

# Klassieke Mechanica

Een brede introductie

H.Christiaen

Deze tekst is een PDF bewerking van de het Wikibook "Klassieke Mechanica",  
[http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke\\_Mechanica](http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke_Mechanica)

Dit boek kreeg het Wiki Standaard Boeknummer WSBN nl-1-14-000-00001 toegekend

Voor wie een gedrukte versie leest: de links zonder URL verwijzen naar de Nederlandse Wikipedia (<http://nl.wikipedia.org/>). Door te zoeken met het opgegeven sleutelwoord kan men daar gemakkelijk de betrokken informatie terugvinden.

Versie 0.9.24

2010-03-29

Deze tekst werd gezet met Lyx 1.6.0 ([www.lyx.org/](http://www.lyx.org/))

De meeste grafieken werden gemaakt met LabPlot 1.6.0 (<http://labplot.sourceforge.net/>)

De numerieke simulaties werden uitgevoerd met Scilab 5.1.1 ([www.scilab.org/](http://www.scilab.org/))

Met dank aan alle lezers van de tekst op de website die vele typfouten en soms wel andere fouten verbeterd hebben.

# Inhoudsopgave

<b>Inleiding</b>	<b>11</b>
<b>1 Basisbegrippen</b>	<b>13</b>
1.1 Dimensies en eenheden	13
1.1.1 Eenhedenstelsels	13
1.1.2 Dimensies	14
1.2 Elementaire bewerkingen met vectoren	15
1.2.1 Scalair product	15
1.2.2 Voorstelling van rotaties als vectoren	16
1.2.3 Positieve en negatieve draaizin	16
1.2.4 Rechtsdraaiende en linksdraaiende rechthoekige assenkruisen	17
1.2.5 Vectorieel product	17
1.2.5.1 Eigenschappen	17
1.2.6 Moment van een kracht	18
1.2.6.1 Eerste methode: berekening in termen van Cartesische coördinaten	18
1.2.6.2 Tweede methode: ontbinden van de kracht	19
1.2.6.3 Derde methode: met de loodrechte afstand naar de drager	19
1.2.7 Hoeksnelheden lineaire snelheid	20
1.2.8 Product van drie vectoren	20
1.2.8.1 Box product	20
1.2.8.2 Dubbel vectorproduct	20
1.2.9 Ontbinding van een vector	20
1.2.10 Differentiëren van vectoren	21
1.2.11 Voorstelling van onbekende vectoren	21
1.3 Slotbemerkingen	22
1.3.1 Van vereenvoudigde naar wiskundig correcte voorstelling	22
<b>2 Equivalente vectorsystemen</b>	<b>25</b>
2.1 Inleiding	25
2.2 De verplaatsingsformule	25
2.3 Koppel van krachten	26
2.4 De equivalentierelatie	27

2.5	De speciale gevallen . . . . .	27
2.5.1	Herleiding tot een zuivere resultante . . . . .	28
2.5.1.1	Systemen van evenwijdige krachten . . . . .	28
2.5.1.2	Vlakke systemen . . . . .	31
2.5.1.3	Samenlopende krachten . . . . .	31
2.5.2	De schroefas . . . . .	31
2.6	Nawoord . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Statica I : De vectoriële methode</b>	<b>35</b>
3.1	Inleiding . . . . .	35
3.2	Evenwicht van een enkelvoudig onvervormbaar voorwerp . . . . .	36
3.2.1	De evenwichtsvoorwaarde . . . . .	36
3.2.2	Praktische uitwerking . . . . .	37
3.2.2.1	Voorbeeld . . . . .	37
3.3	Vrijheidsgraden en verbindingen . . . . .	38
3.3.1	Ideale staaf . . . . .	39
3.3.2	Strikte evenwichtsvoorwaarden . . . . .	40
3.4	Isostatisch, hyperstatisch en hypostatisch systeem . . . . .	40
3.4.1	Voorbeelden . . . . .	40
3.5	Evenwicht van samengestelde voorwerpen . . . . .	41
3.5.1	Samengesteld systeem, geheel onvervormbaar . . . . .	42
3.5.1.1	De vergelijkingen . . . . .	43
3.5.2	Samengesteld systeem, geheel vervormbaar . . . . .	45
3.5.2.1	De vergelijkingen . . . . .	45
3.5.3	Meervoudige contacten . . . . .	46
3.6	Vakwerken . . . . .	48
3.6.1	Berekening . . . . .	50
3.7	Referenties . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Statica II : De methode van de virtuele arbeid</b>	<b>53</b>
4.1	Inleiding . . . . .	53
4.2	Systeem van één puntmassa . . . . .	53
4.2.1	Voorbeeld 1 . . . . .	54
4.3	Veralgemeende coördinaten en vrijheidsgraden . . . . .	54
4.4	Samengesteld systeem met één vrijheidsgraad . . . . .	55
4.4.1	Voorbeeld 2 . . . . .	55
4.5	Meerdere vrijheidsgraden . . . . .	56
4.5.1	Voorbeeld 3 . . . . .	57
4.6	De klassieke formulering . . . . .	58
4.7	De klassieke uitwerking . . . . .	58
4.7.1	a) Berekening in termen van orthogonale coördinaten . . . . .	58

4.7.2	b) Berekening met de goniometrische vorm	59
4.7.3	c) Speciaal geval: potentiaalkrachten	59
4.8	Keuze van het assenkruis	60
4.9	Enkele toepassingen	60
4.9.1	De keukenbalans	60
4.9.2	Ruitvormige krik	61
4.9.3	Berekenen van verbindingskrachten	62
4.10	Slotbemerkingen	63
4.10.1	Een beetje geschiedenis	63
4.10.2	Een stellingname van de auteur	63
<b>5</b>	<b>Kinematica</b>	<b>65</b>
5.1	De definities	66
5.1.1	Verbanden	67
5.1.1.1	Afleidingen	67
5.1.2	Eenparige en eenparig versnelde beweging	68
5.1.2.1	Eenparige beweging	68
5.1.2.2	Eenparig versnelde beweging	68
5.1.2.3	Remweg	69
5.2	De vectoriëlele formules	71
5.2.1	Cartesische coördinaten	71
5.2.1.1	Toepassing: beweging op een cirkel - Normale en tangentiële versnelling	71
5.2.1.2	Normale versnelling bij een willekeurige kromme	72
5.2.1.3	Valparabool	73
5.2.1.4	Valparabool-2: hoek, omhullende	75
5.2.1.5	Valparabool-3: maximale afstand op helling, luchtweerstand	76
5.2.2	Poolcoördinaten	78
5.2.2.1	Het assenkruis voor snelheid en versnelling	78
5.2.2.2	Afleiding van de formules	79
5.2.2.3	Praktisch gebruik van poolcoördinaten	79
5.2.2.4	De term $2\mathbf{v}_T \cdot \boldsymbol{\omega}$	81
5.2.3	Berekenen van normale en tangentiële versnelling	81
5.2.3.1	Tangentiële versnelling	81
5.2.3.2	Normale versnelling	82
5.2.3.3	Voorbeeld	83
5.3	Bewegende referentiesystemen	84
5.3.1	Snelheden	84
5.3.1.1	De drie snelheden	84
5.3.1.2	Voorbeelden	85
5.3.2	Versnellingen	88

5.3.2.1	Een woord vooraf . . . . .	88
5.3.2.2	Een nieuwe operator . . . . .	88
5.3.2.3	De versnelling . . . . .	88
5.3.2.4	Eenvoudiger formule voor starre voorwerpen . . . . .	89
5.3.2.5	Coriolisversnelling en bewegingen op aarde . . . . .	90
5.3.2.6	Bolcoördinaten . . . . .	91
5.4	Kinematica: aanvullingen . . . . .	93
5.4.1	Ogenblikkelijk rotatiecentrum . . . . .	93
5.4.2	Poolbaan en poolkromme . . . . .	95
5.4.3	Samenstellen van rotaties . . . . .	98
5.4.3.1	Rotaties op meerder niveaus . . . . .	99
5.4.3.2	Equivalentie van rotaties . . . . .	99
5.4.3.3	Speciale gevallen . . . . .	101
5.4.3.4	Lineaire versnellingen en hoekversnellingen . . . . .	102
5.4.4	Rollen . . . . .	102
<b>6</b>	<b>Elementaire dynamica</b>	<b>105</b>
6.1	Inleiding . . . . .	105
6.2	De wetten van Newton . . . . .	106
6.2.1	Vrijmaken van het voorwerp . . . . .	107
6.2.2	Versnelling bepalen . . . . .	107
6.2.3	Controle . . . . .	108
6.2.4	Uitrekenen . . . . .	108
6.2.5	Tweede voorbeeld . . . . .	109
6.2.6	Derde voorbeeld . . . . .	111
6.3	Impuls en Behoud van impuls . . . . .	112
6.3.1	Impulsstelling . . . . .	112
6.3.1.1	Voor 1 massa . . . . .	112
6.3.1.2	Voor meerdere massa's . . . . .	113
6.3.2	Behoud van impuls . . . . .	113
6.3.3	Continue stroming . . . . .	115
6.3.4	Links . . . . .	117
6.4	Arbeid en energie . . . . .	118
6.4.1	Energiestelling voor één massa . . . . .	118
6.4.2	Energiestelling voor meerdere massa's . . . . .	118
6.4.3	Speciaal geval : potentiaalkrachten en behoud van energie . . . . .	119
6.4.3.1	Strikt behoud van energie . . . . .	121
6.4.3.2	Uitgebreid behoud van energie . . . . .	121
6.4.3.3	Berekening van enkele potentiële energieën . . . . .	122
6.4.4	Vermogen . . . . .	124

<b>7</b>	<b>Dynamica van voorwerpen</b>	<b>127</b>
7.1	Het massacentrum	128
7.1.1	Bepaling van het massacentrum	128
7.1.2	Eigenschappen van het massacentrum	129
7.1.3	Beweging t.o.v. het massacentrum	129
7.1.4	Massacentrum en behoud van impuls	130
7.1.5	Impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp	130
7.1.6	Massacentrum en energie	130
7.2	Rotatie rond as met vaste richting	132
7.2.1	Inleiding	132
7.2.2	Grootheden	132
7.2.3	Basiswet	133
7.2.4	Formule van Steiner	134
7.2.5	Voorbeelden	135
7.2.5.1	Kracht werkend op een wiel	135
7.2.5.2	Schijf in een lus	136
7.2.6	Afgeleide wetten	136
7.2.6.1	Impulsmoment en Behoud van Impulsmoment	136
7.2.6.2	Arbeid, potentiële en kinetische energie	140
7.2.7	Gevalstudie: het dynamisch gedrag van een auto	141
7.2.7.1	Vertragen en versnellen in rechte lijn	141
7.2.7.2	In de bocht	142
7.2.7.3	Onderstuur, overstuur en ESP	143
7.2.7.4	Gladde baan	144
7.3	Algemene rotatie	145
7.3.1	Inleiding	145
7.3.2	Basiswet	145
7.3.3	Traagheidstensor	147
7.3.4	Gyroscopisch effect	148
7.3.5	Trillende autowielen	150
7.3.6	Hoofdtraagheidsassen	150
7.3.7	Het rechterlid: de afgeleide van L	152
7.3.8	Praktische aanpak	153
7.3.9	Kinetische energie - Behoud van impulsmoment	154
7.3.9.1	Kinetische energie	154
7.3.9.2	Behoud van impulsmoment	155
7.3.10	Een complexer voorbeeld	156
7.3.10.1	De momentenvergelijkingen!	156
7.3.10.2	Deel II: de wet van Newton	158
7.3.10.3	Alternatieve oplossing	159

7.3.11	Precessie bij een vrij bewegend voorwerp . . . . .	161
7.3.12	Aanvullingen . . . . .	162
7.3.12.1	De hoeken van Euler . . . . .	162
7.3.12.2	Gyratiestraal - Traagheidsellipsoïde . . . . .	163
7.3.13	Transformaties van de traagheidstensor en de traagheidsellipsoïde . . . . .	164
7.3.13.1	Rechtstreekse berekening van de traagheidstensor . . . . .	164
7.3.13.2	De transformatie van het assenkruis . . . . .	165
7.3.13.3	Het diagonaliseren van de traagheidstensor . . . . .	167
7.3.13.4	De traagheidsellipsoïde . . . . .	168
7.3.13.5	Traagheidsmoment volgens een willekeurige richting . . . . .	169
7.3.14	Nota . . . . .	171
<b>8</b>	<b>De methode van Lagrange</b>	<b>173</b>
8.1	Vergelijkingen van Lagrange van de eerste vorm . . . . .	174
8.2	De Lagrangiaan . . . . .	176
8.3	Speciale gevallen . . . . .	177
8.4	Voorbeelden . . . . .	177
8.4.1	Massa aan veer . . . . .	177
8.4.2	Gekoppelde slingers . . . . .	178
8.4.3	Blokje in draaiende buis . . . . .	180
8.4.4	Slingerende schijf . . . . .	181
8.5	Dynamisch evenwicht . . . . .	182
8.5.1	Eerste voorbeeld: slingerende schijf . . . . .	183
8.5.2	Tweede voorbeeld: draaiende staaf . . . . .	183
<b>9</b>	<b>Wrijving</b>	<b>185</b>
9.1	Inleiding . . . . .	185
9.2	Slepende wrijving . . . . .	186
9.2.1	Voorbeeld 1: blok op hellend vlak . . . . .	187
9.2.2	Voorbeeld 2 . . . . .	188
9.2.3	Voorbeeld 3: ladder tegen muur . . . . .	190
9.2.4	Voorbeeld 4: lijmkleem . . . . .	191
9.3	Kantelen . . . . .	193
9.4	Rollen met slippen . . . . .	194
9.5	Wrijving over een gebogen oppervlak . . . . .	196
9.6	Rollende wrijving . . . . .	197
9.7	Viskeuze wrijving . . . . .	198
<b>10</b>	<b>Traagheidskrachten</b>	<b>203</b>
10.1	Inleiding . . . . .	203
10.2	Resultante en aangrijpingspunt . . . . .	204
10.3	Rotaties . . . . .	205
10.4	Traagheidskrachten en virtuele arbeid . . . . .	205



<b>11 Botsingen</b>	<b>207</b>
11.1 Inleiding . . . . .	207
11.2 Centrale botsing . . . . .	207
11.2.1 De restitutiecoëfficiënt . . . . .	207
11.2.2 Tweede definitie . . . . .	211
11.3 Schuine botsing . . . . .	212
11.4 Botsingen tussen voorwerpen . . . . .	213
11.4.1 Het slagcentrum . . . . .	215
<b>12 Centrale kracht en planetenbeweging</b>	<b>219</b>
12.1 Het twee lichamen-probleem . . . . .	219
12.2 Centrale kracht . . . . .	220
12.2.1 Potentiaal functie . . . . .	220
12.2.2 Behoud van impulsmoment . . . . .	221
12.3 Formule van Binet . . . . .	222
12.4 De kegelsneden . . . . .	223
12.5 Satellietbanen . . . . .	225
12.5.1 Voorbeeld . . . . .	227
12.6 De wetten van Kepler . . . . .	228
12.7 Totale energie . . . . .	229
12.8 Aarde niet raken . . . . .	230
12.9 Overgangsbaan . . . . .	230
12.10 De parametervergelijking . . . . .	231
12.11 Afstotingskracht . . . . .	231
<b>Bibliografie</b>	<b>235</b>
<b>Bijlage: Vrije Documentatie Licentie (GFPL)</b>	<b>237</b>
<b>Index</b>	<b>243</b>



# Inleiding

## Opzet en doelgroep

Dit boek heeft de bedoeling om op een wiskundig correcte manier de basisbeginselen van de **klassieke mechanica** voor te stellen voor een breed publiek. Er wordt hierbij gedacht aan personen die ooit een cursus mechanica gekregen hebben en hun geheugen willen opfrissen, of personen die niet veel over dit onderwerp gezien hebben maar er wel wat meer willen over weten. Dit boek had ook "Theoretische Mechanica" of "Analytische Mechanica" kunnen heten. Dit wekt echter te zeer de verwachting van een sterk wiskundige behandeling. Het accent moet echter vallen op de fysische fenomenen. De Franse wiskundige Lagrange beroemde zich erop dat hij een boek over mechanica geschreven had zonder één tekening. Dat is niet de bedoeling van dit boek. Eenvoudige beginselen worden soms wat uitgebreider toegelicht, om de drempel zo laag mogelijk te houden. Zo wordt er vrij lang stilgestaan bij de eenparig versnelde beweging, wordt het toepassen van de wet van Newton uitvoerig behandeld, wordt het begrip "rotor" uitgelegd bij de behandeling van potentiaalcrachten. Onderwerpen waarvoor enige kennis van differentiaal- en integraalrekenen of lineaire algebra ondersteld wordt, zullen wat sneller behandeld worden. Het is immers niet de bedoeling om een boek over die onderwerpen te schrijven. Er werd echter steeds geprobeerd om de zaken zo eenvoudig mogelijk voor te stellen. Steeds werden uitgewerkte voorbeelden van de toepassing van de formules bijgevoegd. Het is immers door formules toe te passen dat men de werkelijke draagwijdte ervan het best gaat aanvoelen. Om een vlotte lectuur mogelijk te maken worden langere en ingewikkelde afleidingen soms in een afzonderlijke paragraaf geplaatst.

Mechanica is een enorm breed domein en zelfs op een elementair niveau zijn er zeer veel onderwerpen die kunnen aangesneden worden. Men mag dus niet teleurgesteld zijn als sommige onderwerpen toch niet behandeld zijn.

Er is ook een verschil tussen een cursus en een boek waarin men het onderwerp op een gestructureerde en logische wijze wil behandelen. De volgorde waarin men de onderwerpen het liefst bestudeert, is niet noodzakelijk de volgorde die hier wordt gevolgd. Het is klassiek dat men de statica vóór de dynamica zet, maar in feite is de statica een toepassing van de principes van de dynamica met de eis dat lineaire en hoekversnelling nul moeten blijven. Dus zou men na de elementaire kinematica beter eerst de elementaire dynamica (ook wel de dynamica van de puntmassa genoemd) bestuderen en dan de statica. Een analoog probleem vormt de behandeling van de traagheidskrachten. Aan de basis ervan ligt de studie van de versnellingen in bewegende referentiesystemen, maar de toepassing behoort tot de dynamica. Men kan echter moeilijk de afleiding van de deze formules weglaten uit de kinematica en pas behandelen als men ze nodig heeft in de dynamica. De wrijving kan spelen bij problemen van de statica maar ook bij problemen van de dynamica. De volgorde van de onderwerpen hier is dus niet noodzakelijk de volgorde waarin de onderwerpen moeten bestudeerd worden.

Voor zelfstudie of voor een cursus lijkt de volgende volgorde het meest aangewezen: Basisbegrippen, Kinematica tot en met de snelheden in bewegende systemen (5.3.1), Elementaire dynamica, Dynamica van voorwerpen tot en met de rotatie rond een as met vaste richting (7.2), Equivalente vectorsystemen, Statica I en II, de rest van Kinematica, Dynamica van voorwerpen: Algemene rotatie, de Methode van Lagrange. Dit laatste hoofdstuk zou in feite ook na de elementaire dynamica kunnen gelezen worden, maar zou dan een zeer beperkt toepassingsgebied hebben. Dit is niet de klassieke volgorde, maar een volgorde die een veel betere basis geeft voor het bestuderen van de statica dan wanneer de statica voor enige noties van dynamica gezien wordt.

## Links

Er zijn natuurlijk ook min of meer gelijkaardige werken in andere talen. Zo is er in het Engels "[Classical Mechanics](#)". Dat boek gaat echter vooral over de aanpak via de methode van Lagrange, is wiskundiger en is veel beperkter qua topics dan dit boek. De methode van Lagrange wordt er via de variatie rekening aangebracht i.p.v. als uitbreiding van virtuele arbeid zoals hier. Ook gebruikt de auteur soms vectorstreepjes boven de veralgemeende coördinaten, alhoewel dat scalaire grootheden zijn (reële getallen) en geen vectoren.

In de Franse wikibooks kan men een stukje vinden over mechanische energie en arbeid ([Énergie mécanique et travail](#))<sup>1</sup>. Verder zijn er nog allerhande bijdragen over delen van het onderwerp. De titels zijn te vinden op [Catégorie Mécanique](#)<sup>2</sup>, met o.a. titels als *Mécanique enseignée via l'Histoire des Sciences*, *Dynamique*, *Mécanique des fluides* e.a.

Wie het Duits machtig is kan veel terugvinden in onderdelen van het bredere boek [Einführung in die Theoretische Physik - Ein Lehrbuch in mehreren Bänden](#)<sup>3</sup>.

Voor vele onderdelen kan men ook afzonderlijk kortere bijdragen vinden in de verschillende Wikipedia's.

## Rechten en licenties

Alle teksten en bijna alle tekeningen zijn van de hand van de auteur en vrijgegeven onder de dubbellicentie, de GNU Vrije Documentatie Licentie (GFDL) en onder de Creative Commons-Naamsvermelding-Gelijke-delen-licentie (CC-BY-SA). Ondertussen werden echter de meeste van deze tekeningen automatisch overgeheveld naar Wiki Commons.

Toestemming wordt verleend tot het kopiëren, verspreiden en/of wijzigen van dit document onder de bepalingen van de GNU-licentie voor vrije documentatie, versie 1.2, of iedere latere versie uitgegeven door de Free Software Foundation; zonder Invariante Secties, zonder Omslagteksten voor de Voorkant en zonder Omslagteksten voor de Achterkant. Een kopie van de licentie is opgenomen in Appendix A: "GNU-licentie voor vrije documentatie". U mag dit object kopiëren, veranderen en commercieel gebruiken zolang u het onder dezelfde licentie uitgeeft, de auteur(s) vermeldt en de tekst van de licentie meelevert.

Dit bestand valt onder de licentie Creative Commons Naamsvermelding Gelijk delen versie 2.5. In het kort: u kunt het bestand vrij verspreiden en bewerken onder de voorwaarde dat u naamsvermelding voor de rechthebbende toepast en dat u het slechts verspreidt onder een licentie die identiek is met deze.

Dubbellicentie: <http://nl.wikibooks.org/wiki/Wikibooks:Dubbellicentie>

GNU Vrije Documentatie Licentie: [http://nl.wikipedia.org/wiki/GNU\\_Vrije\\_Documentatie\\_Licentie](http://nl.wikipedia.org/wiki/GNU_Vrije_Documentatie_Licentie)

Creative Commons 'Naamsvermelding Gelijke delen'-licentie: <http://nl.wikipedia.org/wiki/CC-BY-SA>

Enkele tekeningen werden ontleend aan de Wiki Commons. (<http://commons.wikimedia.org/wiki/Hoofdpagina>)

Dit wordt vermeld bij de betrokken figuren of aan het einde van het hoofdstuk. Ondertussen werden echter de meeste tekeningen automatisch overgeheveld naar Wiki Commons.

## Dank

Een woord van dank hier voor de lezers van de webversie, die links en taal- en typfouten verbeterd hebben. Dank ook voor de waardering die door sommigen werd neergeschreven.

April 2009

<sup>1</sup>[http://fr.wikibooks.org/wiki/Énergie\\_mécanique\\_et\\_travail](http://fr.wikibooks.org/wiki/Énergie_mécanique_et_travail)

<sup>2</sup><http://fr.wikibooks.org/wiki/Cat%C3%A9gorie:M%C3%A9canique>

<sup>3</sup>[http://de.wikibooks.org/wiki/Einf%C3%BChrung\\_in\\_die\\_Theoretische\\_Physik\\_-\\_Ein\\_Lehrbuch\\_in\\_mehreren\\_B%C3%A4nden](http://de.wikibooks.org/wiki/Einf%C3%BChrung_in_die_Theoretische_Physik_-_Ein_Lehrbuch_in_mehreren_B%C3%A4nden)

# Hoofdstuk 1

## Basisbegrippen

### Inhoudsopgave

---

<b>1.1 Dimensies en eenheden</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1.1 Eenhedenstelsels . . . . .	13
1.1.2 Dimensies . . . . .	14
<b>1.2 Elementaire bewerkingen met vectoren</b> . . . . .	<b>15</b>
1.2.1 Scalair product . . . . .	15
1.2.2 Voorstelling van rotaties als vectoren . . . . .	16
1.2.3 Positieve en negatieve draaizin . . . . .	16
1.2.4 Rechtsdraaiende en linksdraaiende rechthoekige assenkruisen . . . . .	17
1.2.5 Vectorieel product . . . . .	17
1.2.5.1 Eigenschappen . . . . .	17
1.2.6 Moment van een kracht . . . . .	18
1.2.6.1 Eerste methode: berekening in termen van Cartesische coördinaten . . . . .	18
1.2.6.2 Tweede methode: ontbinden van de kracht . . . . .	19
1.2.6.3 Derde methode: met de loodrechte afstand naar de drager . . . . .	19
1.2.7 Hoeksnelheden lineaire snelheid . . . . .	20
1.2.8 Product van drie vectoren . . . . .	20
1.2.8.1 Box product . . . . .	20
1.2.8.2 Dubbel vectorproduct . . . . .	20
1.2.9 Ontbinding van een vector . . . . .	20
1.2.10 Differentiëren van vectoren . . . . .	21
1.2.11 Voorstelling van onbekende vectoren . . . . .	21
<b>1.3 Slotbemerkingen</b> . . . . .	<b>22</b>
1.3.1 Van vereenvoudigde naar wiskundig correcte voorstelling . . . . .	22

---

## 1.1 Dimensies en eenheden

In de natuurkunde, waarvan de mechanica een onderdeel is, hoort bij elk getal ook een eenheid. Het gaat over 1 m, 1 kg, 1 u, enz. Men zegt dat men in de natuurkunde werkt met **fysische grootheden** die gekenmerkt worden door een **maatgetal** en een **eenheid**

### 1.1.1 Eenhedenstelsels

De oppervlakte van een rechthoek is het product van lengte  $x$  breedte. Als beiden uitgedrukt worden in meter, zal de oppervlakte uitgedrukt worden in “vierkante meter”, symbool  $m^2$ . In engelsprekende gebieden wordt een lengte meestal uitgedrukt in voet en een oppervlakte wordt dan uitgedrukt in vierkante voet (“square feet”). De eenheid van oppervlakte is dus afhankelijk van de eenheid van lengte. Men

noemt die eenheid van oppervlakte daarom een **afgeleide eenheid**. De eenheid van lengte blijkt van niets afhankelijk te zijn, blijkt men vrij te kunnen kiezen. Men noemt die daarom een “basiseenheid”. De vraag is nu hoeveel basiseenheden en welke er nodig zijn om alle fysische grootheden te kunnen beschrijven. Het is daarbij belangrijk dat men zo weinig mogelijk basiseenheden gebruikt (om zeker te zijn dat ze onafhankelijk zijn van elkaar) en dat die basiseenheden nauwkeurig kunnen omschreven worden, reproduceerbaar zijn en praktisch in het gebruik.

Een systeem van eenheden dat afgeleid is van enkele basiseenheden noemt men een **eenhedenstelsel**. De eenheden die in dat schema passen noemt men **coherente eenheden**. In de praktijk worden op vele gebieden niet-coherente eenheden gebruikt. Zo is de radiaal de coherente eenheid voor een hoek maar wordt meestal de zestigdelige graad gebruikt. Ook de paardekracht (pk) is een niet-coherente eenheid.

Het blijkt dat men als basiseenheden een eenheid van lengte, van tijd en van massa nodig heeft. Voor de elektrische fenomenen moet hier nog een eenheid van stroomsterkte aan toegevoegd worden. Eenhedenstelsels worden meestal genoemd naar de basiseenheden. Eén der meest gebruikte stelsels is het **internationale stelsel** of SI-stelsel (“SI” = “Système international”) met als basiseenheden de meter, de kilogram en de seconde. Daarom wordt het ook wel het **MKS-stelsel** genoemd. Uitgebreid met de definitie voor de Ampère wordt het dan het MKSA-stelsel. Bij elke eenheid hoort een symbool. In het Nederlands blijven eenheden steeds in het enkelvoud en wordt er geen punt gezet achter het symbool.

- lengte: eenheid: meter; symbool: m. De standaard voor de meter was lange tijd de lengte van een platina-irridium staaf die in Parijs bewaard werd. Thans is de meter bepaald als 1 650 763,74 maal de golflengte van het licht uitgestraald door <sup>86</sup> Kr bij de overgang van het 5d<sub>5</sub> niveau naar het 2p<sub>10</sub> niveau.
- massa: eenheid: kilogram; symbool: kg. De standaard eenheid van massa is een platina-irridium blok dat in Parijs bewaard wordt.
- tijd: eenheid:seconde; symbool: s. De officiële definitie van de seconde is (grouweg) het 31 556 925,974ste deel van tropische jaar 1900.

De afgeleide eenheid voor het resultaat van een berekening vindt men door elke factor in de berekening te vervangen door zijn eenheid.

### 1.1.2 Dimensies

De manier waarop een eenheid afhangt van de basiseenheden noemt men de **dimensie** van die eenheid. Voor de dimensieformules wordt een lengte voorgesteld door L, de massa door M en de tijd door T. Dimensieformules worden normaal tussen rechte haken gegeven.

In de fysica kan men alleen grootheden van zelfde dimensie bij elkaar optellen of van elkaar aftrekken. In tegenstelling tot de wiskunde moet men dan ook verschillende verzamelingen getallen onderscheiden naargelang de bijhorende dimensie. Door grootheden met elkaar te vermenigvuldigen of te delen ontstaan nieuwe grootheden met andere dimensies. Bij differentiëren wordt de dimensie bepaald door het feit dat een afgeleide de limiet is van een deling, bv. de ogenblikkelijke snelheid als limiet van verschil in afstand over verschil in tijd voor  $\Delta t \rightarrow 0$ . De dimensie van snelheid is daarom  $[L/T] = [LT^{-1}]$ . Analoog kan een integraal beschouwd worden als de verfijning van een product van 2 grootheden als die van punt tot punt kunnen veranderen. De dimensie van het resultaat wordt dan het product van de dimensies van die grootheden.

Er bestaan ook **dimensieloze grootheden** en eenheden. Men kan de grootte van een hoek bepalen op een manier die onafhankelijk is van de gebruikte lengte-eenheid door die te definiëren als de verhouding van de lengte van de overspannen boog over de straal (= de radiaal, symbool “rad”). De dimensie is dus L/L. Dit resultaat noemt men **dimensieloos**. Eenheden voor dimensieloze grootheden verschijnen alleen als ze alleen voorkomen en verdwijnen als die grootheden met een andere grootte vermenigvuldigd worden. Als een punt op een cirkel met straal r beweegt met hoeksnelheid  $\omega$ , die uitgedrukt wordt in rad/s, dan is zijn lineaire snelheid v te berekenen als  $v = r \cdot \omega$  met eenheid m/s. De radialen worden niet meer vermeld.

De controle of een formule werkelijk uitdraait op een grootte met de gewenste dimensie wordt als zeer belangrijk beschouwd bij het beoefenen van de fysica.

## 1.2 Elementaire bewerkingen met vectoren

Een vector is een element van een [vectorruimte](#)<sup>1</sup>. Voor de beschrijving hiervan kan men terecht op andere plaatsen. Voor de natuurkundige en de ingenieur zijn vectoren grootheden die niet alleen een grootte maar ook een richting hebben: kracht, snelheid, enz. In het vlak kan deze richting kan aangegeven worden met een hoek t.o.v. een referentierichting tussen 0 en 360° of als een combinatie van een hoek tussen 0 en 180° en een zin. "Zin" is in feite het element richting in een ééndimensioneel systeem. Vectoren worden schetsmatig voorgesteld door een pijltje. Het is ook in vele boeken de gewoonte een pijltje te plaatsen boven de symbolen van vectoriële elementen. Als dat te moeilijk is voor de drukker wordt er soms een streepje boven of onder het symbool gezet, of wordt het symbool in vet gedrukt. In een formule of vergelijking kan men vectoren immers niet zo maar vervangen door een getal. Alleen de coördinaten in één of ander coördinatensysteem kunnen vervangen worden door getallen. Het is dus belangrijk goed te weten of men met vectoren of met getallen te maken heeft.

Vectoren zal men moeten specificeren t.o.v. een **basis**. Het aantal basisvectoren bepaalt de dimensie van de vectorruimte en omgekeerd. In de fysica beschouwt men vectoren als grootheden die onafhankelijk van een basis bestaan. Men zal pas terugvallen op een basis als men niet verder kan, b.v. omdat men numerieke berekeningen wil uitvoeren. Spijtig genoeg zijn er bewerkingen waarbij een vectorieel product betrokken is, waarbij de keuze van het assenkruis (links- of rechtsdraaiend) een rol speelt in de volgorde van de termen. Men kan dus niet volledig onafhankelijk van een assenkruis werken.

### 1.2.1 Scalair product

Een scalair product is een bewerking waarbij een koppel vectoren afgebeeld wordt op een reëel getal. De operator wordt meestal voorgesteld als een punt, vandaar de Engelse benaming van "dot product". Om onderscheid te maken tussen de punt als teken voor de vermenigvuldiging van twee reële getallen, wordt die punt dikwijls op halve hoogte tussen de argumenten geplaatst i.p.v. op de basislijn, zoals hieronder, of zwaarder gedrukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b}$$

Het scalair product heeft volgende eigenschappen:

1. Distributiviteit

$$(c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2) \cdot \vec{b} = c_1(\vec{a}_1 \cdot \vec{b}) + c_2(\vec{a}_2 \cdot \vec{b})$$

2. In een reële vectorruimte is het scalairproduct commutatief:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

3. In een Euclidische vectorruimte is de norm van een vector:

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

4. Als geldt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

dan staan a en b loodrecht op elkaar, zijn **orthogonaal**. Deze eigenschap van het scalair product maakt het geschikt voor een test van de orthogonaliteit van 2 vectoren.

Men kan uit elke vector een **eenheidsvector** afleiden met dezelfde richting als die vector door hem te delen door zijn norm. Als de basisvectoren orthogonaal zijn t.o.v. elkaar, dan spreekt men van een **orthogonale basis**. Men kan een basis ook altijd schrijven met eenheidsvectoren. Een basis waarvan de basisvectoren orthogonaal zijn en eenheidsvectoren zijn is een **orthonormale basis**.

Men kan een scalair product op 2 manieren uitrekenen:

- met de goniometrische vorm:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

waarbij  $\alpha$  de hoek is tussen beide vectoren.

---

<sup>1</sup><http://nl.wikipedia.org/wiki/Vectorruimte>

- met orthogonale coördinaten:  
in elke orthogonaal coördinaten systeem kan het scalair product geschreven worden als de som van de producten van gelijknamige coördinaten. In een cartesisch assenkruis krijgt men:  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$   
Of in het algemeen:  
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i \cdot b_i$

De combinatie van beide formules laat toe om de hoek tussen 2 vectoren te berekenen als men de beschrijving van de vectoren in termen van een orthogonaal assenkruis kent:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Dikwijls wordt ook als conventie aangenomen dat het symbool van een vector zonder het vectorpijlte of -streepje erboven staat voor de norm van de vector. Het maakt de notaties een pak lichter. Dus:  $a = |\vec{a}|$

Met deze conventie wordt b.v. de vorige uitdrukking:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$

### 1.2.2 Voorstelling van rotaties als vectoren

In de fysica stelt men rotaties, hoeksnelheden en hoekversnellingen voor als vectoren. Hiervoor worden de volgende conventies gebruikt: een rotatie wordt voorgesteld door een vector waarvan de richting evenwijdig is aan de rotatie as. Voor de zin zijn er twee mogelijkheden:

- ofwel de zin waarin een **rechtsdraaiende schroef** vooruit gaat bij het uitvoeren van die rotatie;
- ofwel de zin waarin een **linksdraaiende schroef** vooruit gaat bij het uitvoeren van die rotatie.

De eerste is de rechtsdraaiende conventie en wordt in deze tekst gevolgd.

Er is een verband tussen de **rechtsdraaiende conventie en wijzerzin**. De rechtsdraaiende conventie is hetzelfde als: een rotatie in wijzerzin zien betekent kijken in de richting van de pijl.

Voorbeeld: als een fiets van links naar rechts voor u passeert, dan zal de rotatie van elk wiel voorgesteld worden door een horizontale pijl die van u weg wijst.

Er moet echter opgemerkt worden dat een eindige rotatie, de verdraaiing over een bepaalde hoek, geen echte vector is omdat hij niet voldoet aan de voowaarde van commutatieve som. M.a.w. bij het na elkaar uitvoeren van meerdere draaiingen over een bepaalde hoek is de volgorde belangrijk. zie hiervoor Kinematica, Samenstellen van rotaties ((5.4.3))

Bij snelheid, versnelling, kracht ... is de zin van het vectorpijlte een fysisch gegeven, dat onafhankelijk is van elke conventie. Bij rotaties is de zin van het pijlte niet fysisch bepaald, maar door een conventie.

### 1.2.3 Positieve en negatieve draaizin

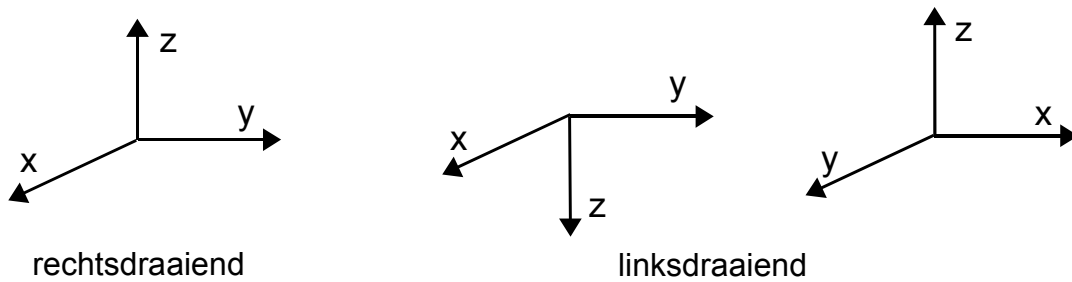
De termen “positief” en “negatief” kunnen alleen gebruikt worden voor getallen. Voor vectoriële grootheden kunnen ze alleen gebruikt worden in de context van de projectie van een vector op een as.

Binnen een assenkruis is de **positieve draaizin** de zin van een rotatie die samenvalt met de positieve zin van één van de assen. Dit komt bij definitie overeen met rotaties volgens een cyclische permutatie van de assen:

- van x-as naar y-as is de positieve zin voor de z-as;
- van y-as naar z-as is de positieve zin voor de x-as;
- van z-as naar x-as (let hier op de volgorde!) is de positieve zin voor de y-as.



### 1.2.4 Rechtsdraaiende en linksdraaiende rechthoekige assenkruisen



Figuur 1.1: Links- en rechtsdraaiende assenkruisen

Wanneer men beide bovenstaande definities combineert krijgt men een rechtsdraaiend of linksdraaiend assenkruis (zie figuur infra). Houdt men de zin van x- en y-as gelijk en verandert men alleen de conventie voor de zin, dan bekomt men het tweede assenkruis. Meestal echter stelt men een assenkruis voor met de z-as omhoog. Dit kan men bekomen door ook de x- en y-as om te wisselen bij het overgaan van de ene conventie naar de andere. Algemeen geldt trouwens dat men door omwisselen van twee assen overgaat van het ene type assenkruis naar het andere.

### 1.2.5 Vectorieel product

Het vectorieel product van 2 vectoren  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$  wordt gedefinieerd als de vector  $\vec{c}$  waarvan

- de richting loodrecht staat op het vlak van  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$
- de zin gegeven is door de zin van de rotatie van a naar b over de kleinste hoek, volgens de conventie voor het voorstellen van een rotatie;
- de grootte gelijk is aan  $||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \sin \alpha$  met  $\alpha$  de hoek tussen de vectoren a en b. Met de conventie dat in formules het symbool voor een vector zonder pijltje erboven staat voor de norm van die vector kan men dit ook noteren als:  $c = a \cdot b \cdot \sin \alpha$ .

Men noteert het vectorieel produkt meestal met een  $\mathbf{x}$ . In het Engels spreekt men daarom van “cross product”. In franse boeken treft men ook wel het symbool  $\wedge$  aan.

Uit de definitie volgt dat het vectorieel product nul is voor **evenwijdige vectoren**. De grootte van de vector is ook gelijk aan het parallellogram gebouwd op de vectoren a en b.

#### 1.2.5.1 Eigenschappen

- Distributiviteit :  

$$\vec{a} \times (k\vec{b} + m\vec{c}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) + m(\vec{a} \times \vec{c})$$
- Anticommutatief:  

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$
- als men de eenheidsvecoren volgens de cartesische assen voorstelt door  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  dan geldt:  

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

Het vectorieel product van 2 vectoren in termen van hun cartesische coördinaten wordt dan:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k}$$

Men kan deze formules gemakkelijk onthouden door op te merken dat er een cyclische permutatie

in zit: de x-coördinaat van het resultaat begin met termen in y en z, y-coördinaat van het resultaat begin met termen in z en x en z-coördinaat van het resultaat begin met termen in x en y. Men kan vooral voor berekeningen ook beroep doen op een matrixnotatie:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Het blijkt uit deze formules dat het resultaat volgens een bepaalde as alleen afhangt van de orthogonale projecties van de argumenten op het vlak loodrecht op die as. Deze eigenschap is volledig algemeen want men kan het assenkruis natuurlijk met elke oriëntatie tekenen

### 1.2.6 Moment van een kracht

Het **moment van een kracht  $\mathbf{F}$  t.o.v. een punt** wordt gedefinieerd als het vectorieel product van de positievector  $\mathbf{r}$  vanuit dat punt naar het aangrijpingspunt van de kracht met de kracht. Als het referentiepunt de oorsprong is, dan wordt die positievector de positievector van het aangrijpingspunt:

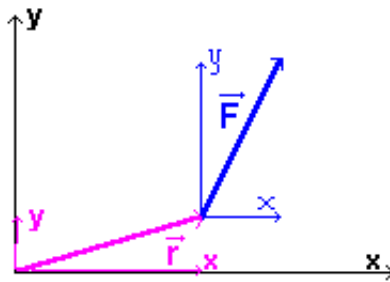
$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Het **moment van een kracht t.o.v. een as** is het moment van die kracht t.o.v. een punt op die as, geprojecteerd op die as.

Als men onderstelt dat die as de z-as is, dan blijkt uit bovenstaande formules voor de z-component van een vectorieel product dat de z-coördinaten van de argumenten er niet in voorkomen. De positie van het punt langs de as heeft dus geen belang. Het blijkt dat die z-component alleen beïnvloed wordt door de x- en y-componenten van de argumenten, d.i. door **de componenten loodrecht op de as**.

Voor tweedimensionele problemen zal men dikwijls vereenvoudigde berekeningsmethodes gebruiken, die berusten op de eigenschap dat het vectorieel product van evenwijdige vectoren 0 is en dat van loodrecht op elkaar staande vectoren gewoon het product is van de groottes van beide vectoren. Dit leidt tot de volgende drie mogelijkheden voor het berekenen van een moment in twee dimensies.

#### 1.2.6.1 Eerste methode: berekening in termen van Cartesische coördinaten



Figuur 1.2: Met cartesische coördinaten

De positievector wordt geschreven als  $\mathbf{r} (x,y)$  en de kracht als  $\mathbf{F} (X,Y)$ . Om het vectoriële product uit te rekenen wordt de matrixnotatie gebruikt:

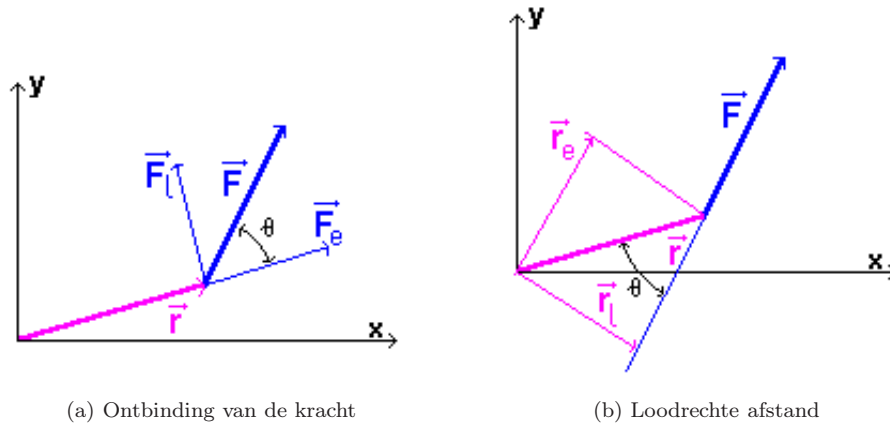
$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ X & Y & 0 \end{vmatrix} = (xY - yX)\vec{k}$$

### 1.2.6.2 Tweede methode: ontbinden van de kracht

Bij deze methode (fig.1.3) ontbindt men de kracht in een component  $F_e$  evenwijdig aan de positievector en een component  $F_l$  loodrecht erop. Het moment wordt gegeven door de grootte van de positievector  $x$  de grootte van de component van de kracht loodrecht erop. Men kan dit uitwerken als:

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_e + \vec{F}_l) = (\vec{r} \times \vec{F}_e) + (\vec{r} \times \vec{F}_l) = 0 + (\vec{r} \times \vec{F}_l) = \pm r \cdot F_l$$

Voor het bepalen van het teken kijkt men naar het rotatie-effect dat de kracht zou hebben. Men stelt zich voor dat de positievector een voorwerp is (b.v. een deur) die kan draaien rond een as in de oorsprong (loodrecht op het vlak). Alsmen de kracht  $F_l$  laat werken op dit voorwerp zal het in tegenwijzerzin draaien. In een klassiek assenkruis wordt dit dus +.



Figuur 1.3: 2e en 3e methode

Men kan ook zien dat  $F_l = F \cdot \sin\theta$ , zodat het resultaat wordt:  $r \cdot F \sin\theta$ , zoals door de goniometrische vorm verwacht wordt.

### 1.2.6.3 Derde methode: met de loodrechte afstand naar de drager

De bovenstaande ontbinding kan ook op het eerste argument toegepast worden. Dan splitst men  $r$  in een component  $r_e$  evenwijdig aan  $F$  en een component  $r_l$  loodrecht op  $F$ .  $r_l$  noemt men meestal de loodrechte afstand naar de drager van de kracht. Analoog met vorige kan men dit uitwerken als:

$$\begin{aligned} \vec{\mu} &= \vec{r} \times \vec{F} = (\vec{r}_e + \vec{r}_l) \times \vec{F} \\ &= (\vec{r}_e \times \vec{F}) + (\vec{r}_l \times \vec{F}) = 0 + (\vec{r}_l \times \vec{F}) = \pm r_l \cdot F \end{aligned}$$

Voor het teken gaat men te werk als bij vorige methode. Men kan ook zien dat  $r_l = r \cdot \sin\theta$ , zodat het resultaat wordt  $r \cdot F \sin\theta$ , zoals door de goniometrische vorm verwacht wordt.

Klassiek legt men deze methode meestal uit door te steunen op het feit dat de grootte van een vectorieel product overeenkomt met de oppervlakte van een parallellogram waarvan  $F$  de basis is en de loodrechte afstand de hoogte.

Men kan de eerste methode, met de cartesische coördinaten, ook lezen als het afzonderlijk toepassen van deze laatste methode op de x- en y-component van de kracht.

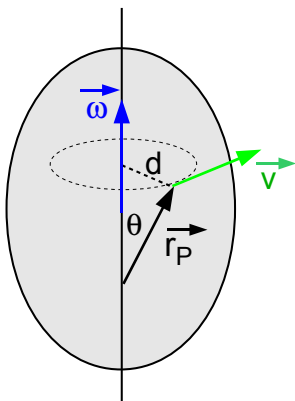
### 1.2.7 Hoeksnelheden lineaire snelheid

Bij een onvervormbaar voorwerp dat ronddraait met een hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  kan de lineaire snelheid  $\vec{v}_p$  van elk punt bepaald worden m.b.v. een vectorieel product:

$$\vec{v}_p = \vec{\omega} \times \vec{r}_p$$

waarbij  $\vec{r}_p$  de positievector van het punt P is vanuit een willekeurig punt van de rotatieas (fig. 1.4). Dat de positie van het punt op de rotatieas, van waaruit de vector  $\vec{r}_p$  vertrekt, geen belang heeft, kan men hier het best zien door te werken met de goniometrische uitwerking voor de grootte van  $\vec{v}_p$ :

$$v_p = \omega \cdot r_p \cdot \sin \theta = \omega \cdot d$$



Figuur 1.4: Verband hoeksnelheid en lineaire snelheid

### 1.2.8 Product van drie vectoren

#### 1.2.8.1 Box product

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Het resultaat (fig. 1.5) komt overeen met de inhoud van een balk gebouwd op deze 3 vectoren. In het Engels spreekt men daarom van "box product". De haakjes zijn in feite overbodig daar het tweede argument van het scalair product een vector moet zijn.

#### 1.2.8.2 Dubbel vectorproduct

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

Hier zijn de haakjes wel noodzakelijk om het resultaat eenduidig te maken. Men kan deze formule herschrijven in een andere vorm. Hiervoor stelt men  $\vec{d} = \vec{b} \times \vec{c}$ . De x-component van het resultaat kan dan geschreven worden als:

$$x = a_y d_z - a_z d_y = a_y(b_x c_y - b_y c_x) - a_z(b_z c_x - b_x c_z)$$

Beide positieve termen bevatten  $b_x$  en beide negatieve bevatten  $c_x$ .

Groeperen levert:

$$x = b_x(a_y c_y + a_z c_z) - c_x(a_y b_y + a_z b_z)$$

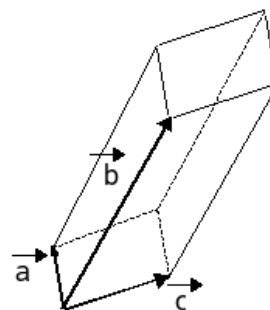
Door bijvoegen van  $a_x b_x c_x - a_x b_x c_x$  bekommt men uitdrukking die kan herschreven worden als:

$$x = b_x(\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_x(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Voor de gehele uitdrukking krijgt men:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Bemerk dat de vectoren die in het dubbele vectorproduct tussen de haakjes staan, nu de vectoren vóór de scalaire producten vormen.



box product

Figuur 1.5: Product van 3 vectoren

### 1.2.9 Ontbinding van een vector

In vele problemen zal men een gegeven vector moeten vervangen door 2 of meerdere vectoren volgens gegeven richtingen zodat de som van deze laatste gelijk is aan de gegeven vector. Dit noemt men het ontbinden van de vector in componenten. Deze ontbinding ligt eenduidig als het aantal richtingen kleiner is dan of gelijk aan de dimensie van de vectorruimte.

