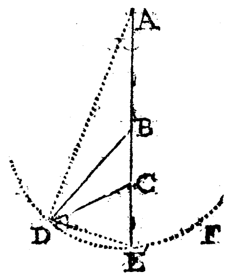
IX. *Theorema Spherico-Catoptricum Universale. Per D.* Humfredum Ditton.

FOcorum Inventio tum in Dioptricâ, tum in Catoptricâ, ex Calculo pro curvis Causticis facili modo sequitur. Nil enim aliud agendum est, quam ut locus in quo Radius (ad Curvam, vel Refringentem, vel Reflectentem perpendicularis) Curvam Diacausticam vel Catacausticam tangit, cognitus habeatur. De quâ methodo videatur D. *Hayes* Liber Fluxionum nuper editus: nos ex aliis principiis, rem (ad Catoptricam quatenus spectat) aggrediemur.



Sit DEF Speculi Spherici concavi portio, cujus Centrum *B*, semidiameter BE vel BD: Sit etiam *A* punctum radians in axe collocatum, a quo profluat radiosa linea AD, quæ ad punctum *D* reflectatur in D.C. Investiganda jam est Foci *C*, a speculi vertice *E* distantia.

Notandum vero, quod punctum *D* ipsi *E* proximum supponimus. Radii enim remotiores oculum (quem in axe AE constituimus) præterlabuntur, nec ad imaginis visionem aliquid faciunt. Porro, propter arcum DE indefinite parvum, anguli DAB, ADB (ut & ipsorum summa DBC) sunt quam minimi, ac idcirco eandem habebunt inter se rationem, quam ipsis latera opposita: quo ratiocinii principio posito, ad Theorema Dioptricum pervenit, D. *Halleius* Geometriæ Professor apud Oxonienses.

Hisce premissis, sit $AB = b$. $BD = BE = r$. $BC = z$. CE ($= r - z$, sed brevitatis causa ponatur) $= f$. Quantitates b & r cognitæ ſunt (dantur enim ſemidiameter ſpeculi, ac puncti lucidi a vertice diſtantia) z vero & f quæſitæ ac incognitæ. Jam in Triangulo DAB, erit $\angle$ DAB : $\angle$ ADB :: $r : b$. Item in Triangulo DBC, $\angle$ BDC = $\angle$ ADB, ex naturâ Reflexionis, & $\angle$ DBC = $\angle$ DAB + $\angle$ ADB, ex Elem. Eucl. Ergo cum $\angle$ DBC ſit ut $r+b$, & $\angle$ BDC ut b; erit etiam $\angle$ DBC : $\angle$ BDC :: $r+b : b$, & (quod ex principio ſupra memorato conſequitur) DC : BC :: $r+b : b$. Sed quoniam punctum *D* ipſi *E* proximum eſt, erit D C ipſi CE equalis eſtimanda, ergo CE : BC :: $r+b : b$; hoc eſt $f : z :: r+b : b$, & (comparando Antecedentium & Conſequentium ſummas ad Antecedentes) $f+z : f :: r+2b : r+b$; ſed $f+z=r$, ergo $r : f :: r+2b : r+b$, ergo $f=\frac{rr \times rb}{r \times rb}$. Q: E: I.

Si ponatur $r+b$ (= AE) $=d$, Theorema in formam contractiorem redigetur, & ſic ſtabit $f=\frac{rd}{2d-r}$. Sed utrovis modo, focorum inventioni, quæcunq; tandem ſit, vel Speculi forma, vel radiorum conditio, aptum evadet.

Coroll. I. Erit $zd = df - rf$, ſive AE x BC = AB x CE, vel quod idem eſt, linea AE harmonicè dividitur in punctis A, B, C, E; nam prædicta Rectangulorum equalitas, lineæ ſecundùm proportionem harmonicam ſectæ, propria eſt. Patet hæc veritas: Eſt enim $f=\frac{dr}{2d-r}$, & $z=r-f=r-\frac{dr}{2d-r}$, unde valores hoſce ſubſtituendo, Equatio manifeſta fiet. Adeo ut in omni Speculo Spherico, lineæ DA, DB, DC, DE, ſunt Harmonicales; & Punctum radians, Centrum, Focus, Vertex ſunt puncta diviſionem Harmonicam efficientia.

