \quad v = \frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v\, du.$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4cos\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_0^5 2cos\frac{n\pi}{5}h\, dh + \frac{5h}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 - \int_0^5 \frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\ dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[\frac{20}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\Big|_{-5}^{0} + \frac{10}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \frac{40h}{n\pi}sen\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \frac{200}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi}{5}h\ \Big|_0^5\right]$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\frac{200}{n^2\pi^2}cos\frac{n\pi}{5}x\ \Big|_0^5 = \frac{200(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{200}{n^2\pi^2}\right] = 40\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

Y se hace lo mismo para $b_n$

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4sen\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_0^5 2sen\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_0^5 8h\, sen\frac{n\pi}{5}h\, dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = sen\frac{n\pi}{5}h$$
$$du = dh \quad v = -\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v\, du.$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4sen\frac{n\pi}{5}h\, dh + \int_{0}^{5} 2sen\frac{n\pi}{5}h\, dh - \frac{40h}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \int_0^5 \frac{40}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\ dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{20}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_{-5}^{0} - \frac{10}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 - \frac{40h}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \frac{200}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi}{5}h\ \Big|_0^5\right]$$

$$b_n = \left[\left[-\frac{20}{n\pi} + \frac{20(-1)^n}{n\pi}\right] + \left[\frac{10}{n\pi} - \frac{10(-1)^n}{n\pi}\right] + \left[\frac{-200(-1)^n}{n\pi}\right]\right] = \frac{38(-1)^{n+1} - 2}{n\pi}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es

$$\boldsymbol{f(h) = 13 + \sum_{n=1}^{\infty} 40\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\ cos\ \frac{n\pi}{5}h\right] + \left[\frac{38(-1)^{n+1} - 2}{n\pi} sen\ \frac{n\pi}{5}h\right]}$$