#### Voorbeeld

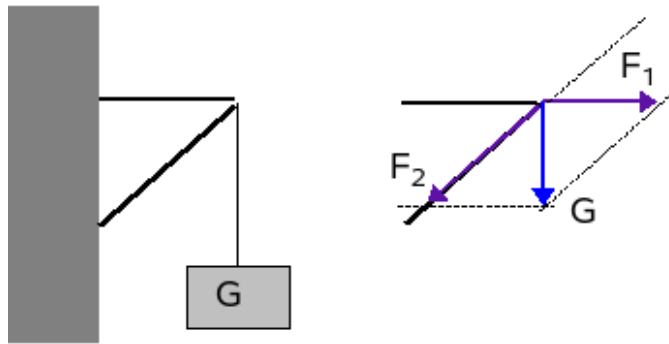
De figuur 1.6 toont een gewicht G dat met een kabel opgehangen is aan twee staven die aan een muur vastzitten. Als men mag onderstellen dat de krachten, die in het bevestigingspunt van de kabel in de

staven opgewekt worden, de richting hebben van die staven hoe groot zijn dan die krachten en welke zin hebben ze? De hoek tussen de staven is  $45^\circ$  en het gewicht is 100 kg.

Men moet twee vectoren  $F_1$  en  $F_2$  vinden zodat de vectoriële som gelijk is aan  $G$ . Men kan best beroep doen op het parallelogramalgoritme voor de som van twee vectoren. De mogelijke richtingen zijn gegeven door de staven en het verlengde van de staven.  $G$  moet als diagonaal van het parallelogram tussen de twee zijden liggen. Dat geeft dadelijk de oplossing zoals rechts voorgesteld.

$F_1 = 100$  kg en is een trekkracht op de bovenste staaf.

$F_2 = 100/\cos 45^\circ = 141,4$  kg en is een druk op de schuine staaf.



Figuur 1.6: Ontbinding van een vector

### 1.2.10 Differentiëren van vectoren

Het differentiëren van een scalair of vectorieel product volgt de regels zoals voor het differentiëren van een product van 2 reële functies. Men krijgt dus een som van 2 termen. Bv.

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt}$$

Ook het product van een reële en een vectoriële functie volgt deze regels.

Als toepassing kan men volledig algemeen bewijzen dat **de afgeleide van een vector met constante grootte loodrecht moet staan op die vector**. Een vector met constante grootte kan alleen veranderen van richting. Het scalair product van de vector met zichzelf levert het kwadraat van de grootte, dat dan ook constant moet zijn. Zij  $\vec{a}$  een willekeurige functie van  $q$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = C$$

$$\frac{d}{dq}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = 2\left(\frac{d\vec{a}}{dq} \cdot \vec{a}\right) = 0 \text{ Hieruit volgt dat } \frac{d\vec{a}}{dq} \text{ loodrecht moet staan op } \vec{a}.$$

Omgekeerd geldt ook volledig algemeen dat **als de afgeleide van een vector loodrecht staat op de oorspronkelijke vector, deze dan zal veranderen van richting (= ronddraaien) maar niet van grootte**.

### 1.2.11 Voorstelling van onbekende vectoren

In vectoriële vergelijkingen komen bekende en onbekende vectoren voor. Bij het projecteren van bekende vectoren zal men normaal het teken van de projectie expliciet aangeven. Bv. de projectie van de valversnelling  $g$  zal op een naar boven gerichte  $y$ -as als  $-g$  genoteerd worden.

Voor de projecties van onbekende vectoren zijn er twee systemen in omloop. Bij het **eerste systeem** worden onbekende projecties gewoon door een symbool voorgesteld, praktisch betekent dit: als een positieve waarde. Het teken van het resultaat geeft dan de **zin aan van de projectie** t.o.v. de oriëntatie van de as waarop geprojecteerd werd. Het nadeel van deze methode is dat men wel eens vergeet om na te denken of het bekomen resultaat wel logisch is. Wanneer een onbekende component een deel is

van een actie-reactiekoppel en zo in twee vergelijkingen voorkomt, moet men erop letten dat er tegengestelde tekens ingevoerd worden in de twee vergelijkingen. Het symbool in de tweede vergelijking staat dan immers niet meer volledig op zichzelf, maar is verbonden met het symbool in de eerste vergelijking. Als men beide lid aan lid optelt, moeten actie-reactiekoppels eruit verdwijnen. Ook bij het opschrijven van bindingsvergelijkingen moet men eraan denken dat men de onbekenden in feite als grootheden met positieve zin beschrijft. Anderzijds is het de enige methode die bruikbaar is voor het opstellen van differentiaalvergelijkingen. Deze aanpak wordt vooral gevolgd door wis- en natuurkundigen.

Bij het **tweede** systeem denkt men vooraf na over wat men verwacht als resultaat. Men schets de vector die men als resultaat verwacht en geeft aan de projecties een teken mee volgens de onderstelde zin van de component. Bij een actie-reactiekoppel leidt dit automatisch tot tegengestelde tekens in de twee vergelijkingen. Als het resultaat negatief is, dan betekent dit **dat de gemaakte onderstelling fout is**, dat de component de tegengestelde zin heeft van wat men verwachtte. Dit systeem heeft dus het voordeel dat men een duidelijk signaal krijgt als het systeem zich anders gedraagt dan men verwacht. Deze aanpak wordt vooral gebruikt door ingenieurs, die in de praktijk meer op hun schets werken dan op een zuiver theoretische basis. Het is ook de aanpak die hier gebruikt wordt omdat hij meer intuïtief en visueel is. Het systeem is niet geschikt voor het opstellen van differentiaalvergelijkingen omdat het symbool van de onbekende component hier staat voor de absolute waarde ervan en niet voor de algebraïsche waarde, zoals vereist voor een differentiaalvergelijking.

Uiteindelijk zal een totaal andere aanpak, zoals o.a. de methode van Lagrange 8, tot een meer automatisch opstellen van de vergelijkingen leiden, vooral bij complexe problemen.

### 1.3 Slotbemerkingen

Sommige fysische grootheden kunnen gekenmerkt worden door 1 reëel getal: massa, tijd, lengte, energie. Het zijn scalaire grootheden. Maatgetallen van verschillende grootheden kan men niet bij elkaar optellen, b.v. massa bij tijd. Men zegt dat men alleen grootheden met zelfde dimensie bij elkaar kan optellen of van elkaar kan aftrekken. Er zijn dus voor de fysica verschillend verzamelingen reële getallen.

Vectoren zijn fysische grootheden die voorgesteld moeten worden door een rij getallen. Maar ook hier geldt dat men geen grootheden van verschillende dimensie bij elkaar kan optellen of van elkaar kan aftrekken. Er zijn dus ook meerdere verzamelingen vectoren. De fysici hebben echter de gewoonte om zoveel mogelijk informatie bijeen te brengen in één tekening. Zo zal men bij de baan van een puntmassa soms ook een snelheidsvector, een versnelling of een kracht tekenen. De positievector  $r$  heeft componenten  $x$  en  $y$  (niet  $r_x$  en  $r_y$  !) die afgelezen worden op de  $x$ - en  $y$ -as. De snelheid heeft componenten  $v_x$  en  $v_y$ , die men zou moeten aflezen op  $v_x$ - en  $v_y$ -assen. De componenten van een kracht  $F$  zou men moeten aflezen in een assenkruis met  $F_x$ - en  $F_y$ -assen. Men leest toch ook geen temperatuur af op een weegschaal en geen gewicht op een thermometer? Deze assen kiest men normaal met zelfde oriëntatie als de assen van de positie, anders moet men supplementaire transformaties inlassen bij vele bewerkingen. Men moet echter onthouden dat een wiskundig correcte voorstelling van deze vectoren eist dat ze in hun eigen assenkruis vanuit de oorsprong zouden uitgezet worden. Het plaatsen van deze vectoren op een willekeurige plaats van een tekening zal weinig problemen opleveren als men vertrouwd is met de voorstelling van de vector als een pijltje, waarbij de componenten volgens een bepaalde richting opgevat worden als stappen in die richting. In de fysica worden vectoren gebruikt om een beschrijving te geven van fenomenen zonder een beroep op een assenkruis. Slechts wanneer men numerieke berekeningen moet uitvoeren, zal men moeten grijpen naar één of ander coördinatensysteem, want alleen de coördinaten kunnen door getallen weergegeven worden.

Volgens sommigen zouden de vectoren in de fysica ook niet dezelfde zijn als in de wiskunde. De fysica zou volgens hen glijdende vectoren gebruiken en de wiskunde vrije vectoren. M.i. zou dit betekenen dat de fysica wiskunde gebruikt die niet tot de wiskunde behoort, wat volgens mij een contradictio in terminis is. Deze opinie berust op een slecht begrip van de **equivalentierelatie**(2.4) zoals behandeld in het volgend hoofdstuk over "Equivalentie vectorsystemen".

#### 1.3.1 Van vereenvoudigde naar wiskundig correcte voorstelling

Veel grootheden in de fysica worden in een eenvoudige voorstelling beschreven als het resultaat van een **deling**. Zo wordt snelheid eenvoudig gedefinieerd als  $\Delta x / \Delta t$ . Dit is een formulering die beroep doet

op een interval  $\Delta t$  in de tijd. Maar wat als de snelheid voortdurend verandert? Dan is dat natuurlijk maar een benadering, een gemiddelde gedurende het interval  $\Delta t$ . De ogenblikkelijke snelheid krijgt men als men het interval zeer klein neemt. Dan schrijft men geen  $\Delta$  meer, maar een “d”:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Wiskundig zegt men dat  $v$  de **afgeleide** is van  $x$  naar de tijd. Als afgeleide is  $v$  gedefinieerd als de limiet van  $\Delta x / \Delta t$  wanneer  $\Delta t$  naar 0 gaat. Dan gaat natuurlijk ook  $\Delta x$  naar 0, maar de verhouding van beide hoeft niet naar 0 te gaan.

De “dx” en “dt” noemt men “differentialen”. Dikwijls worden die  $dx$  en  $dt$  beschouwd als zeer, zeer kleine intervallen, soms ook wel “infinitesimaal” kleine intervallen genoemd. Wiskundig moet men zeggen dat differentiaal geen intervallen meer zijn, maar de situatie in een punt beschrijven. Een lijn kan men vastleggen door 2 punten ervan te geven. Door 1 punt kan men oneindig veel lijnen trekken. Maar een raaklijn aan een kromme wordt gedefinieerd als de limietstand van een lijn door 2 punten van de kromme als die 2 punten naar elkaar toekomen en uiteindelijk samenvallen. Op dat ogenblik heeft de lijn maar 1 punt meer gemeenschappelijk met de kromme, maar haar stand is toch volledig bepaald. Het is dikwijls handig om eerst te redeneren op een benadering in een klein interval, waarbij men de  $\Delta$ -notatie gebruikt, en dan later over te gaan tot de differentiaalvorm die geldt van punt tot punt. In de meeste werken voor natuurkundigen en ingenieurs wordt dat onderscheid echter niet gemaakt, wat spijtig is. Ook bij virtuele arbeid moet men de  $\delta r$  niet beschouwen als een kleine verplaatsing, zoals het nu waarschijnlijk in alle handboeken gebeurt.

Men moet feitelijk de symbolen  $\frac{d}{dt}$  beschouwen als een “operator”, als één samengesteld symbool voor de operatie “differentiëren naar de tijd”. Men mag dus in de uitdrukking voor  $v$  niet “dt” van het rechterlid naar het linkerlid overbrengen om “ $v \cdot dt = dx$ ” te bekomen. Men kan als operator ook de notatie  $D_t$  gebruiken en dan valt er niets over te brengen. Die overgang berust op de definitie van differentiaal van de functie  $f(x)$  als  $df = f' \cdot dx$  waarin  $f'$  staat voor de afgeleide van  $f$  naar  $x$ .

Differentialen zijn te beschouwen als entiteiten van een eigen soort. Ze kunnen alleen bij andere differentialen opgeteld of ervan afgetrokken of ermee vergeleken worden. Een vergelijking tussen differentialen noemt men een differentiaalvergelijking. Men kan zeggen dat een differentiaalvergelijking de verandering van een systeem in een punt of op een gegeven ogenblik weergeeft. Van daaruit kan men dan de evolutie van het systeem gedurende een interval proberen op te bouwen, maar soms lukt dat alleen via een simulatie in een computer.

Andere grootheden worden bij een eenvoudige voorstelling gedefinieerd als een **product**. Bv. arbeid = kracht  $\times$  afgelegde weg. Als de kracht echter van punt tot punt verandert, zoals b.v. bij het indrukken van een veer, dan zal men beroep moeten doen op een integraal. De wiskundig correcte definitie van arbeid wordt dan:  $A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ . Grootheden die in de eenvoudige voorstelling gedefinieerd werden door een product, zullen in een correcte voorstelling moeten gedefinieerd worden door een **integraal**.

De wetten van de beweging worden eerst afgeleid voor punten en puntmassa's. Wanneer men met de uitgebreidheid van reële voorwerpen rekening moet houden, dan voert men dat ook meestal in 2 stappen in. Als men het gewicht van een muur moet berekenen en die muur is uit bakstenen opgetrokken, dan kan men rekenen met voor elke baksteen zijn gewicht als aangrijpend in het massacentrum van de baksteen. Men zal dan werken met formules waarin een **som** over alle bakstenen voorkomt. Iets als:

$$G = \sum_i g \cdot m_i$$

met  $m_i$  de massa van elke baksteen. Wanneer de muur in beton is gegoten, dan heeft men een continu medium en zal men de som vervangen door een **integraal**:

$$G = \int_{Vol} g \cdot dm$$





## Hoofdstuk 2

# Equivalenten vectorsystemen

### Inhoudsopgave

---

<b>2.1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>25</b>
<b>2.2</b>	<b>De verplaatsingsformule</b>	<b>25</b>
<b>2.3</b>	<b>Koppel van krachten</b>	<b>26</b>
<b>2.4</b>	<b>De equivalentierelatie</b>	<b>27</b>
<b>2.5</b>	<b>De speciale gevallen</b>	<b>27</b>
2.5.1	Herleiding tot een zuivere resultante	28
2.5.1.1	Systemen van evenwijdige krachten	28
2.5.1.2	Vlakke systemen	31
2.5.1.3	Samenlopende krachten	31
2.5.2	De schroefas	31
<b>2.6</b>	<b>Nawoord</b>	<b>33</b>

---

## 2.1 Inleiding

Dat de oorzaak van het gewicht van een voorwerp ligt in de aantrekkingskracht van de aarde is een vertrouwd idee. Men weet ook dat men dit gewicht kan voorstellen als een kracht die aangrijpt in het zwaartepunt van het voorwerp. Dit is echter geen rechtstreekse weergave van de fysische situatie. In werkelijkheid werkt de aantrekkingskracht van de aarde op elk onderdeelje van een voorwerp. Die aantrekkingskracht creëert dus een verzameling van evenwijdige vectoren. Die verzameling vervangt men door een **wiskundig equivalente beschrijving** als men die voorstelt als één kracht aangrijpend in het zwaartepunt van het voorwerp.

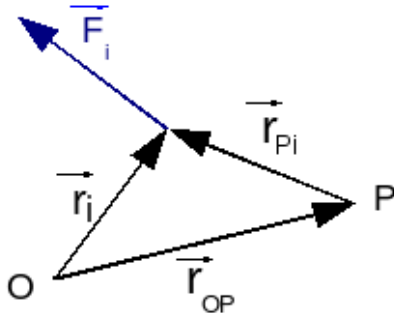
Hier en in vele andere gevallen is het interessant om een complexe situatie van vectoren te kunnen vervangen door een eenvoudiger verzameling, die echter voor alle berekeningen in de mechanica hetzelfde resultaat zal opleveren. Dit noemt men overgaan op een **equivalent vectorsysteem**. De bewerking is vooral bekend voor krachten. De theorie die hier behandeld wordt zal men in veel boeken dan ook vinden onder de titel **Samenstellen van krachten** of **Equivalenten krachtensystemen**. De theorie is echter veel breder toepasselijk, nl. op alle vectorsystemen waarbij men gebruik maakt van de som van die vectoren en van de som van hun momenten t.o.v. een punt of as. Dat is b.v. ook impuls en impulsmoment.

Om de zaken concreet te houden zal de theorie echter uitgewerkt worden aan de hand van krachten. Op het einde wordt op de andere toepassingen gewezen.

## 2.2 De verplaatsingsformule

Krachten vormen een voorbeeld van een verzameling vectoren waarbij de som van deze vectoren belangrijk is (in de wet van Newton of voor de translatie van het massacentrum) en waarbij ook de som van de

momenten van deze vectoren t.o.v. een bepaald punt of een as een belang heeft (voor de rotatiebeweging). Als men het moment van een verzameling krachten berekend heeft t.o.v. een bepaald punt en men heeft het later nodig t.o.v. een ander punt, dan kan men zich de vraag stellen of men van voorafaan moet herbeginnen of of men de berekeningen kan vereenvoudigen door uit te gaan van het vorig resultaat. Het antwoord hierop is positief en wordt gegeven door de **verplaatsingsformule**



Figuur 2.1: Afleiding van verplaatsingsformule

Onderstelt men een verzameling krachten  $F_i$ , waarvan men het moment berekent t.o.v. het punt O. Men heeft dan:

$$\vec{\mu}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Als men nu het moment nodig heeft t.o.v. een ander punt P dan wordt dit:

$$\begin{aligned} \vec{\mu}_P &= \sum_i \vec{r}_{iP} \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{OP}) \times \vec{F}_i \\ &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \vec{r}_{OP} \times \sum_i \vec{F}_i \end{aligned}$$

Dit laatste is te schrijven als:

$$\mu_P = \mu_O - r_{OP} \times \sum_i \vec{F}_i$$

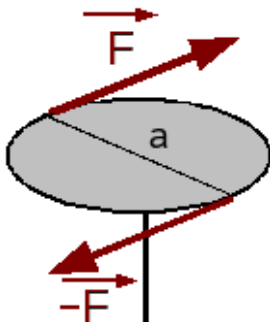
Hierin is  $r_{OP}$  de positie van P t.o.v. O.  $-r_{OP}$  is dan de positie van O t.o.v. P. Men kan deze formule dus lezen als:

De som van de momenten van alle krachten t.o.v.  
P = de som van de momenten van alle krachten  
t.o.v. O + het moment van de som van alle krachten geplaatst in O (oude positie) t.o.v. P  
(nieuwe positie)

Later wordt hieraan een interpretatie gegeven waarmee de formule eenvoudig te onthouden is.

## 2.3 Koppel van krachten

Een **koppel van krachten** is in de theoretische mechanica een stel van **twee even grote maar tegengestelde krachten**,  $(\vec{F}, -\vec{F})$  die niet op één lijn liggen.



Figuur 2.2: Koppel van krachten

Zo'n koppel treedt b.v. op als men iets probeert te verdraaien met beide handen. De loodrechte afstand tussen de twee dragers,  $a$  in de figuur, noemt men de koppelarm. Als men het moment berekent t.o.v. één van de twee aangrijpingspunten dan is het duidelijk dat het **moment van het koppel** =  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}$ . De som van de krachten van een koppel is nul (een koppel veroorzaakt geen translatie). Wanneer men nu naar de verplaatsingsformule kijkt, dan blijkt dat het moment van een koppel niet zal veranderen als men het berekent t.o.v. een ander punt. Besluit:

Het moment van een koppel is onafhankelijk van het berekenings- of herleidingspunt.

Een concreet voorbeeld hiervan kan men ondervinden als men een wiel van een auto moet vervangen. Als men de wagen opgekrikt heeft en het wiel niet geblokkeerd heeft m.b.v. de handrem of door een versnelling in te schakelen, zal men bij het proberen om de bouten los te draaien vaststellen dat het volledige wiel gaat draaien i.p.v. alleen de bout. Het maakt immers niet uit of het koppel mooi op de as uitgeoefend wordt of ergens anders op het wiel.

Vroeger zei men: "Het moment van een koppel is een vrije vector". Hiermede bedoelde men dat men de momentvector van een koppel mag 'verplaatsen' zonder dat men hiervoor een correctie moet invoeren.

Omgekeerd kan men **elk gegeven moment beschouwen als veroorzaakt door een koppel van krachten**. Of nog: een koppel van krachten is de fysische realisatie van wat men wiskundig met alleen maar een momentvector beschrijft. Men moet leren krachten en momenten als grootheden met een eigen bestaansreden te beschouwen, net zoals snelheid- en impulsvectoren afzonderlijk grootheden zijn, of snelheid en kinetische energie. Of: er is een ruimte van krachten en een ruimte van momenten.

## 2.4 De equivalentierelatie

Voor verzamelingen van gegeven krachten en gegeven momenten definieert men nu de volgende equivalentie:

Twee systemen zijn equivalent als de som van alle krachten in beide systemen dezelfde is en als de som van de gegeven momenten en van de momenten van alle krachten t.o.v. elk punt van de ruimte dezelfde is.

Dit is een niet erg praktische definitie. Eén blik op de verplaatsingsformule leert dat men dit kan vereenvoudigen tot een definitie die hetzelfde betekent maar wel te controleren is:

Twee systemen zijn equivalent als de som van alle krachten in beide systemen dezelfde is en als de som van de gegeven momenten en van de momenten van alle krachten **t.o.v. één punt** van de ruimte dezelfde is.

De meest eenvoudige toepassing van deze equivalentierelatie en de oudst bekende is **het verschuiven van een kracht over zijn drager**. Hierbij blijft de som van beide systemen duidelijk dezelfde en ook het moment t.o.v. een willekeurig punt.

Tot midden vorige eeuw werd dikwijls als een postulaat gesteld dat men een kracht mag verschuiven over zijn drager. De notie van equivalentie was toen duidelijk nog niet goed uitgeklaard. Maar zelfs tot midden de jaren 80 van vorige eeuw kon men hier en daar de affirmatie horen dat de vectoren in de fysica niet dezelfde zijn als de vectoren in de wiskunde. De fysica zou zagezegd met glijdende vectoren werken en de wiskunde met vrije vectoren. Dit gaat ook duidelijk terug op een slecht begrip van de equivalentie zoals hierboven gedefinieerd. Het is ook grote onzin want het zou betekenen dat men in de fysica aan wiskunde doet die niet tot de wiskunde behoort.

De verplaatsingsformule kan men nu als volgt interpreteren. Als de som van de krachten inwerkt in O, dan hoort daarbij een moment  $\mu_O$ . Geplaatst in O heeft deze soms een moment t.o.v. P. Als men die som laat aangrijpen in P, heeft die som geen moment meer t.o.v. P. Om te voldoen aan de equivalentierelatie moet men er dus het moment van die som in O t.o.v. P bijvoegen.

## 2.5 De speciale gevallen

Wanneer men deze equivalentierelatie meerdere keren na elkaar toepast, dan blijkt dat de som van de krachten na de eerste toepassing kan voorgesteld worden door één kracht, de resultante  $\vec{R}$ . Deze verandert verder niet meer. Alleen het moment verandert nog bij verandering van het herleidingspunt. Op basis van de verplaatsingsformule voor momenten zal dat nieuwe moment echter op een zeer eenvoudige manier kunnen berekend worden uit het vorige. Men kan dit als volgt voorstellen:

Gegeven systeem	in oorsprong	in willekeurig punt P
$\{\vec{F}_i\}$	$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$	$\vec{R}$
$\{\vec{\mu}_i\}$	$\vec{\mu}_O = \sum_i \vec{\mu}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$	$\vec{\mu}_P = \vec{\mu}_O - \vec{r}_P \times \vec{R}$ (1)

Men kan zich nu de vraag stellen of er zich speciale gevallen kunnen voordoen bij deze herleiding in bepaalde punten. Deze speciale gevallen zijn gemakkelijk te formuleren :

- herleiding tot een moment zonder resultante ( $R = 0$ ). Als dit het geval is, dan verandert het systeem niet bij overgang naar een ander herleidingspunt. Het eenvoudigste geval hiervan is een koppel. De situatie kan echter ook voorkomen met meer dan twee vectoren nl. telkens als de krachtvectoren een gesloten veelhoek vormen. Dit treedt b.v. op bij een elektrische motor.
- herleiding tot een resultante zonder moment (of  $\mu_P = 0$ ). Dit noemt men ook wel : **herleiding tot een zuivere resultante** .
- alleen het moment zal verder veranderen bij verandering van het herleidingspunt. Als vorig geval niet mogelijk is, dan kan men vragen naar een punt waar de momentvector minimaal is. Dit blijkt het punt te zijn waar de momentvector evenwijdig is met de resultante of de situatie van de schroefas. Men kan dit ook beschouwen als een herleiding tot de invarianten van het systeem.

De laatste 2 gevallen zijn speciale gevallen van (1) en worden nu meer in detail bekeken.

### 2.5.1 Herleiding tot een zuivere resultante

De voorwaarde dat  $\mu_P = 0$  moet zijn leidt tot de vergelijking:

$$\vec{\mu}_O = \vec{r}_P \times \vec{R} \quad (2)$$

Een voorwaarde voor het bestaan van een oplossing is dat  $\vec{R}$  loodrecht zou staan op  $\vec{\mu}_O$ . Dit kan toevallig zo zijn, maar er zijn twee systemen waarbij men bij voorbaat zeker is dat aan deze voorwaarde voldaan is en die dus altijd tot één enkele resultante kunnen herleid worden. Deze twee systemen zijn:

- systemen van evenwijdige krachten
- vlakke krachtensystemen.

#### 2.5.1.1 Systemen van evenwijdige krachten

Bij een systeem van evenwijdige krachten hebben alle krachten een zelfde richting. Het moment zal altijd loodrecht moeten staan op die richting, terwijl de resultante altijd volgens die richting moet liggen. Resultante en moment staan dus zeker loodrecht op elkaar.

Men kan nu gemakkelijk het punt berekenen waar men die resultante moet plaatsen. Men zoekt naar een punt Z met positievector  $\vec{r}_Z$  zodat geldt:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_Z \times \vec{R}$$

Als men een eenheidsvector  $\vec{u}$  invoert volgens de gemeenschappelijke richting, dan krijgt men:  $\vec{F}_i = F_i \cdot \vec{u}$  en  $\vec{R} = R \cdot \vec{u}$ . Invoeren in vorige uitdrukking levert:

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{r}_i \times F_i \vec{u} &= \vec{r}_Z \times R \vec{u} \\ (\sum_i F_i \vec{r}_i) \times \vec{u} &= R \vec{r}_Z \times \vec{u} \end{aligned} \quad (3)$$

Een oplossing is:

$$\vec{r}_Z = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{R} = \frac{\sum_i F_i \vec{r}_i}{\sum_i F_i}$$

Hierin zijn de  $F_i$  de **projecties** op de gemeenschappelijke richting, **met het correcte teken** ! Het heeft geen belang wat men als positieve of negatieve zin kiest. De vectoriële formule zal natuurlijk volgens projecties op assen moeten uitgewerkt worden. Vectorsen kunnen niet vervangen worden door een getal, wel de coördinaatprojecties:

$$\begin{aligned} x_Z &= \frac{\sum_i F_i \cdot x_i}{\sum_i F_i} \\ y_Z &= \frac{\sum_i F_i \cdot y_i}{\sum_i F_i} \\ z_Z &= \frac{\sum_i F_i \cdot z_i}{\sum_i F_i} \end{aligned}$$

Wanneer men met een continue krachtverdeling werkt, dan zal men met een integraal werken i.p.v. een som:

$$\vec{r}_Z = \frac{\int f(\vec{r}) \cdot \vec{r} \cdot dV}{\int f(\vec{r}) \cdot dV}$$

Hierin geeft de functie  $f(r)$  de projectie van de kracht als functie van de positie. Deze integraal kan ook over een oppervlak zijn i.p. van over een volume. Dit kan b.v. het geval zijn als men de resultante van de druk van het water tegen een dam of wand wil berekenen.

Een vergelijking die uitgaat van een vectorieel product heeft echter geen punt als oplossing maar een rechte. Er is een onbepaaldheid in de richting van  $\vec{u}$ . Als men bij de berekende waarde  $r_Z$  een willekeurige component telt in de richting van  $\vec{u}$ , dan verandert dat niets aan de waarde van het rechterlid in vergelijking (3). Het vectorieel product van evenwijdige vectoren is immers nul. Dat is dus ook een oplossing. In de praktijk komt het erop neer dat de resultante, nadat ze in het gevonden punt geplaatst werd, mag verschoven worden over haar drager, d.i. volgens de richting van  $\vec{u}$ .

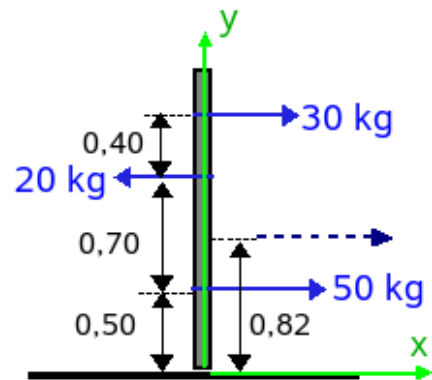
### Voorbeeld

Aan een paal zijn drie touwen bevestigd, die eraan trekken zoals aangegeven op de figuur. Bereken de resultante en de positie ervan.

Oplossing

Men voert een assenkruis is zoals getekend. De x-as dient voor de projecties van de krachten, de y-as om de posities van de aangrijpingspunten te bepalen.

$$\begin{aligned} \text{Resultante: } & 50 - 20 + 30 = 60 \text{ kg} \\ \text{Aangrijpingspunt: } & ((50 \times 0,5) + (-20 \times 1,2) + \\ & (30 \times 1,60)) / 60 = (25 - 24 + 48) / 60 = 0,82 \text{ m} \end{aligned}$$



Figuur 2.3: Evenwijdige krachten

### Toepassing: berekening van het zwaartepunt van een voorwerp

In de inleiding werd reeds het voorbeeld aangehaald van het gewicht als vervanging van de verzameling kleine krachtjes die in elk punt van een voorwerp aangrijpen. Men kan deze verzameling krachtjes vervangen door één enkele resultante, nl. **het gewicht**. Het punt waarop dat aangrijpt heet het **zwaartepunt** van het voorwerp. Wanneer men het voorwerp beschouwt als opgebouwd uit een verzameling puntmassa's  $m_i$ , dan is de kracht op elke puntmassa  $m_i g$ . Zij  $M$  de totale massa van het voorwerp, dan is de  $R = Mg$ . Bij invullen in de formules kan de factor  $g$  weggedeeld worden, zodat er overblijft:

$$\vec{r}_Z = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

Of volgens de cartesische coördinaten:

$$\begin{aligned} x_Z &= \frac{\sum_i m_i \cdot x_i}{M} \\ y_Z &= \frac{\sum_i m_i \cdot y_i}{M} \\ z_Z &= \frac{\sum_i m_i \cdot z_i}{M} \end{aligned}$$

### Opmerkingen

1. Als het systeem een symmetrievlak of een symmetrieas heeft, zal het zwaartepunt in dat symmetrievlak of op die symmetrieas moet liggen.

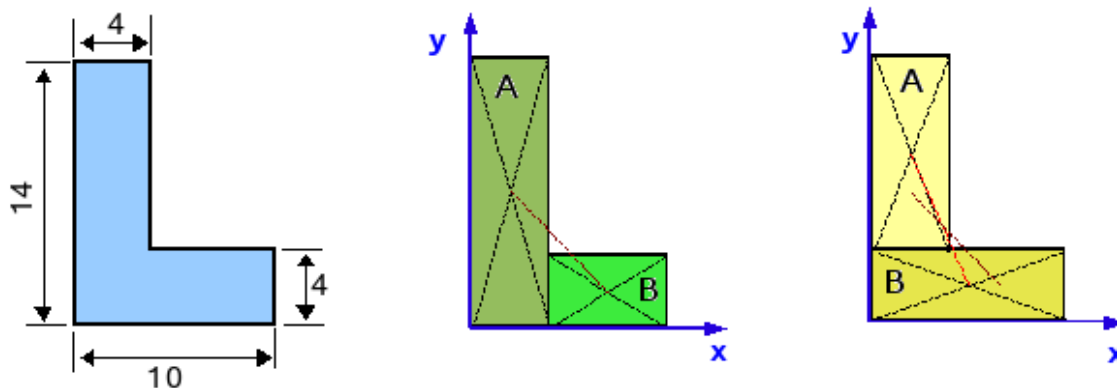
Onderstelt men b.v. dat het  $xz$ -vlak een symmetrievlak is dan betekent dit dat er voor elk punt met massa  $m_i$  en coördinaat  $y_i$  er ook een punt met massa  $m_j = m_i$  en coördinaat  $y_j = -y_i$  moet zijn. Bij sommeren over alle massa's vallen die tegen elkaar weg en eindigt men met een  $y_Z = 0$ , m.a.w. in het  $xz$ -vlak.

Op analoge manier kan men aantonen dat bij aanwezigheid van een symmetrieas het zwaartepunt op die symmetrieas moet liggen. Zij b.v. de z-as een symmetrieas. Dan moet er voor elk punt met massa  $m_i$  en coördinaat  $x_i$  en  $y_i$  ook een punt zijn met massa  $m_j = m_i$  en coördinaat  $x_j = -x_i$  en  $y_j = -y_i$ . Bij sommeren over alle massa's zal men dus komen op een  $x_z = 0$  en  $y_z = 0$  d.i. op de z-as.

2. Het zwaartepunt van een systeem hoeft niet noodzakelijk een materieel punt van dat systeem te zijn. Bij een holle bol zal het zwaartepunt samenvallen met het centrum van de bol maar daar is er geen massa aanwezig.

3. Daar het hier over een som gaat, kan men die opsplitsen in deelsommen. In de praktijk betekent dit dat men een voorwerp opdelen in eenvoudige delen, waarvan men gemakkelijk het zwaartepunt kan berekenen. Daarna kan men die zwaartepunten combineren tot het zwaartepunt voor het hele systeem.

### Voorbeeld



Figuur 2.4: Zwaartepunt van samengesteld systeem

Men vraagt het zwaartepunt te berekenen van een L-vormige plaat met afmetingen zoals gegeven op de figuur.

Oplossing: men kan deze constructie opsplitsen in twee rechthoekige stukken, waarvan het zwaartepunt eenvoudig te bepalen is. Voor een rechthoek valt dat nl. in het midden van de rechthoek. Grafisch kan men dat midden best bepalen door de diagonalen te trekken. er zijn echter twee mogelijkheden om van deze L twee rechthoeken te maken. beide moeten uiteindelijk tot hetzelfde zwaartepunt leiden.

### Eerste aanpak

Deel A is 4 bij 14 cm. Dus oppervlak =  $56 \text{ cm}^2$  en zwaartepunt ligt in (2,7).

Deel B is 6 bij 4 cm. Dus oppervlak =  $24 \text{ cm}^2$  en zwaartepunt ligt in (7, 2).

Totale oppervlakte is  $56 + 24 = 80 \text{ cm}^2$ . In de formules moet met de massa gerekend worden. Die kan men bekomen door het oppervlak te vermenigvuldigen met de massa per  $\text{cm}^2$  van de plaat. Deze factor wordt echter weggedeeld in de formules, zodat het resultaat alleen afhangt van de verhouding van de oppervlakten.

Zwaartepunt van het geheel:

$$x_z = (56x_2 + 24x_7)/80 = 280/80 = 3,50 \text{ cm}$$

$$y_z = (56x_7 + 24x_2)/80 = 440/80 = 5,50 \text{ cm}$$

Daar het zwaartepunt een lineaire combinatie is van de coördinaten van het centrum van A en B, moet het zwaartepunt van het geheel op de lijn liggen die beide zwaartepunten verbindt volgens een afstand die omgekeerd evenredig is met de massa van elk deel.

### Tweede aanpak

Deel A is 4 bij 10 cm. Dus oppervlak =  $40 \text{ cm}^2$  en zwaartepunt ligt in (2, 9).

Deel B is 10 bij 4 cm. Dus oppervlak =  $40 \text{ cm}^2$  en zwaartepunt ligt in (5, 2).

Totale oppervlakte is natuurlijk weer  $40 + 40 = 80 \text{ cm}^2$

Zwaartepunt van het geheel:

$$\begin{aligned}x_z &= 40 \times (2 + 5)/80 = 280/80 = 3,50 \text{ cm} \\y_z &= 40 \times (9 + 2)/80 = 440/80 = 5,50 \text{ cm}\end{aligned}$$

Wanneer men beide verbindinglijnen van de centra van A en B samenbrengt op één figuur, dan moet het snijpunt het zwaartepunt van het geheel zijn. Daar beide lijnen elkaar onder een kleine hoek snijden, is de nauwkeurigheid van deze methode echter niet groot.

### 2.5.1.2 Vlakke systemen

Bij een vlak systeem staan alle momenten als resultaten van een vectorieel product loodrecht op het vlak van de posities en de krachten. Die momenten hebben ook maar één component. Als men het vlak van posities en krachten als  $xy$ -vlak neemt, dan liggen de momenten volgens de  $z$ -as. De vergelijking (2) wordt dan zeer eenvoudig. Schrijft men de positievector met coördinaten  $(x,y)$  en de resultante met coördinaten  $(X,Y)$ , dan wordt (2):

$$\mu_O = xY - yX$$

Dit is de vergelijking van een rechte, om redenen hoger uitgelegd. Men kan het snijpunt met de  $x$ -as vinden door  $y = 0$  te stellen of het snijpunt met de  $y$ -as door  $x = 0$  te stellen. Men kan het resultaat ook interpreteren als de positie waar men de resultante  $R$  moet plaatsen zodat ze daar een moment gelijk aan  $\mu_O$  heeft t.o.v. de oorsprong. Dan is de resultante alleen in die positie equivalent met het systeem  $(R, \mu_O)$  in de oorsprong.

### 2.5.1.3 Samenlopende krachten

Als de dragers van verscheidene krachten door één punt passeren, dan kan men dat punt kiezen als herleidingspunt. Daar geen enkele kracht een moment heeft t.o.v. dat punt, kan men in dat punt een equivalent systeem bouwen dat gewoon bestaat uit de som van alle krachten.

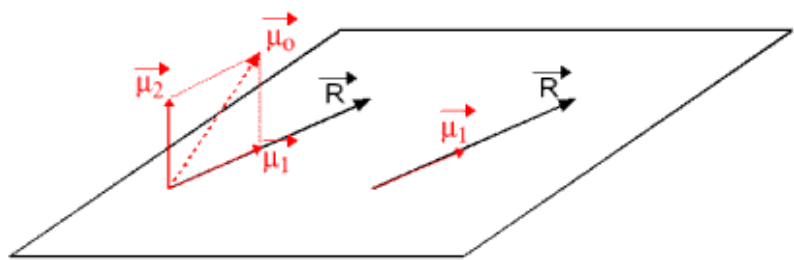
## 2.5.2 De schroefas

Wanneer men de formule (1) bekijkt, dan ziet men dat de correctieterm  $r_{\vec{P}} \times \vec{R}$  loodrecht moet staan op  $\vec{R}$ . Wanneer men  $\vec{\mu}_O$  kan splitsen in een component  $\vec{\mu}_1$  evenwijdig aan  $R$  en een component  $\vec{\mu}_2$  loodrecht op  $\vec{R}$ , dan kan alleen de laatste weggewerkt worden door naar een ander herleidingspunt over te gaan. Aan de component evenwijdig aan  $R$  zal nooit iets veranderen. Men kan  $\vec{R}$  en de component  $\vec{\mu}_1$  evenwijdig aan  $\vec{R}$  beschouwen als **invarianten** van het systeem. Ter zeldertijd is dat ook de **minimale waarde van  $\vec{\mu}_P$** . Onder bepaalde voorwaarden zal een voorwerp dat onderworpen is aan zo'n systeem een schroefbeweging uitvoeren. De drager van dat systeem noemt men daarom ook de **schroefas**. Om de positie te vinden waarbij het systeem tot deze invarianten herleidt wordt zal men de evenwijdigheid van  $\vec{\mu}_P$  en  $\vec{R}$  uitdrukken als

$$\vec{\mu}_P = k \cdot \vec{R}$$

Wanneer men dit invult in (1) krijgt men als **vergelijking van de schroefas** :

$$k \cdot \vec{R} = \vec{\mu}_O - r_{\vec{P}} \times \vec{R}$$



Figuur 2.5: Schroefas

Wanneer men de onbekende positie schrijft met cartesische coördinaten  $(x,y,z)$  en de resultante met coördinaten  $(X,Y,Z)$  dan levert dit het stelsel:

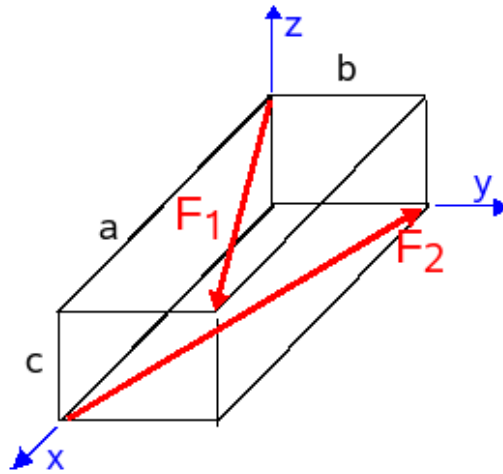
$$\begin{aligned} k \cdot X &= \mu_{Ox} - yZ + zY \\ k \cdot Y &= \mu_{Oy} - zX + xZ \\ k \cdot Z &= \mu_{Oz} - xY + yX \end{aligned}$$

Dit is een systeem van 3 vergelijkingen in 4 onbekenden. De oplossing is dus een rechte. De normale oplossingsvolgorde is:

- k bepalen
- het moment bepalen als k.R
- de gevonden k invullen in het systeem en hieruit 2 vergelijkingen in x, y en z halen. Dit zijn vergelijkingen van vlakken. De snijlijn van die vlakken vormt de schroefas.

Voor  $k > 0$  hebben resultanten en moment zelfde zin, voor  $k < 0$  hebben ze tegengestelde zin.

### Voorbeeld



Figuur 2.6: Voorbeeld voor berekening van de schroefas

Twee krachten zijn gelegen als in de figuur. Beide hebben grootte  $F$ .

Intuïtief kan men hier de schroefas vinden. Beide krachten hebben gelijke en tegengestelde componenten volgens de  $x$ -as. Die zullen dus een koppel vormen. De componenten volgens de  $z$ -as zijn evenwijdig en met zelfde zin. Die zullen de resultante leveren.

Om de vergelijking gemakkelijk te kunnen opstellen maakt men liefst een tabel met alle gegevens.

	x	y	z	$F_x$	$F_y$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
$F_1$	0	0	c	$\frac{aF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{bF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	0	$\frac{-cbF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{acF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	0
$F_2$	a	0	0	$\frac{-aF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{bF}{\sqrt{a^2+b^2}}$	0	0	0	$\frac{abF}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Optellen van de componenten van de krachten levert als resultante:

$$\vec{R} = \left(0, \frac{2bF}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

Wanneer men, om de uitdrukkingen wat lichter te maken, stelt:

$$d = \sqrt{a^2+b^2}$$

dan worden de vergelijkingen voor de schroefas:



$$0 = \frac{-cbF}{d} + \frac{2bF}{d}z$$

$$\frac{2bF}{d}k = \frac{acF}{d}$$

$$0 = \frac{abF}{d} - \frac{2bF}{d}x$$

Uit de tweede vergelijking volgt dadelijk:

$$k = \frac{ac}{2b}$$

Hiermede krijgt men voor het moment van de schroefas:

$$\vec{\mu} = k \cdot \vec{R} = \left(0, \frac{ac}{2b} \cdot \frac{2bF}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right) = \left(0, \frac{acF}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

Dit invullen in de eerste en laatste vergelijking levert:

$$z = c/2$$

$$x = a/2$$

Het eerste resultaat is een vlak loodrecht op de z-as, het tweede een vlak loodrecht op de x-as beide door het midden van de balk. De snijlijn is een lijn evenwijdig aan de y-as door het midden van de balk. Dat is de positie van de schroefas.

## 2.6 Nawoord

Op het einde van de inleiding werd reeds gesteld dat de theorie veel breder toepasselijk is dan alleen op krachten, nl. op alle vectorsystemen waarbij men gebruik maakt van de som van die vectoren en van de som van hun momenten t.o.v. een punt of as. In het Frans noemt men zo'n systeem "torseur"<sup>1</sup> (niet te verwarren met "tenseur" = tensor). In het Duits spreekt men van "Dynamie"<sup>2</sup>. In het Engels spreekt van "Screw theory"<sup>3</sup> en daarin heeft men het ook over "twists" en "wrenches". De krachten en hun momenten t.o.v. een punt vormen zo'n systeem, maar ook impuls en impulsmoment, rotaties en lineaire snelheden als gevolg hiervan. Deze laatsten worden immers ook via een vectorieel product van rotatievector en positievector berekend. (zie Kinematica, 4.3 Samenstellen van rotaties, (5.4.3))

De verplaatsingsformule kan daarbij dikwijls nuttig gebruikt worden. Het impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp t.o.v. een ander punt dan het massacentrum, kan ermee berekend worden. Zie Voorwerpendynamica, Het massacentrum, impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp. (7.1.5). Zie ook bv. het voorbeeld van de draaiende balk, waarbij de momenten opgeschreven worden t.o.v. een hoekpunt in Voorwerpendynamica, algemene rotatie, hoofdtraagheidsassen (7.3.6). De verplaatsingsformule laat ook toe om demomentenvergelijking op te schrijven t.o.v. een ander punt dan het massacentrum. Zie rotatie rond as met vaste richting, basiswet (7.2.3), de opmerking aan het einde van de paragraaf.

Het is eigenaardig dat deze theorie in haar algemeenheid reeds meer dan 50 jaar in zowat alle Franse handboeken staat (zie bv. [gruber]), ook vrij frequent voorkomt in de Duitse maar zelden behandeld wordt in de gewone Engelstalige handboeken.

---

<sup>1</sup><http://fr.wikipedia.org/wiki/Torseur>

<sup>2</sup><http://de.wikipedia.org/wiki/Dynamie>

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Screw\\_theory](http://en.wikipedia.org/wiki/Screw_theory)



# Hoofdstuk 3

## Statica I : De vectoriële methode

### Inhoudsopgave

---

<b>3.1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>35</b>
<b>3.2</b>	<b>Evenwicht van een enkelvoudig onvervormbaar voorwerp</b>	<b>36</b>
3.2.1	De evenwichtsvoorwaarde	36
3.2.2	Praktische uitwerking	37
3.2.2.1	Voorbeeld	37
<b>3.3</b>	<b>Vrijheidsgraden en verbindingen</b>	<b>38</b>
3.3.1	Ideale staaf	39
3.3.2	Strikte evenwichtsvoorwaarden	40
<b>3.4</b>	<b>Isostatisch, hyperstatisch en hypostatisch systeem</b>	<b>40</b>
3.4.1	Voorbeelden	40
<b>3.5</b>	<b>Evenwicht van samengestelde voorwerpen</b>	<b>41</b>
3.5.1	Samengesteld systeem, geheel onvervormbaar	42
3.5.1.1	De vergelijkingen	43
3.5.2	Samengesteld systeem, geheel vervormbaar	45
3.5.2.1	De vergelijkingen	45
3.5.3	Meervoudige contacten	46
<b>3.6</b>	<b>Vakwerken</b>	<b>48</b>
3.6.1	Berekening	50
<b>3.7</b>	<b>Referenties</b>	<b>51</b>

---

### 3.1 Inleiding

De **statica** is de studie van de voorwaarden die nodig zijn opdat een voorwerp of een structuur in rust zou blijven. Voor een onvervormbaar voorwerp is vereist dat de versnelling en de hoekversnelling van het voorwerp beide nul zijn. Het is in feite een speciaal geval van de wet van Newton 6.2 en de rotatiewet 7.2.3). Men kan deze voorwaarden formuleren als:

- $\sum_i \vec{F}_i = 0$
- $\sum_i \vec{r}_{Pi} \times \vec{F}_i = 0$

met  $\vec{F}_i$  de op het voorwerp of de structuur werkende krachten, P een willekeurig stilstaand punt (zie infra) en  $\vec{r}_{Pi}$  de positievector van P naar het aangrijppingspunt van de kracht  $\vec{F}_i$ .

Dit is de **vectoriële benadering**. Voor een driedimensioneel systeem komen beide vectoriële vergelijkingen overeen met drie scalaire vergelijkingen. Bij een tweedimensioneel systeem leidt de eerste voorwaarde tot twee scalaire vergelijkingen. De momenten liggen dan allen volgens een as loodrecht op het vlak van de krachten en de posities. De momentenvoorwaarde leidt dan tot één scalaire vergelijking. Het

tweedimensionele geval is dus veel eenvoudiger dan het driedimensionele. Bij een samengesteld systeem kan men met deze aanpak alle inwendige krachten tussen de onderdelen uitrekenen. Daarvoor moet het systeem opgesplitst worden in zijn onderdelen en moeten de evenwichtsvergelijkingen voor elk onderdeel opgeschreven worden.

Er is echter ook een andere benadering mogelijk. Deze vertrekt van de idee dat een versnelling van het systeem ook een toename of afname van de kinetische energie betekent. Dat kan alleen via een toevoer of afvoer van energie door de aangrijpende krachten. Geen versnelling betekent dus geen toevoer of afname van energie. Deze benadering leidt tot de methode van de virtuele arbeid 4.1. De energievergelijkingen zijn scalaire vergelijkingen. Daarom wordt deze methode soms de **scalaire methode** genoemd.

Met deze methode kunnen maar een beperkt aantal uitwendige krachten berekend worden. Ze is echter bijzonder geschikt om bij een complex mechanisme een verband te leggen tussen krachten op twee of meer punten van het systeem. Bij deze methode wordt het systeem een beetje bekeken als een *black box*. Men oefent er op één plaats een kracht op uit en de methode laat toe uit te rekenen welke kracht men op een andere plaats moet uitoefenen voor evenwicht, zonder dat men alle inwendige krachten moet berekenen. Zie b.v. het **voorbeeld van de ruitvormige krik**(4.9.2) aan het einde het betrokken hoofdstuk. Ook laat de methode toe op een meer automatische manier de evenwichtsvergelijkingen op te stellen. Ze vormt de aanloop naar de methode van Lagrange (hoofdstuk8), die de dynamische situatie (met lineaire en hoekversnelling) zal behandelen.

## 3.2 Evenwicht van een enkelvoudig onvervormbaar voorwerp

### 3.2.1 De evenwichtsvoorwaarde

De beweging van een onvervormbaar voorwerp kan altijd beschreven worden als een beweging van het massacentrum en een beweging t.o.v. het massacentrum. Voor een onvervormbaar voorwerp kan deze laatste beweging alleen maar een rotatie zijn. Een onvervormbaar voorwerp zal in rust zijn als het massacentrum niet beweegt en er geen rotatie is rond het massacentrum. Als er geen krachten werken op een voorwerp, dan zal het massacentrum zijn bewegingstoestand behouden, d.i. het zal in rust blijven of rechtlijnig verder bewegen met constante snelheid. Iets analoogs geldt voor de roatiebeweging. De voorwaarden die men formuleert opdat een voorwerp in rust zou blijven onderstellen in feite dat het voorwerp bij het aangrijpen van de gegeven krachten in rust is en zonder rotatie. In het hoofdstuk over de dynamica van voorwerpen wordt aangetoond dat

- $\sum_i \vec{F}_i = 0$  nodig is opdat het massacentrum geen versnelling zou krijgen en het voorwerp dus in rust zou blijven;
- $\sum_i \vec{r}_{Ci} \times \vec{F}_i = 0$  nodig is opdat het voorwerp geen hoekversnelling rond een as door het massacentrum zou krijgen en dus niet in rotatie zou komen. Hierbij is  $\vec{r}_{Ci}$  de positievector van het aangrijpingspunt van de  $i$ -de kracht t.o.v. het massacentrum.