Coroll. II. 1ma Poſito $d>r$; erit ex calculo f, ſive $\frac{rd}{2d-r}>\frac{r}{2}$ ſemper. Hoc eſt, ſi puncti radiantis diſtantia major ſit Semidiametro Speculi, foci diſtantia ſemper major erit quarta parte Diametri.

Item, erit $\frac{rd}{2d-r}<r$ ſemper. Hoc eſt, diſtantia foci ſemper erit minor ſpeculi ſemidiametro.

2do. Si ponatur $d=r$, erit $\frac{rd}{2d-r}$, ſive $f=r$. Hoc eſt, ſi punctum radians in centro ſpeculi conſtituatur, Imago ejus ibi cum eo unietur.

3ª Si ponatur $d < r$, tum ipsius f expressio erit vel positiva vel negativa vel infinita, prout quantitas $2\,d$ quantitate r vel major est vel minor, vel ei equalis.

Si $2\,d > r$, hoc est, si $d > \frac{r}{2}$, tum punctum radians & focus ad easdem partes speculi jacent.

Si $2\,d < r$, vel $d < \frac{r}{2}$, tum Imago, in axe ultra speculi verticem producto, sita est.

Si $2\,d = r$, vel $d = \frac{r}{2}$, Imago infinitè distat, sive radius reflexus, axi parallelus evadit.

Coroll. III. Calculi hujus ope expeditè determinari potest, quomodo objecti radiantis (speculi respectu) motui, ipsius Imaginis motus respondet. Sit (ut antea) Imaginis a speculo distantia $= \frac{d\,r}{2\,d - r}$, quando objecti distantia est d. Mutetur jam utcunque objecti distantia, & ex d, fiat $n\,d$, quantitate n Numerum vel integrum vel fractum designante: & sic loco prioris Equationis, $f = \frac{d\,r}{2\,d - r}$, habebimus pro Novo Foco aliam Equationem, $F = \frac{n\,d\,r}{2\,n\,d - r}$. Et quidem si n Numerum integrum exprimere supponatur, secunda hæc objecti distantia primâ major erit, si vero sit fractus, tum minor erit primâ.

Hisce positis, si $d > r$, & n sit integer, erit $F < f$, id est, erit $\frac{n\,d\,r}{2\,n\,d - r} < \frac{d\,r}{2\,d - r}$, sive $2\,n\,d\,d\,r - n\,d\,r\,r < 2\,n\,d\,d\,r - d\,r\,r$, quod manifestum est. Hoc est, si in speculo concavo objecti distantia major sit semidiametro, tum recedente objecto a speculo, Imago versus speculum accedet. Rursus, designet n Numerum fractum, & tunc reperietur $2\,n\,d\,d\,r - n\,d\,r\,r > 2\,n\,d\,d\,r - d\,r\,r$, sive $F > f$. Hoc est, accedente objecto ad speculum recedet Imago.

Supponatur jam $d < \frac{r}{2}$; ut & alia quæcunque sit objecti distantia $n\,d$ intelligatur ea semper minor esse quam $\frac{r}{2}$. Tum erunt $2\,n\,d\,d\,r - n\,d\,r\,r$, & $2\,n\,d\,d\,r - d\,r\,r$, quantitates negative, sive $n\,d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r$, & $d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r$ quantitates positivæ. Et quidem si n numero integro æquetur, erit $n\,d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r > d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r$, sive $F > f$; si vero n fractio sit, tum erit $n\,d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r < d\,r\,r - 2\,n\,d\,d\,r$, sive $F < f$. Hoc est, si in speculo concavo objecti distantia minor sit speculi Diametri quartâ parte, tum recedente

dente objecto a speculo, recedet & Imago; vel accedente objecto versus speculum, Imago etiam accedet.

