Satz von Stolz

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit

1. $\lim a_n = \lim b_n = 0$ und b_n streng monoton fallend oder
2. $\lim b_n = \infty$ und b_n streng monoton wachsend

und existiert der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

Fall 1

Seien $\epsilon > 0$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

und N so groß, dass für alle $n \geq N$ gilt: $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \epsilon$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
l-\epsilon &= \frac{l-\epsilon}{b_n} b_n \\
&= \frac{l-\epsilon}{b_n} \sum_{k=n}^{\infty} b_k - b_{k+1} \\
&= \frac{1}{b_n} \sum_{k=n}^{\infty} (l-\epsilon)(b_k - b_{k+1}) \\
&< \frac{1}{b_n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}} (b_k - b_{k+1}) \\
&= \frac{1}{b_n} \sum_{k=n}^{\infty} a_k - a_{k+1} \\
&= \frac{a_n}{b_n}.
\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\frac{a_n}{b_n} < l + \epsilon.$$

Damit gilt für $n \geq N$: $\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| < \epsilon$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Fall 2

Seien $\epsilon > 0$,

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

und N so groß, dass für alle $n \geq N$ gilt: $\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} - l\right| < \epsilon$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$l - \epsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

und damit

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & > & a_n + (b_{n+1} - b_n)(l - \epsilon) \\ & > & a_{n-1} + (b_n - b_{n-1})(l - \epsilon) + (b_{n+1} - b_n)(l - \epsilon) \\ & = & a_{n-1} + (b_{n+1} - b_{n-1})(l - \epsilon) \\ & > & a_N + (b_{n+1} - b_N)(l - \epsilon), \end{array}$$

woraus

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > l - \epsilon + \frac{a_N - b_N(l - \epsilon)}{b_{n+1}}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq l - \epsilon + \lim_{n\to\infty} \frac{a_N - b_N(l-\epsilon)}{b_n} = l - \epsilon$$

folgt. Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \geq l.$$

Analog zeigt man

$$l \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Das bedeutet aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$