Wanneer het voorwerp in rust is, dan is het massacentrum een stilstaand punt. Als men het moment van de krachten uitrekent t.o.v. een ander stilstaand punt P, dan bestaat er een verband tussen beide momenten dat gegeven wordt door de verplaatsingsformule 2.2:

$$\vec{\mu}_P = \vec{\mu}_C + \vec{PC} \times \sum_i \vec{F}_i$$

Bij rust eist men echter dat de som van de krachten = 0 is, zodat het moment van alle krachten **hetzelfde zal zijn t.o.v. om het even welk punt**. Men kan dit moment dus ook uitrekenen t.o.v. de oorsprong van het assenkruis en men mag deze oorsprong om het even waar nemen. Meestal wordt de **evenwichtsvoorwaarde** dan ook geformuleerd als:

- $\sum_i \vec{F}_i = 0$
- $\vec{\mu}_o = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$

### 3.2.2 Praktische uitwerking

Het kan goed zijn om eens de tekst te herlezen over het vectorieel product en over de manieren om een moment uit te rekenen in het eerste hoofdstuk, in de topic Elementaire bewerkingen met vectoren 1.2.

In de praktijk moet men deze vergelijkingen projecteren op assen vooraleer men getallen kan invullen. Voor een driedimensioneel probleem levert elke voorwaarde 3 scalaire vergelijkingen, b.v. door te projecteren op cartesische assen. De componenten van de kracht  $F_i$  worden daarbij geschreven met hoofdletters als  $X_i$ ,  $Y_i$  en  $Z_i$  en de coördinaten van het aangrijpingspunt met kleine letters als  $x_i$ ,  $y_i$  en  $z_i$ . Men krijgt dan: - som van de krachten = 0 levert:

- $\sum X_i = 0$
- $\sum Y_i = 0$
- $\sum Z_i = 0$

- som van de momenten = 0 levert:

- $\sum y_i.Z_i - z_i.Y_i = 0$
- $\sum z_i.X_i - x_i.Z_i = 0$
- $\sum x_i.Y_i - y_i.X_i = 0$

Voor een **tweedimensioneel** probleem blijven er maar 3 vergelijkingen over:

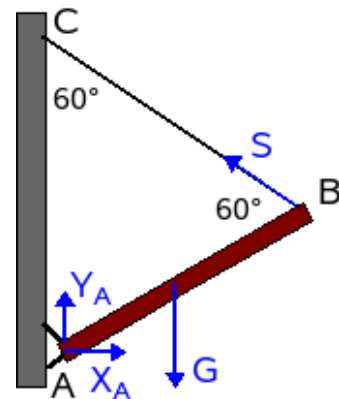
- $\sum X_i = 0$
- $\sum Y_i = 0$
- $\sum x_i.Y_i - y_i.X_i = 0$

#### 3.2.2.1 Voorbeeld

Een balk met gewicht  $G$  en lengte  $l$  is m.b.v. een scharnier en een kabel opgehangen onder een hoek van  $30^\circ$  met de horizontale. De kabel is onder een hoek van  $60^\circ$  met de verticale gespannen. Bereken de krachten in het scharnier en in de kabel.

Om dit probleem op te lossen moet men **de balk** bekijken en **alle krachten die op de balk werken**. Normaal raadt men aan om de balk afzonderlijk te tekenen, los van zijn omgeving. De situatie hier is echter nog eenvoudig genoeg om het bij één figuur te laten.

Uit de beschrijving blijkt dat de driehoek ABC gelijkzijdig is. De kracht in A heeft 2 componenten:  $X_A$  en  $Y_A$ . De spanning in het touw moet volgens het touw liggen (wordt later nog verklaard). Dit levert een schets op als op de figuur (3.1). Er blijken 3 onbekenden in het probleem te zitten en men kan ook juist 3 vergelijkingen opschrijven. Het probleem is dus eenduidig bepaald.



Figuur 3.1: Schuin opgehangen balk

De vergelijkingen worden

$$X_A - S \cdot \cos 30^\circ = 0$$

$$Y_A + S \cdot \sin 30^\circ - G = 0$$

De momentenvergelijking wordt opgeschreven t.o.v. het punt A omdat dan de onbekende krachten in A niet voorkomen in die vergelijking. Men kan zo een vergelijking in één onbekende, nl.  $S$ , opstellen, die onmiddellijk kan opgelost worden:

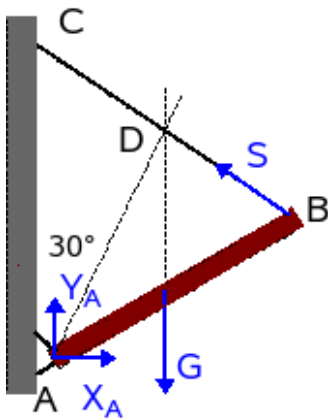
$$S \cdot l \cdot \cos 30^\circ - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos 30^\circ = 0$$

Uit de laatste vergelijking volgt:  $S = G/2$

Invullen in de vorige vergelijkingen levert:

$$X_A = \sqrt{3}G/4$$

$$Y_A = 3G/4$$



Figuur 3.2: 3 samenlopende krachten

Wanneer er slechts **3 krachten** in het spel zijn, dan eist de momentenvergelijking feitelijk dat de dragers van **die 3 krachten door één punt gaan**. Het gewicht en de spanning  $S$  snijden elkaar in het punt  $D$  (figuur (3.2)). T.o.v.  $D$  hebben zij dus geen moment. Als men de kracht in  $A$  niet in componenten uittekent maar als één kracht  $R_A$  en men berekent het moment van alle krachten t.o.v.  $D$ , dan mag  $R_A$  geen moment hebben t.o.v.  $D$  opdat de som van alle momenten  $0$  zou zijn. Ook  $R_A$  moet dus door  $D$  passeren. Op basis van een klein beetje meetkunde kan men zien dat  $R_A$  dan onder een hoek van  $30^\circ$  met de verticale moet liggen. Men kan controleren dat de oplossing hieraan beantwoordt:

$$\arctan \frac{X_A}{Y_A} = \arctan \frac{\sqrt{3}G/4}{3G/4} = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = 30^\circ$$

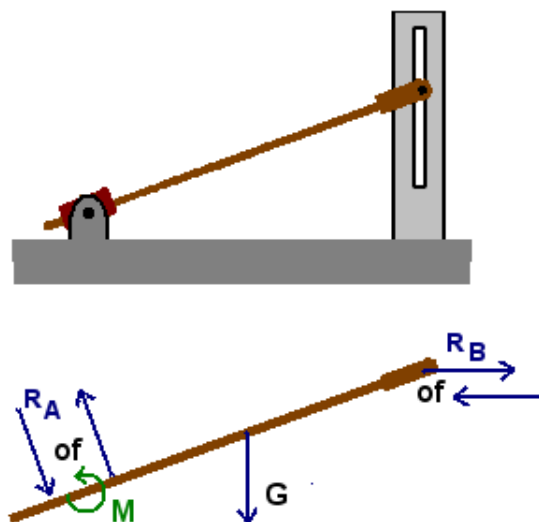
De enige mogelijkheid opdat de 3 krachten niet door één punt zouden gaan is dat ze alle drie evenwijdig zijn. Men kan dan stellen dat het snijpunt op oneindig ligt.

### 3.3 Vrijheidsgraden en verbindingen

Een voorwerp waarvan de beweging aan geen enkele beperking onderworpen is, kan een willekeurige translatie en rotatie uitvoeren. Beide kunnen voorgesteld worden door een vector, die in onze reële wereld kan beschreven worden m.b.v. 3 basisvectoren. Men zegt daarom dat een vrij bewegend voorwerp **3 vrijheidsgraden van translatie** heeft en **3 vrijheidsgraden van rotatie**.

Meestal is elk voorwerp wel ergens in contact met een ander voorwerp. Dat contact belet dan sommige bewegingen, schakelt sommige vrijheidsgraden uit. Wanneer een voorwerp b.v. op het horizontale oppervlak van een tafel moet blijven, dan heeft het nog 2 vrijheidsgraden van translatie. De vrijheid om in verticale richting te bewegen is weggenomen. Het uitschakelen van die vrijheidsgraad vraagt een kracht vanwege de tafel op het voorwerp. Men noemt dit een **verbindingskracht**. Meestal worden deze verbindingskrachten ook gezien als **reacties** die optreden omdat sommige actiekrachten het voorwerp willen laten bewegen in de richting van de verboden vrijheidsgraad (in dit geval is die actiekracht het gewicht). Rotaties kunnen belet worden door een moment.

Opdat men geen overbodige onbekenden zou invoeren is het belangrijk dat men goed weet welke verbindings- of reactiekrachten er horen bij elk type verbinding.



Figuur 3.3: voorbeeld van vrije contacten

- **vrij contact** : een punt van het voorwerp wordt verplicht langs een vlak of lijn of in een gleuf te bewegen. De beweging loodrecht op dat vlak of lijn of gleuf is verboden. De verbindingskracht zal loodrecht op dat vlak of lijn of gleuf staan. De richting is dus bekend, alleen de grootte niet. Dit vormt dus 1 onbekende. (Voor de mof: zie verder bij inklemming)

Wanneer een voorwerp op een vlak rust maar er eraf kan genomen worden, dan zal voor evenwicht nog nodig zijn dat de verbindingskracht naar het voorwerp wijst, d.i. een druk is tegen het voorwerp (en het voorwerp drukt dan ook tegen het vlak). Voor een pin in een gleuf zal men normaal onderstellen dat maar één van beide kanten van de gleuf in contact is met de pin en dat dus maar één van beide kanten een druk uitoefent op de pin.

Ook de roloplegging, zoals gebruikelijk in steunpunten van bruggen, is een vorm van vrij contact.

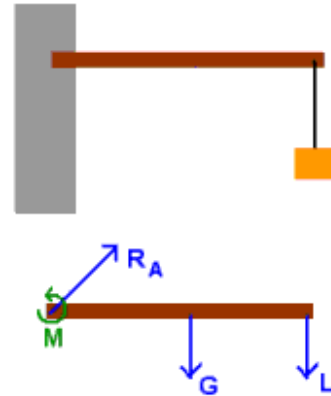
#### - Scharnier

Men moet hier zien wat er door de constructie van het scharnier belet en wat toegelaten wordt. Een klassieke scharnier, zoals bij een deur b.v., laat de rotatie toe rond de as van de scharnieren maar belet elke translatie.

- Voor een driedimensioneel probleem zal men 3 verbindingskrachten moeten invoeren en in principe ook 2 momenten. Wanneer een voorwerp met meerdere scharnieren bevestigd is, dan kan men onderstellen dat die momenten geleverd worden door de verbindingskrachten die op een zekere afstand van elkaar aangrijpen. Bij een bolscharnier is er natuurlijk alleen een reactiekracht met 3 componenten, omdat een rotatie in elke richting mogelijk blijft.
- Voor een tweedimensioneel probleem zal men alleen een verbindingskracht met 2 componenten moeten invoeren, zoals in het voorbeeld hierboven (fig.3.1). Dit levert dus 2 onbekenden voor de vergelijkingen.

#### - Inklemming

Een inklemming belet een translatie en rotatie van het verbindingspunt. Een inklemming onderstelt een zeker contactoppervlak met de omgeving, waardoor de krachten over een zekere afstand ingrijpen en zo een moment kunnen uitoefenen. Voor de eenvoud van de zaak wordt een inklemming meestal als een verbinding in één punt beschouwd en worden de momenten afzonderlijk ingevoerd. In drie dimensies zal men dus een reactiekracht en een moment met telkens 3 componenten moeten invoeren. In twee dimensies wordt dit een reactiekracht met 2 componenten en 1 moment. Die momentvector staat loodrecht op het vlak van de tekening en is dus moeilijk weer te geven. Het wordt daarom meestal aangeduid door een gekromde pijl, die een rotatie suggereert in de richting waarin het moment een rotatie zou verwekken. Hierbij speelt hier de regel van de rechtse schroef. Als het pijltje een rotatie in wijzerzin voorstelt, dan is de momentvector van de toeschouwer weg gericht en omgekeerd.



Figuur 3.4: Inklemming

Een staaf die door een **mof** glijdt is een combinatie van een vrij contact met anderzijds het element van contact over een zeker oppervlak zoals bij de inklemming. Er zal dus een reactiekracht loodrecht op de mof en een moment moeten ingevoerd worden.

#### - Touw

Een touw kan alleen trekken in de richting van het touw (met uitzondering van sommige fakirstouwen). Men moet dus één onbekende kracht in de richting van het touw invoeren.

### 3.3.1 Ideale staaf

Wanneer men een staaf heeft die in **slechts 2 punten** verbonden is met een voorwerp en waarvan het **eigen gewicht verwaarloosbaar** is t.o.v. de krachten die optreden in die verbindingen, dan kan

men door toepassen van de evenwichtsvergelijkingen gemakkelijk aantonen dat de verbindingskrachten in die contactpunten even groot maar tegengesteld moeten zijn (uit de eis  $\sum = 0$ ) en dat ze in elkaars verlengde moeten liggen (om te voldoen aan  $\sum$  der momenten  $= 0$ ). Ze schijnen als het ware een actie-reactiekoppel te vormen. Men zal normaal geen vergelijkingen opschrijven voor zo'n staaf, maar de kracht in die staaf berekenen uit het evenwicht van de voorwerpen waarmee ze in contact is. Bemerkt echter wel dat het moet gaan om puntvormige contacten, d.i. vrij contact of scharnier, met de andere voorwerpen, niet om een inklemming. Voorbeelden van ideale staven vindt men in de voorbeelden van verschillende systemen hieronder.

### 3.3.2 Strikte evenwichtsvoorwaarden

Soms worden door de verbindingskrachten niet alle vrijheidsgraden uitgeschakeld. Denk b.v. aan een deur die open staat. De scharnieren houden de deur op haar plaats maar beletten geen rotatie rond de as van de scharnieren. Opdat de deur onbeweeglijk zou blijven moet de som van de momenten van de uitwendige krachten t.o.v. die as 0 zijn. In de vergelijking die dat uitdrukt zullen geen verbindingskrachten voorkomen maar alleen actieve krachten. Dit soort vergelijkingen, waarin **alleen eisen gesteld worden aan de actieve krachten**, noemt men ook wel de **strikte of eigenlijke evenwichtsvoorwaarden**.

## 3.4 Isostatisch, hyperstatisch en hypostatisch systeem

Als het aantal onbekenden (= componenten van onbekende verbindingskrachten of momenten) dat optreedt in een probleem precies overeenkomt met het aantal vergelijkingen dat men kan opschrijven, dan heeft men een **goed bepaald of isostatisch systeem**. Deze benaming gaat echter uit van een wiskundige kijk op de zaak en betekent niet dat het evenwicht van het systeem dan echt mogelijk is. Het kan nl. nog zo zijn dat de beschikbare verbindingskrachten op de verkeerde plaatsen aangrijpen of in de verkeerde richting werken. Zie voorbeeld 1 in fig. 3.5.

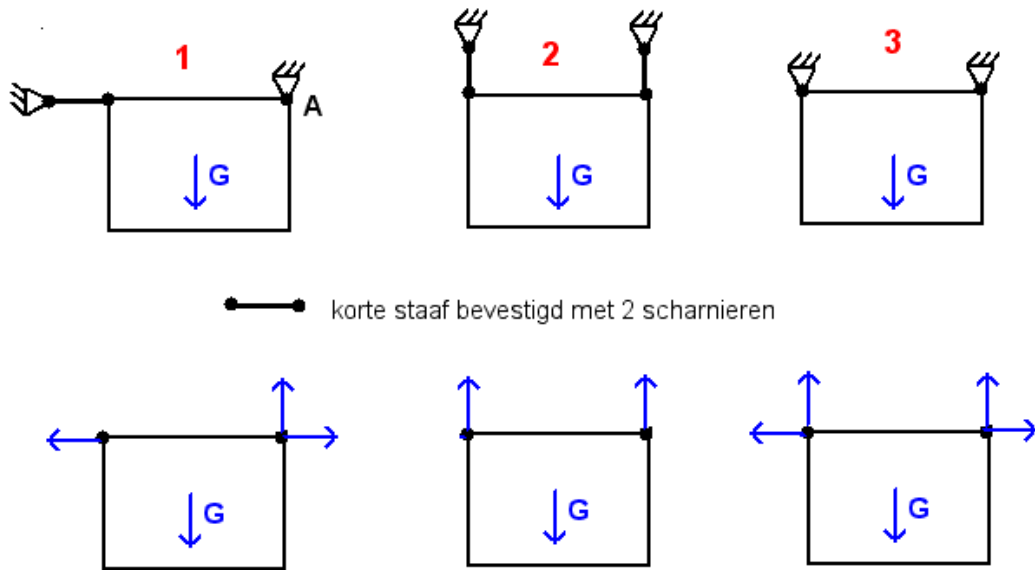
Wanneer een systeem minder onbekenden heeft dan vergelijkingen dan is het een **onmogelijk of hypostatisch systeem**. In de praktijk zijn vele van die systemen perfect in evenwicht, nl. voorwerpen die alleen onder invloed zijn van het gewicht en die door verticale reacties in evenwicht gehouden worden (voorbeeld 2 van 3.5). Zolang er geen zijdelingse krachten op die voorwerpen werken is er ook geen zijdelingse reactie nodig. De projectie van alle krachten op een horizontale bevat gewoon niets en is dus een schijnbaar overbodige vergelijking.

Wanneer er meer onbekenden zijn dan vergelijkingen dan heeft men een **onbepaald of hyperstatisch systeem**. In feite is elke tafel of elke stoel met vier poten zo'n hyperstatisch systeem. Alleen een driepikkel is een isostatisch systeem. Men kan in zo'n geval, met de basisvergelijkingen van de statica, niet correct uitreken hoe de nodige reactiekracht zich zal verdelen over de aanwezige verbindingen. Er zit een onbepaaldheid in de verdeling van de krachten over de verbindingen. Men kan dikwijls een beroep doen op de elasticiteit van de contactpunten of van het systeem zelf om toch tot een verdeling van de krachten te komen. De elasticiteit van de ophanging van een auto zorgt er b.v. voor dat elke wiel in contact blijft met der grond, zelfs als er één wiel op de stoep staat en de drie andere op de rijweg. Als een tafel op een beetje losse grond staat, dan zal de ene poot wat dieper in de grond zakken dan de andere tot er evenwicht is. Een balk op drie steunpunten die niet perfect collineair zijn zal zich zo vervormen dat de balk toch op de drie steunpunten steunt (voor zover het hoogteverschil niet te groot is).

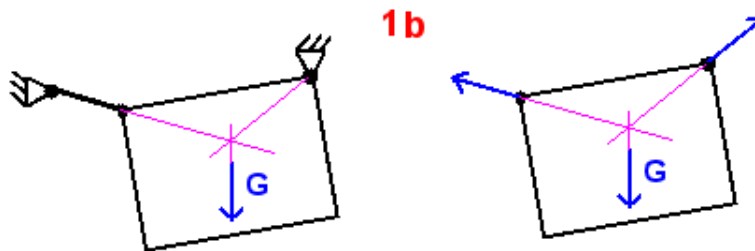
### 3.4.1 Voorbeelden

Figuur 3.5 geeft een reeks mogelijke situaties. Voorbeeld 1: in theorie isostatisch, maar toch onmogelijk evenwicht. Als men het moment berekent t.o.v. het punt A, dan blijken alle verbindingskrachten door dit punt te gaan en dus geen moment te hebben t.o.v. dit punt. Het gewicht heeft echter wel een moment. Er is dus niet voldaan aan de momentenvergelijking en het voorwerp zal beginnen draaien rond A. Zodra de staafverbinding schuin ligt is er wel evenwicht mogelijk. Dan kunnen immers alle krachten door 1 punt gaan (voorbeeld 1b). Bemerkt dat voor de schuine stand er een langere staaf nodig is dan voor de horizontale stand van de staaf.





Figuur 3.5: Voorbeelden



Figuur 3.6: Isostatisch systeem

Voorbeeld 2: een onmogelijk systeem want slechts 2 reactiekrachten, in feite perfect in evenwicht. Als er geen horizontale actiekracht is, is er ook geen horizontale reactie nodig.

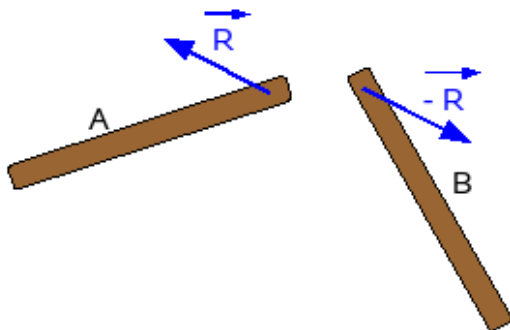
Voorbeeld 3: een hyperstatisch systeem. In elke scharnier moeten 2 onbekende reacties ingevoerd worden. De projectie op een horizontale zegt dat er twee gelijke maar tegengestelde horizontale krachten moeten zijn in de bevestigingspunten, maar zegt niets over de grootte ervan. Als de afstand tussen de bevestigingspunten perfect overeenkomt met de afstand tussen de gaten in de plaat dan zijn die krachten  $= 0$ . Als dat niet het geval is, dan introduceert men een spanning of druk in de plaat. De grootte hiervan heeft niets te maken met de formules van de statica.

### 3.5 Evenwicht van samengestelde voorwerpen

Samengestelde voorwerpen bestaan in drie categorieën:

- De samenstellende delen zijn onvervormbaar en ook het geheel is onvervormbaar.
- De samenstellende delen zijn onvervormbaar maar het geheel is vervormbaar.
- Continu vervormbare systemen zoals kettingen en kabels of een doorbuigende balk..

Het basisprincipe is dat voor evenwicht van het geheel **elk onderdeel afzonderlijk in evenwicht moet zijn**. Men moet dus de evenwichtsvoorwaarden, zoals die hoger gezien werden voor een onvervormbaar voorwerp, op elk van de onderdelen toepassen. Daarvoor zal men het voorwerp uit elkaar moeten halen, zodat duidelijk is over welk onderdeel men spreekt en wat de interacties zijn tussen die onderdelen.

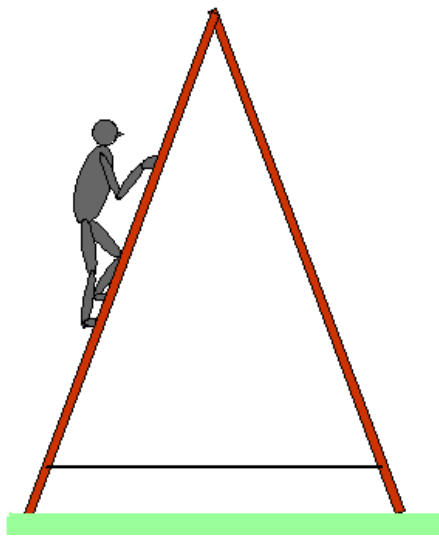


Figuur 3.7: Actie en reactie in een scharnier

Belangrijk is dat men bij het aanduiden van de krachten tussen de onderdelen erop let dat **de actie-reactiewet gerespecteerd wordt**. Als balk A een kracht uitoefent op balk B, dan zal balk B een gelijke maar tegengesteld gerichte kracht uitoefenen op balk A. Eén van die krachten zal men een minteken meegeven, de andere zou in theorie een plusteken moeten krijgen maar dat wordt normaal niet geschreven. Op die manier worden er dus geen 2 onbekende krachten ingevoerd, maar slechts één. Ook voor de projecties geldt dat elke projectie eenmaal als positief en eenmaal als negatief zal moeten voorkomen in de vergelijkingen. Als men de som maakt over het geheel, dan moeten de inwendige krachten immers tegen elkaar wegvallen.

Bemerkt dat in de vectoriële notatie het plus- of minteken geen enkele aanduiding geeft over de richting van de betrokken vector. Het minteken zegt alleen dat er nog een even grote maar tegengestelde kracht voorkomt in het systeem.

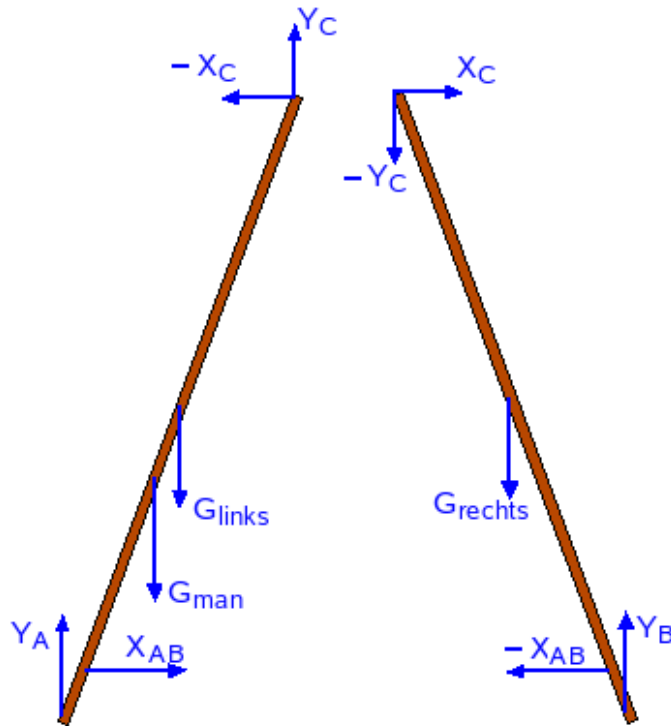
### 3.5.1 Samengesteld systeem, geheel onvervormbaar



Figuur 3.8: Man op ladder

Als voorbeeld wordt een trapladder beschouwd (zie figuur). Als er tussen de onderste treden een staaf bevestigd is, dan is het geheel onvervormbaar. Deze ladder zou men ook op glad ijs kunnen plaatsen zonder risico dat men tegen het ijs slaat. Bij het uit elkaar halen werd voor de belasting door de man beroep gedaan op de stelling dat men een kracht mag verschuiven over zijn dragen om zo tot een equivalente beschrijving te komen (zie het hoofdstuk over "gelijkwaardige vectorsystemen" 2.1). Op die manier kunnen we het gewicht van de man laten aangrijpen op de ladder op een afstand  $d$  van de grond.

Er worden geen vergelijkingen opgeschreven voor de ideale staaf tussen de treden (figuur 3.9). Men weet immers vooraf waartoe die zouden leiden (zie hierboven 3.3.1). Er worden tegengestelde krachten opgeschreven werkend op de linker- en rechterhelft van de ladder. In feite zijn die tegengestelde krachten het resultaat van driemaal even groot en tegengesteld:



Figuur 3.9: Man op ladder: onderdelen

- tussen linkerhelft van de ladder en de staaf op basis van de actie-reactiewet;
- tussen beide uiteinden van de staaf op basis van wat hierboven gezegd werd over krachten op een ideale staaf;
- tussen ideale staaf en rechterhelft van de ladder opnieuw volgens de actie-reactiewet.

Voor elke onderdeel moeten de evenwichtsvergelijkingen opgeschreven worden. Voor dit tweedimensioneel voorbeeld met 2 onderdelen levert dit  $2 \times 3$  vergelijkingen = 6 vergelijkingen. Wanneer het systeem op zijn geheel onvervormbaar is, dan kan men ook op het geheel de evenwichtsvoorwaarden toepassen. Als krachten heeft men dan alleen de gewichten en de 2 verticale reacties in de steunpunten onderaan de ladder (zolang de ladder op een horizontaal vlak staat, anders moet er een zijdelingse reactie bijkomen in minstens één van de steunpunten). Als men het stelsel van vergelijkingen met de hand moet oplossen, dan biedt dit evenwicht van het geheel een mogelijkheid om het stelsel op te splitsen in een reeks kleinere stelsels, die met de hand veel gemakkelijker op te lossen zijn dan het grote stelsel. Hier zou men twee stelsel van drie vergelijkingen bekomen. De vergelijkingen voor het evenwicht van het geheel vormen een stelsel afhankelijke vergelijkingen. Ze kunnen rechtstreeks opgeschreven worden of gevonden worden door de de projecties volgens elke as lid aan lid op te tellen. Na het invullen van de gevonden oplossingen in het grote stelsel heeft men dan een stelsel met drie onafhankelijke vergelijkingen minder. Hier kan men uit het evenwicht van het geheel de reactiekrachten in de steunpunten met de grond berekenen. Er blijven dan nog 3 onbekenden,  $X_{AB}$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ , waarvoor nog juist 3 vergelijkingen nodig zijn. De vergelijkingen voor één der delen kunnen hiervoor dienen.

### 3.5.1.1 De vergelijkingen

Zij  $l$  de lengte van elk deel van de ladder,  $d_{st}$  de lengte van de grond tot het aangrijpingspunt van de staaf en  $d_m$  de lengte van de grond tot het aangrijpingspunt van het gewicht van de man, beide langs de ladder gemeten. Men onderstelt dat het zwaartepunt van de ladder op halve hoogte ligt.

Voor de linkse helft:

- som van de krachten = 0:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -X_C + X_{AB} = 0 \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_C - G_m - G_L = 0\end{aligned}$$

- som van de momenten t.o.v. A = 0 (positief gerekend in tegenwijzerzin):

$$\sum M_i = -X_{AB} \cdot d_{st} \cdot \sin \alpha - G_m \cdot d_m \cdot \cos \alpha - G_L \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha + X_C \cdot l \cdot \sin \alpha + Y_C \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

Dit vorm een stelsel van 3 vergelijkingen in 4 onbekenden. Dus nog niet oplosbaar.

Voor de rechtse helft:

- som van de krachten = 0:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= -X_{AB} + X_C = 0 \\ \sum Y_i &= Y_B - Y_C - G_R = 0\end{aligned}$$

- som van de momenten t.o.v. B = 0 (positief gerekend in tegenwijzerzin):

$$\sum M_i = X_{AB} \cdot d_{st} \cdot \sin \alpha + G_R \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha - X_C \cdot l \cdot \sin \alpha + Y_C \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

Dit vorm ook een stelsel van 3 vergelijkingen in 4 onbekenden, ook niet afzonderlijk oplosbaar.

Alle vergelijkingen samen vormen echter een stelsel van 6 vergelijkingen in 5 onbekenden:  $Y_A$ ,  $X_{AB}$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $Y_B$ . De ontbrekende onbekende is een zijdelingse reactie in één van de steunpunten, die hier niet nodig is.

Omdat het geheel onvervormbaar is, moeten de vergelijkingen voor het geheel afzonderlijk oplosbaar zijn:

- som van de krachten = 0:

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0 : \text{dit is een lege vergelijking.} \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_B - G_m - G_L - G_R = 0\end{aligned}$$

- som van de momenten t.o.v. A = 0 (positief gerekend in tegenwijzerzin):

$$\sum M_i = -G_m \cdot d_m \cdot \cos \alpha - G_L \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha - G_R \cdot (3l/2) \cdot \cos \alpha + Y_B \cdot 2l \cdot \cos \alpha = 0$$

Dit vorm een stelsel van 2 vergelijkingen in 2 onbekenden:  $Y_A$  en  $Y_B$ . Deze laatste kan ogenblikkelijk uit de momentenvergelijking gehaald worden als:

$$Y_B = \frac{2 \cdot G_m \cdot d_m + G_L \cdot l + G_R \cdot 3l}{4l}$$

Men kan de vergelijkingen voor het linkse en rechtse deel ook lid aan lid optellen om het evenwicht van het geheel te bekomen. Voor de momentenvergelijking is er echter een probleem omdat de momenten t.o.v. verschillende punten opgeschreven werden. Als men de momentenvergelijking voor het rechtse deel ook opschrijft t.o.v. A dan krijgt men:

$$\sum M_i = X_{AB} \cdot d_{st} \cdot \sin \alpha - G_R \cdot (3l/2) \cdot \cos \alpha - X_C \cdot l \cdot \sin \alpha - Y_C \cdot l \cdot \cos \alpha + Y_B \cdot 2l \cdot \cos \alpha = 0$$

Als men dit optelt bij de momentenvergelijking voor het linkse deel krijgt men ook de vorige momentenvergelijking.

### Numeriek voorbeeld

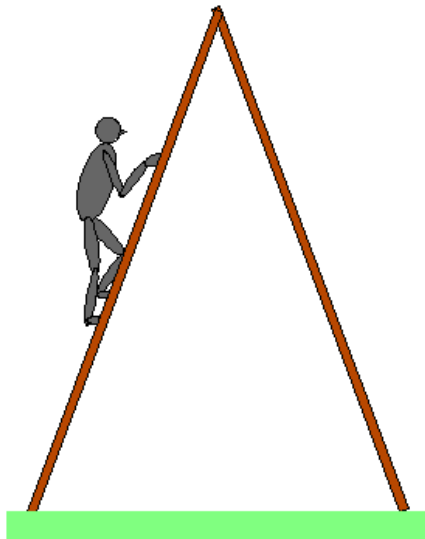
Als men volgende waarden als gegeven invult:

$$\begin{aligned}G_{\text{man}} &= 800 \text{ N} \\ G_L = G_R &= 100 \text{ N} \\ d_{\text{st}} &= 0,3 \text{ m} \\ d_{\text{man}} &= 1 \text{ m} \\ l &= 2,5 \text{ m} \\ \text{afstand tussen A en B} &= 2 \text{ m}\end{aligned}$$

dan krijgt men volgende numerieke oplossingen, in volgorde van de berekening:

$$\begin{aligned}\text{de hoek van de ladder met de horizontale:} & 66^\circ 25' \\ Y_B &= 260 \text{ N} \\ Y_A &= 740 \text{ N} \\ Y_C &= 160 \text{ N} \\ X_C = X_{AB} &= 104,15 \text{ N}\end{aligned}$$

### 3.5.2 Samengesteld systeem, geheel vervormbaar



Figuur 3.10: Man op ladder - 2

Neemt men bij vorig voorbeeld de staaf tussen de treden weg, dan bekomt men een systeem dat op zijn geheel vervormbaar is. Er zijn nu in de steunpunten zijdelingse reacties nodig om te beletten dat die zouden wegschuiven. Het grote verschil is nu dat men bij het toepassen van de evenwichtsvoorwaarden voor het geheel, niet meer een stelsel heeft dat op zichzelf oplosbaar is. In dit geval zit men met 3 vergelijkingen in 4 onbekenden:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_B$  en  $Y_B$  (zie figuur 3.11). In vele gevallen kan men echter toch nog de momentenvergelijking voor het geheel opschrijven als een vergelijking in één onbekende, die ogenblikkelijk op te lossen is en zo een vertrekpunt kan vormen voor het handmatig oplossen van het stelsel. In dit geval kan men b.v. de momentenvergelijking voor het geheel opschrijven t.o.v. het punt A of B. Dat zal een vergelijking leveren waarin resp. alleen  $Y_B$  of alleen  $Y_A$  voorkomt als onbekende. Als men zo b.v.  $Y_B$  bepaald heeft, dan vormen de vergelijkingen voor het rechtse deel een stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden dat op zich op te lossen is. Dan heeft men uiteindelijk nog 2 vergelijkingen nodig van het linkse deel om  $X_A$  en  $Y_A$  te bepalen. Als men alles in de computer kan steken, dan is dit geval niet moeilijker dan het vorige.

#### 3.5.2.1 De vergelijkingen

Zij l opnieuw de lengte van elk deel van de ladder,  $d_m$  de lengte van de grond tot het aangrijpingspunt van het gewicht van de man langs de ladder gemeten. Men onderstelt dat het zwaartepunt van de ladder op halve hoogte ligt.

Voor de linkse helft:

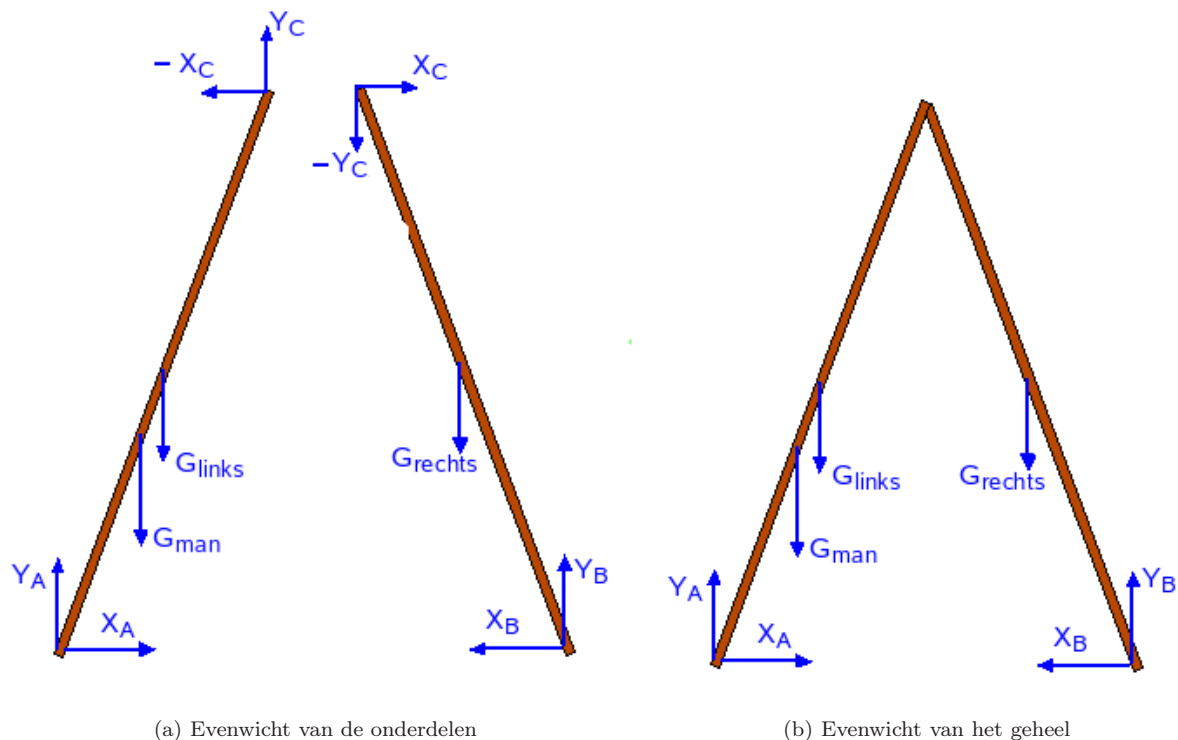
- som van de krachten = 0:
 
$$\sum X_i = X_A - X_C = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_C - G_m - G_L = 0$$
- som van de momenten t.o.v. A = 0 (positief gerekend in tegenwijzerzin):
 
$$\sum M_i = -G_m \cdot d_m \cdot \cos \alpha - G_L \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha + X_C \cdot l \cdot \sin \alpha + Y_C \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

Voor de rechtse helft:

- som van de krachten = 0:
 
$$\sum X_i = -X_B + X_C = 0$$

$$\sum Y_i = Y_B - Y_C - G_R = 0$$



Figuur 3.11: Man op ladder - 2

- som van de momenten t.o.v. B = 0 (positief gerekend in tegenwijzerzin):  

$$\sum M_i = G_R \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha - X_C \cdot l \cdot \sin \alpha + Y_C \cdot l \cdot \cos \alpha = 0$$

Dit vormt een stelsel van 6 vergelijkingen in 6 onbekenden:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $X_C$ ,  $Y_C$ ,  $X_B$ ,  $Y_B$ .

De momentenvergelijking t.o.v. A voor het geheel:

$$\sum M_i = -G_m \cdot d_m \cdot \cos \alpha - G_L \cdot (l/2) \cdot \cos \alpha - G_R \cdot (3l/2) \cdot \cos \alpha + Y_B \cdot 2l \cdot \cos \alpha = 0$$

Deze vergelijking is dezelfde als in het vorige geval daar  $X_A$  en  $X_B$  geen moment hebben t.o.v. A. Ze bevat slechts 1 onbekende, nl.  $Y_B$ , en deze kan dus onmiddellijk uitgerekend worden. De oplossing invoeren in de vergelijkingen voor het rechtse deel leidt tot een stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden dat afzonderlijk oplosbaar is. Daarna moeten nog 2 vergelijkingen van het linkse deel gebruikt worden voor de reacties in A. Men vindt dezelfde oplossingen voor de Y-componenten. Voor de X-componenten vindt men nu  $X_A = X_B = X_C = 91,66$  N, iets minder dus dan de kracht in de staaf omdat de afstand tussen deze componenten groter is.

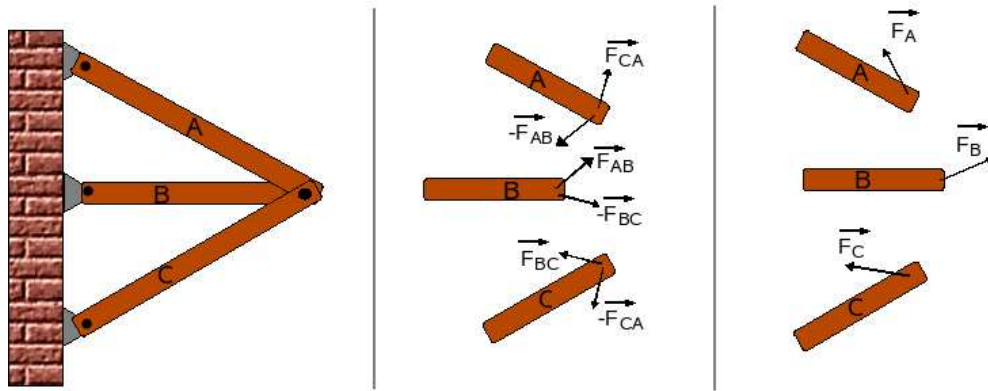
### 3.5.3 Meervoudige contacten

In de top van de ladder komen 2 delen samen. Bij het opsplitsen krijgt men actie en reactie tussen deze beide delen. Maar hoe moet men het geval behandelen van 3 of meer voorwerpen die in één punt met elkaar contact hebben? Die situatie noemt men een **meervoudig contact**.

In eerste instantie kan men telkens krachten tussen 2 voorwerpen tekenen. Dan kan men de actie-reactiewet toepassen. Vanuit A werkt op B de kracht  $F_{AB}$ . Op A heeft men dan de reactie  $F_{BA}$ . Om het aantal onbekenden niet nodeloos op te drijven, geeft men aan een reactiekracht normaal dezelfde naam als aan de actiekracht maar met een minteken:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Voor drie voorwerpen is dat nog juist overzichtelijk, voor meer wordt het moeilijk. Men wil liever één kracht op elk voorwerp veroorzaakt door alle andere voorwerpen, zoals in de derde schets. Die kracht



Figuur 3.12: Meervoudig contact

wordt dan natuurlijk de som van de krachten uit de vorige beschrijving. Waar een kracht vervangen werd door min zijn tegengestelde werd deze tussen haakjes geplaatst. Men krijgt dan, :

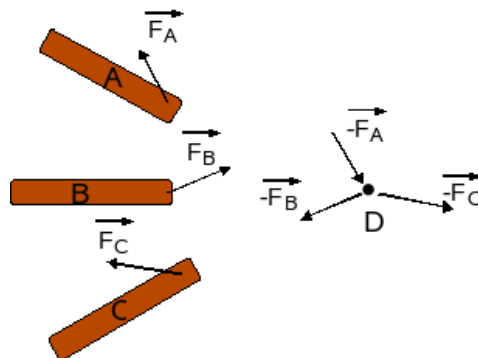
$$\vec{F}_A = \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = (-\vec{F}_{AB}) + \vec{F}_{CA}$$

$$\vec{F}_B = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{CB} = \vec{F}_{AB} + (-\vec{F}_{BC})$$

$$\vec{F}_C = \vec{F}_{AC} + \vec{F}_{BC} = (-\vec{F}_{CA}) + \vec{F}_{BC}$$

Als men beide leden lid aan lid optelt, vindt men:

$$\sum \vec{F}_i = 0$$



Figuur 3.13: Meervoudig contact met fictief knooppunt

In plaats van de actie-reactiewet komt nu de eis dat de som van als deze krachten nul is. Aan deze eis kan op een eenvoudige en veilige manier voldaan worden door het invoeren van een **fictief knooppunt**. In plaats van de voorwerpen met elkaar te laten interageren, laat men ze interageren met een zelf gecreëerd knooppunt, in dit geval het punt D. Tussen dit knooppunt en elk van de voorwerpen kan nu wel de actie-reactiewet toegepast worden. En voor een massaloos punt geldt in elk geval, versnelling of rust, dat de som van de krachten die erop werken moet nul zijn. Dit leidt op zeer eenvoudige manier tot de bijkomende vergelijking dat de som van alle krachten op D nul moet zijn. In die vergelijking komen dan in eerste instantie de tegengestelde krachten van de bovenstaande vergelijking, maar als men beide leden met -1 zou vermenigvuldigen komt men op dezelfde vergelijking.

Bemerk dat het getekende systeem feitelijk hyperstatisch is. Er zijn 3 vlakke onderdelen, wat  $3 \times 3$  vergelijkingen oplevert. Dan zijn er nog de 2 vergelijkingen voor het fictief knooppunt. Dat levert in het totaal 11 vergelijkingen. Er zijn echter 6 vectoriële onbekenden, dus 12 scalaire onbekenden in het totaal. Men zou één uiteinde niet via een scharnier maar via een gleuf moeten bevestigen. Dan zou er voor die verbinding maar één onbekende zijn (de kracht loodrecht op de gleuf) i.p.v. twee zoals bij een scharnier en zou men 11 onbekenden hebben voor 11 vergelijkingen.

### 3.6 Vakwerken

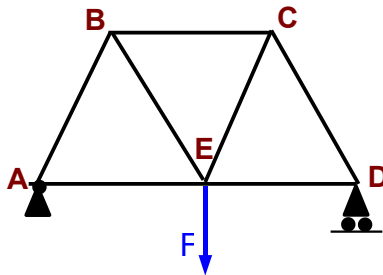


Figure 3.14: Voorbeeld van vakwerk

Bij het bouwen van bruggen, bij het ontwerpen van een dak boven een fabriekshal of spoorwegstation wenst men een zo groot mogelijke stijfheid en draagkracht te bekomen met een minimum aan materiaal. Hiervoor wordt dan dikwijls beroep gedaan op vakwerken, constructies die bestaan uit relatief lichte staven of balken, soms aangevuld met kabels. Een torenkraan is ook een mooi voorbeeld van een constructie waarbij maximale stijfheid bereikt wordt met een minimum aan materiaal, zowel voor het verticale deel, de toren, als voor de arm. Bij deze (inleidende) bespreking zullen echter alleen vlakke vakwerken besproken worden. In het Engels spreekt men van “trusses”, in het Frans van “une ferme”, maar dat woord heeft natuurlijk ook een veel beter bekende betekenis.

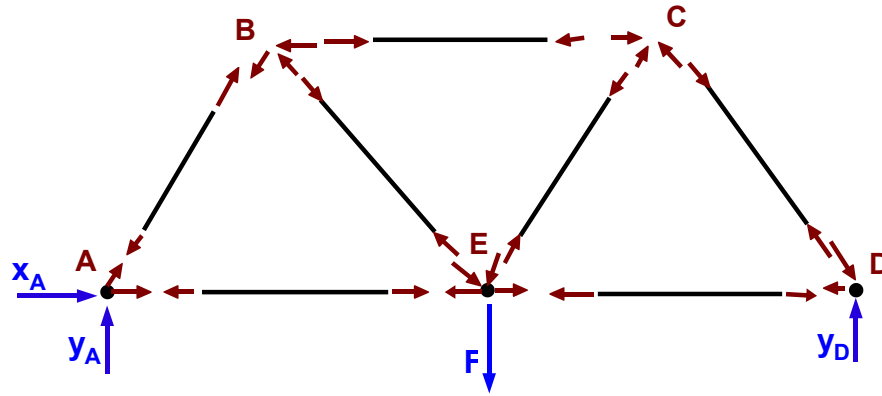
Bij het ontwerp van een vakwerk gaat men ervan uit dat

- het eigen gewicht van de staven verwaarloosbaar is in vergelijking met de krachten die erin optreden;
- de verbindingen in eerste instantie als scharnierend beschouwd worden. Dit betekent dat de stevigheid moet komen van de juiste plaatsing van de staven, niet van de stijfheid in de verbindingen;
- dat de belasting(en) aangrijpen in de knooppunten (en dus niet ergens op de staven).

Onder deze onderstellingen moeten de krachten in de staven volgens de staven liggen, zoals hoger vermeld onder ideale staaf (3.3.1). Men zal dus geen vergelijkingen opschrijven voor de staven, maar alleen voor de knooppunten. Op beide einden van elke staaf werken gelijke maar tegengestelde krachten werken. Deze krachten kunnen de staaf samendrukken of uitrekken. In het eerste geval zegt men dat de staaf onder druk staat, in het tweede dat ze onder trek staat. Daar het woord “spanning” verwijst naar trek, wordt conventioneel een trekkracht in een staaf aangeduid met een plusteken en druk met een minteken. Deze aanduidingen van het resultaat van de berekeningen heeft echter niets te maken met de tekens die in de vergelijkingen kunnen voorkomen. Soms werden de stukken die op druk belast worden in hout uitgevoerd, soms werden stukken die op trek belast worden vervangen door kabels. Voor stukken die op druk belast worden moet men opletten voor het “knikken” van het materiaal. Het risico hiervoor is kleiner bij een houten balk van voldoende dikte dan bij metalen profielen. Om een idee te hebben of een staaf op druk of trek belast wordt, kan men zich inbeelden dat men de staaf wegneemt en dan de vraag stellen of de knooppunten waartussen deze staaf bevestigd was, naar elkaar toe zouden komen (druk) of uit elkaar zouden gaan (trek). Het is op die manier vrij duidelijk dat bv. de staaf BC op druk belast is en de staaf AE op trek.

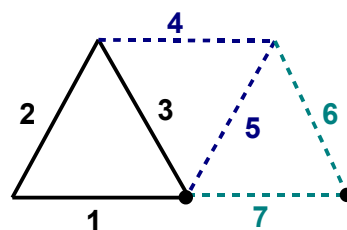
Voor elke knooppunt moet gelden dat de som van de krachten 0 is. De krachten op de knooppunten zijn de reacties van de krachten op de staven. Wanneer een kracht op een staaf drukt, dan zal de reactie ook op het knooppunt drukken. Trek of druk op de staaf blijven dus ook trek of druk op het knooppunt. Een voorbeeld van een volledige opsplitsing van het hoger gegeven vakwerk vindt men in de figuur hiernaast. De zin van de krachten is niet overal correct. Dat zal ook blijken in de berekening hieronder. Bemerkt dat ook de krachten die een staaf op de knooppunten uitoefent, gelijk maar tegengesteld zijn. Omdat het systeem niet hyperstatisch zou zijn, wordt het meestal aan de omgeving bevestigd door een scharnier (hier in A) en een roloplegging (hier in D). Dit levert 2 uitwendige krachtcomponenten in A en één verticale kracht in D.