Et hæc omnia (quæ calculi vestigia premendo deduximus) Scholio unico conclusit, & in suâ Catoptricâ tradidit D. *Gregorius* apud Oxonienses Astronomiæ Professor.

Coroll. IV. In Equatione $f = \frac{dr}{2d - r}$, si ponatur d infinita, erit $f = \frac{r}{2}$; quæ regula est pro Radiis parallelis, sive pro objecto radiante ad distantiam infinitam remoto. Idem sequetur, posito b infinito in Equatione $f = \frac{rr + rb}{r + 2b}$.

Coroll. V. In Equatione $\frac{dr}{2d - r}$, mutato quantitatis r signo negativo in positivum, erit $f = \frac{dr}{2d + r}$; vel in equatione $f = \frac{rr + br}{r + 2b}$, mutato signo positivo in negativum, erit tunc $f = \frac{rb - rr}{2b - r}$, quæ regulam exhibet pro speculo versus objectum radians *convexo*. Patet hæc mutatio signi; nam sicut in speculo concavo $d = r + b$, sic in convexo $d = b - r$.

Coroll. VI. In speculo convexo (stantibus quæ ad Cor. III. annotavimus de Concavo) patebit quod (si n sit numerus integer) $2rndd + ndrr > 2rndd + drr$; & (n fractione existente) quod $2rndd + ndrr < 2rndd + drr$. Hoc est, quod recedente objecto a speculo, vel versus idem accedente Imago similiter recedet vel accedet.

Patet etiam in speculo convexo, objecto ad immensam usq; distantiam retrocedente, Imaginem tamen illius non ultra Diametri partem quartam abire a vertice, sed ibi, in puncto, centrum inter & verticem medio, se sistere. Posito enim d vel b infinito, erit $f = \frac{dr}{2d}$ vel $\frac{br}{2b}$, id est (utrovis modo) $= \frac{r}{2}$.

Hisce adjungi potest & Problematis Catoptrici solutio, *Radiantis positionem respectu speculi dati talem invenire, ut radians ad ipsius Imaginem a speculo factum, datam habent rationem.* Sit Ratio data $r : q$. & symbolo O designetur Objectum, I Imago, d distantia objecti, & f imaginis a speculo. Jam (quod demonstravit D. *Greg.*) erit $O : I :: d : f$, (hoc est Objectum & Imago sunt distantiis suis a speculi vertice directè proportionales) & quoniam requiritur ut sit $O : I :: r : q$, debet

debet etiam esse d : f :: r : q, vel (ipsius f expressionem scribendo) $d : \frac{dr}{2d-r} :: r : q$, unde $2ddq - rdq = rdr$, & $2dq = rr + qr$, & $d = \frac{rr+rq}{2q}$. Unde quoniam $dr = \frac{rrr+rrq}{2q}$, & $2d - r = \frac{rr}{q}$, erit etiam f sive $\frac{dr}{2d-r} = \frac{rrr+rrq}{2q} - : \frac{rr}{q} = \frac{qrrr+qqrr}{2qrr} = \frac{r+q}{2}$, quæ est ipsius f, sive imaginis a speculo distantia, huic objecti distantiæ congrua. Ergo si statuatur objectum ad distantiam $\frac{rr+rq}{2q}$, ipsius Imago facta ad distantiam $\frac{r+q}{2}$ ei comparata, eandem habebit rationem, quam q : r, sive erit O : I :: r : q. Nam O : I :: d : f :: $\frac{rr+rq}{2q}$: $\frac{r+q}{2}$ :: r : q. Q. E. I.

Objectum Radians & Imaginem hic tanquam lineas consideravimus. Si enim Superficies sunt, tum erit O : I :: $d^2 : f^2$, & $d^2 : f^2 :: r : q$, sic ut ultimo deveniatur ad Equationem $4dd - 4qdr = r^3 - qrr$, e quâ radicis d valor, Methodis vulgaribus facillimè inveniri potest.

LONDON,
Printed for *Sam. Smith* and *Benj. Walford*, Printers to the Royal Society, at the *Princes Arms* in *St Paul's* Church-yard, 1705.