

Conjetura $2n + 2$ y las Variantes de Collatz

Por: José Acevedo J.

Aunque estos resultados no demuestran la conjetura de Collatz, esperamos que los mismos sirvan para acercarnos un poco más a la solución definitiva de la conjetura.

Conjetura $2n + 2$

La conjetura $2n + 2$, no es más que una variante de la muy conocida conjetura matemática de Collatz ó $3n + 1$, como también es conocida. Para comprender la primera, debemos conocer el enunciado de la segunda.

Enunciado de la conjetura $3n + 1$

Tomemos un número natural (n), y procedamos de la siguiente manera:

- a) Si n es impar, multipliquémoslo por 3 y le sumamos 1 al resultado.

- b) Si n es par, dividámoslo por 2.

Repetiremos este proceso con el guarismo obtenido, y así repetidamente.

Ej.:

$$n = 9$$

Como n es impar multiplicamos 9 por 3 y le sumamos 1.

$3(9) + 1 = 28$, este es el segundo término de la sucesión.

9, 28

Como 28 es par, lo dividimos entre 2 para generar el tercer término, y así sucesivamente repetimos el proceso hasta acabar en 1.

9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

No importa el número natural que elijamos, siempre y cuando sigamos estas simples reglas la serie terminará en uno, esto significa que a partir de dicho término se vuelve periódica.

Por medio de ordenadores, se ha comprobado que la conjetura es cierta para números menores o iguales a 2^{58} , pero eso no le da el estatus de teorema a la conjetura.

Como ya se habrán podido imaginar, la conjetura $2n + 2$, cumple el mismo enunciado que la conjetura de Collatz ($3n + 1$), variando sólo en la función generadora que ahora es $2n + 2$ (para n impares).

Ejemplo:

$n = 9$

Como n es impar, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 2.

9, 20, 10, 5, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1.

Como podemos notar, el número de iteraciones es menor que en el ejemplo anterior.

Para $n = 3721$, tenemos:

3721, 7444, 3722, 1861, 3724, 1862, 931, 1864, 932, 466, 233, 468,
234, 117, 236, 118, 59, 120, 60, 30, 15, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Para $n = 10$, tenemos:

10, 5, 12, 6, 3, 8, 4, 2, 1

Para $n = 28$, tenemos:

28, 14, 7, 16, 8, 4, 2, 1

A partir de las funciones $f(n) = 3n + 1$ o $f(n) = 2n + 2$, podemos obtener otras funciones que satisfacen las normas establecidas por Collatz, las que se cumplirán siempre y cuando la $f(n)$ se multiplique por una potencia de dos, esto es:

$$2^m f(n) / m > 0$$

Ejemplos:

Sea $m = 1$ y $n = 3$, con $f(n) = 3n + 1$

$$2^1 f(n) = 2(3n + 1) = 6n + 2$$

Aplicando las reglas de Collatz tenemos:

3, 20, 10, 5, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Sea $m = 1$ y $n = 3$, con $f(n) = 2n + 2$

$$2^1 f(n) = 2(2n + 2) = 4n + 4$$

Aplicando las reglas de Collatz tenemos:

3, 16, 8, 4, 2, 1

Sea $m = 2$ y $n = 3$, con $f(n) = 2n + 2$

$$2^2 f(n) = 4(2n + 2) = 8n + 8$$

Aplicando las reglas de Collatz tenemos:

3, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Sea $m = 2$ y $n = 3$, con $f(n) = 2n + 2$

$$2^2 f(n) = 4(3n + 1) = 12n + 4$$

Aplicando las reglas de Collatz tenemos:

3, 40, 20, 10, 5, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1

Aplicando las reglas de Collatz a otras funciones se pueden obtener otros resultados interesantes, como la conjetura de tipo: $2^n * k$, tal que k es un elemento de los enteros positivos impares y n un número entero mayor que 0.

Siguiendo las mismas reglas que en las conjeturas anteriores, y sustituyendo únicamente la función generadora, por la función: $2^n k$, observamos que:

Si tomamos $n = 1$ y $k = 5$,

$2k$

5, 10, 5

Si tomamos $n = 2$, $k = 5$,

$4k$

5, 20, 10, 5

Si tomamos $n = 3$, $k = 5$,

$8k$

5, 40, 20, 10, 5

Si tomamos $n = 4$, $k = 5$,

$16k$

5, 80, 40, 20, 10, 5

Como podemos notar en este tipo de variante, siguiendo las reglas de collatz, el último término de la sucesión es igual al primero, lo que significa que a partir de este término la sucesión se hace cíclica. Otra cosa que se puede observar es que el número de términos aumenta conforme aumenta n en $(n + 2)$, antes de que se haga cíclica.

Ejemplos:

Para $n \in \{1, 2, 3\}$, $k = 576345$

$$2^1 = 2$$

$$576345 - 1152620 - 576345$$

$$2^2 = 4$$

$$576345 - 2305380 - 1152690 - 576345$$

$$2^3 = 8$$

$$576345 - 4610760 - 2305380 - 1152620 - 576345$$

Nota:

El término conjetura está mal empleado para la variante de tipo $2^n \cdot k$, ya que se puede demostrar de manera sencilla que lo dicho anteriormente se cumple para dicha función.