Figuur 3.15: Vakwerk met alle krachten

Om de krachten in alle staven te vinden, zal men moeten vertrekken van een knooppunt met maar 2 onbekende krachten, aangezien er slechts 2 projecties kunnen opgeschreven worden. Meestal bestaat zulk een knooppunt niet. Daar het vakwerk in zijn geheel echter onvervormbaar is, kan men ook het evenwicht voor het geheel afzonderlijk opschrijven. Dit levert drie vergelijkingen waaruit de drie uitwendige krachten kunnen worden berekend. Eens dat gebeurd heeft men zowel in A als in B een knooppunt met maar 2 onbekenden. Vertrekkend van A kan men bv. de krachten in de staaf AB en AE uitrekenen. Dan blijven er in B ook maar 2 onbekenden meer, waarna er zowel in C als E maar 2 onbekenden overblijven. Er blijven echter maar 3 onbekende staafkrachten meer te berekenen, zodat men van de 4 vergelijkingen en maar 3 zal moeten gebruiken. De vergelijkingen van het knooppunt D blijkt men niet meer nodig te hebben. Dat is niet verwonderlijk. De vergelijkingen van het evenwicht voor het geheel kunnen afgeleid worden uit de vergelijkingen voor de knooppunten. Als  $k$  het aantal knooppunten is, dan blijven er in het stelsel maar  $2k-3$  onafhankelijke vergelijkingen over. Dit levert een eerste manier om het aantal staven in een vakwerk te bepalen. Aangezien er maar  $2k-3$  aantal vergelijkingen overblijven voor het bepalen van de krachten in de staven, mogen er ook maar  $2k-3$  staven in een vakwerk zijn.



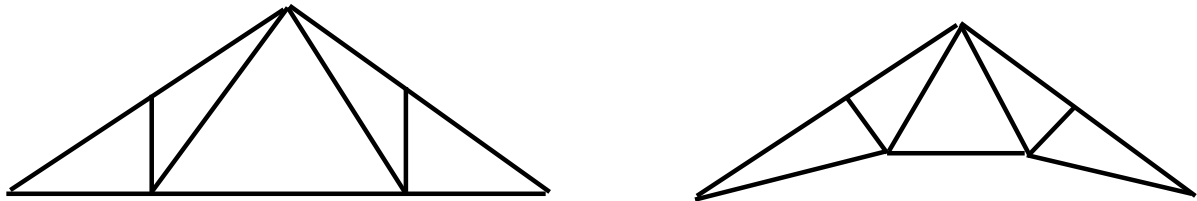
Figuur 3.16: Bepalen van aantal staven

Er is nog een andere manier om aan dat aantal te geraken. Het kleinste vakwerk bestaat natuurlijk uit een driehoek. Dat heeft 3 staven en 3 knooppunten. Als men iets wil toevoegen dan is het minimaal 1 knooppunt en 2 staven. Dan heeft men 4 knooppunten en 5 staven. Elke toevoeging van een knooppunt betekent ook 2 staven meer. De formule wordt dus:

$$\text{aantal staven} = (2 \times \text{aantal knooppunten}) - 3$$

Bij sommige constructies worden staven gebruikt waarin geen kracht schijnt op te treden. Dit is bv. het geval in knooppunten waar 3 staven samenkomen, waar geen uitwendige belasting is en waar 2 van de 3 staven perfect in elkaars verlengde liggen. Men moet er echter rekening mee houden dat er altijd een lichte vervorming optreedt onder belasting. Die schijnbaar overbodige verbindingen kunnen dan wel een rol gaan spelen. Ook kunnen ze een rol spelen als er wel een belasting komt op het knooppunt. Een belangrijke ontwikkelaar van vakwerken voor daken van fabriekshallen en stations was de Fransman [Camille Polonceau](#). Eén van zijn eerste vakwerken was een overspanning voor het dak van een station

in Parijs in 1837 (zie links in figuur hieronder)<sup>1</sup>. Zijn naam staat ook vermeld op de Eiffeltoren<sup>2</sup>. Zijn naam is ook verbonden aan het rechtse vakwerk in de figuur hieronder.



Figuur 3.17: Ontwerpen van Polonceau

Er is een grote verscheidenheid aan vakwerken mogelijk. Men kan op internet een gratis Nederlands programma vinden om vakwerken te tekenen en te berekenen. (onder Windows) op <http://home.wanadoo.nl/gerardvansanten/>. De driedimensionele vakwerken, zoals bij een torenkraan, kwamen pas na de 2de wereldoorlog volop in gebruik.

### 3.6.1 Berekening

Als voorbeeld wordt de berekening van alle krachten van bovenstaand voorbeeld uitgevoerd. Er wordt ondersteld dat alle driehoeken gelijkzijdig zijn (dan zijn alle hoeken  $60^\circ$ ) met een zijde van 2 m en dat de kracht  $F = 500$  kg. De projecties van de krachten krijgen een teken volgens de zin die in de figuur hierboven gegeven is. De resultaten moeten dan positieve getallen zijn. Een negatieve uitkomst duidt op een verkeerd ingeschatte zin van de kracht.

Evenwicht van het geheel:

$$\sum X_i = X_A = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + Y_D - 500 = 0$$

Moment t.o.v. A:

$$-2 * 500 + 4 * Y_D = 0$$

Hieruit volgt:  $Y_D = 250$  kg

Uit vorige vergelijking volgt dan:  $Y_A = 250$  kg

Voor knooppunt A:

$$\sum X_i = S_{AE} + S_{AB} \cos 60 + X_A = 0$$

$$\sum Y_i = S_{AB} \sin 60 + Y_A = 0$$

Hieruit volgt  $S_{AB} = -Y_A / \sin 60^\circ = -288,7$  kg. Het minteken van het resultaat betekent dat de zin van de kracht in de staaf AB verkeerd ingeschat werd. Het moet druk zijn i.p.v. trek.

$$S_{AE} = -S_{AB} \cos 60^\circ = -(-288,7) * 0,5 = 144,3 \text{ kg (trek)}$$

Knoppunt B, met  $S_{AB}$  als druk:

$$\sum X_i = -S_{BC} + S_{AB} \cos 60 - S_{BE} \cos 60 = 0$$

$$\sum Y_i = S_{AB} \sin 60 + S_{BE} \sin 60 = 0$$

Bij de laatste vergelijking is duidelijk iets fout: de som van 2 positieve getallen kan nooit 0 worden. De zin van een kracht is dus verkeerd.  $S_{BE}$  moet een trek zijn. Men krijgt dan als vergelijkingen:

$$\sum X_i = -S_{BC} + S_{AB} \cos 60 + S_{BE} \cos 60 = 0$$

$$\sum Y_i = S_{AB} \sin 60 - S_{BE} \sin 60 = 0$$

Uit de laatste vergelijking volgt dadelijk:  $S_{BE} = S_{AB} = 288,7$  kg (trek)

Uit de vorige vergelijking volgt dan:  $S_{BC} = 2 * S_{AB} \cos 60^\circ = 288,7$  kg (druk)

Knooppunt C:

$$\sum X_i = S_{BC} + S_{CE} \cos 60 - S_{CD} \cos 60 = 0$$

$$\sum Y_i = S_{CE} \sin 60 + S_{CD} \sin 60 = 0$$

<sup>1</sup>[http://www.corusconstruction.com/en/reference/teaching\\_resources/architectural\\_studio\\_reference/history/development\\_of\\_the\\_clear\\_span\\_building/naval\\_dock\\_buildings,\\_market\\_halls\\_and\\_factories/](http://www.corusconstruction.com/en/reference/teaching_resources/architectural_studio_reference/history/development_of_the_clear_span_building/naval_dock_buildings,_market_halls_and_factories/)

<sup>2</sup>[http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste\\_des\\_soixante-douze\\_noms\\_de\\_savants\\_inscrits\\_sur\\_la\\_tour\\_Eiffel](http://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_des_soixante-douze_noms_de_savants_inscrits_sur_la_tour_Eiffel)

Hier kan weer dezelfde opmerking gemaakt worden. Het is duidelijk dat  $S_{CE}$  op trek belast wordt. Men vindt:

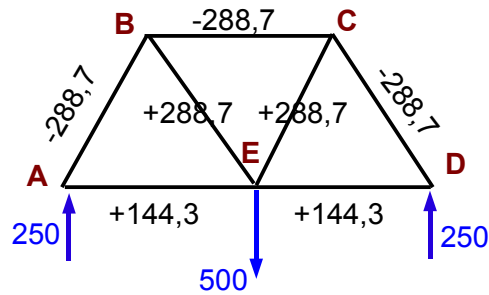
$$S_{CE} = S_{BC} / (2 \cdot \cos 60^\circ) = 288,7 \text{ kg (trek)}$$

$$S_{CD} = S_{CE} = 288,7 \text{ kg (druk)}$$

Om de kracht in staaf DE te bepalen wordt beroep gedaan op knooppunt D:

$$\sum X_i = S_{CD} \cos 60 - S_{DE} = 0$$

Hieruit volgt:  $S_{DE} = 144,3 \text{ kg (trek)}$ .



Figuur 3.18: Vakwerk met resultaat van de berekeningen

## 3.7 Referenties

De meeste werken over mechanica besteden weinig of geen aandacht aan de statica. Wanneer dat wel het geval is, is het meestal in een afzonderlijk volume. In de bibliografie kan men dit zien bij de boeken van [meriam], [beer] en [smith].



## Hoofdstuk 4

# Statica II : De methode van de virtuele arbeid

### Inhoudsopgave

---

<b>4.1 Inleiding</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>4.2 Systeem van één puntmassa</b> . . . . .	<b>53</b>
4.2.1 Voorbeeld 1 . . . . .	54
<b>4.3 Veralgemeende coördinaten en vrijheidsgraden</b> . . . . .	<b>54</b>
<b>4.4 Samengesteld systeem met één vrijheidsgraad</b> . . . . .	<b>55</b>
4.4.1 Voorbeeld 2 . . . . .	55
<b>4.5 Meerdere vrijheidsgraden</b> . . . . .	<b>56</b>
4.5.1 Voorbeeld 3 . . . . .	57
<b>4.6 De klassieke formulering</b> . . . . .	<b>58</b>
<b>4.7 De klassieke uitwerking</b> . . . . .	<b>58</b>
4.7.1 a) Berekening in termen van orthogonale coördinaten . . . . .	58
4.7.2 b) Berekening met de goniometrische vorm . . . . .	59
4.7.3 c) Speciaal geval: potentiaalkrachten . . . . .	59
<b>4.8 Keuze van het assenkruis</b> . . . . .	<b>60</b>
<b>4.9 Enkele toepassingen</b> . . . . .	<b>60</b>
4.9.1 De keukenbalans . . . . .	60
4.9.2 Ruitvormige krik . . . . .	61
4.9.3 Berekenen van verbindingskrachten . . . . .	62
<b>4.10 Slotbemerkingen</b> . . . . .	<b>63</b>
4.10.1 Een beetje geschiedenis . . . . .	63
4.10.2 Een stellingname van de auteur . . . . .	63

---

### 4.1 Inleiding

De methode van de virtuele arbeid is een zeer efficiënte methode voor het berekenen van het evenwicht van samengestelde systemen als men niet geïnteresseerd is in de inwendige krachten. De methode verschilt echter totaal van de klassieke vectoriële methode. De basisideeën zullen eerst uitgelegd worden aan de hand van een systeem met één puntmassa. Dat zal dan uitgebreid worden naar samengestelde systemen en systemen met meerdere vrijheidsgraden.

### 4.2 Systeem van één puntmassa

De methode van de virtuele arbeid vertrekt van de energie-beschouwing van het systeem. In differentiaalvorm wordt dit voor 1 puntmassa:

$$\sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

In het linkerlid staat de differentiaal van de arbeid van de uitwendige krachten. Integreren van deze uitdrukking tussen twee posities geeft de arbeid die nodig is voor deze overgang. Een nulpunt van de integrand is een stationair punt van deze integraal en ook een nulpunt van de versnelling en dus een evenwichtspunt van het systeem. We kunnen deze voorwaarde herschrijven m.b.v. de betrekking  $d\vec{r} = \vec{v} dt$  als

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v} dt = 0$$

Deze differentiaal heeft nog altijd de dimensie van een arbeid. Het nulpunt moet komen van:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v} = 0$$

Deze uitdrukking kan nu nul zijn als er wel een som van krachten is maar deze loodrecht staat op de snelheid. Dit is o.a. het geval bij krachten in sommige ideale verbindingen met de omgeving. Deze krachten wisselen geen arbeid uit met het systeem of omdat hun aangrijpingspunt stilstaat of omdat de verplaatsing steeds loodrecht staat op de kracht. Ze kunnen dus weggelaten worden in bovenstaande som. Meer algemeen: bij de methode van de virtuele arbeid moeten we geen rekening houden met de ideale verbindingen maar alleen met de actieve krachten, d.i. de krachten die energie uitwisselen met het systeem bij een verplaatsing van dit systeem.

De dimensie van bovenstaande formule is echter geen arbeid meer maar vermogen. Men zal dan ook spreken van de methode van de virtuele vermogens (in het Frans: "Le théorème des puissances virtuelles"). Verder wordt teruggekomen op formules waarvan de dimensie wel een arbeid is.

#### 4.2.1 Voorbeeld 1

Dit wordt even uitgewerkt voor een zeer eenvoudig voorbeeld, nl. de mathematische slinger (zie figuur 1). De optredende krachten zijn hier de spanning  $S$  in het touw en het gewicht  $G$ . De spanning  $S$  staat echter altijd loodrecht op  $v$ : het touw is een ideale verbinding. Men moet dus alleen zoeken naar het punt waar  $\vec{G} \cdot \vec{v}$  nul wordt. Voor de slinger is het duidelijk dat  $G$  loodrecht zal staan op  $v$  in de onderste stand. Dit is dus een evenwichtspositie van de slinger.

### 4.3 Veralgemeende coördinaten en vrijheidsgraden

Alhoewel in dit voorbeeld de positie van de puntmassa in een tweedimensioneel systeem m.b.v. twee coördinaten moet gespecificeerd worden, bestaat er een verband tussen beide daar de puntmassa enkel op een cirkelbaan kan bewegen. De positie kan dus, **bij behoud van de bestaande verbindingen**, eenduidig vastgelegd worden met één parameter. Dit kan één van beide coördinaten zijn, maar ook b.v. de hoek van het touw met de verticale. Wanneer zoals hier één parameter voldoende is om de positie van het systeem vast te leggen, spreekt men van een systeem met **één vrijheidsgraad**.

**Het aantal vrijheidsgraden van een systeem is het aantal onafhankelijke parameters dat nodig is om de positie van het systeem eenduidig te bepalen, bij behoud van de bestaande verbindingen.** Deze parameters noemt men de **veralgemeende coördinaten**  $q_i$ .

Onafhankelijk betekent dat het mogelijk is de waarde van één parameter te veranderen zonder dat er iets verandert aan de andere. Bij de methode van de virtuele arbeid zal men niet meer met de cartesische coördinaten werken, maar met deze veralgemeende coördinaten. Dit onderstelt dat er voor elk aangrijpingspunt van een kracht een functie is van de vorm :

$$\vec{r}_i = \vec{f}_i(q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n)$$

Dit noemt men de **transformatievergelijkingen**.

Het grote voordeel van de veralgemeende coördinaten over b.v. de cartesische coördinaten is dat men als veralgemeende coördinaten parameters kan kiezen die zinvol zijn voor het gegeven probleem: een hoek, een afstand, de positie van een bepaald onderdeel. Ook leidt de methode van de virtuele arbeid op een vrij automatische manier tot een stelsel van vergelijkingen.

Voor het voorbeeld van de slinger kan men  $\theta$  als veralgemeende coördinaat gebruiken. Men krijgt dan als transformatievergelijkingen (let op de tekens):

$$\begin{aligned} x &= -l \cdot \sin \theta & y &= -l \cdot \cos \theta \\ v_x &= -l \cdot \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} & v_y &= l \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Hiermede wordt  $\vec{G} \cdot \vec{v}$ :

$$-G \cdot v_y = -G \cdot l \cdot \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} = 0$$

Oplossing is:  $\theta = 0$ , daar  $d\theta/dt$  de hoeksnelheid is waarmee het punt eventueel door de evenwichtsstand zou passeren.

Er kan opgemerkt worden dat voor één voorwerp de methode van de virtuele arbeid zelden korter uitvalt dan de klassieke methode. Voor het geval van de slinger had men de bovenstaande formule kunnen vinden door de som van de krachten loodrecht op het touw te projecteren om de spanning  $S$  eruit te houden.

## 4.4 Samengesteld systeem met één vrijheidsgraad

Er moet nu een dubbele veralgemening gemaakt worden: van een systeem van één puntmassa naar een systeem met meerdere puntmassa's en dan verder naar een systeem met reële voorwerpen. Bij een systeem met meerdere massa's moet elke massa in evenwicht zijn. Hierbij moet men alle krachten die op elke massa werken in rekening brengen. Wanneer men opnieuw naar energiebeschouwingen overgaat, bestaat er bij een systeem met één vrijheidsgraad een verband tussen de verplaatsingen (en de snelheden) van de verschillende puntmassa's. Wanneer men rekening houdt met deze verbanden, valt bij sommeren over alle onderdelen niet alleen de bijdragen van de ideale verbindingen met de omgeving weg, maar ook de bijdrage van de ideale inwendige verbindingskrachten. Deze geven dan immers alleen energie door van het ene onderdeel naar het andere, maar vermeerderen of verminderen de totale som niet.

Bij reële onvervormbare (of starre) voorwerpen vormen de inwendige krachten ook ideale verbindingen. We kunnen dus ook werken met de verplaatsingen (of snelheden) van de aangrijpingspunten van krachten op reële onvervormbare voorwerpen.

Men zou de vorige formule nu moeten schrijven met een dubbele som: over alle krachten op elke puntmassa en over alle puntmassa's. Meestal beperkt men zich tot één som over alle krachten, waarbij sommige verplaatsingen (of snelheden) dezelfde kunnen zijn. Men krijgt nu:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = 0$$

met  $i$  lopend over alle krachten.

In deze vermogensbalans heeft de bijdrage van elke kracht een zekere gewichtsfactor. Dit gewicht bestaat uit twee elementen:

- de **cosinus van de hoek tussen de kracht en de snelheid**. Niet de volledige kracht moet verrekend worden, maar, door het scalair product, alleen **de projectie van de kracht op de raaklijn aan de baan van het aangrijpingspunt**;
- de **verhouding van de snelheden** van de verschillende aangrijpingspunten. In de formule staan de snelheden van de aangrijpingspunten, maar, daar de som nul moet zijn, hebben uiteindelijk alleen de onderlinge verhoudingen van de snelheden belang.

### 4.4.1 Voorbeeld 2

Laat dit even toegepast worden op een systeem met twee actieve krachten en 1 vrijheidsgraad.

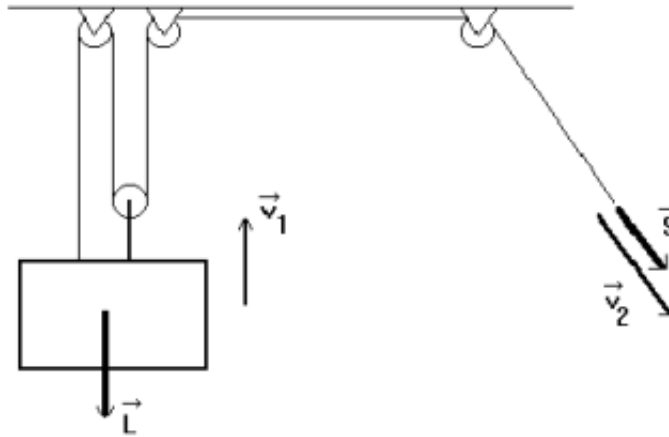
De krachten om de vaste katrollen op hun plaats te houden leveren geen arbeid en worden dus niet in rekening gebracht (ideale verbindingen met de omgeving). De uitdrukking voor het evenwicht wordt dus:

$$\vec{L} \cdot \vec{v}_1 + \vec{S} \cdot \vec{v}_2 = 0$$

De scalaire producten worden uitgewerkt met goniometrische vorm:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \theta \text{ met } \theta \text{ de hoek tussen de vectoren } a \text{ en } b.$$

Verder weet men uit de regel van het aantal touwen dat  $v_2 = 3 \cdot v_1$ . Men krijgt dus:



Figuur 4.1: Systeem met 1 vrijheidsgraad

$$\begin{aligned} L \cdot v_1 \cdot \cos 180^\circ + S \cdot v_2 \cdot \cos 0^\circ &= 0 \\ -L \cdot v_1 + S \cdot 3 \cdot v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Waaruit:  $S = L/3$

## 4.5 Meerdere vrijheidsgraden

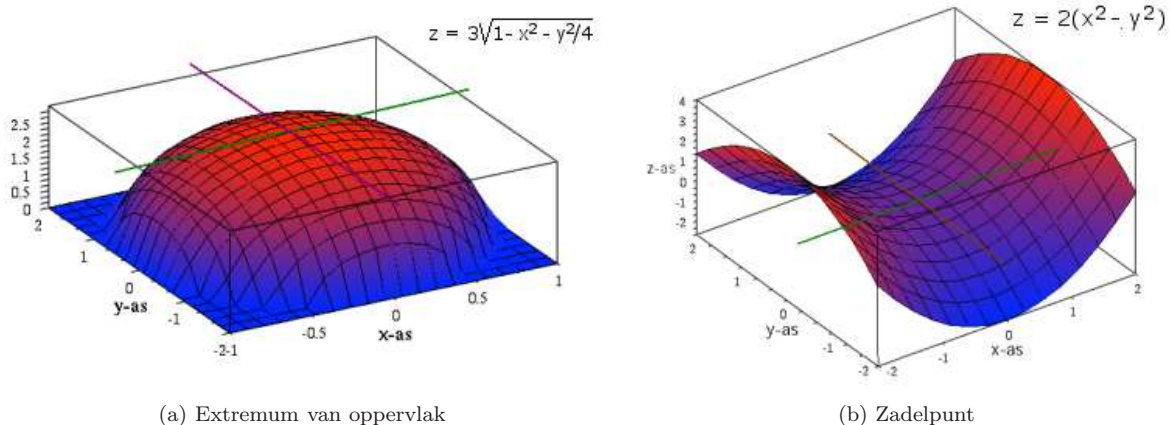
De snelheid van de aangrijpingspunten kan uitgerekend worden in functie van de veralgemeende coördinaten  $q_j$  m.b.v. de kettingregel van het differentiëren als:

$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt}$$

Wanneer men dit invoert in de vorige evenwichtsvoorwaarde bekommt men:

$$\sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_j \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = 0$$

Voor een functie van meerdere veranderlijken kan men een parameternet tekenen, d.i. een netwerk van krommen die men bekomt door één variable te laten veranderen en alle andere constant te houden. Door elk punt moet één exemplaar van de krommen behorend bij elke parameter passeren. De figuur 4.2 toont functies van 2 veranderlijken, van de vorm  $z = f(x,y)$ . De parameterlijnen lopen dus parallel aan de assen. Voor een extremum, minimum of maximum, of correcter: een **stationair punt**, moet de raaklijn aan elke parameterkromme horizontaal zijn.



Figuur 4.2: Extrema van functies van 2 veranderlijken



Voor evenwicht zal men een nulpunt moeten hebben voor de bijdrage volgens de raaklijn aan de kromme van elke onafhankelijke veranderlijke, van elke veralgemeende coördinaat. Dit betekent dat voor elke  $q_j$  moet gelden :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = 0$$

### 4.5.1 Voorbeeld 3

De figuur 4.3 stelt een massa voor die langs een staaf kan glijden maar daarbij tegengehouden wordt door een veer. De staaf kan vrij ronddraaien rond haar bovenste ophangpunt. Men onderstelt de staaf massaloos en bewegend zonder wrijving tussen massa en staaf. De krachten die op de massa werken zijn:

- de zwaartekracht  $G$
- de kracht van de veer  $F$

Dit is een systeem met **2 vrijheidsgraden** . De positie van de massa langs de staaf kan gewijzigd worden zonder dat de hoek van de staaf verandert en omgekeerd. We nemen als veralgemeende coördinaten de afstand  $r$  en de hoek  $\theta$ . Het bijhorend parameternet ziet er dan uit als op de figuur 4.4 .

De snelheid  $\vec{v}$  kan dus gesplitst worden in een component  $\vec{v}_r$ , veroorzaakt door een verandering van  $r$  en gericht volgens de staaf en naar beneden, en  $\vec{v}_\theta$  veroorzaakt door de verandering van  $\theta$  en loodrecht op de staaf en naar links ( $r$  en  $\theta$  zijn in feite poolcoördinaten: zie kinematica: poolcoördinaten 5.2.2). Hier zijn dit orthogonale componenten, maar dit hoeft niet. Opsplitsen volgens deze componenten levert:

$$\vec{F} \cdot (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) + \vec{G} \cdot (\vec{v}_r + \vec{v}_\theta) = (\vec{F} + \vec{G}) \cdot \vec{v}_r + \vec{G} \cdot \vec{v}_\theta = 0$$

Daar de kracht  $F$  loodrecht staat op  $v_\theta$  is het scalair product van beide nul.

Daar het effect van een verandering van elke parameter nul moet zijn is dit equivalent met 2 vergelijkingen:

$$\begin{aligned} (\vec{F} + \vec{G}) \cdot \vec{v}_r &= 0 \\ \vec{G} \cdot \vec{v}_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Na uitwerken van de scalaire producten:

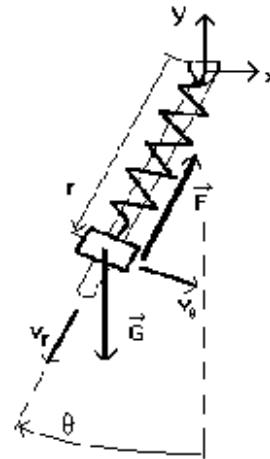
$$\begin{aligned} (-F + G \cdot \cos \theta) \cdot v_r &= 0 \\ G \cdot \sin \theta \cdot v_\theta &= 0 \end{aligned}$$

Daar alle krachten op hetzelfde punt aangrijpen, speelt hier geen verhouding tussen de snelheden en kan men die onmiddellijk wegdelen uit de vergelijkingen. Er blijft:

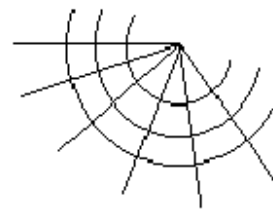
$$\begin{aligned} -F + G \cdot \cos \theta &= 0 \\ G \cdot \sin \theta &= 0 \end{aligned}$$

Uit de laatste vergelijking volgt  $\theta = 0$ . In de eerste moet de kracht van de veer uitgedrukt worden in functie van  $r$  als  $F = k(r-r_0)$ . Hieruit kan men dan  $r$  halen.

Daar het hier over één puntmassa ging, had men deze vergelijkingen ook onmiddellijk op de klassieke manier kunnen vinden. Een toepassing die meer de kracht van de aanpak laat zien is de studie van de ruitvormige krik zoals die verder behandeld wordt.



Figuur 4.3: Systeem met 2 vrijheidsgraden



Figuur 4.4: Parameternet voor  $r$  en  $\theta$

## 4.6 De klassieke formulering

Bij evenwicht moet de energiebijdrage voor elke veralgemeende coördinaat nul zijn. Het blijkt dat het differentiëren van de veralgemeende coördinaat naar de tijd een overbodige bewerking is want deze term kan altijd weggedeeld worden. Men zou zich dus kunnen beperken tot het differentiëren van de  $\vec{r}_i$  naar de  $q_j$ . Klassiek echter schrijft men de evenwichtsvoorwaarde van de virtuele arbeid A onder de vorm van een **differentiaal** en met de specifieke delta  $\delta$ . Men krijgt dan:

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_j (\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}) \delta q_j = 0$$

met i lopend over alle krachten en j over alle vrijheidsgraden.

De factor  $\delta q_j$  staat hier niet voor een ingebeelde verplaatsing, zoals meestal gezegd wordt, maar voor de aanduiding van de onafhankelijke variabele. Het nulpunt moet komen van de coëfficiënt die ervoor staat.

De gewoonte om deze uitdrukking als een differentiaal te schrijven is in de praktijk zeer nuttig. Voor een systeem met één vrijheidsgraad zullen alle termen immers in functie van één veralgemeende coördinaat moeten uitgedrukt worden, moeten dus alle termen eindigen op dezelfde  $\delta q$ . Als dit niet het geval is moeten er supplementaire verbanden tussen de gebruikte parameters gezocht worden. Indien er meerdere vrijheidsgraden zijn zal men groeperen naar de verschillende  $\delta q_j$  en moet de coëfficiënt van elke  $\delta q_j$  nul zijn:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = 0 \quad \text{voor elke } q_j$$

Er zijn dus steeds evenveel vergelijkingen als veralgemeende coördinaten of vrijheidsgraden. De factor  $\vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$  zal de dimensie hebben van een kracht als de  $q_j$  een verplaatsing is of de dimensie van een moment als de  $q_j$  een hoek is. Het product van deze factor met  $\delta q_j$  moet immers de dimensie van een arbeid hebben. Wanneer er momenten gegeven zijn kan men de virtuele arbeid van deze momenten berekenen als  $\vec{M} \cdot \delta \vec{\theta}$ .

Men zou dus steeds een term van de vorm

$$\delta A = \sum_i \vec{M}_i \cdot \delta \vec{\theta}_i = \sum_j \sum_i \vec{M}_i \cdot \frac{\partial \vec{\theta}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0$$

mogen toevoegen aan de vorige vorm voor de virtuele arbeid. De meest **algemene vorm van de methode van de virtuele arbeid** is dus :

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_i \vec{M}_i \cdot \delta \vec{\theta}_i = 0$$

## 4.7 De klassieke uitwerking

.Voor de praktijk zullen we dus geen snelheden berekenen, maar alleen de differentiaal van de verplaatsing. We beginnen best met eerst de vectoriële vorm volgens de formule hierboven op te schrijven . Voor het voorbeeld van de twee vrijheidsgraden geeft dit :

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \vec{G} \cdot \delta \vec{r} = 0$$

Nu moet men beslissen hoe men elk van de termen, elk scalair product, zal uitrekenen. bemerk dat er hier geen sprake is van projecteren van deze vergelijking daar elke term een reëel getal is en geen vector. Een scalair product kan men uitrekenen in termen van orthogonale coördinaten of m.b.v. de goniometrische vorm.

### 4.7.1 a) Berekening in termen van orthogonale coördinaten

$$\vec{F} \cdot \delta \vec{r} = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z$$

- Hierbij stellen  $F_x, F_y, F_z$  de projecties op de assen voor **met het correcte teken** .
- De factoren  $\delta_x, \delta_y, \delta_z$  berekent men door differentiëren van de coördinaten van de aangrijpingspunten. Hierbij moeten deze **coördinaten het correcte teken** hebben!

De uitwerking in termen van orthogonale coördinaten is vooral aangewezen als de krachten evenwijdig zijn aan de coördinaatassen. De bovenstaande som telt dan immers maar één term.

#### Voorbeeld

Voor het voorbeeld is deze methode aangewezen voor het gewicht:

$$\vec{G} \cdot \delta\vec{r} = -G \cdot \delta y$$

Met

$$\begin{aligned} y &= -r \cdot \cos\theta \\ \delta y &= -\delta r \cdot \cos\theta + r \cdot \sin\theta \cdot \delta\theta \end{aligned}$$

Invullen in vorige uitdrukking levert:

$$\vec{G} \cdot \delta\vec{r} = G \cdot \cos\theta \cdot \delta r - G \cdot r \cdot \sin\theta \cdot \delta\theta$$

#### 4.7.2 b) Berekening met de goniometrische vorm

Bij de goniometrische vorm gaat men de kracht projecteren op de de raaklijn aan de baan gevolgd bij toename van de veralgemeende coördinaat. Het is duidelijk dat de bijdrage van het gewicht in de vorige berekeningen ook op deze manier kan gelezen worden. In de praktijk zal de goniometrische vorm vooral nuttig zijn bij schuin geplaatste krachten waarbij de projectie van de kracht op de raaklijn sneller en eenvoudiger op te schrijven is dan de uitdrukking in termen van orthogonale coördinaten. Dit is vooral het geval als de richting van kracht en raaklijn steeds samenvalt (hoek tussen beide  $0^\circ$  of  $180^\circ$ ) en deze richting zelf veranderlijk is. Denk b.v. aan het schuine touw in figuur 2. Men kan dit onder verscheidene hoeken houden, maar als men het scalair product met de goniometrische vorm uitwerkt, dan heeft deze hoek geen belang (zool hij trouwens fysisch geen belang heeft). Een ander voorbeeld wordt hieronder uitgewerkt.

#### Voorbeeld

Voor F in het voorbeeld werd reeds opgemerkt dat een verandering van  $\theta$  resulteert in een verplaatsing loodrecht op F, dus zonder energieverandering. Alleen bij verandering van r zal er arbeid geleverd worden door of op de veer. Daar een toename van r een verplaatsing oplevert in tegengestelde zin van de kracht, wordt de goniometrische vorm:

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F \cdot \delta r \cdot \cos 180^\circ = -F \cdot \delta r$$

Groeperend naar de veralgemeende coördinaten krijgen we dus voor het geheel

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = (-F + G \cdot \cos\theta) \cdot \delta r + (G \cdot r \cdot \sin\theta) \cdot \delta\theta$$

Dit resulteert in dezelfde twee vergelijkingen zoals hoger.

#### 4.7.3 c) Speciaal geval: potentiaalkrachten

Voor een potentiaal kracht F geldt

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\delta E_p$$

#### Voorbeeld

De potentiële energie van de veer in het voorbeeld wordt duidelijk alleen beïnvloed door de parameter r:

$$E_p = k \frac{(r-r_0)^2}{2}$$

Waaruit:

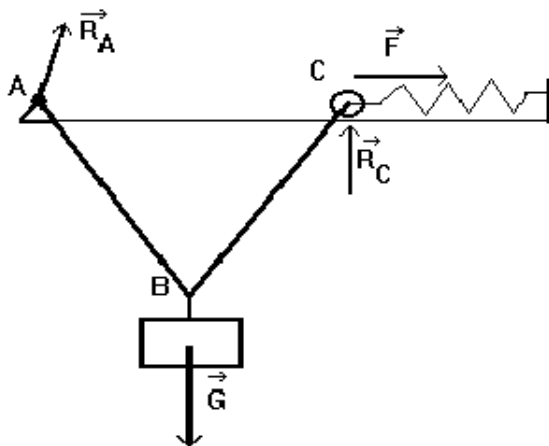
$$-\delta E_p = -k(r-r_0)\delta r \quad \dots \text{ ut supra}$$

## 4.8 Keuze van het assenkruis

Bij virtuele arbeid gebruikt men de posities van de aangrijpingspunten. Het assenkruis van de posities zal dus nauwkeurig moeten gespecificeerd worden: plaats van de oorsprong, oriëntatie van de assen.

Bij virtuele arbeid houdt men geen rekening met krachten in ideale verbindingen. Het mechanisme waardoor de ideale verbindingskrachten met de omgeving geen arbeid leveren of afvoeren, berust op het feit dat ofwel het aangrijpingspunt zich niet verplaatst, ofwel zich alleen loodrecht op de kracht verplaatst. Dit is normaal alleen het geval in een vast assenkruis.

Wanneer men een assenkruis vastmaakt aan een bewegend punt van het systeem, dan kan men elke verplaatsing schrijven als een som van een sleepverplaatsing (verplaatsing van dat punt) en een relatieve verplaatsing t.o.v. dat punt. Alle sleepverplaatsingen geven een term die bestaat uit de som van alle krachten  $\times$  de sleepverplaatsing. Daar bij evenwicht de som van alle krachten nul is, verandert dit de arbeidsbalans niet. Maar binnen een bewegend assenkruis zullen de aangrijpingspunten van de ideale verbindingskrachten een andere (relatieve) beweging uitvoeren dan in het vaste en kunnen dan wel arbeid uitwisselen met het systeem. Men zou in dit geval dus zeer zorgvuldig alle krachten en hun aangrijpingspunt moeten beschouwen om te zien welke werkelijk nog ideale verbindingskrachten zijn. Als men echter de reactiekrachten met de omgeving moet kennen, zal men meestal naar de klassieke oplossingsmethode moeten grijpen voor men virtuele arbeid zou kunnen toepassen. Dit is niet zinvol. In de praktijk moet men dus met een vast assenkruis werken.



Figuur 4.5: Virtuele arbeid: keuze van het assenkruis

### Voorbeeld

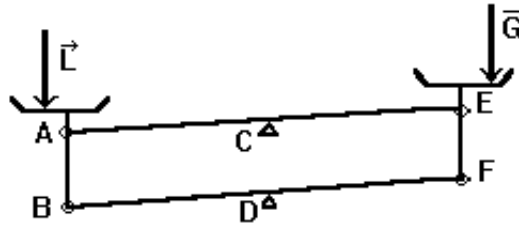
Neemt men als voorbeeld het systeem van de figuur 4.5, waarin AB en BC ideale staven zijn. In elk vast assenkruis zullen de reacties  $R_A$  en  $R_C$  geen arbeid leveren bij een beweging van het systeem. Bevestigt men echter het assenkruis aan B, dan levert het gewicht geen arbeid meer, maar wel deze reactiekrachten. Hun aangrijpingspunten bewegen nu immers op een cirkel rond B.

## 4.9 Enkele toepassingen

### 4.9.1 De keukenbalans

Als voorbeeld van een toepassing waarbij de kracht van de methode van de virtuele arbeid tot uiting komt, wordt eerst het probleem van de **keukenbalans** beschouwd. Deze bestaat uit twee schalen, rustend op een arm die in het midden ondersteund is (zie figuur 4.6).

Het is ten eerste wenselijk dat het resultaat van een weging niet beïnvloed wordt door de positie van de last of van de gewichten in de schalen. Stelt men de last voor door een kracht  $L$  en de gewichten door een



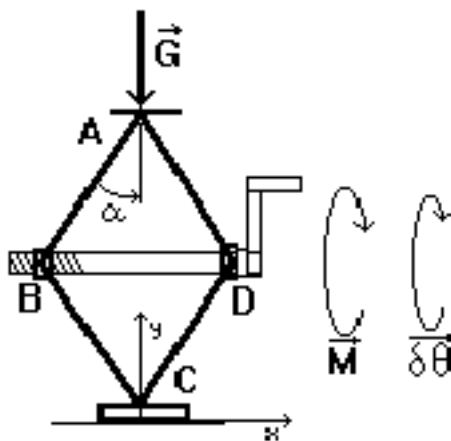
Figuur 4.6: Keukenbalans

kracht  $G$ , dan levert de methode van de virtuele arbeid (in een klassiek verticaal-horizontaal assenkruis):  
 $-G \cdot \delta y_G - L \cdot \delta y_L = 0$

Opdat de positie binnen de schalen geen invloed zou hebben, moeten beide verticale verplaatsingen onafhankelijk zijn van de positie binnen de schaal. Dit betekent dus dat de schalen moeten **transleren**. Hiervoor is een eenvoudige constructie bekend, nl. de **parallogramgeleiding**. De steun van de schalen wordt m.b.v. 2 staven op zijn plaats gehouden. De eindpunten van deze staven vormen een parallellogram. Hier is dit dubbel uitgevoerd. C en D zijn het midden van AE en BF en vaste scharnierpunten. De vierhoek ABFE is steeds een parallellogram en AB en EF blijven steeds evenwijdig met CD. Door deze eenvoudige constructie transleren de schalen en is onafhankelijk van de positie binnen de schaal.

#### 4.9.2 Ruitvormige krik

Het tweede probleem is het berekenen van de kracht geleverd door een eenvoudige **ruitvormige krik**.



Figuur 4.7: Ruitvormige krik

In plaats van te rekenen met de kracht op de zwengel, zal rechtstreeks met het moment gerekend worden. De evenwichtsvoorwaarde is dan :

$$\vec{G} \cdot \delta \vec{r}_A + \vec{M} \cdot \delta \vec{\theta} = 0$$

Men voert een klassiek assenkruis in, met oorsprong in C. De virtuele arbeid geleverd door het gewicht kan opnieuw geschreven worden als:

$$-G \cdot \delta y_A$$

Men heeft nu echter twee parameters,  $y_A$  en  $\theta$ , terwijl dit duidelijk een systeem is met één vrijheidsgraad. Er moet dus een verband gezocht worden tussen  $\delta y_A$ , de verplaatsing van A, en de verdraaiing van de zwengel. In dit verband speelt de schroefdraad in B natuurlijk een centrale rol. Het verband tussen verdraaiing van zwengel en de verplaatsing van B wordt gegeven door de spoed van de schroefdraad. Deze spoed  $S$  wordt uitgedrukt in cm/toer : de lineaire verplaatsing veroorzaakt door een omwenteling van 1 toer. Bij  $\theta$  in radialen in plaats van toeren heeft men :

$$\Delta(BD) = \pm S \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

of met differentialen:

$$\delta(BD) = \pm S \frac{\delta\theta}{2\pi} \quad (\text{a})$$

Om te weten welk teken te gebruiken wordt gesteund op het feit dat draaien in de richting van het moment de last omhoog doet bewegen en dat dan de afstand BD kleiner wordt. Bij draaien in de richting van het moment is het scalair product van  $M$  en  $\delta\theta$  positief en gewoon  $M \cdot \delta\theta$ . De evenwichtsvoorwaarde wordt nu :

$$-G \cdot \delta y_A + M \cdot \delta\theta = 0$$

**Nota:** wanneer men met de kracht op de hendel zou willen werken en  $L$  de lengte van de hendel is, dan zou de verplaatsing van het aangrijpingspunt van de kracht  $L \cdot \delta\theta$  zijn. De virtuele arbeid geleverd door die kracht wordt dan  $F \cdot L \cdot \delta\theta$ , waarin  $F \cdot L = M$ . Men komt dus op dezelfde formules uit.

Men heeft verder:

$$y_A = 2a \cos \alpha \text{ waaruit } \delta y_A = -2a \sin \alpha \cdot \delta\alpha;$$

Alles invullen in vorige uitdrukking:

$$-G \cdot -2a \sin \alpha \cdot \delta\alpha + M \cdot \delta\theta = 0 \quad (\text{b})$$

Om een verband te vinden tussen  $\delta\theta$  en  $\delta\alpha$  drukt men de verandering van BD uit in functie van beide. Als de last omhoog beweegt moet de afstand BD kleiner worden. Men moet dus het minteken kiezen in (a). Men drukt nu ook BD uit als functie van  $\alpha$  :  $BD = 2a \cdot \sin \alpha$ . Hieruit haalt men:

$$\delta(BD) = 2a \cdot \cos \alpha \cdot \delta\alpha$$

Alles invullen levert :

$$\delta(BD) = 2a \cdot \cos \alpha \cdot \delta\alpha = -S \frac{\delta\theta}{2\pi}$$

Men kan dit b.v. oplossen voor  $\delta\alpha$  en dat invoeren in (b). De oplossing wordt (mits  $\alpha$  verschilt van 0):

$$G = \frac{2\pi}{S \tan \alpha} M$$

Bij  $\alpha=0$  wordt het gewicht  $G$  opgenomen door de staven zonder dat de stang BD erbij komt kijken (in theorie). Dit is een speciale stand, waarin de vergelijkingen feitelijk niet meer opgaan. Dit is typisch voor de methode van de virtuele arbeid: singulariteiten van de formules duiden op speciale standen waarin de oorspronkelijke vergelijkingen niet gelden.

Dit voorbeeld laat ook duidelijk de kracht zien van de methode van de virtuele arbeid. Men moet het systeem niet ontbinden in zijn onderdelen. Voor de nodige verbanden redeneert men op verplaatsingen, wat relatief eenvoudig is en wat men zich veel concreter kan voorstellen dan krachten. Maar het blijft daardoor ook een soort "black box"-systeem. Men krijgt een verband tussen de krachten op twee of meer punten van het systeem, maar over de manier waarop die inwendig overgedragen worden, krijgt men geen informatie.

### 4.9.3 Berekenen van verbindingskrachten

Alhoewel de methode van de virtuele arbeid precies interessant is omdat de meeste verbindingskrachten er niet in voorkomen, kan men met een klein trucje de methode toch gebruiken om eventueel ook een verbindingskracht uit te rekenen. Het trucje bestaat erin de verbinding weg te nemen maar de verbindingskracht te behouden. Op die manier creëert men een supplementaire vrijheidsgraad. Men kan dan berekenen welke verbindingskracht er moet uitgeoefend worden om het systeem in dezelfde positie te houden als met de verbinding.

## 4.10 Slotbemerkingen

### 4.10.1 Een beetje geschiedenis

De methode van de virtuele arbeid wordt op veel verschillende manieren gepresenteerd. Het is ook reeds een zeer oude methode. De eerste redeneringen van deze vorm vindt men reeds bij [Simon Stevin](#) (1548-1620) en [Galileo](#) (1564-1642), dus bijna honderd jaar voor [Newton](#) (1642-1726), onder de vorm dat bij elk hefboomsysteem de arbeid die men er aan één zijde in steekt als product van een kleine kracht met een grote verplaatsing er aan de andere zijde moet uitkomen als een grote kracht met een kleine verplaatsing. Op dat ogenblik was de differentiaal- en integraalrekening nog onbestaande en misschien ligt daar voor een deel de oorzaak van het spreken over ingebeelde verplaatsingen.

De methode werd verder ontwikkeld door [Bernoulli](#) (1771), [d'Alembert](#) (1743) en [Lagrange](#) (1788). Ze wordt echter met zeer grote verschillen voorgesteld. Er zijn veel auteurs die werken met virtuele snelheden in plaats van virtuele verplaatsingen. De methode zou dan de methode van het virtuele vermogen moeten heten en wordt door sommigen dan ook zo genoemd. Het werken met virtuele snelheden vermijdt in elk geval dat men spreekt over infinitesimaal kleine verplaatsingen, een uitdrukking die, met de huidige nauwkeuriger formulering van differentiaalrekenen, bij vele wiskundigen in ongenade gevallen is. Bij de auteurs die met verplaatsingen werken zijn er enkele die met werkelijke verplaatsingen werken. Voor de meeste gaat het echter over differentiaal van de verplaatsing. Tenslotte zijn er verschillen in de verplaatsingen (of snelheden) die men beschouwt. Voor velen gaat het over volledig vrije verplaatsingen. In dat geval kan het principe van de virtuele arbeid omgewisseld worden met de tweede wet van Newton, d.i. men kan het principe van de virtuele arbeid als fundamenteel principe aannemen en daaruit dan de tweede wet van Newton afleiden. De verplaatsingen die de verbindingen respecteren heten dan compatibele verplaatsingen. Hier werd alleen gewerkt met verplaatsingen die de verbindingen respecteren. Het verschil tussen virtuele en werkelijke verplaatsingen is dus niet in het algemeen te formuleren en is feitelijk maar van belang als men dynamische situaties gaat beschrijven. Zie hiervoor het hoofdstuk over traagheidskrachten [10](#).

### 4.10.2 Een stellingname van de auteur

Klassiek worden virtuele verplaatsingen voorgesteld als ingebeelde of hypothetische verplaatsingen. De methode zou berusten op het geven van een kleine verplaatsing aan het systeem. Er werd in het eerste hoofdstuk van dit boek, over de basisbegrippen, in het punt “Van vereenvoudigde naar wiskundig correcte voorstelling” betoogd dat differentiaal de situatie beschrijven in een punt als limiet van de situatie in een interval als dat interval krimpt tot een punt. Een  $dx$  of  $dt$  stelt dus geen interval, geen verplaatsing hoe infinitesimaal ook, meer voor. Als een differentiaal  $= 0$  is (bv.  $\sin \omega t \cdot dt = 0$ ), dan is het nooit omdat die  $dx$  of  $dt = 0$  is, maar omdat de coëfficiënt van die  $dx$  of  $dt$  (de  $\sin \omega t$ )  $= 0$  is. Die  $dx$  of  $dt$  stelt alleen de veranderlijke voor waarnaar gedifferentieerd werd. Ook de  $\delta q$  van virtuele arbeid is gewoon een differentiaal, de differentiaal van het aangrijpingspunt van de kracht als functie van de gegeven vrijheidsgraden. Er werd in de afleiding eerst gewerkt met snelheden om dat idee van kleine verplaatsing die men moet geven aan het systeem erbuiten te houden. Virtuele arbeid werkt met differentiaal omdat men de raaklijn aan de baan nodig heeft en de situatie in een punt. De methode van de virtuele arbeid vereist niet dat men enige verplaatsing geeft aan het systeem, geen reële, geen imaginaire, geen hypothetische, geen virtuele, geen infinitesimale, geen verplaatsing what-so-ever! (Bij het onderzoek naar trillingen in metalen structuren (autochassis b.v.) werkt men thans dikwijls met een verzameling bewegingssensoren die op de structuur geplaatst worden. Dan geeft men aan de structuur een impulsbelasting, meestal onder de vorm van een klopp met een hamer, en ziet hoe die kleine verplaatsing zich voort plant in de structuur. Dat is werken met het geven van een kleine verplaatsing.) Natuurlijk kan men, zoals bij het opstellen van differentiaalvergelijkingen, deze  $\delta \vec{r}$  in eerste instantie **benaderen** door een  $\Delta \vec{r}$  d.i. door een kleine verplaatsing. Dit is echter iets totaal anders dan  $\delta \vec{r}$  wiskundig te definiëren als een kleine verplaatsing!

Uitwerken van de bekomen vergelijkingen door te stellen dat men alle  $\delta q_i = 0$  stelt op één na en dan daaruit besluiten dat de coëfficiënt van die ene  $\delta q_i$  dus  $= 0$  moet zijn, is differentiaalrekenen van grootvaders tijd. Spijtig genoeg blijft deze voorstelling voortleven in de presentaties van virtuele arbeid. Ik weet dat mijn visie haaks staat op wat in bijna alle boeken verteld wordt, maar kan dat alleen maar betreuren.





# Hoofdstuk 5

## Kinematica

### Inhoudsopgave

---

<b>5.1 De definities</b>	<b>66</b>
5.1.1 Verbanden	67
5.1.1.1 Afleidingen	67
5.1.2 Eenparige en eenparig versnelde beweging	68
5.1.2.1 Eenparige beweging	68
5.1.2.2 Eenparig versnelde beweging	68
5.1.2.3 Remweg	69
<b>5.2 De vectoriële formules</b>	<b>71</b>
5.2.1 Cartesische coördinaten	71
5.2.1.1 Toepassing: beweging op een cirkel - Normale en tangentiële versnelling	71
5.2.1.2 Normale versnelling bij een willekeurige kromme	72
5.2.1.3 Valparabool	73
5.2.1.4 Valparabool-2: hoek, omhullende	75
5.2.1.5 Valparabool-3: maximale afstand op helling, luchtweerstand	76
5.2.2 Poolcoördinaten	78
5.2.2.1 Het assenkruis voor snelheid en versnelling	78
5.2.2.2 Afleiding van de formules	79
5.2.2.3 Praktisch gebruik van poolcoördinaten	79
5.2.2.4 De term $2\mathbf{v}_r \cdot \boldsymbol{\omega}$	81
5.2.3 Berekenen van normale en tangentiële versnelling	81
5.2.3.1 Tangentiële versnelling	81
5.2.3.2 Normale versnelling	82
5.2.3.3 Voorbeeld	83
<b>5.3 Bewegende referentiesystemen</b>	<b>84</b>
5.3.1 Snelheden	84
5.3.1.1 De drie snelheden	84
5.3.1.2 Voorbeelden	85
5.3.2 Versnellingen	88
5.3.2.1 Een woord vooraf	88
5.3.2.2 Een nieuwe operator	88
5.3.2.3 De versnelling	88
5.3.2.4 Eenvoudiger formule voor starre voorwerpen	89
5.3.2.5 Coriolisversnelling en bewegingen op aarde	90
5.3.2.6 Bolcoördinaten	91
<b>5.4 Kinematica: aanvullingen</b>	<b>93</b>
5.4.1 Ogenblikkelijk rotatiecentrum	93
5.4.2 Poolbaan en poolkromme	95
5.4.3 Samenstellen van rotaties	98

5.4.3.1	Rotaties op meerder niveaus . . . . .	99
5.4.3.2	Equivalentie van rotaties . . . . .	99
5.4.3.3	Speciale gevallen . . . . .	101
5.4.3.4	Lineaire versnellingen en hoekversnellingen . . . . .	102
5.4.4	Rollen . . . . .	102

---

## 5.1 De definities

In de kinematica bestudeert men de beweging van een punt door alleen zijn positie in de loop van de tijd te beschouwen, zonder te zoeken naar de oorzaken van de beweging. De beweging is geheel beschreven als men de **positie** van het punt kan geven als functie van de **tijd**. Uit de positie kunnen grootheden als **snelheid** en **versnelling** afgeleid worden, die beide in het algemeen ook functies van de tijd zijn. In de kinematica treden dus vooral de volgende grootheden op:

- de **positie**

- de **snelheid**: dit is de verandering van de positie als functie van de tijd, of, meer wiskundig, de afgeleide van de positie naar de tijd.

- de **versnelling**: de verandering van de snelheid als functie van de tijd of de afgeleide van de snelheid naar de tijd.

De positie van een bewegend punt kan men echter op verschillende manieren vastleggen en dat geeft aanleiding tot verschillende vormen van “snelheid”:

1. Als een punt een baan doorloopt, kan men de positie weergeven m.b.v. de **afstand langs de baan** voorgesteld door  $s(t)$ . De grootheid  $s(t)$  stelt de afstand tot de positie op het tijdstip  $t$  voor, gemeten langs de baan, vanaf een gekozen referentiepunt  $O$ . Men moet hierbij nog een positieve richting kiezen voor het doorlopen van de baan. De tegenovergestelde richting is dan automatisch de negatieve richting. Men spreekt in dat geval ook over positieve en negatieve **zin** voor het doorlopen van de baan. De afstand langs de baan  $s(t)$  is een scalaire functie en ook de afgeleiden, zoals snelheid en versnelling langs de baan, zullen scalaire functies zijn. Voor de bepaling van snelheid en versnelling langs de baan hoeft de juiste vorm van de baan niet bekend te zijn.

Door  $s$  naar de tijd te differentiëren, krijgt men de snelheid langs de baan:

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

De afgeleide van deze snelheid levert de versnelling langs de baan:

$$a_t(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

De index  $t$  staat voor “tangenteel” omdat dit alleen de tangentiële component betreft van de versnellingsvector, zoals die hieronder gedefinieerd wordt.

Het aspect richting slaat bij al deze grootheden enkel op de zin die men voor het doorlopen van de kromme gekozen heeft. Zo zal het teken van de snelheid en versnelling de richting van de beweging langs de baan aangeven, dwz. in positieve of in negatieve zin. Men heeft maar een beperkte informatie over de drie betrokken grootheden, maar deze is in vele gevallen voldoende.

2. Men verkrijgt alle informatie over de beweging, door de **positievector**  $\vec{r}(t)$ , de plaats in de ruimte op het tijdstip  $t$ , als functie van de tijd te geven. De afgeleiden hiervan zullen nu ook vectoriële grootheden zijn. Zo is de snelheidsvector:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

en de versnellingsvector:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Om deze formules te gebruiken voor berekeningen, zal men een of ander coördinatensysteem moeten kiezen.

3. Bij een cirkelbeweging (met straal  $r$ ) is het voldoende de **hoek**  $\theta$  op te geven t.o.v. een referentielijn of -positie om de positie van een punt volledig te bepalen. I.p.v. een lineaire snelheid  $v$  krijgt men nu een hoeksnelheid:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

en de hoekversnelling:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

In de formules waarin  $\theta$ ,  $\omega$  en  $\alpha$  voorkomen moet de hoek in radialen uitgedrukt worden en niet in de meer bekende graden. Radialen zijn de enige coherente eenheid.  $\omega$  wordt dan radialen per seconde (symbool: rad/s) en  $\alpha$  radialen per seconde kwadraat (symbool: rad/s<sup>2</sup>)

### 5.1.1 Verbanden

De eerste vraag die hierbij rijst is natuurlijk wat het verband is tussen al deze grootheden.

Er is geen directe relatie tussen  $s$  en  $\vec{r}$  zelf. Wel blijkt  $|ds| = \|d\vec{r}\|$ . Hierdoor is er een verband tussen  $v = ds/dt$  en  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ , nl.:

$$|v| = \|\vec{v}\|$$

Of: de grootte van de snelheid, berekend uit de positie langs de baan, is ook de grootte van de vectoriële snelheid

Wat de versnelling betreft, blijkt  $a_t$  enkel de tangentiële component van  $\vec{a}$  te zijn, dus rakend aan de baan. Merk op dat  $|v|$  en  $|a_t|$  beide de grootte van de tangentiële componenten zijn van de vectoriële grootheden. De snelheidsvector  $\vec{v}$  is echter zuiver tangentieel, zodat  $|v|$  meteen ook de grootte van  $\vec{v}$  is, zoals hierboven al opgemerkt, terwijl de versnellingsvector naast de tangentiële component  $a_t$ , soms nog een component  $a_n$  loodrecht op de baan heeft.

#### 5.1.1.1 Afleidingen

1. De snelheid is altijd rakend aan de baan.

Dit is een zeer belangrijke eigenschap, die eenvoudig aan te tonen is. In de figuur 5.1 kan men zien hoe een punt op een eerste ogenblik  $t_1$  in A is en een tijdje later, op  $t_2$ , in B. De snelheid van dat punt is:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

De limietstand van de rechte door 2 punten van een kromme, als die 2 punten naar elkaar toekomen, is de raaklijn. Dus de snelheid ligt volgens de raaklijn.

2. Of: de grootte van de snelheid, berekend uit de positie langs de baan, is ook de grootte van de vectoriële snelheid

$$|v| = \|\vec{v}\|$$

In elk orthonormaal assenstelsel geldt:

$$|ds| = \sqrt{\sum (dx_i)^2}$$

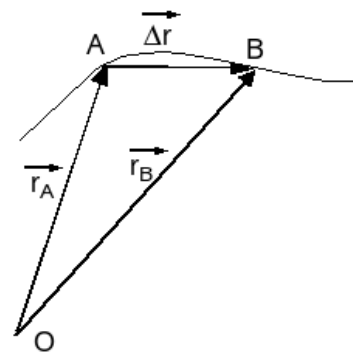
Hieruit volgt onmiddellijk:

$$|v| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{\sum \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2} = \sqrt{\sum (v_i)^2} = \|\vec{v}\|$$

3. Tangentiële versnelling

Uit beide voorgaande punten blijkt dat de snelheid ook kan geschreven worden als:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{u}_t = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{u}_t$$



Figuur 5.1: Berekenen van de vectoriële snelheid

Als men deze uitdrukking differentieert naar de tijd krijgt men 2 termen:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{u}_t}{dt}.$$

De eerste term is een versnelling volgens de raaklijn, nl. de tangentiële versnelling. De tweede term zal de normale versnelling leveren, maar dat wordt verder uitgewerkt na het voorbeeld van de cirkelbeweging.

### 5.1.2 Eenparige en eenparig versnelde beweging

In de kinematica houdt men zich niet bezig met de oorsprong van de versnellingen. In de dynamica wordt door de wet van Newton een verband gelegd tussen krachten als oorzaak van een beweging en de versnelling. Als men de krachten kent die op een voorwerp werken, kan men zijn versnelling berekenen en zou men door integreren moeten komen tot de snelheid en de positie van dat voorwerp.

Dit “integreren” is echter een beetje sneller gezegd dan gedaan. In de praktijk komt dit neer op het oplossen van een differentiaalvergelijking.

Er zijn echter eenvoudige bewegingen, waarbij dit integreren eenvoudig is. Dit zijn bewegingen zonder versnelling, de *eenparige* bewegingen, en bewegingen met constante versnelling, de *eenparig versnelde* bewegingen.

#### 5.1.2.1 Eenparige beweging

Men spreekt van een eenparige beweging als de beweging met constante snelheid verloopt, dus zonder versnelling. Als er geen versnelling is, moet de snelheid constant zijn. Men vertrekt dan hiervan voor het bepalen van de positie.

1. Als  $\mathbf{a}_t = \mathbf{0}$  is, heeft men een **eenparige beweging langs een kromme**. Uit  $v = ds/dt$  volgt dan:

$$s(t) = s_0 + v t$$

Hierin is  $s_0$  de integratieconstante. Als  $t=0$  staat er dat  $s(0) = s_0$ . De index 0 (nul) slaat dus, hier en in alle volgende formules op het ogenblik  $t=0$ , niet op de oorsprong.

2. Als de **vector**  $\vec{a} = 0$  is, volgt analoog uit  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v} t$$

De baan is een rechte lijn gericht langs de snelheid, die vanaf het punt  $\vec{r}_0$  met constante snelheid gevolgd wordt.

3. Als de **hoekversnelling**  $\alpha = 0$  is, heeft men een **eenparige cirkelbeweging** met constante hoeksnelheid  $\omega$ .

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

#### 5.1.2.2 Eenparig versnelde beweging

Men spreekt van een eenparig versnelde beweging als de beweging met constante versnelling verloopt. Door integratie kan men formules voor de snelheid en voor de positie afleiden.

1. Als  $\mathbf{a}_t$  **constant** is, volgt uit  $dv/dt = a_t$  dat de snelheid  $v(t)$  als primitieve functie moet beantwoorden aan:

$$v(t) = v_0 + a_t t$$

en uit  $v = ds/dt$  dat:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2,$$

2. Als de **totale vector**  $\vec{a}$  **constant** is (zowel in richting als in grootte!) dan volgt uit  $d\vec{v}/dt = \vec{a}$ :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

en uit  $d\vec{r}/dt = \vec{v}$  voor de positie:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

waarin  $\vec{r}_0$  de beginpositie (op  $t=0$ ) en  $\vec{v}_0$  de beginsnelheid is.

De posities vormen een parabool. In drie dimensies ligt die in het vlak bepaald door de beginsnelheid en de versnelling en heeft de richting van de versnelling als symmetrie-as.

Enkel bij **rechtlijnige beweging** zijn bovengenoemde situaties gelijkwaardig en is zowel de eerste als de tweede reeks formules geldig. In dat geval is er geen *normale* versnelling, dwz. een versnellingscomponent loodrecht op de baan, en is de tangentiële component ook de totale versnelling. In alle andere gevallen is of  $a_t$  niet constant of is de totale  $\vec{a}$  niet constant. Gezien de verbanden tussen deze grootheden is het onmogelijk dat beide constant zouden zijn bij een kromlijnige beweging.

3. Op volledig analoge manier krijgt men voor de cirkelbeweging met **constante hoekversnelling**  $\alpha$ :

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

en

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

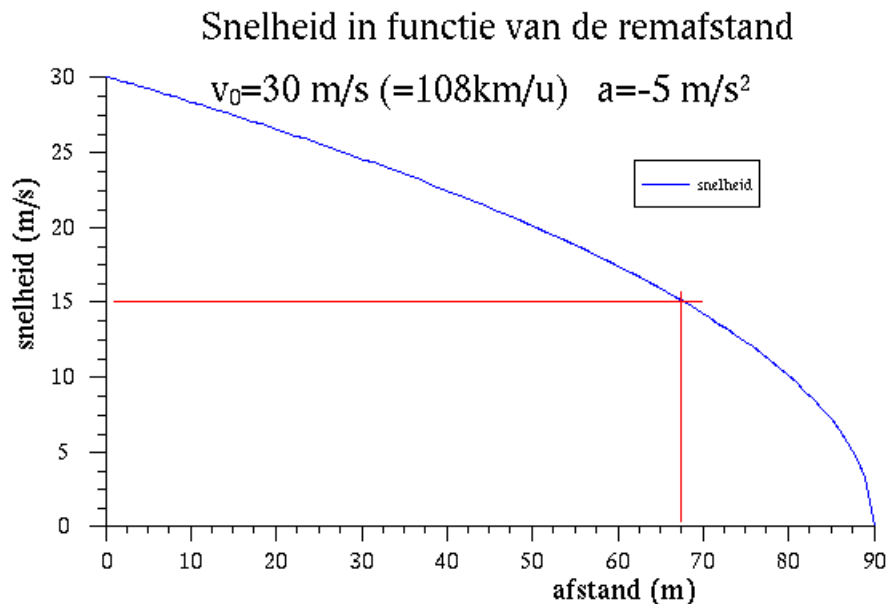
### 5.1.2.3 Remweg

Al deze formules geven snelheid of positie als functie van de tijd. Het is echter interessant om eens te zien hoe de snelheid evolueert in functie van de afgelegde weg. Dit is een toepassing voor de eerste reeks formules. Uit de formule voor de snelheid haalt men de tijd en substitueert die in de uitdrukking voor de afstand  $s$ . Dan lost men deze uitdrukking op naar  $v$ :

$$v(s) = \sqrt{v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

De grafiek hiervan is een liggende parabool. Als het over een vertraging gaat moet  $a$  negatief gerekend worden.

Als concrete toepassing wordt het afremmen van een auto bekeken. Onderstelt men een beginsnelheid van 30 m/s (108 km/u) en een vertraging van 5 m/s<sup>2</sup>, dan bekomt men de grafiek 5.2.



Figuur 5.2: Snelheid als functie van de remafstand

Bij een eenparig vertraagde beweging neemt de snelheid lineair af in de tijd, maar duidelijk niet volgens de afgelegde weg. Iedereen die ooit een noodstop heeft moeten uitvoeren aan een grote snelheid, weet hoe men in het begin de indruk heeft dat de remmen niet pakken. Men zou immers een afname willen zien evenredig met de remweg en dat gebeurt niet. In het begin is de snelheid nog groot zodat er in elke

seconde meer weg afgelegd wordt dan op het einde. Als algemene regel geldt **dat men steeds driekwart van de stopafstand nodig heeft om de snelheid te halveren**.

De stopafstand is de afstand om  $v=0$  te bekomen (met  $s_0=0$ ):

$$s(v=0) = \frac{v_0^2}{2a}$$

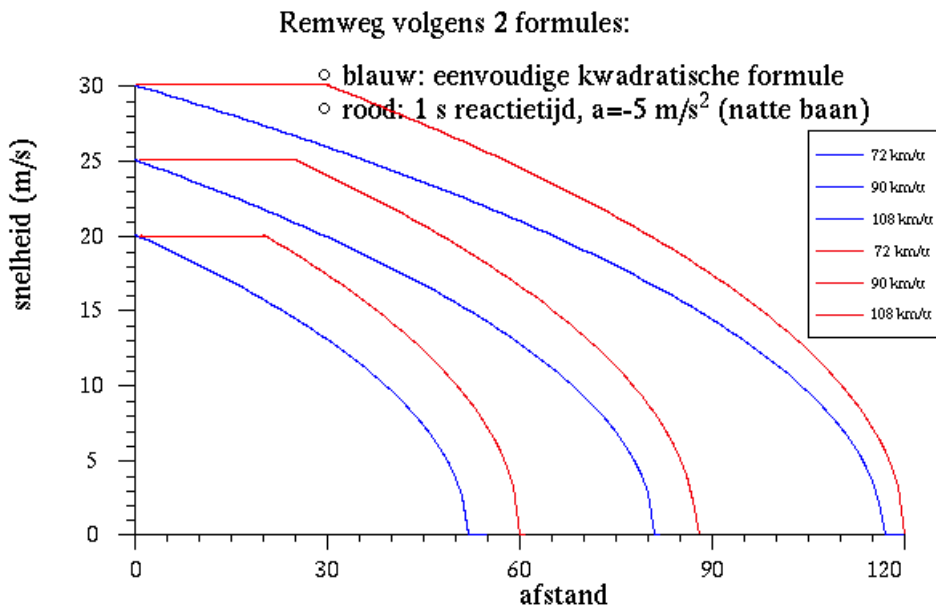
waarbij  $v_0$  in m/s moet gegeven worden.

Een eenvoudige formule om de stopafstand te berekenen stelt dat men de snelheid in km/u moet delen door 10 en het resultaat kwadrateren. Bij 100 km/u levert deze formule een afstand van  $10 \times 10 = 100$  m. Uit de bovenstaande formule kan men ook halen met welke vertraging deze formule rekt:

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = \frac{(100/3.6)^2}{2 * 100} = 3.86 \text{ m/s}^2$$

Een vertraging van  $5 \text{ m/s}^2$  wordt algemeen beschouwd als wat normaal is voor een nat wegdek. In ideale omstandigheden hangt de stopafstand af van het type wagen. Het blijkt dat kleinere wagens nauwelijks  $9 \text{ m/s}^2$  halen terwijl de zwaardere luxewagens bijna  $11 \text{ m/s}^2$  kunnen halen. Volgens gegevens van de ANWB heeft een Porsche iets meer dan 36 m nodig om te stoppen vanaf 100km/u en een kleine wagen 46 tot 47,5 m. Bij een noodstop met een kleine wagen kan men beter een Porsche achter zich hebben dan voor zich! Men moet echter bedenken dat alle parameters ideaal moeten zijn om deze grote vertragingen te halen: goede droge baan, goede banden met correcte spanning, goed onderhouden remmen.

Een meer nauwkeurige berekening van de stopafstand houdt rekening met een reactietijd van ongeveer 1 s. Gedurende die tijd blijft men met constante snelheid bewegen. Men kan zich afvragen of de kleinere vertraging van de simpele kwadratische formule misschien kan compenseren voor het weglaten van die 1e seconde. Het antwoord ziet men in de grafieken van figuur 5.3.



Figuur 5.3: Remweg volgens eenvoudige en meer correcte formule

Men kan zien dat de eenvoudige formule bij lage snelheden te optimistisch is op een nat wegdek, rond 100 km/u echter vrij goed is.

Een andere vuistregel zegt dat men 2 s achter zijn voorganger moet blijven of een aantal meter gegeven door de helft van de snelheid in km/u. Bij 100 km/u wordt dat 50 m, bij 120 km/u 60 m. Als er plots geremd wordt, dan kan de 2e wagen pas reageren als hij de remlichten van zijn voorganger ziet oplichten. Hij heeft dan nog 1 s reactietijd nodig om te beginnen remmen terwijl de voorganger reeds aan het vertragen is. Berekeningen tonen dat, om een kop-staartbotsing te vermijden, voor zelfde vertraging van beide voertuigen een **minimum afstand van 28 m nodig is bij 100 km/u en 34 m bij 120 km/u**. Minder dan die afstand achter zijn voorganger hangen is waanzin, zelfs al denkt men rapper te kunnen remmen dan zijn schaduw.

## 5.2 De vectoriëlele formules

### 5.2.1 Cartesische coördinaten

Er werd hierboven reeds opgemerkt dat men, om de vectoriële formules te gebruiken voor numerieke berekeningen, moet terugrijpen naar een of andere coördinatenrepresentatie van de betrokken vectoren. Meest bekend is hier de **cartesische** voorstelling. Hierbij wordt een onbeweeglijk assenkruis gebruikt. De positievector  $\vec{r}(t)$  heeft in 2 dimensies dan coördinaten die we meestal aanduiden met  $x(t)$  en  $y(t)$  (liever niet  $r_x$  en  $r_y$ !), de snelheid  $\vec{v}(t)$  krijgt de coördinaten  $v_x(t)$  en  $v_y(t)$  en de versnelling  $\vec{a}(t)$  krijgt de coördinaten  $a_x(t)$  en  $a_y(t)$ . Voor de coördinaten van de snelheid gelden de betrekkingen:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} \text{ en } v_y(t) = \frac{dy}{dt}$$

en voor de versnelling:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} \text{ en } a_y(t) = \frac{dv_y}{dt}$$

#### 5.2.1.1 Toepassing: beweging op een cirkel - Normale en tangentiële versnelling

Als toepassing wordt de beweging met **constante snelheid** van een punt op een cirkel beschouwd. Reeds vroeger, in het deel Elementaire bewerkingen met vectoren (1.2), werd aangetoond dat, als een vector constant is in grootte, de afgeleide loodrecht moet staan op die vector. Bij een cirkel is de straal constant en dat is de grootte van de positievector van een punt op de cirkel. De snelheid moet dus loodrecht staan op de positievector. Als de hoeksnelheid voorgesteld wordt door  $\omega$  worden de projecties van de positievector gegeven door:

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \sin(\omega t + \theta_0) \\ y &= R \cdot \cos(\omega t + \theta_0) \end{aligned}$$

Na differentiëren naar de tijd krijgt men voor de snelheid:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t + \theta_0) \\ v_y &= -\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t + \theta_0) \end{aligned}$$

Men kan gemakkelijk zien dat inderdaad  $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$

De grootte van de snelheid is  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega \cdot R$

Men kan dus besluiten dat als een vector ronddraait maar in grootte constant blijft, de afgeleide

- **loodrecht staat op de oorspronkelijke vector** in de richting van de toename van de hoek
- de **grootte** van de afgeleide  $\omega$  **maal de oorspronkelijk vector** is.

Alle eenheidsvectoren zijn voorbeelden van vectoren met een constante lengte. Ze kunnen alleen van richting veranderen, d.w.z. een beetje ronddraaien. Hun afgeleide volgt dus de regels hierboven.

Als men nu opmerkt dat ook de snelheid van het punt in dit voorbeeld een vector is met constante grootte en die ronddraait in de ruimte van de snelheden, dan volgt ogenblikkelijk dat men kan besluiten dat de versnelling van het punt bij constante hoeksnelheid

- zal gericht zijn naar het centrum van de cirkel
- in grootte gelijk zal zijn aan  $\omega^2 R$ . Dit is de **normale versnelling**  $\mathbf{a}_n$ .

Indien de hoeksnelheid niet constant is, zal er ook een **tangentiële versnelling** optreden. Men moet dan in de formules voor de positie de  $\omega t + \theta_0$  vervangen door een  $\theta(t)$ , een willekeurige functie van de tijd. Na een eerste maal differentiëren bekomt men analoge formules als hierboven:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega \cdot R \cdot \cos \theta(t) \\ v_y &= -\omega \cdot R \cdot \sin \theta(t) \end{aligned}$$

Nu blijft ook  $\omega$  een functie van de tijd met als afgeleide  $\alpha$ . Na nogmaals differentiëren krijgt men:

$$a_x = \alpha \cdot R \cdot \cos \theta(t) - \omega^2 \cdot R \cdot \sin \theta(t)$$

$$a_y = -\alpha \cdot R \cdot \sin \theta(t) - \omega^2 \cdot R \cdot \cos \theta(t)$$

Men herkent hierin de projecties van 2 vectoriële grootheden:

- $a_t = R \alpha$  volgens de raaklijn (en dus ook de richting van de snelheid)
- $a_n = R \omega^2$  volgens de normaal (naar het middelpunt gericht)

Beide componenten staan loodrecht op elkaar zodat men heeft:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$$

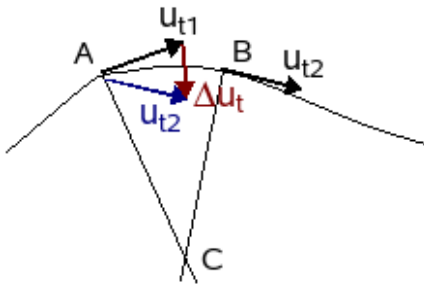
wat men gemakkelijk kan controleren met de formules hierboven.

### 5.2.1.2 Normale versnelling bij een willekeurige kromme

Hoger werd gezien dat de versnelling kan geschreven worden als:

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2} \vec{u}_t + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \vec{a}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

De vraag is nu: wat is die  $\frac{d\vec{u}_t}{dt}$  ?



Figuur 5.4: Normale versnelling bij een kromme

De afgeleide van een eenheidsvector is een vector die loodrecht staat op de oorspronkelijke vector en met grootte  $\omega$ . De afgeleide van  $\vec{u}_t$  is dus een vector die loodrecht staat op deze vector, dus volgens de normaal i.p.v. volgens de raaklijn. Het wordt dus  $\omega \cdot \vec{u}_n$ , met een  $\vec{u}_n$  die naar de holle kant van de kromme gericht is, zoals blijkt uit de oriëntatie van  $\Delta \vec{u}_t$  (zie figuur) en straks uit de zin van  $\omega$ .

$\omega$  is de hoeksnelheid van  $\vec{u}_t$ . Hoe kan men die bepalen? Drie punten op een kromme definiëren een cirkel. Als deze 3 punten samenkomen in één punt, dan evolueert deze cirkel naar de **raakcirkel** of **osculerende cirkel**. De straal van deze cirkel wordt aangeduid met de griekse letter  $\rho$  (rho) en heet de **kromtestraal van de kromme** in dat punt. Het centrum van de cirkel is het **kromtemiddelpunt**. Deze cirkel heeft als eigenschap dat de eerste en de tweede afgeleide in het beschouwde punt dezelfde zijn als van de kromme. Deze

cirkel sluit dus veel nauwer aan bij de kromme dan de raaklijn.

Volgens de figuur 5.4 wordt  $\Delta \vec{u}_t$  een vector die naar dat kromtemiddelpunt gericht is. Als men de loodlijn trekt op de eenheidsvectoren in A en B, dan snijden die elkaar in C. De hoek  $\theta$  tussen de eenheidsvectoren  $\vec{u}_{t1}$  en  $\vec{u}_{t2}$  is dezelfde als de hoek tussen de normalen in C. Als B steeds dichterbij A gekozen wordt, dan evolueert het punt C naar het kromtemiddelpunt en de afstand AC naar de kromtestraal  $\rho$ . In de limiet, als B samenvalt met A, geldt exact dat de snelheid van het punt in A kan geschreven worden als  $v = \rho \cdot \omega$ , met  $\omega$  de afgeleide van  $\theta$ , dus ook de hoeksnelheid van  $\vec{u}_t$ . Men heeft dus  $\omega = v/\rho$ . Invullen in bovenstaande formule levert:

$$\vec{a}_n = v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \vec{u}_n$$

De tweede term is dus de algemene formulering voor de normale versnelling. Men ziet dat de formule een sterke gelijkenis vertoont met de formule voor de cirkelbeweging. Alleen is R nu vervangen door  $\rho$ .

Nota: men kan de afleiding wiskundig wat formeel sluitender maken als men beroep doet op één of andere eigenschap van  $\rho$  b.v.  $1/\rho = d\theta/ds$ , maar dan zouden die eigenschappen ook nog moeten bewezen worden.



### 5.2.1.3 Valparabool

Wanneer men de luchtweerstand verwaarloost, dan is de valbeweging, het gooien van een steen of bal of het afschieten van een projectiel een eenparigversnelde beweging. Eens het voorwerp aan zichzelf overgelaten is, beïnvloedt alleen de zwaartekracht nog de beweging. Deze zorgt voor een versnelling naar beneden, die onafhankelijk is van de massa van het voorwerp. Deze **valversnelling** wordt aangeduid met de letter **g** (van gravitatie) en is in onze streken ongeveer  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Voor de praktische berekeningen wordt meestal  $10 \text{ m/s}^2$  gebruikt, wat een fout is van minder dan 2%. De fout door het verwaarlozen van de luchtweerstand is veel groter.

In vectoriële vorm wordt een valparabool gegeven door:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2 / 2$$

waarin  $\vec{r}_0$  de beginpositie is (op  $t=0$ ) en  $\vec{v}_0$  de beginsnelheid is. Bemerkt dat er in de vectoriële vorm overall een plusteken staat. De beginsnelheid kan men opschrijven in cartesische coördinaten in een klassiek verticaal-horizontaal assenkruis als  $(v_{0x}, v_{0y})$ . Zeer dikwijls wordt echter gewerkt met de grootte en de hoek. Dan worden diezelfde coördinaten geschreven als  $(v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ . Men krijgt dan voor de positie:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

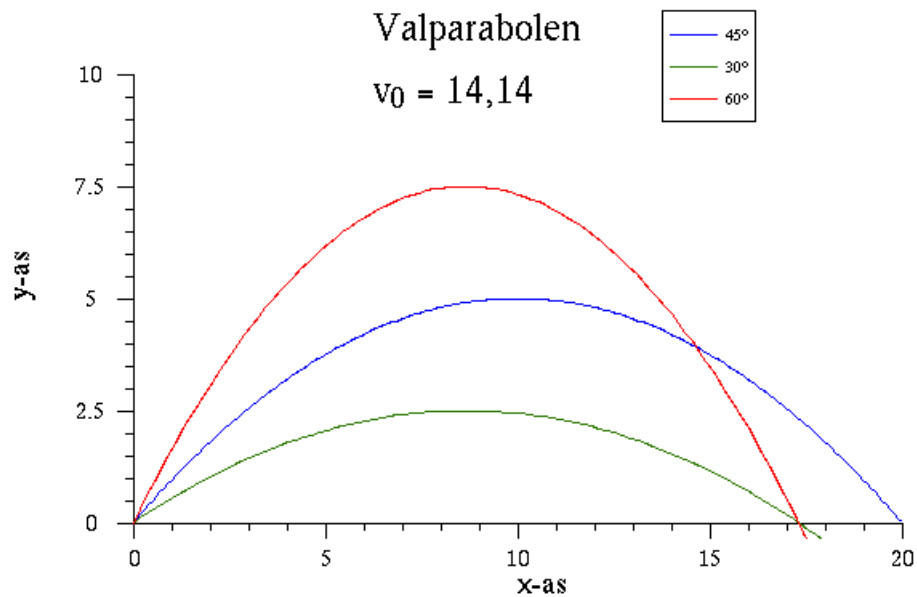
$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - g \cdot t^2 / 2$$

Men ziet dat de beweging in de horizontale richting (x-richting) gebeurt met constante snelheid.

Wanneer men de oorsprong van het assenkruis in de beginpositie kan kiezen, verdwijnt de beginpositie uit de vorige formules. Er blijft dan:

$$x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - g \cdot t^2 / 2 \quad (2)$$



Figuur 5.5: Hoge en lage valparabool

#### Draagwijdte van een worp

De draagwijdte  $d$  wordt bepaald door de plaats waar  $y$  opnieuw 0 wordt voor een  $t$  verschillend van 0. Men kan dan  $t$  wegdelen uit (2), die vergelijking oplossen naar  $t$  en die uitdrukking substitueren in (1). Als men dan nog weet dat  $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$  dan krijgt men als resultaat:

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \quad (3)$$

Uit deze formule kan men 2 besluiten trekken:

- De maximale afstand wordt bereikt voor  $\alpha = 45^\circ$ . Dan is  $2\alpha = 90^\circ$  en is  $\sin 2\alpha = 1$ , de maximale waarde voor de sinusfunctie. Deze maximale draagwijdte is dan:

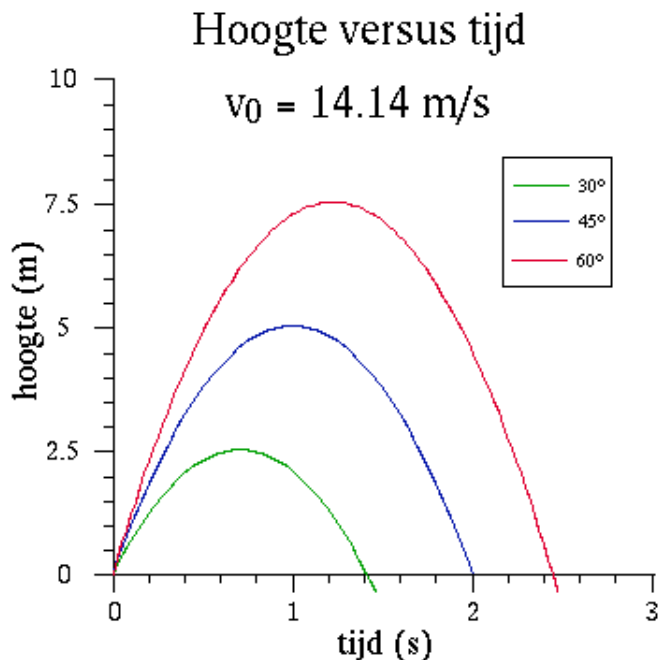
$$d_{max} = \frac{v_0^2}{g} \quad (4)$$

Met een beginsnelheid van 14,14 m/s (=10 x vierkantswortel 2) wordt deze maximale draagwijdte:

$$d_{max} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{10} = \frac{200}{10} = 20 \text{ m}$$

Nota: om een extremum van een functie, een minimum of een maximum, te vinden moet men volgens de algemene theorie het punt zoeken waar de afgeleide van die functie 0 is. Volgens deze aanpak moet men dus (3) afleiden naar  $\alpha$  en deze afgeleide gelijk 0 stellen. Uit die vergelijking volgt dan ook dat het maximum bereikt wordt voor  $45^\circ$ .

- Elke kleinere afstand kan bereikt worden onder 2 complementaire hoeken. Als men de formule 3 oplost naar  $\alpha$  moet men er immers rekening mee houden dat  $\sin 2\alpha$  en  $\sin (180^\circ - 2\alpha)$  dezelfde waarde hebben. Dus als  $\sin 2\alpha = 0,5$ , dan zijn de oplossingen  $2\alpha = 30^\circ$  en  $\alpha = 15^\circ$  en ook  $2\alpha = 150^\circ$  en  $\alpha = 75^\circ$ . Men spreekt van een **lage** en een **hoge parabool** waarmede hetzelfde punt kan bereikt worden.



Figuur 5.6: Hoogte in functie van de tijd

De tijd die nodig is om het eindpunt te bereiken wordt bepaald door de eenparige beweging in x-richting. Als men de hoogte uitzet als functie van de tijd ziet men duidelijk dat de hoge parabool altijd de grootste tijd vraagt.

### Hoogste punt

Naast de formules voor de positie zijn er ook nog de formules voor de snelheid. Deze zijn de afgeleiden van (1) en (2) (beginpositie komt er in elk geval niet in voor):

$$v_x(t) = v_0 \cdot \cos \alpha \quad (5)$$

$$v_y(t) = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t \quad (6)$$

Het hoogste punt van de parabool wordt bereikt waar  $v_y = 0$  is. Uit (6) volgt dan dat  $t = v_0 \sin \alpha / g$ . Dit invoeren in (2) levert

$$y_{top} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}$$

Het hoogste mogelijke punt bij gegeven  $v_0$  wordt natuurlijk bereikt voor  $\alpha = 90^\circ$  en is

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Voor het voorbeeld hierboven krijgt men:

$$y_{max} = \frac{(10\sqrt{2})^2}{2 \cdot 10} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m}$$

### 5.2.1.4 Valparabool-2: hoek, omhullende

#### Hoek gevraagd

Wanneer men uit (1) de tijd haalt en die invoert in (2), krijgt men de vergelijking van de baan als  $y=f(x)$ :

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Door beide leden van de identiteit  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  te delen door  $\cos^2 \alpha$  bekomt men een nieuwe identiteit:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$$

Wanneer men dit inbrengt in vorige functie, dan blijkt dit een kwadratische functie in  $\tan \alpha$ :

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) \quad (7)$$

Deze functie kan men gebruiken om uit te rekenen onder welke hoek men moet gooien of schieten als de coördinaten van het eindpunt en de beginsnelheid gegeven zijn.

Voor de overzichtelijkheid van de volgende afleidingen zullen we stellen:

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} = C$$

Hiermede kan de vergelijking herschreven worden in de klassieke vorm voor een kwadratische vergelijking als:

$$C \cdot \tan^2 \alpha - x \cdot \tan \alpha + (C + y) = 0 \quad (8)$$

Opdat een oplossing mogelijk zou zijn moet de discriminant  $\delta$  groter zijn of gelijk aan 0:

$$\delta = b^2 - 4ac = x^2 - 4C(C + y)$$

De grens van het gebied van de punten die kunnen bereikt worden, wordt gegeven door  $\delta=0$

$$x^2 - 4C^2 - 4Cy = 0$$

Dit blijkt een vergelijking van de vorm  $y =$  kwadratische functie in  $x$ , m.a.w. een parabool:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

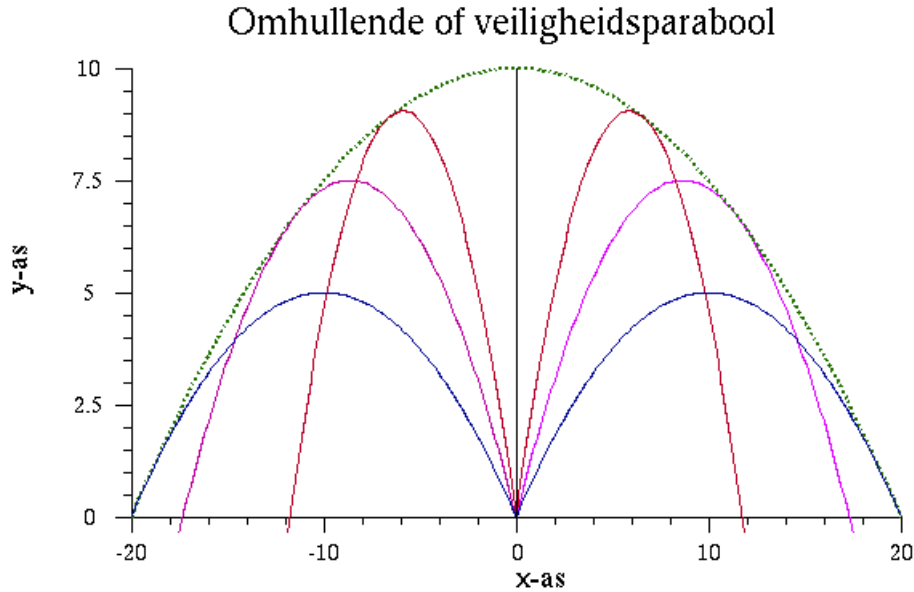
Deze parabool noemt men in de balistiek **de veiligheidsparabool** (groene stippellijn in de figuur 5.7).

De snijpunten met de assen:

- snijpunten met x-as voor  $y=0$ :  $x = \pm v_0^2/g$   
Voor het voorbeeld hierboven:  $x = \pm 200/10 = 20 \text{ m}$  ... zoals hierboven gevonden
- top:  $y = v_0^2/2g$   
Voor het voorbeeld hierboven:  $y = 200/20 = 10 \text{ m}$  ... zoals hierboven gevonden

Er is nog een andere manier om tot deze parabool te komen. Als men een reeks krommen kan genereren door een parameter te wijzigen, dan kan die **familie krommen** een **omhullende** hebben. Deze omhullende is een kromme zodanig dat

- door elk punt van de omhullende één kromme van de familie passeert



Figuur 5.7: Omhullende of veiligheidsparabool

- de raaklijn in dat punt aan die kromme en aan de omhullende samenvallen.

Om deze omhullende te vinden moet men de vergelijking van een kromme afleiden naar de parameter, deze afgeleide = 0 stellen en de parameter elimineren tussen deze vergelijking en de oorspronkelijke vergelijking voor de kromme. Hier zou men  $\alpha$  als parameter kunnen beschouwen in (7), maar men kan evengoed  $\tan \alpha$  als parameter nemen. Men krijgt dan als 2e vergelijking door afleiden van (8):

$$2C \cdot \tan \alpha - x = 0$$

Dit oplossen naar  $\tan \alpha$  en substitueren in (8) levert opnieuw de vergelijking van de veiligheidsparabool.

### 5.2.1.5 Valparabool-3: maximale afstand op helling, luchtweerstand

#### Maximale afstand op een helling

Als men de vraag stelt onder welke hoek men moet schieten om een pijl zo ver mogelijk op een helling te laten neerkomen, is dit een probleem dat sterk verschilt van het bepalen van de maximale horizontale reikwijdte. Zij  $\beta$  de hoek van de helling met de horizontale en  $d$  de gezochte maximale afstand. Men kan de vectoriële formule

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{g} t^2 / 2$$

nu projecteren op een klassiek verticaal-horizontaal assenkruis of op een schuin assenkruis.

#### 1. In een klassiek verticaal-horizontaal assenkruis

Hierbij moet de hoek tegenover een horizontale x-as uitgedrukt worden:

$$x = v_0 \cos(\alpha + \beta) t = d \cos \beta$$

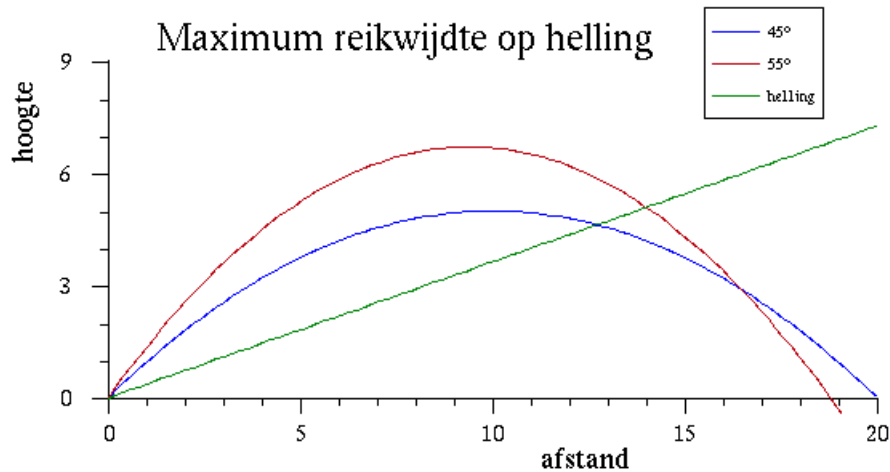
$$y = v_0 \sin(\alpha + \beta) t - g t^2 / 2 = d \sin \beta$$

Uit de eerste vergelijking haalt men de tijd en substitueert die in de tweede. Na heel wat rekenwerk en toepassen van goniometrische som- en verschilformules kan dit herwerkt worden tot:

$$d = \frac{2v_0^2}{g \cdot \cos^2 \beta} \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$$

Deze uitdrukking moet men nu partieel differentiëren naar  $\alpha$  en deze afgeleide = 0 stellen:

$$\frac{\partial d}{\partial \alpha} = -\sin(\alpha + \beta) \sin \alpha + \cos(\alpha + \beta) \cos \alpha = 0$$



Figuur 5.8: Worp op helling

Of  $\cos(2\alpha + \beta) = 0$

Dit heeft als oplossing  $2\alpha + \beta = 90^\circ$  of

$$\alpha = 45^\circ - \beta/2 \quad . \quad . \text{t.o.v. de helling} .$$

Voor een helling van  $20^\circ$  krijgt men als optimale hoek:  $\alpha = 45^\circ - 20/2 = 35^\circ$  t.o.v. de helling of  $35^\circ + 20^\circ = 55^\circ$  t.o.v. de horizontale.

## 2. In een schuin assenkruis

De x-as wordt langs de helling gelegd en de y-as staat daar loodrecht op. In eerste instantie krijgt men hier een complicatie omdat de valversnelling  $g$  nu 2 componenten heeft en moet geschreven worden als  $(-g \cdot \sin\beta, -g \cdot \cos\beta)$ . Het blijkt echter dat de verdere uitwerking eenvoudiger uitvalt doordat men nu opnieuw kan stellen dat  $y=0$  is in het eindpunt. De hoek  $\alpha$  is nu de hoek met de x-as.

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t - g \cdot \sin\beta \cdot t^2/2 = d$$

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - g \cdot \cos\beta \cdot t^2/2 = 0$$

In de laatste vergelijking kan  $t$  eenmaal weggedeeld worden, waarna men hieruit  $t$  haalt en substitueert in de eerste vergelijking. Dit levert uiteindelijk:

$$d = \frac{v_0^2}{g \cdot \cos\beta} (\sin 2\alpha - 2 \tan\beta \sin^2 \alpha)$$

Partieel differentiëren en het resultaat  $= 0$  stellen leidt tot

$$\cos 2\alpha \cdot \cos\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin\beta = 0$$

en zo opnieuw tot  $\cos(2\alpha + \beta) = 0$  zoals bij de vorige aanpak.

## Luchtweerstand

De beschrijving van de valparabool, zoals hierboven gegeven, houdt geen rekening met de luchtweerstand. Een werkelijke worp verloopt dus anders. Didactisch gezien zijn valparabolen echter een interessante topic. De theorie bevat 2 vectoriële vergelijkingen (voor snelheid en positie) in 1 scalaire variable (de tijd) en 4 vectoriële variabelen:  $\vec{r}_0, \vec{r}(t), \vec{v}_0, \vec{v}(t)$ . Voor het tweedimensionale geval levert dit 4 vergelijkingen in 9 veranderlijken. Van die 9 moeten er dus 5 gegeven worden, de andere 4 kan men dan uitrekenen. Dit geeft de mogelijkheid om een zeer grote verscheidenheid aan vraagstellingen te maken.

De oplossing voor de beweging met luchtweerstand is spijtig genoeg niet eenvoudig. Men moet dan vertrekken van een toepassing van de wet van Newton van de vorm:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - f(v)\vec{u}_t$$

In woorden: de versnelling wordt bepaald door de aantrekkingskracht van de aarde en door een tegenwerkende kracht die afhankelijk is van de snelheid en tegen de snelheid in gericht is. De horizontale snelheid

wordt nu ook vertraagd door die luchtweerstand. Daardoor is de baan geen parabool meer. Men kan een gebied onderscheiden van lage snelheid waarin de weerstand evenredig is met de snelheid. Dit levert nog een eenvoudige differentiaalvergelijking. Bij een penalty schot of bij tennis of golf zijn de snelheden echter te hoog voor deze eenvoudige formules. Men komt dan in een gebied waar de weerstand evenredig is met het kwadraat van de snelheid. Dit geeft een veel ingewikkelder differentiaalvergelijking. De speciale oppervlakte structuur van een golfbal of de donzige bekleding van een tennisbal zorgen voor complexe fenomenen die als gevolg hebben dat de luchtweerstand bij hoge snelheid vermindert. Wie hierover meer wil weten kan zijn zoektocht beginnen met de paragraaf over viskeuze wrijving (9.7)

Men kan ook een paar applets vinden met simulaties. Dit is b.v. een mooi applet i.v.m. de [beweging van een golfbal](#)<sup>1</sup> beweging van een golfbal, waarbij men ook de invloed van de oppervlaktestructuur en het meegeven van “effect” kan zien.

Er zijn veel applets beschikbaar over de valparabool zonder luchtweerstand. In Taiwan heeft iemand een simulatie gemaakt waarbij er wel luchtweerstand kan worden ingebracht. Het applet werd ook vertaald in het Nederlands. Neem de waarde van  $k$  rond 0.0001 !

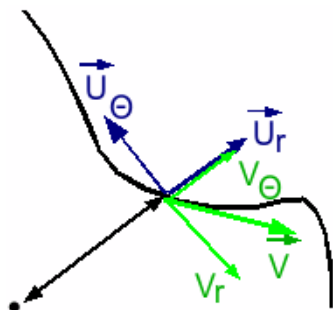
- [oorspronkelijke versie](#)<sup>2</sup>
- [Nederlandse bewerking](#)<sup>3</sup>

#### [Schuine worp zonder luchtweerstand](#)<sup>4</sup>

Voor wie zelf wat wil experimenteren is er ook een applet dat toelaat een [grafiek van een willekeurige functie](#)<sup>5</sup> van de vorm  $y=f(x)$  te maken.

## 5.2.2 Poolcoördinaten

### 5.2.2.1 Het assenkruis voor snelheid en versnelling



Figuur 5.9: Assenkruis voor snelheid en versnelling in poolcoördinaten

Een andere voorstelling in twee dimensies, die voor de technische toepassingen zeer dikwijls interessanter is, is door middel van poolcoördinaten. Na de keuze van een referentiepunt, de pool, en een referentierichting, wordt de positie weergegeven door een koppel van twee parameters: de afstand  $r$  tot de pool en de hoek  $\theta$  tussen de voerstraal en de referentierichting. De afstand  $r$  is hier een strikt cartesische afstand, dus nooit negatief. Er moet een positieve zin afgesproken worden voor  $\theta$ . Dit is meteen ook de positieve zin voor de afgeleiden van  $\theta$ . Dikwijls kiest men hiervoor de draairichting linksom, de tegenwijzerzin, de richting tegen de klok in, omdat dat overeenkomt met de positieve zin in een tweedimensioneel cartesisch assenkruis met  $x$ -as naar rechts en  $y$ -as omhoog. Dit is echter geenszins verplicht en men mag de zin kiezen die het best bij de gegeven situatie past. B.v. bij het probleempje van de auto die een brug oprijdt juist op het ogenblik dat die begint te draaien (cfr.infra), is het logisch om de zin van de hoekversnelling van de brug als positieve zin te nemen.

Merk op dat  $r$  en  $\theta$  geen componenten zijn van een vector.

De snelheid  $\vec{v}$  en de versnelling  $\vec{a}$  worden wel op de gebruikelijke manier als vector beschreven. Deze componenten worden beschouwd t.o.v. een assenkruis waarvan

- de **oorsprong** normaal in het beschouwde punt gekozen wordt;
- de **r-as** wijst in de richting van toenemende  $r$  (dus steeds van de pool weg)
- de  **$\theta$ -as** staat loodrecht op de  $r$ -as,  $90^\circ$  gedraaid in de zin van toenemende  $\theta$  (of: in de positieve zin voor  $\theta$ )

<sup>1</sup><http://www.ecs.syr.edu/centers/simfluid/red/golf.html>

<sup>2</sup><http://www.phy.ntnu.edu.tw/ntnujava/index.php?topic=145.0>

<sup>3</sup>[http://www.virtueelpracticumlokaal.nl/dragForce\\_nl/dragForce\\_nl.html](http://www.virtueelpracticumlokaal.nl/dragForce_nl/dragForce_nl.html)

<sup>4</sup><http://users.pandora.be/jvers/>

<sup>5</sup><http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/javapm/java/plota/index.html>

De componenten van de snelheid zijn (de afleidingen zullen later toegevoegd worden):

$$v_r = \frac{dr}{dt} : \text{de radiale component}$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega : \text{de transversale of } \theta \text{ component.}$$

Bemerk dat beide gewone snelheden zijn, die in m/s uitgedrukt worden. In het voorbeeld van figuur 5.9 is  $v_r$  positief maar  $v_\theta$  negatief.

Men kan gemakkelijk de betekenis zien van de termen:  $v_r$  is de snelheid van de radiale verplaatsing,  $v_\theta$  komt overeen met de omtreksnelheid van een punt op een cirkel met straal  $r$ .

De componenten van de versnelling:

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\omega^2$$

$$a_\theta = r\alpha + 2v_r\omega$$

Bemerk dat men op niveau snelheid telkens 1 term heeft voor elke component en op niveau versnelling telkens 2 termen. De betekenis van de versnellingstermen is ook eenvoudig:  $a_r$  bestaat uit de versnelling van de radiale verplaatsing + de normale versnelling van de cirkelbeweging.  $a_\theta$  bestaat uit wat de tangentiële versnelling zou zijn bij een cirkelbeweging en een speciale term die verder verklaard wordt.

### 5.2.2.2 Afleiding van de formules

Men kan de positie van een punt beschrijven als:

$$\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$$

Er zal nu beroep gedaan worden op wat hoger in de bespreking van de cirkelbeweging aangetoond werd, nl. dat de afgeleide van een eenheidsvector loodrecht staat op die vector in de richting van toenemende hoek en  $\omega$  maal de vector is. Dat levert hier:

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \omega \vec{u}_\theta \quad \text{en} \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\omega \vec{u}_r$$

Hiermede vallen de snelheid en versnelling eenvoudig uit te rekenen:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r\omega \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

En analoog voor de versnelling:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} \vec{u}_r + \frac{dr}{dt} \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \omega \vec{u}_\theta + r \cdot \alpha \cdot \vec{u}_\theta + r\omega \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

Na invullen van de uitdrukkingen voor de afgeleiden van de eenheidsvectoren en hergroeperen krijgt men:

$$\vec{a} = \left( \frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r \right) \vec{u}_r + \left( r\alpha + 2 \frac{dr}{dt} \omega \right) \vec{u}_\theta$$

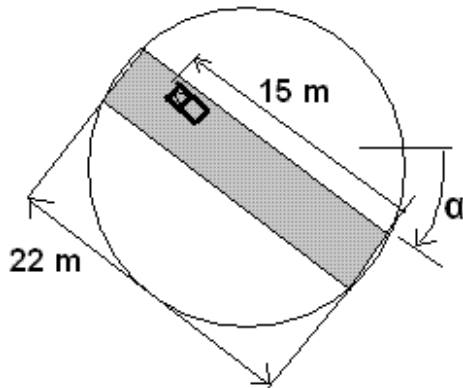
### 5.2.2.3 Praktisch gebruik van poolcoördinaten

Voor het bepalen van de radiale en transversale componenten van snelheid en versnelling bij gebruik van poolcoördinaten  $r$  en  $\theta$  speelt de hoek  $\theta$  zelf geen rol. Wel de voerstraal  $r$ , en van beide parameters de eerste en tweede afgeleide. De enige grootheden in de formules zijn dus:

$$r, \quad \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2}, \quad \omega, \quad \alpha$$

Wanneer men snelheid en versnelling in poolcoördinaten moet gebruiken, moet men dus beginnen met zich eerst af te vragen wat men over deze 5 grootheden weet. Als men voor deze elementen numerieke waarden kent, dan kan men alle componenten van snelheid en versnelling berekenen en indien nodig de versnelling ook omrekenen naar normale en tangentiële versnelling.

### Voorbeeld: auto op draaiende brug



Figuur 5.10: Auto op draaiende brug

Nemen we als voorbeeld het probleem van de auto op de brug. Op het ogenblik dat een auto een brug oprijdt, begint deze te draaien met een hoekversnelling van  $1/6 \text{ rad/s}^2$ . De snelheid van de auto op de brug is  $5 \text{ m/s}$ . Bereken de snelheid en versnelling van de auto als de auto 15 m ver is op de brug.

Dit is een goed probleem voor poolcoördinaten omdat de beweging een combinatie is van een draaiende drager met daarop een beweging door het centrum van de rotatie (radiale beweging). Als pool moeten we een stilstaand punt hebben. Dat wordt dus het midden van de brug. Als positieve zin voor de hoekgrootheden kiezen we de zin van de hoekversnelling  $\alpha$ , wijzerzin dus. Wat weten we over de 5 basiselementen?

- $r = 15 - 11 = 4 \text{ m}$  voorbij 't midden.
- $v_r = +5 \text{ m/s}$  (snelheid van de wagen op de brug, volgens de positieve zin van de r-as)
- de afgeleide,  $d^2r/dt^2$ , hiervan is nul daar  $v_r$  constant is.

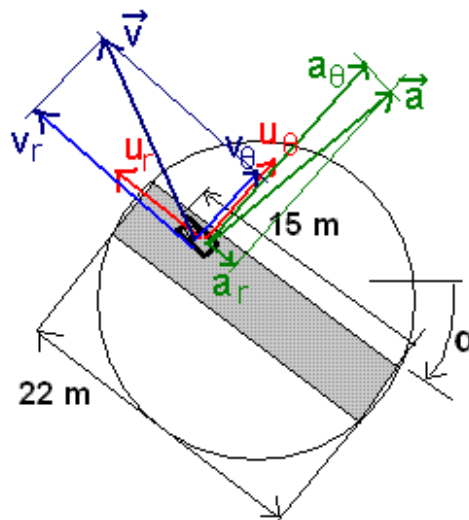
- de hoeksnelheid  $\omega$  is niet rechtstreeks gegeven, wel de hoekversnelling  $\alpha$ .  $\omega$  moet dan volgen uit de betrekking:  $\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0 + 1/6 \times 3 = \frac{1}{2} \text{ rad/s}$
- $\alpha = 1/6 \text{ rad/s}^2$ .

Hieruit volgen dan door eenvoudig invullen in de formules van poolcoördinaten de verschillende componenten van snelheid en versnelling (fig. 5.11):

$$v_\theta = r \cdot \omega = 4 \cdot 1/2 = 2 \text{ m/s}$$

$$a_r = d^2r/dt^2 - r \cdot \omega^2 = 0 - 4 \cdot (1/2)^2 = -1 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = r \cdot \alpha + 2 \cdot v_r \cdot \omega = 4 \cdot 1/6 + 2 \cdot 5 \cdot 1/2 = 5 \cdot 2/3 \text{ m/s}^2 = 5,667 \text{ m/s}^2$$



Figuur 5.11: Snelheid en versnelling van de auto

Snelheid en versnelling staan bijna loodrecht op elkaar. Met de formules van 5.2.3 zal men een grote normale versnelling en een kleine tangentiële versnelling bekommen.

De meest voorkomende fout is dat men een functie maakt voor de positie van de auto op de brug:  $r = 11 - v \cdot t$  want op  $t = 0$  moet  $r = 11 \text{ m}$  zijn.



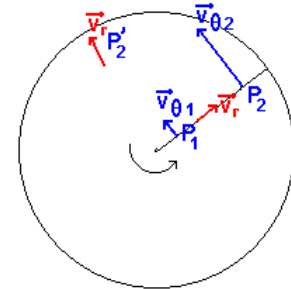
Voor  $t = 3$  levert deze functie echter een negatieve waarde voor  $r$ , nl.  $-4$  m, wat onaanvaardbaar is. Deze functie is enkel geldig vóór de auto het midden van de brug bereikt heeft. Eens de wagen voorbij het midden is moet men schrijven  $r = v \cdot t - 11$ .

Bemerk dat de eerste functie voor  $v_r$  de waarde  $-5$  m/s levert. Dit is de correcte waarde vooraleer de auto het midden bereikt. Controleer dit door het assenkruis te tekenen als de wagen nog voor het midden is! ( $r$ -as moet naar buiten wijzen,  $v_r$  is naar het centrum van de brug)

#### 5.2.2.4 De term $2 \cdot v_r \cdot \omega$

De fysische betekenis van deze term kan gemakkelijk worden aangetoond. Hij treedt alleen op als iemand zich in een draaiend systeem bevindt EN zijn afstand tot het rotatiecentrum verandert. Dit is feitelijk een vorm van Coriolisversnelling.

Kijken we hiervoor naar de figuur 5.12. Als iemand in het punt  $P_1$  staat (afstand  $r_1$ ), dan heeft hij een omtreksnelheid  $v_{\theta 1}$ . Als hij in  $P_2$  staat (afstand  $r_2$ ) heeft hij een evenredig grotere omtreksnelheid  $v_{\theta 2}$ .



Figuur 5.12: Oorsprong van de Coriolisversnelling

Veronderstellen we nu dat iemand op het ogenblik  $t_0$  in  $P_1$  vertrekt en met een constante  $v_r$  naar  $P_2$  marcheert. Na een tijd  $\Delta t$  komt hij dan in  $P_2$ . Doordat zijn afstand tot het rotatiecentrum van  $r_1$  toegenomen is tot  $r_2$ , is zijn omtreksnelheid toegenomen van  $v_{\theta 1}$  tot  $v_{\theta 2}$ . Voor deze toename met  $\Delta v_{\theta}$  is er een versnelling in de richting van  $v_{\theta}$  nodig geweest. Voor constante  $v_r$  en  $\omega$  kan deze berekend worden als

$$\Delta v_{\theta} / \Delta t = ((r_2 - r_1) \cdot \omega) / ((r_2 - r_1) / v_r) = v_r \cdot \omega$$

Dit is dus het effect van de verandering van  $r$ .

Als de man van buiten naar binnen komt, moet  $v_r$  negatief gerekend worden en wordt deze term negatief. De omtreksnelheid van de man moet dan kleiner worden, hij moet afgeremd worden. Hiervoor is een versnelling nodig die tegengesteld is aan  $v_{\theta}$ .

De term  $v_r \cdot \omega$  komt echter nog een tweede maal voor. Op het ogenblik dat de man in  $P_2$  toekomt, zal het systeem gedraaid zal zijn t.o.v. de vertrekpositie. Op dat ogenblik marcheert de man niet meer in de oorspronkelijke richting van  $P_2$ , maar misschien in de richting van  $P'_2$ . De richting van  $v_r$  verandert dus voortdurend. Ook dit vraagt een versnelling loodrecht op  $v_r$  en gelijk aan  $v_r \cdot \omega$  (de top van  $v_r$  beschrijft een cirkel in de ruimte van de snelheden). Zo komt men aan  $2 \cdot v_r \cdot \omega$ .

### 5.2.3 Berekenen van normale en tangentiële versnelling

De versnelling kan niet alleen ontbonden worden in componenten volgens verschillende assenkruisen, ze kan ook ontbonden worden in een normale en tangentiële component. De tangentiële component is rakend aan de baan, parallel met de snelheid. De normale component is gericht naar het kromtemiddelpunt van de baan. Hieronder volgt een overzicht van de formules om van een de componenten in een orthogonaal assenkruis over te gaan naar normale of tangentiële versnelling.

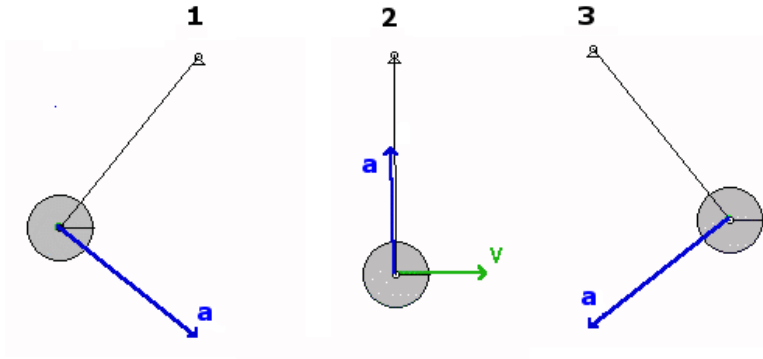
Hieronder het voorbeeld van een slinger, waarbi jvoortdurend een tangentiële versnelling overgaat in normale en terug. In de uiterste standen van de slinger is er alleen een tangentiële component  $a_t$  en in de laagste stand alleen een normale component  $a_n$ . Men kan de slinger in beweging zien op [Wikibooks](http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke_Mechanica/Kinematica#Normale_en_tangenti.C3.ABle_versnelling)<sup>6</sup> (en op verscheidene andere plaatsen op het web!)

#### 5.2.3.1 Tangentiële versnelling

1 - Volgens de definitie:

$$a_t = \frac{d}{dt} \|\vec{v}\| = \frac{d}{dt} \sqrt{\sum_i v_i^2}$$

<sup>6</sup>[http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke\\_Mechanica/Kinematica#Normale\\_en\\_tangenti.C3.ABle\\_versnelling](http://nl.wikibooks.org/wiki/Klassieke_Mechanica/Kinematica#Normale_en_tangenti.C3.ABle_versnelling)



Figuur 5.13: Slinger met snelheids- en versnellingsvector

In 2 dimensies kan hiervoor geschreven worden:

$$a_t = \frac{d}{dt} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{d}{dt} \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

Alhoewel de richting van de assen veranderlijk is bij poolcoördinaten, mag deze formule ook gebruikt worden met poolcoördinaten omdat de grootte van een vector een invariant is voor rotatie.

2 - Door projectie op de raaklijn aan de baan

De tangentiële component van de versnelling is de projectie van de versnelling op de raaklijn aan de baan, die gegeven is door de snelheid. De projectie kan men bepalen door het scalaire product van de versnelling met een eenheidsvector volgens de raaklijn. Die kan men construeren door de snelheid te delen door de norm ervan. In een orthogonaal assenkruis is een scalair product eenvoudig uit te rekenen.

$$a_t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sum_i a_i v_i}{\sqrt{\sum_i v_i^2}}$$

Dit is een interessante formule wanneer de componenten van  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{v}$  al bekend zijn in een orthogonaal assenkruis. De formule is ook bruikbaar voor numerieke waarden op een bepaald ogenblik. En als in twee dimensies een van de componenten van  $\mathbf{a}$  of  $\mathbf{v}$  nul is, staat er in de teller nog hoogstens één term.

3 - Volgens de stelling van Pythagoras:

$$a_t = \sqrt{a^2 - a_n^2}$$

4 - Voor een cirkelbeweging:

$$a_t = r \alpha$$

### 5.2.3.2 Normale versnelling

1 - Volgens de definitie:

$$a_n = \frac{\|v\|^2}{\rho},$$

waarin  $\rho$  de kromtestraal van de baan in het beschouwde punt is. Voor een cirkel is dat de straal  $r$ . Deze betrekking wordt echter meestal gebruikt om  $\rho$  te bepalen, waarbij  $a_n$  via een andere weg bekend moet zijn.

2 - door projectie op de normaal

De normaal is een eenheidsvector loodrecht op de snelheid. Voor de projectie op de normaal moet men  $\mathbf{a}$  vermenigvuldigen met de sinus van de hoek tussen snelheid en versnelling. Deze sinus kan men uit het vectoriële product halen gedeeld door de norm van  $\mathbf{a}$  en  $\mathbf{v}$ . Hierdoor valt  $\mathbf{a}$  onder en boven weg. In een vlak systeem heeft dit vectoriële product maar één component, die men dan ook gemakkelijk kan uitschrijven:

$$a_n = \|\vec{a}\| \sin(\vec{a}, \vec{v}) = \|\vec{a}\| \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{a} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{|a_1 \cdot v_2 - a_2 \cdot v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

De indices 1 en 2 mogen vervangen worden door x en y of door r en  $\theta$ . Dit is weer een zeer interessante formule om dezelfde redenen als vermeld bij de tangentiële versnelling.

3 - Volgens de stelling van Pythagoras:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

4 - Voor een cirkelbeweging:

$$a_n = r \omega^2$$

Steeds geldt volgens de stelling van Pythagoras:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Dit kan men eventueel als controle gebruiken bij het omrekenen. De grootte van de versnelling moet dezelfde blijven, in welke coördinaten die ook uitgedrukt wordt.

### 5.2.3.3 Voorbeeld

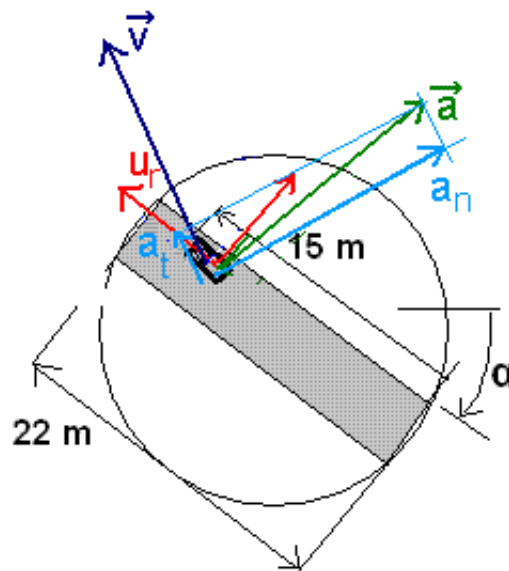
Toegepast op het voorbeeld van de auto op de brug met in poolcoördinaten  $\mathbf{v}$  (5; 2) en  $\mathbf{a}$  (-1; 5,667), telkens met de 3e formule:

$$a_t = \frac{-1 \times 5 + 5,667 \times 2}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = 1,176 \text{ m/s}^2 \text{ (i lopend over r en } \theta)$$

$$a_n = \frac{|-1 \times 2 - 5,667 \times 5|}{\sqrt{29}} = 5,633 \text{ m/s}^2 \text{ (met index 1 = r en index 2 = } \theta)$$

Ter controle: de grootte van a moet in alle ontbindingen dezelfde zijn:

$$a = \sqrt{\sum_i a_i^2} = \sqrt{(-1)^2 + 5,667^2} = \sqrt{1,176^2 + 5,633^2} = 5,75 \text{ O.K.}$$



Figuur 5.14: Normale en tangentiële versnelling bij auto op draaiende brug

Bemerk dat het kromtemiddelpunt van de baan in de richting van  $a_n$  ligt, niet in het midden van de brug.

## 5.3 Bewegende referentiesystemen

### 5.3.1 Snelheden

Wanneer men in een rijdende wagen of trein zit, dan heeft men de indruk dat het landschap voorbij schuift. Wij weten dat dat de aarde rond de zon draait, maar wat we zien is een zon die rond de aarde draait. Dit zijn gevallen van waarnemingen die gebeuren vanuit een bewegend referentiesysteem. In veel gevallen moet men voor berekeningen echter werken met een beschrijving in een stilstaand referentiesysteem en zal men dus deze bewegingen moeten omrekenen. De beweging gezien vanuit een bewegend systeem noemt men ook wel **relatieve bewegingen**, die ten opzichte van een vast systeem **absolute beweging**. In een eerste deel zal gehandeld worden over de snelheden, in een tweede over de versnellingen.

#### 5.3.1.1 De drie snelheden

Een ander eenvoudig geval van een samengestelde beweging is die van een bootje of zwemmer in stromende water. Wie het ooit gedaan heeft weet dat hij dan een beetje tegen de stroming in moet zwemmen om volgens een rechte lijn naar de overzijde te bewegen. Als men zich gewoon zou laten drijven dan zou men door de stroming **meegesleept** worden. De snelheid van de stroming zal men daarom de **sleepsnelheid** noemen. De rechte lijn die men wil volgen t.o.v. de oevers is de baan in het vaste systeem. De schuine richting waarin men moet zwemmen of varen is de richting van de baan t.o.v. het water.

Voor het eenvoudige geval van een bootje op een rivier kan men zeggen dat de snelheid van de boot t.o.v. de oevers gelijk is aan de vectoriële som van de snelheid van de boot t.o.v. het water + de snelheid van de water op de plaats waar de boot zich bevindt. De formele definities zijn:

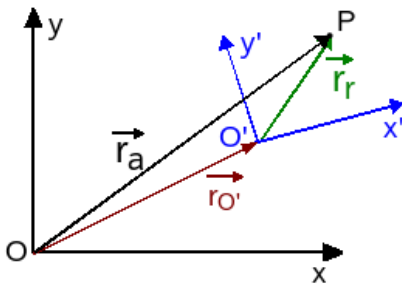
**absolute snelheid**  $\mathbf{v}_a$  = de snelheid volgens de baan in het vaste systeem

**relatieve snelheid**  $\mathbf{v}_r$  = de snelheid volgens de baan in het bewegend systeem

**sleepsnelheid**  $\mathbf{v}_s$  = de snelheid van het punt van het bewegend systeem waarop het beschouwde punt zich bevindt.

“Relatief” betekent in deze context: “t.o.v. het bewegende systeem”. Hiermede krijgt men de formulering van de stelling:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_s + \vec{v}_r$$



Figuur 5.15: Absolute en relatieve positie

Om deze stelling te bewijzen moet men een vast referentiesysteem XYZ invoeren en een bewegend systeem X'Y'Z'. De positie van het punt P wordt dan in het vaste systeem gegeven door  $\vec{r}_a$  en in het bewegend systeem door  $\vec{r}_r$ . Men noemt deze laatste ook wel de relatieve positie, vandaar de index r. Er geldt volgend verband:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_{O'} + \vec{r}_r$$

Hierbij kan men  $\vec{r}_a$  uitdrukken in functie van de eenheidsvectoren van het bewegend systeem:

$$\vec{r}_r = x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'}$$

Invoeren in vorige uitdrukking levert:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_{O'} + x' \vec{u}_{x'} + y' \vec{u}_{y'} + z' \vec{u}_{z'}$$

Om de verbanden tussen de snelheden te vinden moet men deze uitdrukking nu differentiëren naar de tijd. Men bekomt dan:

$$\vec{v}_a = \vec{v}'_{O'} + v_{x'} \vec{u}_{x'} + v_{y'} \vec{u}_{y'} + v_{z'} \vec{u}_{z'} + x' \frac{d\vec{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}_{z'}}{dt}$$

Men kan hierin verschillende termen onderscheiden:

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} \text{ is de } \mathbf{absolute\ snelheid}$$

$v_{x'} \vec{u}_{x'} + v_{y'} \vec{u}_{y'} + v_{z'} \vec{u}_{z'}$  is de snelheid van het punt P t.o.v. het bewegend assenkruis. Dit is de **relatieve snelheid**.

De resterende termen vormen de **sleepsnelheid**. Men kan hierin 2 bijdragen onderscheiden:

- $\vec{v}'_O = \frac{d\vec{r}'_{O'}}{dt}$  is de **translatiecomponent van de sleepsnelheid**:  $\vec{v}_{s,tr}$ . Deze term treedt op zodra de oorsprong van het bewegend assenkruis beweegt en is voor alle punten binnen het bewegend systeem dezelfde, onafhankelijk van hun relatieve positie.
- $x' \frac{d\vec{u}'_{x'}}{dt} + y' \frac{d\vec{u}'_{y'}}{dt} + z' \frac{d\vec{u}'_{z'}}{dt}$ : dit is een term die ontstaat als de eenheidsvectoren van het bewegend systeem veranderen t.o.v. het vaste systeem. Deze verandering kan alleen een richtingsverandering zijn. Dat betekent dat het bewegend systeem een rotatie uitvoert rond zijn oorsprong. Het is de **rotatiecomponent van de sleepsnelheid**:  $\vec{v}_{s,rot}$ . In de praktijk zal men de formule van de cirkelbeweging toepassen en zeggen dat deze component van de sleepsnelheid loodrecht zal staan op  $r_r$ , in grootte gelijk zal zijn aan  $r_r \omega_{assen}$  en een zin zal hebben volgens de zin van  $\omega_{assen}$ .

Voor de praktijk zal men moeten proberen om zoveel mogelijk informatie over elke van deze snelheden te verzamelen los van de andere. Het invoeren in de vergelijking moet dan toelaten om de ontbrekende verbanden te vinden. Bij een tweedimensionaal systeem kan men dus maximum 2 onbekenden hebben bij het invullen in de basisvergelijking.

Als men op basis van een statische tekening iets wil vertellen over snelheden, dan moet men zich laten leiden door de stelling dat een **snelheid altijd rakend is aan de baan**. Om de baan binnen het bewegend systeem te vinden moet men niet op zijn verbeelding steunen maar op geometrische eigenschappen zodat men zeker is van zijn besluiten. Men zal zich moeten laten leiden door het type verbinding tussen het punt en het bewegend systeem.

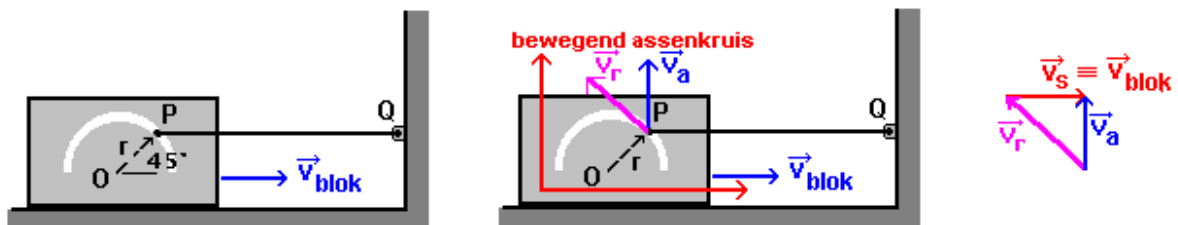
- Bestaat die verbinding uit een staaf, dan moet men proberen een bewegend assenkruis in te voeren zodat het andere einde van de staaf stilstaat in dat assenkruis (dat hoeft niet in de oorsprong te zijn). Dan zal het bewegende punt in het bewegend assenkruis een cirkel moeten beschrijven rond dat andere eindpunt.
- Als het bewegend punt op een of andere manier verplicht wordt langs iets ander te glijden (pin in een gleuf, mof over een staaf, langs een oppervlak), dan moet men proberen een bewegend assenkruis in te voeren zodat het element waarlangs het punt moet glijden stilstaat in dat bewegend assenkruis.

Over het bewegend assenkruis dat men gekozen heeft moet men 2 vragen stellen:

- Beweegt de oorsprong? Zo ja dan treedt de snelheid van die oorsprong op als sleepsnelheid voor alle punten binnen het bewegend systeem.
- Verandert de richting van de assen? Zo ja dan zit er een rotatiecomponent in de sleepsnelheid.  $v_{s,rot}$  men zal bepalen met de formule van de cirkelbeweging.

Het is zelden nodig het vaste assenkruis goed te definiëren omdat men hier met snelheden bezig is. Men zal dat vaste assenkruis alleen moeten definiëren als men ook posities binnen dat vaste assenkruis nodig heeft. Zie in dit verband ook wat gezegd is in het hoofdstuk Basisbegrippen in de slotopmerkingen 1.3.

### 5.3.1.2 Voorbeelden



Figuur 5.16: Pin in gleuf

Als eerste eenvoudig voorbeeld kan men het geval beschouwen van een pin die in een gleuf in een blok moet glijden (fig. 5.16). Het blok schuift op het geven ogenblik naar rechts met een gegeven snelheid

$v_{\text{blok}}$ . De pin zit op het einde van een staaf die scharnierend verbonden is met het vaste systeem in Q. Men vraagt de hoeksnelheid van de staaf op het gegeven ogenblik.

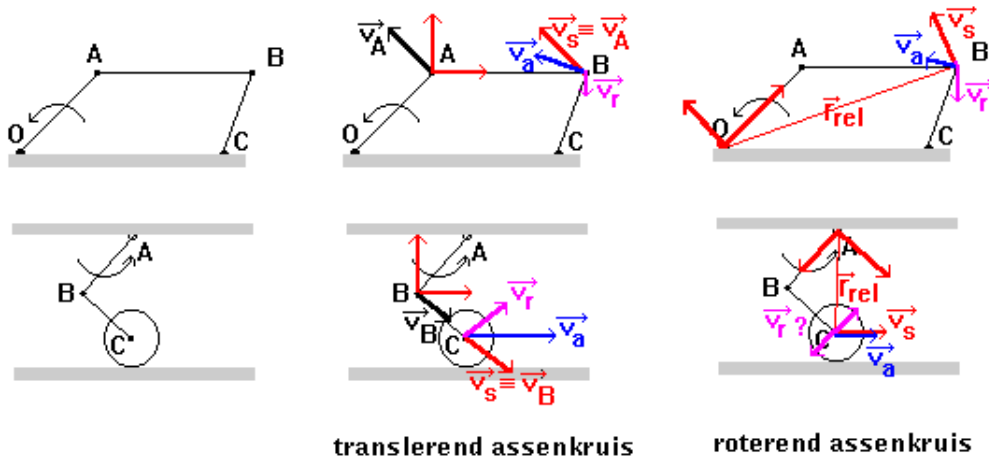
- De staaf QP vormt de verbinding van P met het vaste systeem. Binnen het vaste systeem beschrijft de pin dus een cirkel rond Q. Op het gegeven ogenblik moet de pin omhoog bewegen. De absolute snelheid zal dus loodrecht staan op de staaf QP en  $v_a = QP \cdot \omega_{\text{staaf}}$

- De pin moet in de gleuf blijven. Die gleuf beweegt. De gleuf kan de baan van de relatieve snelheid worden als men een assenkruis kan invoeren zodat die gleuf stilstaat binnen dat assenkruis. De oplossing is eenvoudig: elk assenkruis verbonden met het blok is goed. De snelheid in de gleuf wordt zo de  $v_r$ .

- Het assenkruis beweegt mee met het blok: de oorsprong beweegt, de richting van de assen blijft onveranderd. Het is dus een zuiver translaterend assenkruis en  $v_s = v_{\text{blok}}$ .

Zo bekomt men de snelhedendriehoek, waarin alleen de grootte van  $v_a$  en  $v_r$  onbekend zijn. Het probleem is dus oplosbaar.

In figuur 5.17 vindt men twee voorbeelden waarbij men zowel een translaterend als een roterend assenkruis kan gebruiken. Bij een translaterend assenkruis blijft de richting van de assen behouden. Daarom wordt het hier vertikaal-horizontaal getekend. De oorsprong beweegt op een cirkel. Bij gebruik van een roterend assenkruis wordt het verbonden met de roterende staaf. Men probeert de oorsprong in een stilstaand punt te kiezen zodat de sleepsnelheid maar 1 component heeft, nl. de rotatiecomponent. Om die uit te rekenen moet de relatieve positievector gekend zijn.



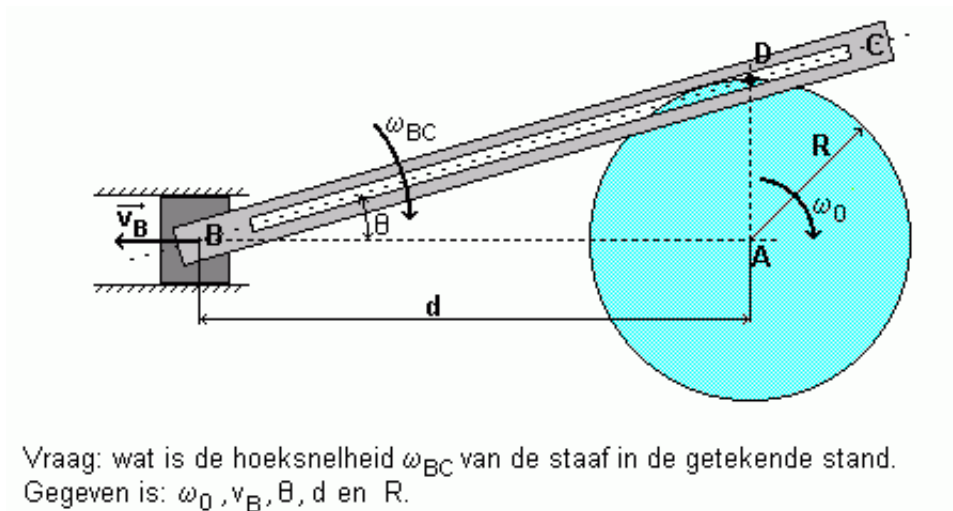
Figuur 5.17: Voorbeelden met 2 oplossingen

Men onderstelt telkens de hoeksnelheid van de eerste staaf en de geometrie van de opstelling bekend. Bemerkt dat men bij de laatste uitwerking niet goed weet of de relatieve snelheid naar boven of naar onder zal gericht zijn. Ze blijkt uiteindelijk 0 te zijn. De snelhedendriehoek is ontwaard tot 2 samenvallende zijden en  $v_a$  blijkt gelijk aan  $v_s$ .

### Een complexer voorbeeld: figuur 5.18

De analyse van de verbindingen leert dat de pin D enerzijds deel uitmaakt van de schijf en anderzijds verplicht wordt in de gleuf BC te glijden.

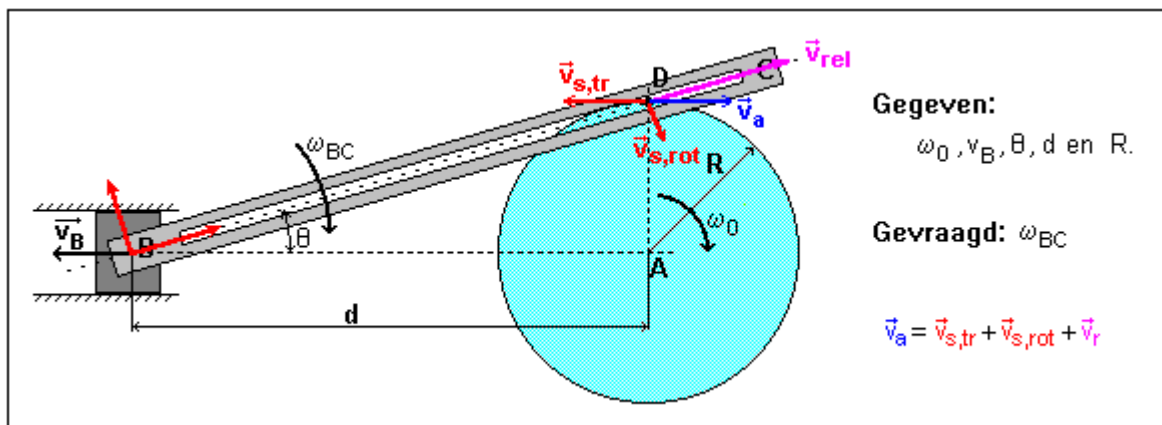
- Als vastgemaakt op de schijf moet D een cirkel rond A beschrijven in het vaste assenkruis.  $v_a$  zal dus horizontaal en naar rechts zijn.
- De gleuf is een bewegend element. Voor men de gleuf als de baan van de relatieve snelheid kan gebruiken, moet men een assenkruis invoeren zodat de gleuf stil staat binnen dat assenkruis. De gleuf roteert, maar niet rond een vast punt. Men kent wel de snelheid van het punt B. Men zal dus een assenkruis moeten invoeren dat roteert met de staaf en transleert met B. Men kiest dus B als oorsprong. Voor  $v_s$  krijgt men 2 componenten:
  - een translatiecomponent =  $v_B$
  - een rotatiecomponent =  $BD \cdot \omega_{BC}$ , loodrecht op de staaf BC en naar beneden (waarschijnlijk).



Figuur 5.18: Complex voorbeeld van samengestelde beweging

- Met het gekozen assenkruis wordt de gleuf BC de baan van D binnen het bewegend assenkruis.  $v_r$  zal voor de gegeven situatie naar rechts gericht zijn volgens de gleuf.

Dit levert de volgende situatie:



Figuur 5.19: Oplossing voor het complexere probleem

Daar men hier met meer dan 3 vectoren te doen heeft zal men de vergelijking projecteren. De gevraagde  $\omega_{BC}$  zit in de  $v_{s,rot}$ , die volgens de y-as van het bewegend assenkruis ligt. Projectie op die as levert een vergelijking waarin alleen  $v_{s,rot}$  als onbekende voorkomt, zodat men daaruit onmiddellijk  $\omega_{BC}$  kan berekenen.

$$-v_a \sin \theta = v_{s,tr} \sin \theta - BD \cdot \omega_{BC}$$

$$\omega_{BC} = (v_{s,tr} + v_a) \sin \theta / BD$$

Met  $BD = d / \cos \theta$ :

$$\omega_{BC} = (v_B + R \cdot \omega_0) \sin \theta \cdot \cos \theta / d$$

**Tot slot :** bij de voorbeelden hierboven gaat het telkens over drie elementen: een bewegend punt, een bewegend systeem en een vast systeem. Meer kan men in één toepassing van de stelling van de drie snelheden niet gebruiken. De werkelijkheid is echter dikwijls complexer. Men kan een bewegend systeem hebben dat zelf beweegt t.o.v. een ander bewegend systeem. Men kan een punt hebben met twee verbindingen naar bewegend systemen i.p.v. naar een bewegend en naar een vast systeem. In al die gevallen zal men **meerdere keren drie elementen moeten kiezen**, een bewegend punt, een bewegend systeem en een “vast”systeem”, zodat men de stelling van de drie snelheden kan formuleren. Men zal de theorie meerdere malen moeten toepassen.

## 5.3.2 Versnellingen

### 5.3.2.1 Een woord vooraf

Intuïtief heeft men nog enig zicht op snelheden. Men kan b.v. gemakkelijk begrijpen dat bij een staaf die een willekeurige beweging uitvoert, de snelheidscomponenten van beide uiteinden volgens de richting van de staaf dezelfde moeten zijn, want anders zou de staaf korter of langer worden. Dezelfde redenering geldt absoluut niet op het niveau versnelling. Als een draaiende staaf aan één einde vastzit aan een as, dan heeft dat einde geen versnelling terwijl het andere einde minstens een normale versnelling heeft, die naar die as gericht is. Wanneer men te maken heeft met versnellingen geldt als regel: **houd u aan de formules, reken niet op intuïtie**.

De wet van Newton legt een verband tussen krachten en versnellingen. Als men geen intuïtief zicht heeft op versnellingen betekent dat dus ook dat men geen intuïtief zicht heeft op de krachten die optreden in dynamische situaties: versnellen, vertragen, een bocht nemen, trillende systemen, enz.

### 5.3.2.2 Een nieuwe operator

Als men een vector beschrijft enerzijds met coördinaten in een vast assenkruis en anderzijds met coördinaten in een roterend assenkruis (relatieve coördinaten), dan zal men bij de afgeleide naar de tijd van de relatieve coördinaten nog een sleepsnelheid moeten bijtellen om de afgeleide in het vaste systeem te bekomen. Deze sleepsnelheid is gegeven door een cirkelbeweging van het punt rond de rotatie as. Deze snelheid kan men in het algemeen uitdrukken met een vectorieel product als  $\vec{\omega} \times \vec{r}_r$ . Dit verband werd hierboven afgeleid voor een positievector, maar is onafhankelijk van de aard van de vector. In het algemeen zou men dus over een **sleefverandering** kunnen spreken als het verschil tussen de absolute en de relatieve afgeleide. Dit verband kan zeer dikwijls toegepast worden en wordt daarom geformuleerd in de vorm van een **operator om te differentiëren in een roterend assenkruis** :

$$\frac{d}{dt} |_{abs} = \frac{d}{dt} |_{rel} + \vec{\omega} \times$$

Hierin duidt “relatief” op een bewerking die uit te voeren is op vectoren bepaald t.o.v. het bewegend systeem, of op de coördinaten van die vectoren in het bewegend systeem..

Met deze operator wordt de vorige afleiding een stuk korter. Men vertrekt van:

$$\vec{r}_a = r_{O'} \vec{e}' + \vec{r}_r$$

Hierin is alleen  $\vec{r}_r$  gedefinieerd in een (eventueel) roterend assenkruis. Toepassing van de operator levert (de haakjes groeperen termen die afkomstig zijn van eenzelfde term)

$$\vec{v}_a = v_{O'} \vec{e}' + (\vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}_r)$$

### 5.3.2.3 De versnelling

Men kan nu ook verdergaan naar de versnelling. Door differentiëren van de uitdrukking voor  $\vec{v}_a$  hierboven, bekomt men de absolute versnelling. Hierbij zijn  $\vec{r}_r$  en  $\vec{v}_r$  gedefinieerd in een (eventueel) roterend assenkruis.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{O'} + (\vec{a}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r) + (\alpha \times \vec{r}_r + \vec{\omega} \times \vec{v}_r + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r))$$

Men kan deze termen op verschillende wijze groeperen. Een mogelijkheid is weer volgens sleep- en relatieve versnelling en dan blijkt er nog een term bij te komen:

$$\vec{a}_a = (\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r) + \vec{\alpha} \times \vec{r}_r) + \vec{a}_r + 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_s + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

De sleepsversnelling, d.i. de versnelling van het punt van het bewegend systeem waarop het beschouwde punt zich bevindt, bestaat uit 3 termen:

- de versnelling van de oorsprong van het assenkruis; Dit kan men de translatiecomponent van de sleepsversnelling noemen.



- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_r)$  : de factor tussen de haken levert de sleepsnelheid, die loodrecht staat op  $\vec{\omega}$ . Het volgende vectoriële product levert een vector die loodrecht staat op het vlak van  $\vec{v}_r$  en  $\vec{\omega}$ . Het is een vector die naar  $\vec{\omega}$  gericht is, nl. de **normale component van de sleepversnelling**. Grootte =  $\omega^2 \cdot r_r \cdot \sin\theta$ , met  $\theta$  de hoek tussen  $\vec{r}_r$  en  $\vec{\omega}$ .
- $\vec{\alpha} \times \vec{r}_r$  : dit is de **tangentiële component van de sleepversnelling**.

Naast de relatieve versnelling is er dan nog de term  $2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r)$ . Deze term verscheen reeds bij de studie van de versnelling in poolcoördinaten 5.2.2 in het eerste deel van Kinematica. Zoals daar kan men ook hier vaststellen dat de term eenmaal afkomstig is van de sleepverandering van  $\vec{v}_r$  (d.i. een richtingsverandering) en eenmaal van de verandering van de grootte van  $\vec{r}_r$ . Alleen wanneer  $\vec{v}_r$  evenwijdig is aan  $\vec{\omega}$  bestaat deze term niet. Spijtig genoeg is er geen volledige unanimitéit over de benaming van de term. De term, zoals hier genoteerd, geeft de versnelling zoals gezien in het vaste assenkruis. Voor sommigen is dit de **Coriolisversnelling**, maar anderen reserveren die term voor de versnelling die men ziet in het bewegend assenkruis en die heeft de tegengestelde zin (zie "Coriolis versnelling en bewegingen op aarde", 5.3.2.5). Deze laatste groep noemt dit dan de **complementaire versnelling**. Het blijkt in elke geval nog eens dat de versnelling componenten bevat waar intuïtief niet aangedacht wordt, alhoewel men ze nadien wel kan verklaren.

### Voorbeeld

Het is interessant om te zien hoe men via verschillende benaderingen uiteindelijk op dezelfde termen kan uitkomen, alhoewel langs ogenschijnlijk totaal verschillende wegen. Zij b.v. een draaiend plateau gegeven met straal  $R$  en hoeksnelheid  $\omega$ . Op de rand van dit plateau loopt iemand met relatieve snelheid  $v_r$  tegen de rotatie van het plateau in. Men vraagt de versnelling van die persoon te berekenen.

- **Eerste benadering**. Als de persoon stilstaat, dan beschrijft hij een cirkel met hoeksnelheid  $\omega$ . Zijn beweging t.o.v. de schijf kan beschouwd worden als een relatieve cirkelbeweging met hoeksnelheid  $\omega_r = v_r/R$ . Men kan dus zeggen dat hij t.o.v. het vaste systeem een cirkel beschrijft met hoeksnelheid  $\omega - \omega_r$ . Hierbij hoort een normale versnelling met grootte

$$a_n = (\omega - \omega_r)^2 \cdot R = (\omega^2 - 2\omega \cdot \omega_r + \omega_r^2)R = \omega^2 \cdot R - 2\omega \cdot v_r + \omega_r^2 \cdot R$$

Deze normale versnelling is naar binnen, naar de as gericht.

- **Tweede benadering**. Men beschouwt de beweging binnen een assenkruis roterend met de schijf. Men krijgt dan voor de drie componenten van de absolute versnelling:

$$a_s = \omega^2 \cdot R \quad , \text{ naar binnen gericht}$$

$$a_r = v_r^2/R = \omega_r^2 \cdot R \quad , \text{ naar binnen gericht}$$

$$a_c = 2\omega \cdot v_r \quad . \text{ Deze term is naar buiten gericht.}$$

Men bekomt dus exact dezelfde termen, maar onder andere benamingen.

#### 5.3.2.4 Eenvoudiger formule voor starre voorwerpen

Binnen onvervormbare of starre voorwerpen stelt zich regelmatig het probleem om de versnelling van een punt te berekenen uitgaande van de bekende versnelling van een ander punt. Voor deze toepassing kan bovenstaande formule sterk vereenvoudigd worden. Zij punt A het referentiepunt met een bekende versnelling en punt B het punt waarvan men de versnelling wil berekenen. Men kan dan een translierend assenkruis verbinden met A en vandaar kijken naar B. Daar het een translierend assenkruis is, valt alvast de Coriolisversnelling weg. De versnelling van B is dus alleen de som van de versnelling van A met een relatieve versnelling van B t.o.v. A. Als het over een onvervormbaar voorwerp gaat, dan kan die relatieve beweging alleen een rotatie zijn met een hoeksnelheid  $\omega$  en/of een hoekversnelling  $\alpha$ . Als er een hoeksnelheid is, dan is er ook een normale versnelling van B naar A met grootte  $AB \cdot \omega^2$ . Als er een hoekversnelling is, dan is er een tangentiële versnelling loodrecht op de rechte AB, met een zin volgens de zin van  $\alpha$  en met grootte  $AB \cdot \alpha$ . Samengevat:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{(B,A)n} + \vec{a}_{(B,A)t}$$

### 5.3.2.5 Coriolisversnelling en bewegingen op aarde

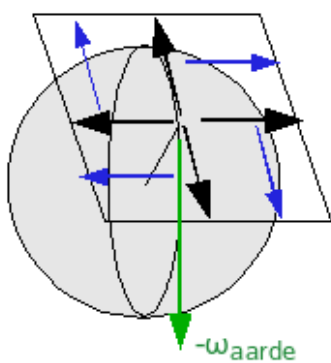
Normaal wordt de aarde als een vast systeem beschouwd, maar dat is ze in feite niet. Dat heeft gevolgen voor vele bewegingen op aarde. Hier moet even vooruit gelopen worden op het volgend hoofdstuk, waarin de wet van Newton behandeld wordt. Deze wet stelt dat de som van alle krachten op een massa steeds gelijk zal zijn aan het product van die massa maal de versnelling van die massa. Als er geen krachten op een massa uitgeoefend worden, dan is er geen versnelling, d.i. de massa blijft in rust of blijft met constante lineaire snelheid bewegen. Deze wet mag enkel toegepast worden in een systeem dat in rust is of dat met constante snelheid beweegt. In een roterend systeem schijnt de wet niet te kloppen. De versnelling die een waarnemer ziet, berekend op basis van de baan in het bewegend systeem, is de relatieve versnelling. Als alle uitwendige krachten = 0 zijn dan blijkt er in een roterend assenkruis toch nog een relatieve versnelling op te treden. Wiskundig betekent het dat er in de relatieve versnelling, de versnelling gezien door de waarnemer in het bewegend systeem, termen moeten komen die juist het tegengestelde zijn van de sleepversnelling en de complementaire versnelling zodat de totale som 0 is. De man in het bewegend systeem kent dus aan het punt een versnelling  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}_r$  toe. Het is deze versnelling, zoals waargenomen door de waarnemer in het bewegend systeem, die meestal de **Coriolisversnelling** genoemd wordt.

De waarnemer in een bewegend systeem ziet dat alle massa's de neiging hebben om naar buiten te bewegen en dat hun banen op een speciale manier afgebogen worden. Hij kan dit verklaren door aan te nemen dat hij in een systeem leeft waarin op alle massa's een naar buiten gerichte kracht werkt, de middelpuntvliedende kracht, en een speciale dwarskracht, de **Corioliskracht**, die alle banen doet afwijken. Dit is een verklaring door het aannemen van traagheidskrachten of pseudokrachten (zie het hoofdstuk 10 over Traagheidskrachten). Men noemt ze "pseudokrachten" omdat ze niet door andere voorwerpen veroorzaakt worden, maar eerder een wiskundige compensatie zijn om de wet van Newton toch te kunnen opschrijven in een roterend assenkruis. In een inertiaalsysteem moet men opschrijven:

$$\sum \vec{F}_i = m(\vec{a}_r + \vec{a}_s + \vec{a}_{comp})$$

Het invoeren van een middelpuntvliedende kracht en een Corioliskracht komt er wiskundig op neer dat men de termen  $m(\vec{a}_s + \vec{a}_{comp})$ , die de dimensie hebben van een kracht, naar het linkerlid overbrengt en die dan als een echte kracht gaat interpreteren. Deze interpretatie komt meer overeen met onze ervaring. Wanneer een auto met een hoge snelheid een bocht neemt, dan voelen we ons naar buiten gedrukt. Ook zijn mensen meer vertrouwd met krachten dan met versnellingen. Een uitleg in termen van pseudokrachten is daardoor begrijpelijker dan een beschrijving vanuit een inertiaalstelsel.

De hoeksnelheid van de aarde is vrij klein:  $2\pi$  radialen in 24 u of  $7,27 \cdot 10^{-5}$  rad/s. De bijhorende middelpuntvliedende kracht is dan ook klein en wordt in de praktijk verrekend in een iets kleinere waarde van g aan de evenaar dan aan de polen.



zwarte pijl: windrichting  
blauwe pijl: Coriolisversnelling

Figuur 5.20: Wind rond hoge drukgebied

De Coriolisversnelling levert de verklaring voor de draaiende lucht-massa's rond hoge- of lagedrukgebieden (fig. 5.20). Vanuit een hogedrukgebied stromen de winden naar buiten. Zodra ze echter in beweging komen begint de Coriolisversnelling te spelen. Die blijft spelen zolang er een  $v_r$  is. Volgens de conventie van de rechtsdraaiende schroef ziet men dat die volgens de blauwe pijlen gericht is. De winden worden dus gedwongen te cirkelen in wijzerzin. Volgens de vroegere Vlaamse weerman Armand Pien, kan men de draaizin hiervan gemakkelijk onthouden door te formuleren dat, in ons noordelijk halfrond, "de winden rond een Hoge drukgebied draaien zoals de wijzers van een Horloge". Bij lagedrukgebieden stromen de winden naar binnen en ontstaat er een werveling in tegenwijzerzin. Voor een waarnemer in het roterend systeem is er bij deze cirkelbaan een evenwicht tussen de Corioliskracht naar buiten en de kracht naar binnen door het drukverschil. Voor een waarnemer in het vaste systeem levert het drukverschil de kracht die nodig is voor de complementaire versnelling, die naar binnen gericht is.

Voor een beweging volgens de evenaar, staat de Coriolisversnelling loodrecht op het aardoppervlak. Bij een beweging naar het oosten

zal een voorwerp iets opgelicht worden, bij een beweging naar het westen iets neergedrukt worden. Dit staat bekend als het **Eötvös effect**<sup>7</sup> Bij een Noord-Zuid verplaatsing op de evenaar is  $a_{cor} = 0$  omdat

<sup>7</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös\\_effect](http://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_effect)

$v_r$  dan evenwijdig is met  $\omega$ .

Bij bewegingen rond de polen ligt de Coriolisversnelling ongeveer evenwijdig met het aardoppervlak. Bij de polen is het effect dus het sterkst.

Als men te maken heeft met een verplaatsing in een horizontaal vlak en men is alleen geïnteresseerd in de component van de coriolisversnelling in dat vlak, dan kan men die bekomen door te rekenen met de component van  $\omega$  loodrecht op dat vlak. Het is immers een eigenschap van het vectorieel product dat het resultaat in een bepaalde richting alleen bepaald wordt door de orthogonale projecties van de argumenten op een vlak loodrecht op die richting. Dit levert qua grootte  $a_c = 2\omega v_r \sin \varphi$  met  $\varphi$  de breedtegraad waarop dit horizontale vlak zich bevindt. Voor de polen is  $\varphi = 90^\circ$  en  $\sin \varphi$  dus 1, voor de evenaar is  $\varphi = 0$  en  $\sin \varphi = 0$ . Dit geldt nu echter voor alle richtingen van een snelheid op de evenaar

Ook bij een schot over een grote afstand moet men rekening houden met deze Coriolisversnelling. Dat het water bij het uitlopen van het bad ook door deze Coriolisversnelling begint te draaien kan, maar er zijn veel andere invloeden die sterker kunnen zijn, zoals b.v. verontreinigingen op de bodem van de badkuip of op het roostertje.

### 5.3.2.6 Bolcoördinaten

In een vlak kan men de positie van een punt eenduidig bepalen m.b.v. een afstand van een referentiepunt en een hoek t.o.v. een referentierichting. Zo bekomt men de poolcoördinaten 5.2.2. In de ruimte heeft men hiervoor een afstand en twee hoeken nodig. Een eerste hoek  $\theta$  bepaalt de positie van het verticale vlak door de positievector. De tweede hoek  $\phi$  bepaalt de positie van deze vector t.o.v. de verticale in dit vlak. Dit zijn de **bolcoördinaten**. Spijtig genoeg zijn de benamingen van deze hoeken niet eenduidig vastgelegd. Naast verschillende namen zijn er ook verschillende definities in voege, zodat men bij gebruik van formules uit verschillende werken moet uitkijken naar wat met wat overeenkomt.

Men kan nu een orthonormaal assenkruis definiëren in het beschouwde punt door eenheidsvectoren in te voeren die in het gegeven punt raken aan de parameterkrommen door dat punt, die men bekomt door telkens één parameter te laten variëren en de andere constant te houden. Men bekomt zo de eenheidsvectoren  $u_r$ ,  $u_\phi$ ,  $u_\theta$ . In deze volgorde vormen ze een rechtsdraaiend rechthoekig assenkruis.

Om de snelheid en versnelling te berekenen in bolcoördinaten kan men vertrekken van de formules die de transformatie geven naar cartesische coördinaten. De eerste hiervan is:

$$x = r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta$$

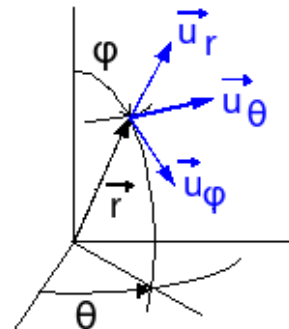
Hierbij berekent men eerst de componenten  $v_x$ ,  $v_y$  en  $v_z$  in functie van  $r$ ,  $\phi$  en  $\theta$  en hun afgeleiden. Dan projecteert men deze componenten op de assen van de bolcoördinaten om  $v_r$ ,  $v_\phi$  en  $v_\theta$  te bekomen. Dit levert echter zeer lange berekeningen op. Differentiëren van de uitdrukking hierboven levert immers 3 termen, nogmaals differentiëren levert 9 termen!

Een **eerste kortere methode** gebruikt opnieuw de operator voor differentiëren in een roterend systeem. Om de notatie eenvoudig te houden zal de **notatie van Newton** voor de afgeleiden naar de tijd gebruikt worden. Een eerste afgeleide wordt daarbij aangeduid door één punt, een tweede afgeleide door twee punten boven het symbool.  $\dot{\varphi}$  wordt gelezen als “ $\varphi$  punt”,  $\ddot{\varphi}$  als “ $\varphi$  dubbel”.

De vector  $\omega$  zal hier echter samengesteld zijn uit 2 rotaties:

- een verandering van  $\varphi$  leidt tot een rotatievector  $\dot{\varphi} \vec{u}_\theta$
- een verandering van  $\theta$  levert een verticale rotatievector. In het assenkruis van de bolcoördinaten wordt dit  $\cos \varphi \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_r - \sin \varphi \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{u}_\phi$

Men krijgt dan voor de snelheid:



Figuur 5.21: Definitie van bolcoördinaten

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

De laatste term kan als volgt uitgerekend worden:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\varphi & \vec{u}_\theta \\ \cos \varphi \cdot \dot{\theta} & \sin \varphi \cdot \dot{\theta} & \dot{\varphi} \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Samen levert dit als snelheidscomponenten:

$$v_r = \dot{r}$$

$$v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi}$$

$$v_\theta = r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\theta}$$

of:

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r \cdot \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi + r \cdot \sin \varphi \cdot \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Men heeft  $\vec{\omega} \times \vec{r} = r(\vec{\omega} \times \vec{u}_r)$ , zodat men bovenstaande formule ook kan lezen als een manier om de afgeleiden van de eenheidsvectoren te berekenen. Men kan nu op analoge manier werken om de versnelling te berekenen als afgeleide van de snelheid. Alhoewel deze methode reeds 10x korter is dan via de cartesische coördinaten, is er nog een kortere methode.

### Kortste methode

Wanneer een punt, bepaald door bolcoördinaten, beweegt, dan kan men die beweging ook beschouwen als opgebouwd uit de rotatie van het verticale vlak door de positievector  $r$  gecombineerd met een beweging binnen dat vlak. Binnen dat vlak komen de parameters  $r$  en  $\varphi$  dan overeen met de parameters van de poolcoördinaten (5.2.2). De snelheid en versnelling in poolcoördinaten is bekend en vrij eenvoudig. Voor de snelheid hoeft men er alleen een sleepsnelheid aan toe te voegen (in casu  $v_\theta$ ) en voor de versnelling een sleepversnelling en een complementaire versnelling, die vrij eenvoudig te berekenen zijn. Alleen heet de hoek  $\theta$  van de formules van de poolcoördinaten hier nu  $\varphi$ !

- De relatieve snelheid (genoteerd met subscript “rel” om verwarring met de radiale snelheid te vermijden):

$$\vec{v}_{rel} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$$

- De relatieve versnelling:

$$\vec{a}_{rel} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{u}_\varphi$$

- De sleepversnelling is een normale + een tangentiële versnelling. De normale versnelling ligt in een horizontaal vlak en heeft dus 2 componenten, de tangentiële ligt volgens  $u_\theta$ :

$$\vec{a}_s = r \sin \varphi \cdot \dot{\theta}^2 (-\cos \varphi \vec{u}_\varphi - \sin \varphi \vec{u}_r) + r \sin \varphi \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

- Tenslotte de complementaire versnelling (alles wat nodig is hierboven gegeven):

$$2\dot{\theta} \times \vec{v}_{rel} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\varphi & \vec{u}_\theta \\ \cos \varphi \cdot \dot{\theta} & -\sin \varphi \cdot \dot{\theta} & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix} = (2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \varphi)\vec{u}_\theta$$

Alles herschikken volgens de componenten van de bolcoördinaten levert:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \sin^2 \varphi \cdot \dot{\theta}^2$$

$$a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} - r \sin \varphi \cos \varphi \cdot \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} \sin \varphi + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \varphi + 2\dot{r}\dot{\theta} \sin \varphi$$

Daarmee zijn deze vrij ingewikkelde formules gevonden.

Deze aanpak is ontleend aan het boek “Mécanique générale”, 2e uitgave (1998), door Christian Gruber en Willy Benoit, professoren aan de Ecole polytechnique fédérale in Lausanne (EPFL), ISBN 2-88074-305-2. Wie zowat alles wil weten over bolcoördinaten (Engels: spherical coordinates) kan terecht op deze pagina: <http://mathworld.wolfram.com/SphericalCoordinates.html>

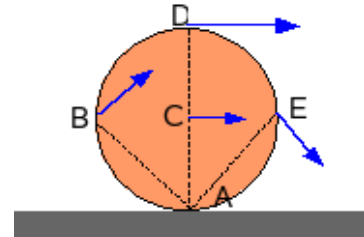
## 5.4 Kinematica: aanvullingen

### 5.4.1 Ogenblikkelijk rotatiecentrum

Wanneer een wiel rolt zonder slippen, dan heeft het contactpunt met de grond dezelfde snelheid als de grond. De snelheid van de grond is 0 en het contactpunt staat dus ook stil. Het is alsof het wiel op elk ogenblik roteert rond het punt dat op dat ogenblik het contactpunt met de grond is. Daarom noemt men dat punt **het ogenblikkelijk rotatiecentrum** (voornamelijk in België) of **momentane pool** (voornamelijk in Nederland). In het Engels: "instantaneous centre of rotation".

Als het wiel in de figuur 5.22 rolt met een hoeksnelheid  $\omega$ , dan geldt:

$$\begin{aligned}v_A &= 0 \\v_B &= r \cdot \sqrt{2} \cdot \omega \\v_C &= r \cdot \omega \\v_D &= 2 \cdot r \cdot \omega \\v_E &= r \cdot \sqrt{2} \cdot \omega\end{aligned}$$



Figuur 5.22: Rollend wiel met snelheid van 4 punten

telkens loodrecht op de verbindinglijn met A. (De beweging van A als punt van het wiel is een cycloïde. Een grafiek hiervan wordt op het einde van de volgende paragraaf gegeven.)

Deze aanpak is echter veel algemener bruikbaar. De vlakke beweging van elk onvervormbaar voorwerp kan beschreven worden als een ogenblikkelijk roteren rond een bepaald punt. Laat 2 snelheden van een voorwerp gegeven zijn, nl. de snelheid  $v_A$  van het punt A en  $v_B$  van het punt B, beiden in hetzelfde bewegingsvlak. De snelheid van het punt B kan niet willekeurig verschillen van die van A. Vanuit A bekeken moet  $v_B$  gelijk zijn aan  $v_A$  plus het effect van een rotatie van het voorwerp rond A. Een lineaire snelheid die ontstaat doordat het punt B roteert met hoeksnelheid  $\omega$  rond een as door A kan geschreven worden als:

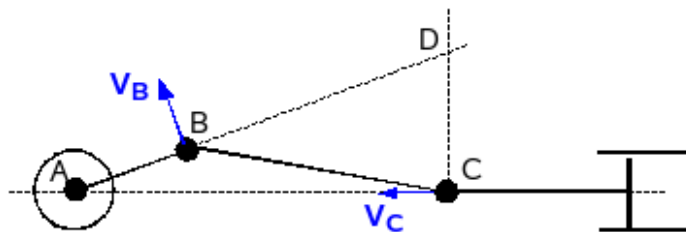
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB}$$

Hierbij staat de vector  $\omega$  loodrecht op het bewegingsvlak van A en B. De snelheid  $v_A$  kan natuurlijk altijd geschreven worden als veroorzaakt door een rotatie rond een punt P zodat  $v_A = \omega * PA$ . De vraag is nu of de snelheid  $v_B$  ook kan geschreven worden als het effect van een rotatie rond hetzelfde punt P met zelfde  $\omega$ .

Uit vorige blijkt:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{PA} + \vec{\omega} \times \vec{AB} = \vec{\omega} \times \vec{PB}$$

Het is dus steeds mogelijk om ook de snelheid van elk ander punt van het voorwerp te schrijven als het effect van een rotatie rond het ogenblikkelijk rotatiecentrum P. Een meer algemeen bewijs kan gegeven worden na de studie van het samenstellen van rotaties.



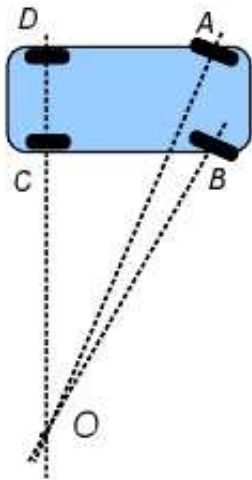
Figuur 5.23: Kruk- en drijfstaangmechanisme

Deze methode van het ogenblikkelijk rotatiecentrum wordt vooral gebruikt in de studie van stangenmechanismen. De methode wordt meestal gekoppeld aan een grafische benadering van het probleem. Men steunt dan op het feit dat de snelheid altijd loodrecht moet staan op de straal vanuit het rotatiecentrum. Ingenieuze grafische oplossingsmethodes voor veel problemen waren zeer gebruikelijk tot de opkomst van de zakrekenmachine en de PC. Hier is vereist dat men van één punt de snelheid volledig kent en van

een ander de richting. Men construeert dan in elk punt een loodlijn op de richting van de snelheid. Het snijpunt van beide loodlijnen geeft het ogenblikkelijk rotatiecentrum. Uit de bekende snelheid haalt men dan de bijhorende hoeksnelheid. Als voorbeeld in figuur 5.23 een klassiek kruk- en drijfstaangmechanisme. In dat voorbeeld leidt een loodlijn op de snelheid van B en C tot een snijpunt in D. Uit  $v_B = BD \cdot \omega$  en  $v_C = CD \cdot \omega$  volgt dan:

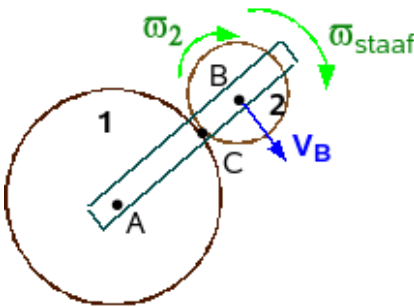
$$v_B/v_C = BD/CD$$

Hierin zal CD en BD moeten berekend worden uit BC of AC en de hoek in C. Tenslotte kan men dan schrijven dat  $\omega_A = v_B/AB$



Figuur 5.24: Auto in bocht

buiten. Bij hoge snelheid en kleine verdraaiing van het stuur, zoals bij het veranderen van rijstrook op een snelweg, sturen ze mee met de voorwielen. Hierdoor wordt een stukje translatie gebruikt om de verandering van rijstrook uit te voeren, waardoor er minder rotatie en kleinere middelpuntzoekende krachten nodig zijn.



Figuur 5.25: Rol rolt uitwendig over andere rol

Hieruit vindt men het verband:

$$\omega_2 = (AB/r_2)\omega_{staaaf}$$

Indien de rol 1 ook zou roteren in wijzerzin, dan zou men weer de snelheid van het punt C moeten bekijken vanuit A en vanuit B en kan men schrijven:

$$v_C = r_1 \cdot \omega_1 = AB \cdot \omega_{staaaf} - r_2 \cdot \omega_2$$

Het fysische punt van het bewegend voorwerp dat op een bepaald ogenblik het rotatiecentrum is, staat op dat ogenblik stil, maar was voor- en nadien in beweging. Het heeft dus een versnelling. Deze wordt in volgende paragraaf berekend.

Bij een translatie zal de snelheid van A en B gelijk zijn. Men kan dit beschouwen als het effect van een rotatie rond een punt op oneindig. Men zal dan twee evenwijdige loodlijnen hebben, waarvan het snijpunt op oneindig valt. Wanneer stangenmechanismen niet scharnierend maar via pin en gleuf met elkaar verbonden zijn, is er nog een meer klassieke benadering via relatieve en sleepsnelheid nodig in die verbinding om het correcte verband tussen de snelheden van pin en gleuf te berekenen.

Bij een auto die een bocht neemt, ligt het ogenblikkelijk rotatiecentrum in het verlengde van de achteras. De voorwielen volgen dus een grotere cirkel dan de achterwielen. Dat leidt vooral tot problemen bij lange voertuigen. Op sommige bussen en aanhangwagens ziet men achteraan de tekst: "Opgelet: zwenkt uit". Dit zijn voertuigen die uitgerust zijn met gestuurde achterwielen. Deze worden in tegengestelde zin van de voorwielen gedraaid, waardoor ze beter in het spoor van de voorwielen volgen en kortere bochten mogelijk maken. Men noemt ze daarom ook wel "spoorvolgers". Het ogenblikkelijk rotatiecentrum schuift dan iets naar rechts en ligt dan meer symmetrisch t.o.v. voor- en achteras. Ook sommige personenwagens hebben achterwielen die lichtjes gestuurd worden. Bij lage snelheid en scherpe bocht draaien ze ook iets naar

Een iets ingewikkelder voorbeeld is het uitwendig rollen zoals in de figuur 5.25. Een rol 2 wordt via een staaf die draait rond A met hoeksnelheid  $\omega_{staaaf}$ , verplicht te rollen over de stilstaande rol 1. Gevraagd wordt de hoeksnelheid van rol 2?

Als de rol 1 stilstaat, moet het contactpunt C tussen beide rollen het ogenblikkelijk rotatiecentrum zijn van rol 2. Voor de snelheid van B kan men dan schrijven:

$$v_B = r_2 \cdot \omega_2$$

Anderzijds kan men B bekijken als een punt van de staaf. Dan geldt

$$v_B = AB \cdot \omega_{staaaf}$$

### 5.4.2 Poolbaan en poolkromme

Bij het spreken over het ogenblikkelijk rotatiecentrum moet men 2 punten onderscheiden:

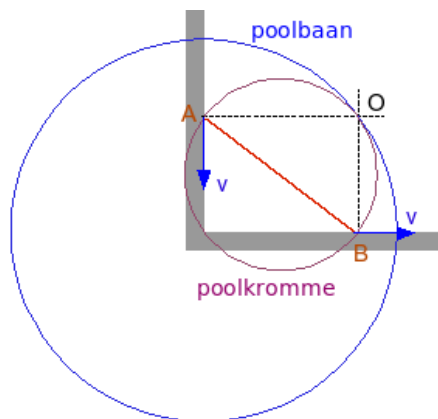
- het punt van het voorwerp dat op een bepaald ogenblik het rotatiecentrum is. Men noemt dit ook wel het rotatiecentrum als fysische punt.
- het punt dat bepaald wordt door de eigenschap “rotatiecentrum zijn” en dat elk ogenblik een ander punt is (tenzij bij rotatie rond een vast punt of as). Men zou dit het rotatiecentrum als logisch punt kunnen noemen.

Tijdens de beweging beschrijft dit logische punt een baan binnen het vast systeem en t.o.v. het bewegend voorwerp. Bij een wiel dat over een rechte rolt b.v., is die rechte de baan binnen het vaste systeem en vormt de omtrek van het wiel de baan t.o.v. het bewegend voorwerp. De eerste baan noemt men de poolbaan, de tweede de poolkromme.

**Poolbaan** : de baan gevormd door de opeenvolgende rotatiecentra binnen het vaste referentiesysteem.

**Poolkromme** : de baan gevormd door de opeenvolgende rotatiecentra binnen het bewegend systeem.

Beide banen hebben steeds het ogenblikkelijke rotatiecentrum gemeen en raken elkaar in dat punt. Een vlakke beweging van een voorwerp kan daarom beschreven worden als een rollen van de poolkromme over de poolbaan.



Figuur 5.26: Poolbaan en poolkromme

Een iets meer ingewikkeld voorbeeld wordt gegeven in de figuur 5.26. Een uiteinden van de staaf AB worden daarin verplicht te glijden langs 2 loodrecht op elkaar staande wanden. De poolbaan is dan een kwart van de cirkel vanuit het hoekpunt en met straal AB. De poolkromme is een cirkel met AB als diameter. De driehoek AOB is immers altijd een rechthoekige driehoek met AB als schuine zijde. Nu is de schuine zijde van een rechthoekige driehoek ook altijd de diameter van de omschreven cirkel. De beweging van de staaf kan hier ook beschreven worden als het inwendig rollen van de poolkromme langs de poolbaan. Het punt dat op een bepaald ogenblik rotatiecentrum is, valt alleen in de twee uiterste standen van de staaf ook op de staaf. Wanneer men hier over het roatiecentrum als fysische punt spreekt, dan bedoelt men de positie van het punt in een referentiesysteem dat vast verbonden is aan de staaf. Dat punt heeft binnen dat systeem een onveranderlijke positie t.o.v. de staaf.

De snelheid waarmee het rotatiecentrum als logisch punt zich verplaatst over de poolbaan en de poolkromme noemt men de **poolverplaatsingssnelheid**  $v_P$ . Daar het rotatiecentrum een gemeenschappelijk punt is van poolbaan en poolkromme en deze in dat punt niet bewegen t.o.v. elkaar (er is geen slippen van de ene kromme over de andere) is deze snelheid dezelfde langs beide krommen. M.a.w. in zelfde tijd wordt altijd de zelfde afstand agelegd langs beide krommen. Men kan nu bewijzen dat de versnelling van het rotatiecentrum als fysisch punt bepaald is door:

$$\vec{a}_P = \vec{v}_P \times \vec{\omega}$$

Let op de volgorde van de termen! Deze versnelling zal steeds naar het kromtemiddelpunt van de poolkromme gericht zijn. Daar  $\omega$  en  $v_P$  steeds loodrecht op elkaar staan, is de grootte van  $a_P = \omega \cdot v_P$ .

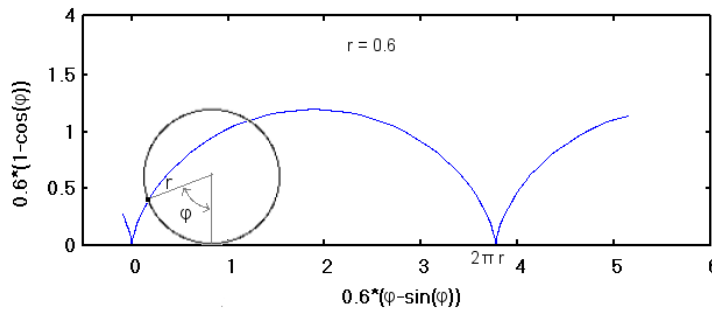
Voor een wiel dat over een rechte rolt is  $v_P = v_C$ , de snelheid van het centrum van het wiel. De versnelling van het contactpunt met de grond is naar het centrum van het wiel gericht en heeft als grootte:

$$a_P = \omega \cdot v_P = r \cdot \omega^2$$

Tot dezelfde conclusie kan men komen als men de versnelling (5.3.2.3) van het contactpunt met de grond wil berekenen vanuit het centrum van het wiel (in de onderstelling van een constante snelheid van dat centrum =  $r \cdot \omega$ ):

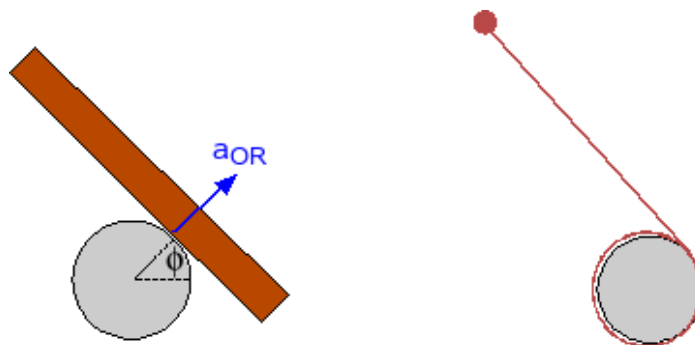
$$\vec{a}_P = \vec{a}_C + \vec{a}_{(P,C)n} + \vec{a}_{(P,C)t}$$

Hierin is echter  $a_C = 0$  en ook  $a_{(P,C)t} = 0$  (geen hoekversnelling, dus geen tangentiële versnelling). Er blijft dus alleen een relatieve normale versnelling =  $r \cdot \omega^2$ . Het contactpunt met de grond beschrijft, als fysisch punt van het wiel, een een **cycloïde**. Men ziet op de grafiek (5.27) duidelijk hoe het fysisch punt in de onderste stand tot stilstand komt en dan opnieuw vertrekt in de andere richting. Het onderste punt van de kromme wordt daarom een keerpunt van de kromme genoemd. Door y 2x te differentiëren naar de tijd, kan men gemakkelijk controleren dat  $a_y$  van het punt dat de grond raakt (bij  $\varphi=0$  of  $2n\pi$ ) gelijk is aan  $r\omega^2$  en dat een eventuele hoekversnelling (2e afgeleide van  $\varphi$ ) hierop geen invloed heeft.



Figuur 5.27: Cycloïde

Een iets intrigerender voorbeeld wordt gevormd door een lat die rond een paal draait of een bolletje aan het einde van een touw dat men zo lanceert dat het touw opgewonden wordt rond een paal (fig. 5.28). Bij de lat rond de paal is de omtrek van de paal nu de poolbaan en de zijkant van de lat de poolkromme. De versnelling van het ogenblikkelijk rotatiecentrum is van het centrum van de paal weg gericht. Bij het bolletje blijkt dat er alleen een versnelling is in de richting van het touw, wat overeenkomt met de wet van Newton.



Figuur 5.28: Lat rond paal - Balletje aan touw

Voor de behandeling van dit voorbeeld is kennis van het hoofdstuk Elementaire dynamica (6.1) vereist.

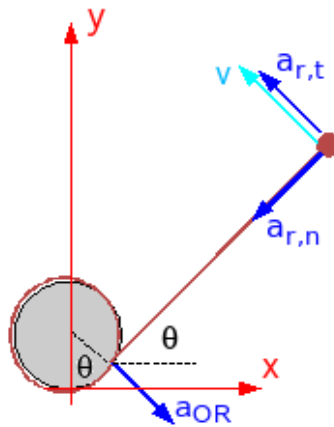
Men kan de versnelling van het bolletje berekenen met de vereenvoudigde formule uit het hoofdstuk over de versnelling (5.3.2.3). Dan moet men schrijven dat

$$\vec{a}_{bol} = \vec{a}_{OR} + \vec{a}_{r,n} + \vec{a}_{r,t}$$



waarin, met  $l$  actuele lengte van het touw tussen bolletje en paal:

$a_{OR} = r \cdot \omega^2$  want  $v_P = r \cdot \omega$   $a_{r,n} =$  relatieve normale versnelling  $= l \cdot \omega^2$   $a_{r,t} =$  relatieve tangentiële versnelling  $= l \cdot \alpha$



Figuur 5.29: balletje aan touw opwindend rond paal

De vraag is nu wat het verband is tussen  $\omega$  en  $\alpha$  ?

- Er is hier geen behoud van impuls. De richting van de snelheid verandert voortdurend en dus ook de impuls.
- er is geen behoud van impulsmoment. Voor de berekening van het impulsmoment moet men natuurlijk altijd hetzelfde punt gebruiken, bv. het middelpunt van de paal. Dan heeft de spanning in het touw een moment t.o.v. dit punt en is er dus een wijziging van het impulsmoment.
- er is wel behoud van energie. De spanning in het touw staat loodrecht op de snelheid. Er is dus geen toevoer of afvoer van energie door de kracht in het touw. Als men de beginsnelheid aanduidt met  $v_0$ , dan moet op elk ogenblik gelden:  $m \cdot v_0^2 / 2 = m \cdot v^2 / 2$

Hieruit volgt ook dat  $v_0 = v$ , of m.a.w. dat de **grootte van de lineaire snelheid  $v$  constant is** . Daar op elk ogenblik geldt dat  $v = l \cdot \omega$  is dus ook  $l \cdot \omega$  constant. Differentiëren hiervan leidt tot:

$$\frac{dl}{dt} \cdot \omega + l \cdot \alpha = 0$$

Of:

$$\frac{dl}{dt} \cdot \omega = -l \cdot \alpha$$

Het minteken zegt dat als  $l$  afneemt,  $\alpha$  moet toenemen.  $l$  wordt steeds kleiner omdat het touw oprolt rond de paal. Uit differentiëren van  $l = l_0 - r\theta$  volgt  $dl/dt = -r \cdot \omega$ . Dat invullen in vorige formule levert:

$$r \cdot \omega^2 = l \cdot \alpha$$

Er geldt dus  $a_{OR} = a_{r,t}$ , maar beide hebben tegengestelde zin. Ze vallen dus tegen elkaar weg en er blijft alleen de  $a_{r,n}$ .

Men kan het gebeuren ook beschrijven in een klassiek cartesisch assenkruis.

$$x = r \cdot \sin \theta + l \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta + l \cdot \cos \theta$$

Differentiëren levert, met  $dl/dt = -r \cdot \omega$ :

$$v_x = r \cdot \cos \theta \cdot \omega - r \cdot \omega \cdot \cos \theta - l \cdot \sin \theta \cdot \omega = -l \cdot \omega \cdot \sin \theta$$

$$v_y = r \cdot \sin \theta \cdot \omega - r \cdot \omega \cdot \sin \theta + l \cdot \cos \theta \cdot \omega = l \cdot \omega \cdot \cos \theta$$

Uit het behoud van energie volgde dat  $l \cdot \omega = l_0 \cdot \omega_0$  of

$$v_x = -l_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin \theta$$

$$v_y = l_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos \theta$$

Hieruit blijkt ook duidelijk dat de snelheid loodrecht staat op het touw en constant is. Voor de versnelling vindt men:

$$a_x = -l_0 \cdot \omega_0 \cdot \cos \theta \cdot \omega$$

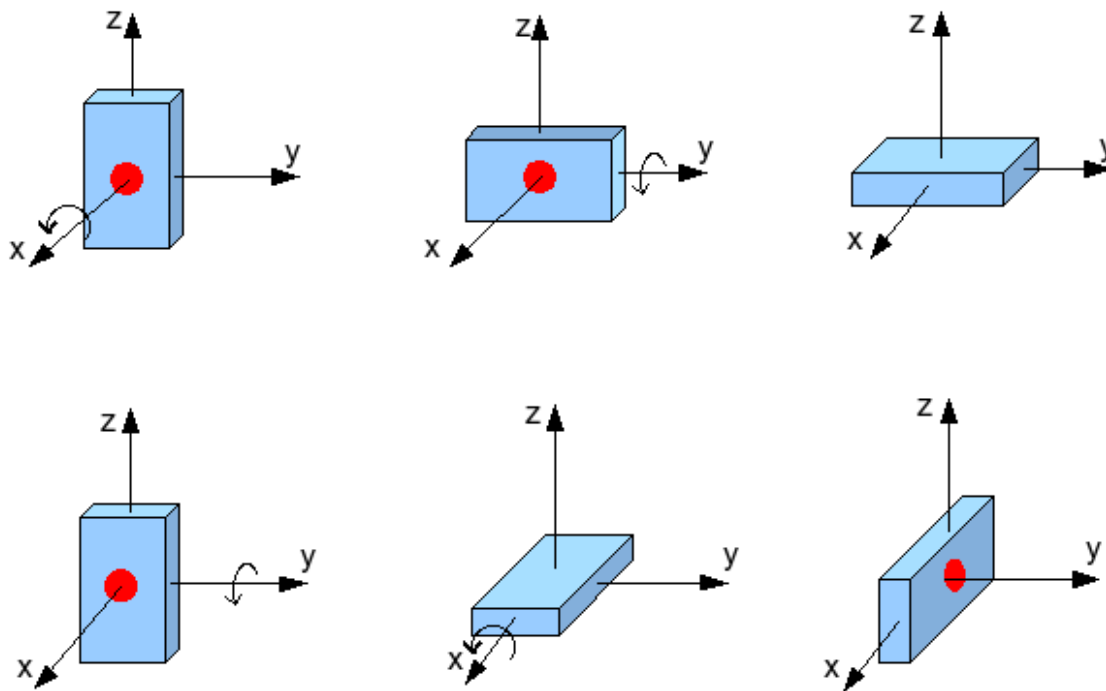
$$a_y = -l_0 \cdot \omega_0 \cdot \sin \theta \cdot \omega$$

Waaruit blijkt dat de versnelling op haar beurt loodrecht staat op de snelheid en er dus alleen een versnelling blijft volgens het touw.

### 5.4.3 Samenstellen van rotaties

Onze handen hangen aan onze schouder vast via het polsgewricht, de onderarm, het ellebooggewricht, de bovenarm en het schoudergewricht. Geen enkele van die gewrichten laat een schuifbeweging toe, maar toch hebben we er geen enkel probleem mee om onze hand volgens een rechte lijn te laten bewegen. Dit resultaat wordt bekomen door het samenstellen van rotaties in de verschillende gewrichten.

Er is echter een eigenaardig verschil tussen hoeksnelheden en -versnellingen en een rotatie over een reële hoek. Alhoewel men dit laatste ook als een vectorpijlje zou kunnen voorstellen volgens de conventies voor de hoeksnelheid, **vormen eindige rotaties geen vectoren** omdat ze niet commutatief zijn. Dit kan gemakkelijk aangetoond worden bv. in de figuur 5.30. Het gaat hierbij over rotaties rond assen die elkaar snijden in één punt.



Figuur 5.30: Niet-commutativiteit van eindige rotaties

In het bovenste voorbeeld wordt een voorwerp eerst over  $90^\circ$  gedraaid volgens de x-as, dan over  $90^\circ$  volgens de y-as. In het onderste wordt eerst rond de y-as gedraaid en dan rond de x-as. Men ziet duidelijk dat het resultaat totaal verschillend is. Een rotatie zoals hierboven kan wiskundig weergegeven worden door een rotatiematrix. Het is wel bekend dat het product van 2 matrices normaal niet commutatief is.

Hoeksnelheden kunnen wel als vectoren behandeld worden. Men kan hiervoor een ingewikkeld wiskundig bewijs leveren via de commutativiteit van de betrokken matrices. Meestal wordt een eenvoudige “bewijs” geleverd door het beschouwen van de verplaatsingen in een infinitesimaal interval  $dt$ . Elk punt van een voorwerp krijgt dan een verplaatsing  $d\vec{r}_i$  onder invloed van een  $\omega_i$  volgens de formule:

$$d\vec{r}_i = \vec{\omega}_i \cdot dt \times \vec{r}$$

De som van deze  $d\vec{r}_i$  is wel commutatief, zodat het resultaat ook kan geschreven worden als

$$d\vec{r} = (\sum_i \vec{\omega}_i).dt \times \vec{r}$$

Dat de de beweging van het voorwerp kan beschreven worden als het uitvoeren van een ogenblikkelijke rotatie die de som is van alle deelrotaties, volgt ook uit de meer algemene theorie die verder ontwikkeld wordt.

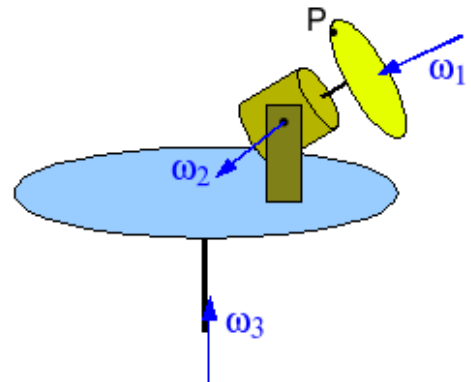
#### 5.4.3.1 Rotaties op meerder niveaus

De figuur 5.31 stelt een plateau voor dat draait rond een verticale as. Op dat plateau staat een motor, die zelf kan draaien rond een horizontale as. Deze motor doet een schijf draaien. Gevraagd wordt de snelheid van het punt P op de rand van de schijf.

Men zou dit kunnen oplossen met de techniek van de samengestelde beweging, zoals beschreven in Kinematica 2: bewegende referentiesystemen (5.3). Men zit hier echter met 3 niveaus van beweging, zodat men minstens 2x samengestelde beweging zou moeten toepassen. Men kan hier een andere aanpak volgen. Als men onderstelt dat er alleen een  $\omega_1$  is, dan wordt de snelheid van P gegeven door

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P1}$$

waarin de vector  $\vec{r}_{P1}$  de positie van het punt P voorstelt t.o.v. een willekeurig punt van de as waarrond  $\omega_1$  draait, hier dus de as van de motor. Dat dit punt een willekeurig punt mag zijn, werd aangetoond in het 1e hoofdstuk over elementaire bewerkingen met vectoren, in de paragraaf over het verband tussen hoeksnelheid en lineaire snelheid (1.2.7).



Figuur 5.31: Motor op draaiend plateau.

Wanneer men ook  $\omega_2$  in rekening brengt, dan kan men de rotatie van de schijf beschouwen als een relatieve beweging binnen een assenkruis verbonden met de motor en draaiend met hoeksnelheid  $\omega_2$ . Bij de snelheid van P, zoals hierboven berekend, komt dan een sleepsnelheid die analoog kan berekend worden:

$$\vec{v}_s = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P2}$$

De totale snelheid van P wordt dan:

$$\vec{v}_P = (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P1}) + (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P2}) = \sum \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Pi}$$

Wanneer men nu ook  $\omega_3$  in rekening brengt, dan kan men deze snelheid van P weer beschouwen als een relatieve snelheid binnen een assenkruis verbonden met de schijf. Er komt dan weer een sleepsnelheid bij die het effect is van  $\omega_3$  en het totale resultaat kan weer geschreven worden als:

$$\vec{v}_P = \sum \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Pi}$$

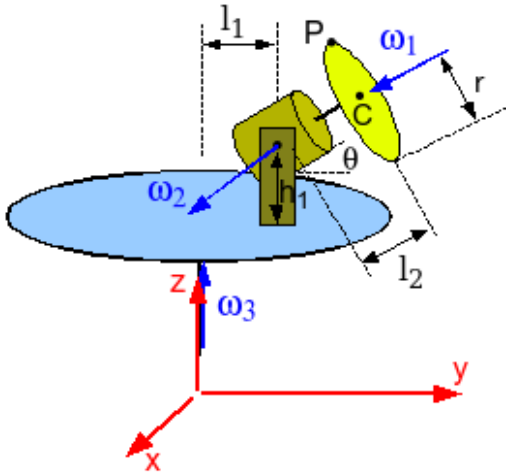
Hiermede heeft men een formule om de lineaire snelheid uit te rekenen van een punt dat onderworpen is aan een reeks rotaties.

#### 5.4.3.2 Equivalentie van rotaties

Wanneer men in bovenstaand voorbeeld de beweging van de schijf wil bestuderen, dan moet men de hoeksnelheid en hoekversnelling van de schijf kennen t.o.v. assen door het massacentrum en de versnelling van dat massacentrum. Dit komt neer op de vraag om een equivalent systeem van rotaties samen te stellen in dat massacentrum. Bij het opstellen van een equivalent vectorsysteem (2.1), gaat het over een systeem van wat men basiselementen zou kunnen noemen en een stel van vectoren dat daarmee verbonden is via een vectorieel product van een positievector en één van deze basiselementen. Bij het samenstellen van krachten waren de basiselementen de krachten en de afgeleide vectoren de momenten. Hier zijn de basiselementen de hoeksnelheden en de afgeleide elementen de lineaire snelheden. De berekening van de lineaire snelheid van het punt P onder invloed van 3 rotaties, is dus analoog aan het berekenen van het moment in een punt P veroorzaakt door 3 krachten.

Een systeem van rotaties kan dus herleid worden in een punt P tot een equivalent systeem bestaande uit een hoeksnelheid en de lineaire snelheid van het referentiepunt P:

- $\vec{\omega} = \sum \vec{\omega}_i$
- $\vec{v}_P = \sum \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Pi}$



Figuur 5.32: Motor op draaiend plateau: afmetingen

Deze besluiten kunnen nu eens toegepast worden op de figuur (5.32). Hiervoor zijn dan wel enkele afmetingen en hoeken nodig. Men onderstelt dat de as van de motor radiaal ligt, d.i. door de verticale as wijst. Men heeft de volgende projecties in het gegeven assenkruis:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}_1 &= (0, -\omega_1 \cdot \cos \theta, -\omega_1 \cdot \sin \theta) \\ \vec{\omega}_2 &= (\omega_2, 0, 0) \\ \vec{\omega}_3 &= (0, 0, \omega_3)\end{aligned}$$

Hiermede bekomt men als resulterend  $\omega$ :

$$\vec{\omega} = (\omega_2, -\omega_1 \cdot \cos \theta, \omega_3 - \omega_1 \cdot \sin \theta)$$

Voor de posities van P vanuit de verschillende rotatievectoren:

$$r_{P1} = (0, -r \cdot \sin \theta, r \cdot \cos \theta)$$

$$r_{P2} = (0, l_2 \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta, l_2 \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta)$$

Voor de laatste positie wordt gewoon de loodrechte afstand gebruikt:

$$r_{P3} = (0, l_1 + l_2 \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta, 0)$$

Hiermede kan men de verschillende bijdragen aan de snelheid van P uitrekenen:

$$\vec{v}_{P1} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_{P1} = (-\omega_1 \cdot r, 0, 0)$$

$$\vec{v}_{P2} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_{P2} = (0, -\omega_2(l_2 \sin \theta + r \cdot \cos \theta), \omega_2(l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta))$$

$$\vec{v}_{P3} = \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{P3} = (-\omega_3(l_1 + l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta), 0, 0)$$

De som van deze 3 componenten levert de totale snelheid van P. voor de duidelijkheid wordt deze opgesplitst in haar cartesische componenten:

$$v_{Px} = -\omega_1 \cdot r - \omega_3(l_1 + l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta)$$

$$v_{Py} = -\omega_2(l_2 \sin \theta + r \cdot \cos \theta)$$

$$v_{Pz} = \omega_2(l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta)$$

Om de idee van equivalent systeem toch nog eens duidelijker te maken, wordt de snelheid van P ook eens berekend in 2 stappen. Eerst wordt het systeem herleid tot een equivalent systeem in O, het midden van de motor en het snijpunt van  $\vec{\omega}_1$  en  $\vec{\omega}_2$ . Vandaar zal dan opnieuw de snelheid van P berekend worden.

Waarom het punt O? Omdat de lineaire snelheid van dat punt eenvoudig uit te rekenen is. Daar het punt op het snijpunt van  $\vec{\omega}_1$  en  $\vec{\omega}_2$  ligt, hebben deze rotaties geen invloed op  $\vec{v}_O$ . Die wordt alleen beïnvloed door  $\vec{\omega}_3$ :

$$\vec{v}_O = (-l_1 \cdot \omega_3, 0, 0)$$

De resulterende  $\vec{\omega}$  blijft dezelfde als hierboven. De positie van P t.o.v. O wordt:

$$r_{PO} = (0, l_2 \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta, l_2 \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta)$$

De snelheid van P moet nu berekend worden volgens de formule:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PO}$$

In cartesische componenten levert dit (alleen de x-component is wat ingewikkeld):

$$v_{Px} = v_{Ox} + \omega_y \cdot z_O - \omega_z \cdot y_O = -l_1 \cdot \omega_3 - \omega_1 \cos \theta (l_2 \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta) - (\omega_3 - \omega_1 \cdot \sin \theta) (l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta) = -\omega_1 \cdot r - \omega_3 (l_1 + l_2 \cos \theta - r \cdot \sin \theta)$$

$$v_{Py} = v_{Oy} + \omega_z \cdot x_O - \omega_x \cdot z_O = -\omega_2 (l_2 \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta)$$

$$v_{Pz} = v_{Oz} + \omega_x \cdot y_O - \omega_y \cdot x_O = \omega_2 (l_2 \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta)$$

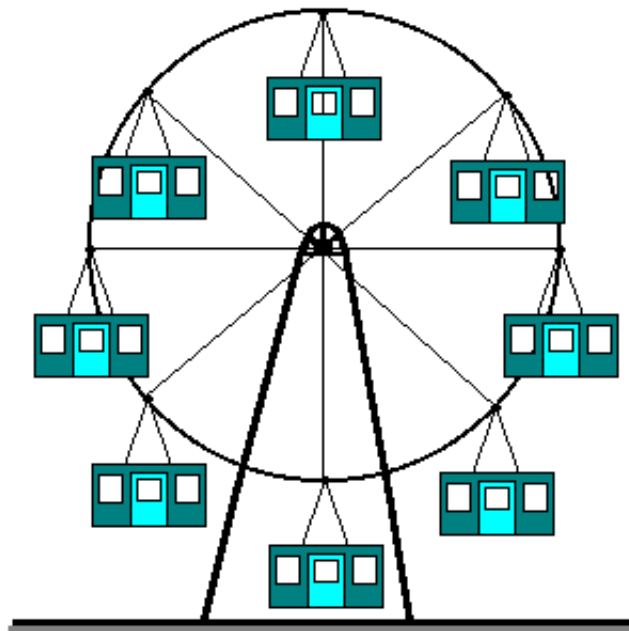
...wat precies hetzelfde is als eerst. Hiermede is dan ook aangetoond dat het systeem in O equivalent is met het originele systeem.

Bij een robot zal men moeten eisen dat het equivalente systeem in de actuator bestaat uit een bepaalde lineaire snelheid en een bepaalde hoeksnelheid.

### 5.4.3.3 Speciale gevallen

**1. Samenlopende rotaties** Wanneer de verschillende rotatievectoren door één punt passeren, dan kunnen ze in dat punt samengesteld worden tot een equivalent systeem bestaande uit één rotatievector, zonder een lineaire snelheid van het herleidingspunt. Zie verder voor toepassingen in combinatie met rollen.

**2. Evenwijdige rotatievectoren** Wanneer alle rotatievectoren onderling evenwijdig zijn, dan is er ook een herleiding mogelijk tot één rotatievector, zonder een lineaire snelheid van het herleidingspunt, in een punt dat men het zwaartepunt van het systeem zou kunnen noemen. Dit wordt weinig toegepast. Men kan die resulterende vector ook zien als de ogenblikkelijke rotatieas.



Figuur 5.33: Reuzerad

**3. Koppel van rotaties** Wanneer een systeem onderworpen is aan twee even grote en evenwijdige rotaties, maar met tegengestelde zin, dan is het resultaat een translatie. In elk punt levert dit immers een equivalent systeem dat alleen bestaat uit een lineaire snelheid. Als men onderstelt dat het rad van de figuur 5.33 in wijzerzin rond zijn as draait, dan zal elk kabintje in tegenwijzerzin rond zijn ophangpunt draaien. Het resultaat is dat de kabintjes transleren (kromlijnige translatie!). Typisch voor translatie is dat richting behouden blijft. Vloer en dak blijven horizontaal, de wanden blijven steeds vertikaal.

**4. Schroefas** Men kan ook voor een systeem van rotaties zoeken naar een lijn waar de lineaire snelheid evenwijdig is met de resulterende hoeksnelheid volgens de formule  $\vec{\omega} = k\vec{v}$ .

#### 5.4.3.4 Lineaire versnellingen en hoekversnellingen

Bij het afleiden naar de tijd van de bovenstaande uitdrukkingen moet men er rekening mee houden dat elke vector  $\mathbf{a}$  die gedefinieerd is t.o.v. een systeem dat roteert met hoeksnelheid  $\omega$  ook een “sleepverandering” ondergaat van de vorm  $\vec{\omega} \times \vec{a}$  (zie Een nieuwe operator 5.3.2.2).

Bij afleiden van de resulterende  $\vec{\omega}$  in het bovenstaande voorbeeld zal men dus krijgen:

$$\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} = \vec{\alpha}_1 + (\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3) \times \vec{\omega}_1$$

$$\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} = \vec{\alpha}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{\omega}_2$$

Voor de lineaire versnelling van het referentiepunt geldt dan:

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\sum \vec{\omega}_i \times \vec{r}_{Pi}) \\ &= \sum_i \left( \frac{d\vec{\omega}_i}{dt} \times \vec{r}_{Pi} \right) + \sum_i (\vec{\omega}_i \times \frac{d\vec{r}_{Pi}}{dt}) \end{aligned}$$

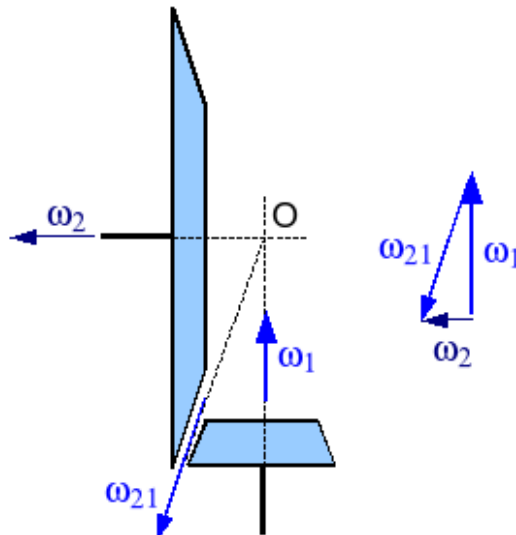
waarbij de afgeleiden van de  $\vec{\omega}_i$  moeten berekend worden volgens de besproken methode. Maar iets analoogs geldt voor het afleiden van  $\vec{r}_{Pi}$ :

$$\frac{d\vec{r}_{Pi}}{dt} = \vec{a}_{Pi} + \sum_j (\vec{\omega}_j \times \vec{r}_{Pi})$$

waarbij  $j$  loopt over alle rotatievectoren waaraan  $\vec{r}_{Pi}$ :onderworpen is. Een behoorlijke boterham!

#### 5.4.4 Rollen

Wanneer twee voorwerpen over elkaar rollen, is er een lijn van punten die een gemeenschappelijke snelheid hebben. Op deze lijn zal ook de ogenblikkelijke relatieve rotatievector liggen. Wanneer één der voorwerpen stilstaat is dat ook de absolute ogenblikkelijke rotatievector.



Figuur 5.34: Pignon en kroonwiel met driehoek van de hoeksnelheden

Als voorbeeld het geval van tandwielen tussen twee loodrecht op elkaar staande assen, zoals schematisch voorgesteld in figuur 5.34. Het ene tandwiel is klein, het andere groot. Dit is bij auto’s bekend als het systeem van pignon en kroonwiel. Men kan het in elkaar grijpen van de tanden zien als het over elkaar rollen van de twee tandwielen. De hoeksnelheid van het grote tandwiel moet hierbij de som zijn van de hoeksnelheid van het kleine ( $\vec{\omega}_1$ ) + de hoeksnelheid waarmee het grote over het kleine rolt ( $\vec{\omega}_{21}$ ). Voor een zuiver rollen moet de lijn van de tanden, de richting van  $\vec{\omega}_{21}$ , dus door het snijpunt van de 2

assen wijzen. Daar kan het systeem immers samengesteld worden tot 1 zuivere resulterende rotatie en beantwoorden de 3 rotaties dan aan de vectoriële driehoek die in de figuur gegeven is.

Bij de externe fietsdynamo, die met een wielkje tegen de band aangedreven wordt, zal men moeten zorgen dat de as van die dynamo door (het verlengde van) de as van het wiel wijst opdat het wielkje zuiver over de band zou rollen zonder er langs te wrijven.





# Hoofdstuk 6

## Elementaire dynamica

### Inhoudsopgave

---

<b>6.1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>105</b>
<b>6.2</b>	<b>De wetten van Newton</b>	<b>106</b>
6.2.1	Vrijmaken van het voorwerp	107
6.2.2	Versnelling bepalen	107
6.2.3	Controle	108
6.2.4	Uitrekenen	108
6.2.5	Tweede voorbeeld	109
6.2.6	Derde voorbeeld	111
<b>6.3</b>	<b>Impuls en Behoud van impuls</b>	<b>112</b>
6.3.1	Impulsstelling	112
6.3.1.1	Voor 1 massa	112
6.3.1.2	Voor meerdere massa's	113
6.3.2	Behoud van impuls	113
6.3.3	Continue stroming	115
6.3.4	Links	117
<b>6.4</b>	<b>Arbeid en energie</b>	<b>118</b>
6.4.1	Energiestelling voor één massa	118
6.4.2	Energiestelling voor meerdere massa's	118
6.4.3	Speciaal geval : potentiaalkrachten en behoud van energie	119
6.4.3.1	Strikt behoud van energie	121
6.4.3.2	Uitgebreid behoud van energie	121
6.4.3.3	Berekening van enkele potentiële energieën	122
6.4.4	Vermogen	124

---

### 6.1 Inleiding

De **dynamica** is de studie van de oorzaken van een beweging. Dit kan onder vorm van een antwoord op de vraag wat de beweging is als er een systeem van gegeven krachten werken of welke krachten nodig zijn om een bepaalde beweging te bekomen.

In eerste instantie zal men het gedrag van een **puntmassa** bekijken. Een puntmassa is een geometrisch punt waaraan men een massa toekent. Een punt kan niet roteren. Rotatie onderstelt verandering van richting maar een punt heeft geen richting. Het blijkt nadien dat de wetten die hier afgeleid worden ook toepasselijk zijn op de beweging van het **massacentrum** van voorwerpen.

Voorwerpen kunnen echter wel **rotieren**. Om die beweging te bestuderen zal men voorwerpen eerst beschouwen als opgebouwd uit puntmassa's en de bewegingsvergelijkingen dan sommeren over alle puntmassa's van het voorwerp. Dit leidt tot specifieke wetten voor de rotatie van voorwerpen. Hierbij wordt

geen gebruik gemaakt van de lineaire snelheid van de punten, die verschilt van punt tot punt, maar van de hoeksnelheid, die karakteristiek is voor het hele voorwerp. Verder blijkt de rol die de kracht speelt bij de translatie nu overgenomen door het moment van de kracht en de rol van de massa door het traagheidsmoment.

Er blijkt een zeer groot verschil te bestaan tussen de formules voor de rotatie rond een vaste as, of minstens een bewegende as maar met vaste richting (de rotatie van de wielen van een fiets die mooi rechtdoor rijdt b.v.) en de algemene formules, waarbij de rotatieas voortdurend van richting mag veranderen (zoals bij een fiets die een bocht neemt). Vandaar dat deze in afzonderlijke hoofdstukken behandeld worden.

Dit hoofdstuk over de **elementaire dynamica** zou men dus ook de **dynamica van een puntmassa** kunnen noemen. Volgende punten zullen daarbij aan bod komen:

1. Wetten van Newton
2. Impuls en behoud van impuls
3. Arbeid en behoud van energie

De dynamica van voorwerpen wordt behandeld in dynamica van voorwerpen 7.

## 6.2 De wetten van Newton

De klassieke mechanica wordt ook wel Newtoniaanse mechanica genoemd omdat de basis ervan gelegd werd door [Isaac Newton](#) (1643-1727). Op het vlak van de mechanica droeg hij vooral bij door de drie wetten van Newton en door de algemene gravitatiewet, waardoor hij een wiskundige grondslag gaf aan de wetten van Kepler. Zijn grote werk op dit vlak is “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, soms ook kortweg geciteerd als “Principia” (1684-1686). Het werd nog in het Latijn geschreven, terwijl in onze streken [Simon Stevin](#) reeds een eeuw vroeger begonnen was met in het Nederlands (van toen) te schrijven. Zijn werk was reeds voorbereid door [Galileo Galilei](#) met zijn grondige studie van de vrije val als eenparig versnelde beweging en de conclusie dat een horizontale beweging kan doorgaan met een minimum aan energieverlies. Men kan hierin een aanwijzing zien voor de eerste wet van Newton of de traagheidswet.

### Eerste Wet van Newton: de traagheidswet

Een voorwerp waarop geen netto resulterende kracht werkt zal zijn bewegingstoestand behouden: als het in rust is blijft het in rust, als het in beweging is zal het met constante snelheid bewegen in een rechte lijn.

### Tweede Wet

Als er een netto resulterende kracht werkt op een voorwerp dan zal dit een versnelling krijgen die evenredig is met de kracht en omgekeerd evenredig met de massa.

### Derde Wet of actie-reactie wet

Krachten zijn interacties tussen twee voorwerpen. Als een eerste voorwerp een kracht uitoefent op een tweede, dan zal het tweede een even grote maar tegengestelde kracht uitoefenen op het eerste.

**Belangrijke opmerking:** de wetten van Newton en de andere wetten van de mechanica moeten worden uitgewerkt in een **referentiesysteem zonder versnelling**, dus ofwel in rust ofwel bewegend met constante snelheid. Men noemt dit een **inertiaalstelsel**. Een roterend systeem is geen inertiaalstelsel omdat bij een punt dat een cirkel beschrijft er minstens een normale versnelling hoort.

De tweede wet wordt meestal geformuleerd als:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Wiskundig volgt hieruit de eerste wet. Gezien de vroegere problemen die men had om b.v. te verklaren hoe een steen verder beweegt wanneer hij losgekomen is van de hand van de werper, was deze eerste wet een grote stap vooruit.

Wanneer er verder gesproken wordt over "de wet van Newton" dan gaat het over de tweede wet. Deze tweede wet is als formulering waarschijnlijk één van de kortste uit de mechanica, maar de toepassing ervan is, zeker in het begin, niet zo evident. Men kan zich bij die toepassing laten leiden door de volgende 4 stappen.

### 6.2.1 Vrijmaken van het voorwerp

A. Wanneer men de wet van Newton wil toepassen, dan is de eerste vraag welke massa  $m$  men wil beschouwen. Men moet telkens zoeken naar krachten die werken **op  $m$** , op het voorwerp dat men wil bestuderen om de juiste kracht te kiezen uit elk actie-reactiepaar. Om gemakkelijker een antwoord te vinden is het goede praktijk om **het voorwerp los van zijn omgeving te tekenen**. Dit is de eerste stap in het **vrijmaken** van het voorwerp. Als er meerdere voorwerpen zijn, dan mag men die alleen samen nemen als:

- ze als één geheel met dezelfde versnelling bewegen;
- als men niet geïnteresseerd is in de krachten tussen deze voorwerpen.

Als eerste voorbeeld wordt een bol aan een touw beschouwd, rustend op een ronddraaiende kegel. In de eerste stap zal men de bol afzonderlijk tekenen, los van de kegel.

B. De tweede stap is het **invoeren van alle krachten** die vanuit de omgeving **op de bal** werken. Hierbij moet men zich 2 vragen stellen:

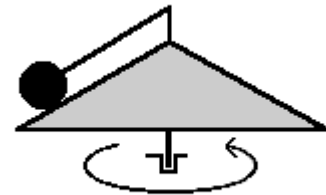
- werkt de zwaartekracht? Zijn er andere krachten die op afstand werken?
- waar zijn er contacten met de omgeving? Daar werken normaal ook krachten.

In dit geval moet men voor de eerste vraag positief antwoorden. Men zal dus het gewicht tekenen als aangrijpend in het massacentrum van het voorwerp.

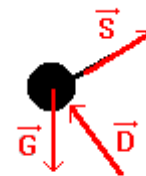
Om de tweede vraag te beantwoorden doet men de ronde van het voorwerp. Hierbij ontdekt men hier 2 contacten met de omgeving:

1. het touw. Het touw trekt aan de bol en de bol trekt aan het touw. De eerste kracht werkt op de bol, de tweede op het touw. Het is dus de eerste die men nodig heeft.

2. er is een contact tussen bol en kegel. De bol drukt op de kegel en de kegel houdt de bol omhoog. Deze laatste is de kracht op de bol. Men moet dus een kracht loodrecht op de kegel tekenen en omhoog. Dit moet de figuur leveren zoals hiernaast.



Figuur 6.1: Bol op kegel



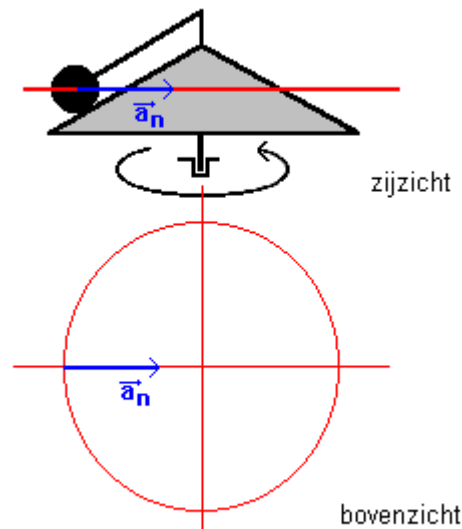
Figuur 6.2: Bol op kegel: de krachten

### 6.2.2 Versnelling bepalen

C. Eens de krachten ingevuld moet men zich afvragen wat men weet over **de versnelling**. Hiervoor zal men moeten kijken naar **wat men weet over de baan**. Als de baan rechtlijnig is, dan zal ook de versnelling de richting van die rechte moeten volgen. Is de baan gekromd, dan is er zeker een versnelling gericht vanuit de holle kant naar het kromtemiddelpunt van de baan. Bij een cirkel is dit kromtemiddelpunt gewoon het middelpunt van de cirkel.

In dit voorbeeld is de baan een **horizontale cirkel** is. Er is dus een normale versnelling die naar het centrum van die cirkel gericht is. Dat is dus een horizontale versnelling, niet langs de zijkant van de kegel.

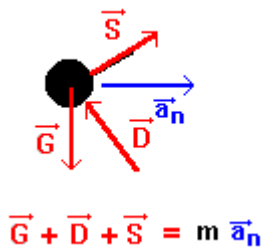
In Amerikaanse werken zal men de som van de krachten dikwijls de "applied forces" noemen en de massa  $x$  versnelling de "resultant forces". Dit beantwoordt aan het idee van **oorzaken in het ene en gevolg**



Figuur 6.3: Bol op kegel: versnelling

in het andere lid . Alhoewel  $m\vec{a}$  de dimensie van een kracht heeft, lijkt het toch beter het accent te leggen op de versnelling als het basiselement van het rechterlid.

### 6.2.3 Controle



Figuur 6.4: Bol op kegel: volledige schets

D. Voor men aan de berekeningen begint, is het goed om even te controleren of wat men getekend heeft wel zinvol is. De tweede wet van Newton is zeer logisch: als er een resulterende kracht is in een bepaalde richting, dan is er een versnelling in die richting. En omgekeerd: als men zeker is dat er een versnelling is in een bepaalde richting, dan moet er een resulterende kracht (mogelijk) zijn in die richting.

Hier is er zeker een horizontale versnelling naar rechts. De resultante van alle krachten zal dus naar rechts moeten gericht zijn. Men ziet dat alleen de spanning in het touw een kracht naar rechts kan leveren. Verticaal moeten de krachten elkaar in evenwicht kunnen houden. Er zijn neerwaartse en opwaartse krachten. Dat is in principe dus mogelijk.

Vooraf bij problemen met wrijvingskrachten zal deze controle dikwijls eventuele fouten in de zin van die krachten aan het licht brengen.

### 6.2.4 Uitrekenen

Men heeft nu de vergelijking waaraan het systeem moet voldoen. Dat is een vectoriële vergelijking in twee dimensies. Er mogen dus twee onbekenden in voorkomen. Als de hoeksnelheid van de kegel en het gewicht van de bol gegeven zijn, dan zijn dat de spanning in het touw en de druk op de kegel. Men kan deze vergelijking nu projecteren op een klassiek horizontaal-verticaal assenkruis. Een goede regel is om te **projecteren op de dominerende richting van de vectoren**. Hier zijn er twee die volgens een horizontaal-verticaal assenkruis liggen en twee volgens een schuin assenkruis evenwijdig aan en loodrecht op de kegel. Maar de 2 onbekenden liggen volgens dit laatste assenkruis. Als men zo schuin projecteert krijgt men twee vergelijkingen met telkens maar 1 onbekende. Dat is dus de snelste oplossingsmethode.

Zij  $\alpha$  de basishoek van de kegel,  $\omega$  de hoeksnelheid van de kegel.

Zij  $l$  de lengte van het touw + de straal van de bol. Dan is de straal van de cirkel beschreven door het

massacentrum van de bol gegeven door  $r = l \cdot \cos \alpha$   
 De normale versnelling wordt dan:  $a_n = r \cdot \omega^2$

De projectie langs de kegel wordt dan:

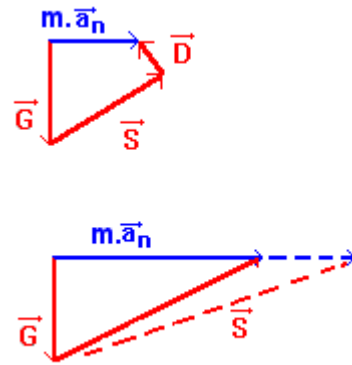
$$-G \cdot \sin \alpha + S = m \cdot a_n \cdot \cos \alpha \quad . \text{ met enkel } S \text{ als onbekende}$$

Projectie loodrecht op de kegel levert dan:

$$-G \cos \alpha + D = -m \cdot a_n \cdot \sin \alpha \quad . \text{ met enkel } D \text{ als onbekende}$$

Het is typisch dat sinus en cosinus afwisselen in de vergelijkingen als men op orthogonale assen projecteert.

De laatste figuur (6.5) schetst de evolutie van het systeem bij stijgende hoeksnelheid van de kegel. Bij kleine hoeksnelheid zal  $a_n$  klein zijn, zodat er een druk  $D$  nodig is om de veelhoek te sluiten. Bij stijgende hoeksnelheid komt er een punt waarop  $D = 0$  is. Stijgt de hoeksnelheid nog verder, dan zou  $D$  naar beneden gericht moeten zijn om de bol op de kegel te houden. Kan dat niet, dan zal het touw een kleinere hoek maken met de horizontale opdat de horizontale component van de spanning in het touw zou kunnen toenemen terwijl de verticale component gelijk blijft aan het gewicht. De bol komt dan los van de kegel en gaat iets erboven hangen.



Figuur 6.5: Bol op kegel: evolutie

### 6.2.5 Tweede voorbeeld

Twee blokken liggen op elkaar (fig. 6.6). Aan het onderste wordt getrokken met een kracht  $F$ , het bovenste wordt tegengehouden door een touw, dat schuin gespannen is onder een hoek van  $30^\circ$ . Tussen de blokken is er wrijving met wrijvingscoëfficiënt  $f_1$ , tussen het onderste blok en de grond met wrijvingscoëfficiënt  $f_2$ . Dit betekent dat er een wrijvingskracht optreedt die  $f$  maal de druk is op het oppervlak. Welke versnelling krijgt het onderste blok?

Men mag dit probleempje niet te eenvoudig benaderen. Als aan het onderste blok getrokken wordt, zal het bovenste willen meebewegen naar rechts. Daardoor komt er een spanning in het touw. Daar het touw schuin gespannen is wordt het bovenste blok lichtjes opgetild. Het druk dus niet meer met zijn volle gewicht op het onderste blok. In welke mate het opgetild wordt hangt af van de spanning in het touw, die afhangt van de wrijvingskracht, die afhangt van de druk tussen beide blokken, die weer afhangt ... van de spanning in het touw. Dit is geen cirkelredenering. Dat twee veranderlijken mekaar beïnvloeden is vrij frequent en stelt algebraïsch geen probleem, zoals verder zal blijken.

- Over welke massa's moet men praten? Daar men de kracht tussen beide blokken nodig heeft en beide een verschillende versnelling hebben, moet men zeker beide blokken afzonderlijk beschouwen. Men tekent ze dan ook best ietwat uit elkaar.

- Wat is de zin van de wrijving? Het bovenste blok moet door de wrijving naar rechts geduwd worden. Dus is de wrijving die daarop werkt zeker naar rechts gericht. De reactie hierop werkt op het onderste blok en is dan naar links gericht. Deze is als de vector  $-W_1$  genoteerd. Welk vector van het actie-reactiekoppel men met een  $+$  en welke men met een  $-$  noteert, kan vrij gekozen worden. De  $+$  en  $-$  betekenen alleen dat men te maken heeft met twee even grote maar tegengesteld gerichte vectoren, wat typisch is voor een actie-reactiekoppel. Bij het opschrijven van de projecties wordt met dit min-teken uit de vectoriële notatie geen rekening gehouden. Dan kijkt men alleen naar de zin van de vector t.o.v. de projectierichting. Er blijft dat bij projectie op zelfde assen, de projecties van actie en reactie tegengesteld teken moeten hebben. Zie infra b.v. voor  $W_1$ .

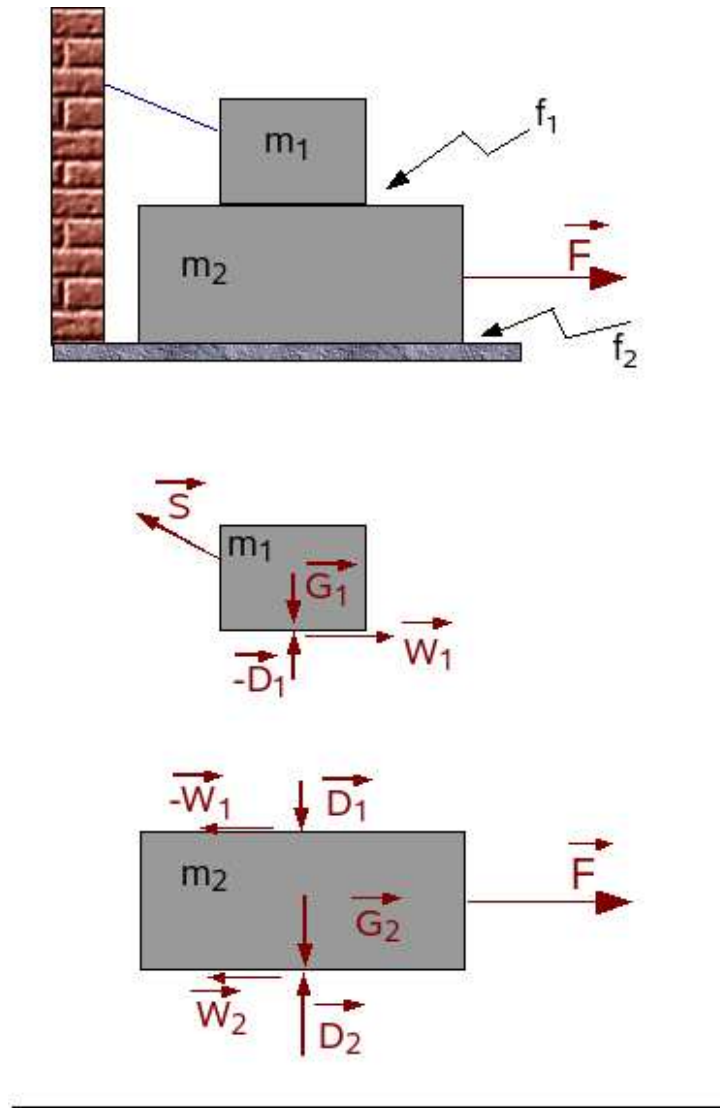
Na het vrijmaken en het invullen van alle krachten moet een figuur bekomen zoals hiernaast. Men krijgt dan voor de projecties op een klassiek xy-assenkruis:

Voor  $m_1$ :

$$-S \cdot \cos 30^\circ + W_1 = 0 \quad (1)$$

$$+S \cdot \sin 30^\circ + D_1 - G_1 = 0 \quad (2)$$

$$W_1 = f_1 \cdot D_1 \quad (3)$$



Figuur 6.6: 2 blokken met wrijving

Voor  $m_2$

$$-W_1 - W_2 + F = m_2 \cdot a \quad (4)$$

$$-D_1 - G_2 + D_2 = 0 \quad (5)$$

$$W_2 = f_2 \cdot D_2 \quad (6)$$

Er blijken zes vergelijkingen te zijn voor zes onbekenden. Dat moet normaal oplosbaar zijn. Na invullen van (3) in (1) en een beetje herschikken van (1) en (2) bekomt men:

$$-S \cdot \cos 30^\circ + f_1 \cdot D_1 = 0 \quad (1b)$$

$$+S \cdot \sin 30^\circ + D_1 = G_1 \quad (2b)$$

Dit blijkt een stelsel van twee vergelijkingen in twee onbekenden, dat dus afzonderlijk oplosbaar is. Men kan  $S$  elimineren door (1b) te vermenigvuldigen met  $\sin 30^\circ$  en (2b) met  $\cos 30^\circ$  en beide lid aan lid op te tellen. Het resultaat is:

$$D_1 = \frac{\cos 30^\circ \cdot G_1}{f_1 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ}$$

Op analoge manier kan men  $D_1$  elimineren door (2b) met  $-f_1$  te vermenigvuldigen en lid aan lid op te tellen:

$$S = \frac{f_1 \cdot G_1}{f_1 \cdot \sin 30^\circ + \cos 30^\circ}$$

Als men als numerieke gegevens neemt:  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 5 \text{ kg}$ ,  $f_1 = 0,1$ ,  $f_2 = 0,2$  en  $F = 30 \text{ N}$ , dan bekomt men als numerieke oplossing:

$$D_1 = 18,909 \text{ N}$$

$$S = 2,183 \text{ N}$$

Uit (5) haalt men:

$$D_2 = G_2 + D_1 = 50 + 18,909 = 68,909$$

(4) kan herwerkt worden tot:

$$-f_1 D_1 - f_2 D_2 + F = m_2 a$$

Invullen van de numerieke gegevens leidt tot  $\mathbf{a = 2,87 \text{ m/s}^2}$

De fout die bij dit soort problemen soms gemaakt wordt is dat men inziet dat de druk  $D_2$  beïnvloed wordt door het gewicht van  $m_1$ . Sommigen willen dat verrekenen door voor het gewicht van  $m_2$  het gewicht van beide massa's te verrekenen. Dit soort beïnvloeden wordt echter **verrekenend via de verbindingskrachten**, hier  $D_1$  en  $W_1$ . Men moet **de krachten bij hun aangrijpingspunt laten** en nooit een kracht die op een bepaalde massa werkt opschrijven in de vergelijkingen van een andere massa.

### 6.2.6 Derde voorbeeld

Een man op een hangend platform trekt zichzelf omhoog. Met welke kracht moet hij trekken aan het touw om een versnelling van  $1 \text{ m/s}^2$  te bereiken? met welke kracht drukt hij dan nog op het platform? Gegeven is  $m_m$ , de massa van de man, en  $m_p$ , de massa van het platform. De katrol wordt ideaal ondersteld zodat de spanning in het touw aan beide zijden van de katrol dezelfde is.

Men kan voor de oplossing van dit probleem verscheidene systemen beschouwen. Daar man en platform samen bewegen met dezelfde versnelling, kan men ze samen nemen. Dan kan men echter niets zeggen over de kracht waarmee de man op het platform drukt want dat is dan een inwendige kracht, die niet in de vergelijkingen zal voorkomen.

Men mag ook niet stellen dat de som van de spanningen in de touwen gelijk moet zijn aan het gewicht van man + platform. Er is een versnelling omhoog en dus moet er een resultante omhoog zijn. De spanning in de touwen zal dus groter moeten zijn dan het gewicht van man + platform.

Als men iets wil weten over de kracht tussen man en platform, dan moet men man en platform afzonderlijk nemen. Men krijgt dan de schets van fig.6.8. Bemerkt dat de kracht van het platform op de man omhoog is. Deze kracht vormt een actie-reactiekoppel met de kracht van de man op het platform.

Men krijgt als vergelijkingen (zie fig. 6.8):

- voor het platform:  $S - D - G_p = m_p a$
- voor de man:  $S + D - G_m = m_m a$

Dit is een stelsel van 2 vergelijkingen in 2 onbekenden.

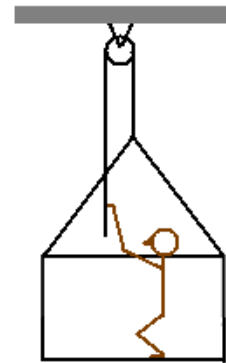
Telt men beide vergelijkingen lid aan lid op dan verdwijnt D eruit en bekomt men S:

$$S = (m_p + m_m)(a + g)/2$$

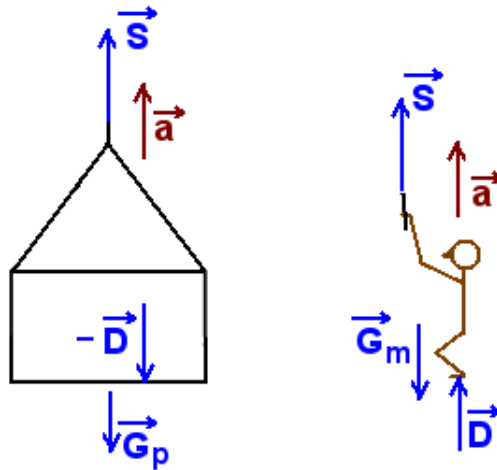
Trekt men beide leden van elkaar af dan bekomt men D:

$$D = (m_m - m_p)(a + g)/2$$

Voor een positief resultaat voor D, d.i. opdat D de onderstelde zin zou hebben, moet  $m_m > m_p$ . Het is nogal evident dat als het gewicht van het platform groter zou zijn dan het gewicht van de man, de man gewoon omhoog zou getrokken worden door het vallend platform.



Figuur 6.7: Man op platform trekt zichzelf omhoog



Figuur 6.8: Man op platform: krachten

## 6.3 Impuls en Behoud van impuls

Een massa onderworpen aan de wet van Newton, kan men volgen in de tijd. Wiskundig komt dit neer op het integreren van beide leden van de wet van Newton naar de tijd. Hierbij worden de volgende nieuwe begrippen ingevoerd:

de **stoot**:  $\vec{N} = \int \vec{F}.dt$

de **impuls** of **hoeveelheid van beweging**:  $\vec{p} = m.\vec{v}$

Uit de eerste definitie wordt de **eenheid** voor stoot en hoeveelheid van beweging afgeleid als **Newton.seconde**, met symbool Ns

### 6.3.1 Impulsstelling

#### 6.3.1.1 Voor 1 massa

Dit is rechtstreeks de integraal van beide leden van de wet van Newton tussen een beginogenblik, hier met index “init” van “initieel”, en een eindogenblik, hier met index “fin” van “finaal”

$$\int_{init}^{fin} \sum_i F_i . dt = \int_{init}^{fin} m \vec{a} . dt = \int m \frac{d\vec{v}}{dt} . dt = \int m d\vec{v}$$

$$\sum_i \vec{N}_i = m(\vec{v}_{fin} - \vec{v}_{init}) = \Delta m \vec{v}$$

Dit is een vectoriële wet die dicht aansluit bij de tweede wet van Newton. Men zal dezelfde techniek voor het vrijmaken van de massa m moeten volgen. In de vectoriële formule staat een minteken, maar als bij projectie de term die volgt ook negatief is, dan kan het in de praktijk een som worden.

#### Voorbeeld

Een bal beweegt wrijvingsloos over een horizontaal vlak en botst tegen een volkomen gladde verticale wand (fig.6.9). Men stelt vast dat de bal de wand nadert onder een hoek van  $60^\circ$  en teruggekaatst wordt onder een hoek van  $50^\circ$ . Bereken de snelheid na de botsing en de stoot van de wand op de bal. Snelheid voor de botsing: 4 m/s ; massa van de bal: 0,1 kg.

**Nota:** alleen bij een volkomen elastische botsing zou de uittreehoek moeten gelijk zijn aan de invalshoek.

#### Oplossing



De bal botst tegen een “volkomen gladde wand”. Hiermede geeft men aan dat de kracht van de wand op de bal steeds loodrecht op de wand zal staan. De stoot als integraal van de kracht over de botsingstijd zal dus ook loodrecht op de wand staan. Er zijn dus 2 onbekenden in het probleem: de grootte van de stoot en de grootte van de snelheid na de botsing. Volgens bovenstaande impulsstelling kan men opschrijven:

$$\vec{N} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

Men kan deze vergelijking projecteren op een klassiek horizontaal-vertikaal assenkruis:

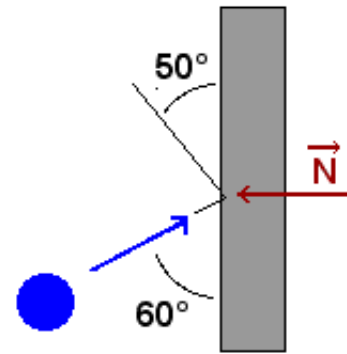
$$\begin{aligned} -N &= m(-v_2 \sin 50^\circ - v_1 \sin 60^\circ) \\ 0 &= m(v_2 \cos 50^\circ - v_1 \cos 60^\circ) \end{aligned}$$

De eerste vergelijking zou men met -1 kunnen vermenigvuldigen. Dan worden alle mintekens een + en wordt het rechterlid een som. Uit de laatste vergelijking volgt onmiddellijk:

$$v_2 = v_1 \frac{\cos 60^\circ}{\cos 50^\circ} = 4.0, 5/0, 77 = 2, 61 m/s$$

Dit invullen in de eerste vergelijking levert de stoot:

$$\begin{aligned} N &= mv_1 \frac{\sin 50^\circ \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos 50^\circ}{\cos 50^\circ} = mv_1 \frac{\sin 110^\circ}{\cos 50^\circ} \\ &= 0,1 \cdot 4,0,94/0,77 = 0,488 \text{ Ns} \end{aligned}$$



Figuur 6.9: Bal botsend met wand

### 6.3.1.2 Voor meerdere massa's

Wanneer men meerdere massa's heeft, kan een deel beschouwd worden als het systeem waarover men praat en de rest als niet behorend tot dat systeem. Voor de krachten wordt dan een onderscheid ingevoerd tussen:

- **inwendige krachten** : krachten tussen twee massa's die behoren tot het systeem. De inwendige krachten moeten, volgens het derde postulaat van Newton steeds onder de vorm van actie-reactieparen voorkomen.
- **uitwendige krachten** : krachten die van buitenuit op één der massa's van het systeem werken. Ze krijgen hier de index “ext” voor “extern”.

Wanneer de bovenstaande stelling toegepast wordt op op elke massa van het systeem en men dan sommeert over alle massa's van het systeem, vallen de stoten van de inwendige krachten tegen elkaar weg. De inwendige krachten vormen immers actie-reactieparen die even lang werken. **Alleen de stoten van de uitwendige krachten kunnen de totale hoeveelheid van beweging van het systeem beïnvloeden :**

$$\sum_i \vec{N}_{i,ext} = \Delta(\sum_i m_i \vec{v}_i) = \sum m_i \vec{v}_{i,fin} - \sum_i m_i \vec{v}_{i,init}$$

Bemerk dat er nu ook gesommeerd wordt over alle massa's. Alhoewel in de formules dezelfde index gebruikt wordt, kan elke som over een ander aantal elementen lopen. Bij een explosie b.v. kan men in het begin één massa hebben en een grote hoeveelheid brokstukken na de explosie. De totale beschouwde massa voor en na moet natuurlijk wel dezelfde zijn.

### 6.3.2 Behoud van impuls

Van deze laatste uitdrukking bestaat een speciaal geval. Als de **som van de uitwendige stoten nul** is, dan staat er dat de eindtoestand nog gelijk is aan de begintoestand. Kortweg zegt dat dan dat de totale impuls constant is of **behouden blijft** . In wiskundige vorm:

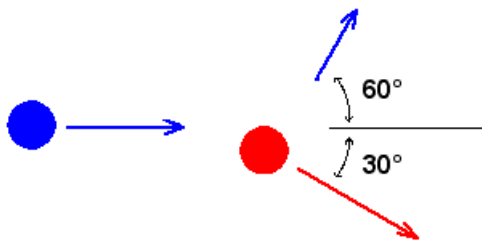
$$\sum_i \vec{N}_{i,ext} = 0 \Leftrightarrow \sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{C}$$

Het kan ook gebeuren dat de voorwaarde dat de som van de uitwendige stoten nul is alleen opgaat voor de projectie ervan op een bepaalde richting. Dan staat er dat voor de projecties op die richting de eindtoestand nog gelijk is aan de begintoestand of m.a.w. dat er behoud geldt volgens die richting. Dit is het geval voor de richting langs de wand van vorig voorbeeld. De projectie van de vergelijking langs de wand zegt dat er evenwijdig aan de wand behoud van impuls is. In deze aardse wereld zitten we altijd met het gewicht als verticale uitwendige kracht, zodat behoud van impuls dikwijls alleen in het horizontale vlak zal kunnen toegepast worden, b.v. bij botsende biljartballen. Een andere mogelijkheid om de invloed van de zwaartekracht te mogen verwaarlozen is te stellen dat de botsingstijd zeer klein is, waarover verder meer.

In de praktijk zal men niet de constante berekenen, maar past men behoudswetten toe door de som van de hoeveelheden van beweging te maken op een eerste ogenblik en daarna die som ook te maken op een tweede ogenblik en dan te stellen dat beide sommen moeten gelijk zijn. Voor Behoud van Energie zal het gaan over sommen voor twee verschillende posities van het systeem, daar deze wet afgeleid wordt door integratie in de ruimte.

Bij een botsing geldt er steeds behoud van impuls, maar niet noodzakelijk behoud van energie. Wanneer er bij een botsing ook de energie behouden blijft, spreekt men van een volkomen elastische botsing. Dit impliceert dat de voorwerpen zeker niet aan elkaar blijven kleven. Wanneer twee botsende voorwerpen aan elkaar blijven kleven dan heeft men een volkomen niet-elastische botsing. De meeste werkelijke botsingen liggen echter tussen deze beide uitersten in. Hieraan wordt een afzonderlijk hoofdstuk gewijd: Botsingen (11)

### Voorbeeld



Figuur 6.10: Botsende biljartballen

Een biljartbal wordt met een snelheid van 5 m/s tegen een stilstaande bal geschoten. Men stelt vast dat deze bal uitwijkt onder een hoek van  $60^\circ$  en dat de andere bal vertrekt onder een hoek van  $30^\circ$  t.o.v. de snelheid van de aankomende bal. Bereken de snelheid van beide ballen.

### Oplossing

Dit is een interactie tussen de 2 ballen zonder invloed van krachten van buitenuit. Er geldt dus een behoud van impuls. Men schrijft dus dat de impuls voor de botsing moet gelijk zijn aan de totale impuls na de botsing:

$$m \cdot \vec{v}_0 = m \cdot \vec{v}_b + m \cdot \vec{v}_r$$

Dit kunnen we projecteren op een horizontale en een verticale as:

$$\begin{aligned} m \cdot v_0 &= m \cdot v_b \cdot \cos 60^\circ + m \cdot v_r \cdot \cos 30^\circ \\ 0 &= m \cdot v_b \cdot \sin 60^\circ - m \cdot v_r \cdot \sin 30^\circ \end{aligned}$$

Als alle massa's dezelfde zijn kunnen deze weggedeeld worden uit de vergelijkingen. De eenvoudigste manier om dit soort lineaire stelsels op te lossen is beide vergelijkingen te vermenigvuldigen met een coëfficiënt zodat de onbekende die men weg wil tegengestelde coëfficiënten krijgt en wegvalt als men lid aan lid optelt. Om  $v_r$  weg te werken zal men dus de eerste vergelijking vermenigvuldigen met  $\sin 30^\circ$  en de tweede met  $\cos 30^\circ$  en lid aan lid optellen. Dit levert:

$$v_0 \cdot \sin 30^\circ = v_b (\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ) = v_b \cdot \sin 90^\circ = v_b$$

Dus  $v_b = 5 \cdot \sin 30^\circ = 2,5$  m/s

Op analoge manier werkt men  $v_b$  weg door de eerste vergelijking te vermenigvuldigen met  $\sin 60^\circ$  en de tweede met  $-\cos 60^\circ$ . Dit levert op analoge manier dat  $v_b = v_b \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot \sin 60^\circ = 4,33 \text{ m/s}$

Nota: het is geen toeval dat de ballen onder een hoek van  $90^\circ$  uit elkaar gaan. dit blijkt een eis van het behoud van energie:  $5^2 = 2,5^2 + 4,33^2$ . Als men behoud van energie mag toepassen bij dit probleem, dan moet maar één richting na de botsing gegeven worden om het probleem te kunnen oplossen.

#### Nota: botsingstijd zeer klein

Om berekeningen te vereenvoudigen zal men dikwijls stellen dat “de botsingstijd zeer klein is”. Deze idealisatie heeft twee gevolgen:

1. de invloed van niet-botsingskrachten mag verwaarloosd worden.
2. er kan een omwisseling van snelheden gebeuren zonder verandering van plaats.

Voor het eerste punt: als men dezelfde verandering van impuls wil bereiken in een steeds kortere tijd, dan zal de kracht die hiervoor moet zorgen steeds groter moeten worden. De andere krachten, zoals b.v. het gewicht, nemen echter niet toe naarmate de interactietijd kleiner wordt. Hun invloed wordt dus verwaarloosbaar bij zeer kleine interactietijden.

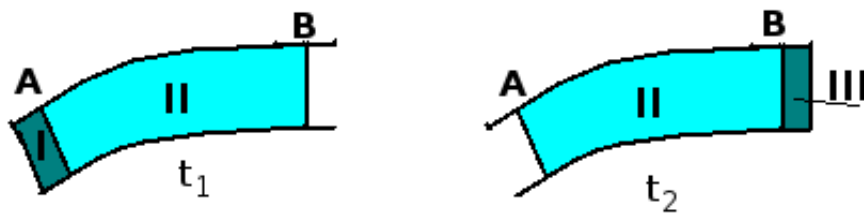
Voor het tweede punt: wanneer b.v. een biljartbal tegen een stilliggende biljartbal aanbotst, zal men een eerste ogenblik hebben waarbij de eerste bal beweegt en de tweede stil ligt en een volgend ogenblik waarop de eerste stil ligt en de tweede beweegt, zonder dat beide ballen van plaats veranderd zijn.

Dit laatste effect is te begrijpen uit het feit dat deze idealisatie leidt tot een snelheden, die in één ogenblik overgaan naar de nieuwe waarden. Daar verplaatsing de integraal is van de snelheid over de tijd, is er op het eerste ogenblik van de nieuwe snelheid nog geen verplaatsing omdat er dan nog geen interval is waarover kan geïntegreerd worden.

Hoe realistisch is deze idealisatie? Wanneer een smid zijn hamer losjes op het aambeeld laat neerkomen en terug opwippen is de contacttijd enkele honderdsten van een seconde. Als men geïnteresseerd is in wat er seconden nadien gebeurt, dan is dat inderdaad te verwaarlozen.

### 6.3.3 Continue stroming

Wanneer een vloeistof door een bocht in een buis stroomt, dan wordt de impuls van het voorbij stromend water voortdurend veranderd omdat de richting van de snelheid van het water dat in de bocht passeert, verandert. deze verandering vereist een continue kracht van de buis op het water. Hoe groot die kracht is, kan men berekenen aan de hand van de figuur hieronder.



Figuur 6.11: Stroming in buis

De figuur 6.11 stelt een buis voor waarin water stroomt. Men onderstelt een stationaire stroming, d.w.z. dat in elk punt, de snelheid van de stroming niet verandert in de loop van de tijd. Op een eerste ogenblik is er een hoeveelheid water met volume  $V_I$ , die klaar staat om door de doorsnede in A in het volume  $V_{II}$  te vloeien. Op een tweede ogenblik is het volume  $V_I$  in het volume  $V_{II}$  gevloeid maar is er een even grote massa met volume  $V_{III}$  door de doorsnede in B weggevloeid. Als men de impuls berekent op het eerste ogenblik, krijgt men:

$$\vec{p}_1 = \int_{V_{ol I}} \vec{v} \cdot dm + \int_{V_{ol II}} \vec{v} \cdot dm = \vec{p}_I + \vec{p}_{II}$$

Op het tweede ogenblik krijgt men:

$$\vec{p}_2 = \int_{V_{olI}} \vec{v}.dm + \int_{V_{olIII}} \vec{v}.dm = \vec{p}_{II} + \vec{p}_{III}$$

Met de onderstelling van een stationaire stroming moet de impuls van volume  $V_{II}$  op beide ogenblikken nog dezelfde zijn. Het verschil in impuls wordt dus:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{III} - \vec{p}_I$$

Voor de kracht geldt dus:

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = \vec{p}_{III} - \vec{p}_I$$

Men kan de impuls van de volumes I en III benaderen als een volume  $\Delta m$  x een gemiddelde snelheid  $v_I$  en  $v_{III}$ . Voor de gemiddelde kracht krijgt men dan:

$$\vec{F} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}_{III} - \vec{v}_I)$$

Als men nu het tijdsinterval naar 0 laat gaan, wordt  $\Delta m/\Delta t$  het massadebiet  $D_m$  ( kg/s) en worden de snelheden de gemiddelde snelheden over de doorsneden in A en B. De formule wordt dan:

$$\vec{F}_{op\ medium} = D_m(\vec{v}_{uit} - \vec{v}_{in})$$

De richting van de kracht wordt dus bepaald door het verschil in de richting van de snelheden. Als beide snelheden gelijk zijn zal de kracht volgens de bissectrice van de hoek tussen  $v_{uit}$  en  $-v_{in}$  liggen. Bemerkt ook dat de benodigde kracht stijgt met het kwadraat van de snelheid want ook het debiet zal toenemen bij stijgende snelheden.

De kracht van het medium op de buis is het tegengestelde van wat de formule levert. De kracht nodig om de buis op haar plaats te houden is dan weer het tegengestelde van deze kracht of opnieuw de kracht zoals de formule die levert. Dit wordt in sommige meettoestellen gebruikt om de hoeveelheid van het voorbijstromend medium te bepalen, bv. bij het laden van graan in een vrachtwagen.

Men kan voor deze kracht ook een aangrijpingspunt  $r_F$  bepalen. Hiervoor moet men de impulsmomenten berekenen t.o.v. een willekeurig vast punt. Het is opnieuw duidelijk dat het impulsmoment van het volume  $V_{II}$  niet verandert. De volgende vergelijking levert een eerste benadering voor het aangrijpingspunt, met  $r_{in}$  en  $r_{uit}$  de positie van het zwaartepunt van de doorsneden A en B:

$$\vec{r}_F \times \vec{F} = D_m(\vec{r}_{uit} \times \vec{v}_{uit} - \vec{r}_{in} \times \vec{v}_{in})$$

### Voorbeeld

Een straalvliegtuig vliegt met een constante snelheid van 1500 km/u. Het verbruikt lucht met een debiet van 110 kg/s en brandstof met een debiet van 0,97 kg/s. De verbrandingsgassen worden uitgestoten met een relatieve snelheid van 780 m/s. Welke stuwkracht levert zijn motor op dat ogenblik?

### Oplossing

De formule geeft de kracht op de uitlaatgassen. De stuwkracht van de motor is de reactie hierop, dus even groot maar tegengestelde zin. Hier volstaat het dus de grootte van de kracht te berekenen.

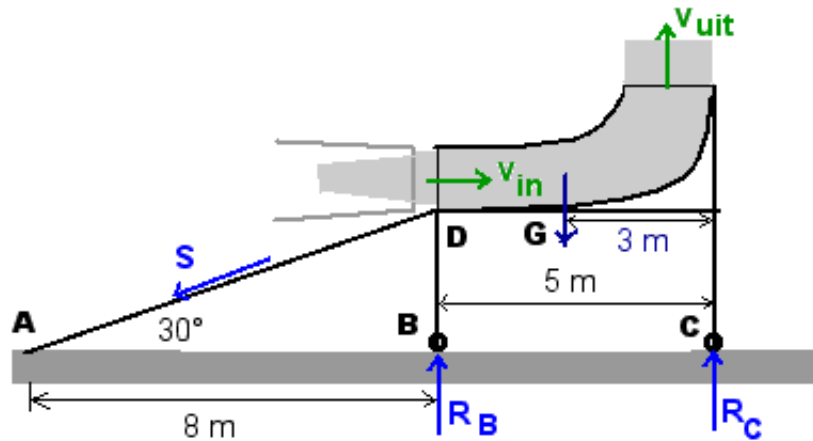
In de formule moet met absolute verschillen in impuls gerekend worden. Men onderstelt dat de lucht voor het vliegtuig stilstaat.  $1500 \text{ km/u} = 1500 \cdot 1000/3600 = 416,7 \text{ m/s}$ . De uitredende lucht (in de verbrandingsgassen) heeft dus een absolute snelheid van  $780 - 416,7 \text{ m/s} = 363,3$ . Daar de brandstof met het vliegtuig mee vervoerd wordt, is haar beginsnelheid de snelheid van het vliegtuig. Haar absolute snelheidsverandering komt dus uit op de relatieve snelheid. Daar alle debieten in kg/s gegeven zijn en niet als volume/s, kunnen ze rechtstreeks gebruikt worden in de formule. Men krijgt dan:

$$F = D_{m,lucht}(363,3 - 0) + D_{m,brandst}(780) = 110 \cdot 363,3 + 0,97 \cdot 780 = 39\ 963 + 756,6 = 40\ 719,6 \text{ N}$$

### Tweede voorbeeld

Bij het testen van een straalmotor wordt achter de motor een deflector gezet die de uitlaatgassen omhoog richt (fig. 6.12) Bereken de krachten in de steunpunten en in de kabel als de motor gassen uitstoot met een debiet van 45 kg/s en deze de deflector binnenkomen met een snelheid van 720 m/s en die verlaten met een 310 m/s. De diameter van de inlaat is 1 m en van de uitlaat 1,5 m. Het eigen gewicht van de deflector is 2000 N.

### Oplossing



Figuur 6.12: Deflector voor uitlaat van straalmotor

Voor de berekening zal in twee dimensies gewerkt worden. Men mag onderstellen dat de opstelling symmetrisch t.o.v. een verticaal vlak in het midden, zodat wat berekend wordt het dubbele is van de krachten in linker- en rechter bevestiging.

De statica eist dat de som van alle krachten nul is en de som van alle momenten t.o.v. een willekeurig punt. Voor de som van de krachten krijgt men:

$$\vec{S} + \vec{R}_B + \vec{R}_C + \vec{G} + \vec{F}_{op\ buis} = 0$$

De kracht op de buis is de reactie op de kracht op de gassen. Men kan deze verandering van teken ook bekomen door de bovenstaande formules in het rechterlid te plaatsen. Uitgewerkt in projecties in een klassiek vertikaal-horizontaal assenkruis: - Horizontaal:

$$-S \cdot \cos 30^\circ = D_m(0 - v_{in})$$

Hieruit volgt ogenblikkelijk voor S:

$$S = 45 \cdot 720 / \cos 30^\circ = 37412 \text{ N}$$

- Verticaal:

$$-S \cdot \sin 30^\circ + R_B + R_C - G = D_m(v_{uit} - 0)$$

Hierin zitten nog 2 onbekenden. Men moet ook nog de momentenvergelijking opschrijven. Dit wordt gedaan t.o.v. D omdat dan 2 van de 3 onbekenden niet voorkomen in de vergelijking en men dus een vergelijking in 1 onbekende zal bekomen.

$$5 \cdot R_C - 2 \cdot G = D_m(4,25 \cdot v_{uit} - (-0,5 \cdot v_{in}))$$

Hieruit volgt:

$$R_C = (2 \cdot 2000 + 45(4,25 \cdot 310 + 0,5 \cdot 720)) / 5 = 15897 \text{ N}$$

Invullen in de vorige vergelijking levert  $R_B = 18789 \text{ N}$

### 6.3.4 Links

Er bestaan op internet heel wat simulaties van botsingen. Een bekende, met elastische en niet-elastische botsingen in te vinden bij de [applets van Walter Fendt](http://www.walter-fendt.de/ph14d/)<sup>1</sup>: (in verscheidene talen)  
Een lijstje van interessante sites kan men vinden bij [de K.U.Leuven](http://fys.kuleuven.be/pradem/fysaplet.htm)<sup>2</sup>

<sup>1</sup><http://www.walter-fendt.de/ph14d/>

<sup>2</sup><http://fys.kuleuven.be/pradem/fysaplet.htm>

## 6.4 Arbeid en energie

Men kan een voorwerp dat onderworpen is aan de tweede wet van Newton volgen langs de baan. Het is uit de dagelijkse ervaring duidelijk dat wanneer men tegen iets duwt om dat te verplaatsen, men dan **arbeid** levert. Wanneer een kracht van punt tot punt kan verschillen gedurende deze verplaatsing, zal men een beroep moeten doen op een integraal om deze arbeid uit te rekenen. Voor het product van twee vectoren bestaan echter twee mogelijkheden: scalair en vectorieel product. Het blijkt dat we hier het scalair product nodig hebben want het resultaat moet een reëel getal zijn.

### 6.4.1 Energiestelling voor één massa

Indien er maar 1 massa is kan er maar 1 verplaatsing zijn. In differentiaalvorm krijgt men:

$$(\sum_i \vec{F}_i) \cdot d\vec{r} = m\vec{a} \cdot d\vec{r}$$

Met de substitutie  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  krijgt men

$$(\sum_i \vec{F}_i) \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}dt = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}dt$$

Als men zich in het rechterlid nu beperkt tot  $v$  als variabele en de verdere afhankelijkheid van  $v$  t.o.v. de tijd niet beschouwt, dan krijgt men:

$$(\sum_i \vec{F}_i) \cdot d\vec{r} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

Integreren van beide leden tussen een positie 1 en een positie 2 levert:

$$\int_1^2 (\sum_i \vec{F}_i) \cdot d\vec{r} = \Delta \frac{mv^2}{2}$$

Men definieert nu:

$$\text{Arbeid} : A = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\text{Kinetische energie} : E_k = \frac{mv^2}{2}$$

De stelling zegt dus: **de arbeid van de krachten gaat naar de verandering van kinetische energie van het voorwerp** .

Arbeid en energie worden uitgedrukt in **Joule** , symbool **J**.  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \times 1 \text{ m}$ . (Qua dimensie komt dit dus overeen met een moment, met eenheid Nm, Newton-meter)

$$\text{Dus } \Delta \frac{mv^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \Delta E_k$$

Wanneer de arbeid positief is dan wordt er energie geleverd aan het voorwerp. Wanneer de arbeid negatief is wordt er energie onttrokken aan het voorwerp.

Men kan hier een link leggen met wat in de kinematica verteld wordt. Als een kracht loodrecht staat op de baan van een massa, dan zal die massa ook een versnelling krijgen die loodrecht staat op die baan (tweede wet van Newton). Bij een versnelling loodrecht op de baan verandert de richting van de snelheid maar niet de grootte. De kinetische energie van het voorwerp blijft dus constant. Men ziet dat door het scalair product in de berekening van de arbeid geleverd door de kracht, die kracht dan ook geen arbeid levert. Heeft de kracht wel een component volgens de raaklijn aan de baan, dan zal er een verandering zijn van grootte van de snelheid en dus van de kinetische energie.

### 6.4.2 Energiestelling voor meerdere massa's

De vorige formule moet op elke massa toegepast worden. Alhoewel de inwendige krachten in paren voorkomen, is het niet altijd zo dat de verplaatsing van het aangrijpingspunt van de actie- en reactiekracht dezelfde is. Een voorbeeld hiervan vindt men op het einde van deze paragraaf. Men moet dus zowel de arbeid van de inwendige als van de uitwendige krachten verrekenen:

$$\int \sum_j (\sum_i \vec{F}_{ij,intern} + \sum_i \vec{F}_{ij,extern}) \cdot d\vec{r}_j = \sum_j \Delta E_{k,j}$$

Hierbij loopt  $j$  over alle massa's en  $i$  over alle krachten op elke massa. Meestal vervangt men de dubbele som in het linkerlid door één som lopend over alle inwendige en uitwendige krachten.

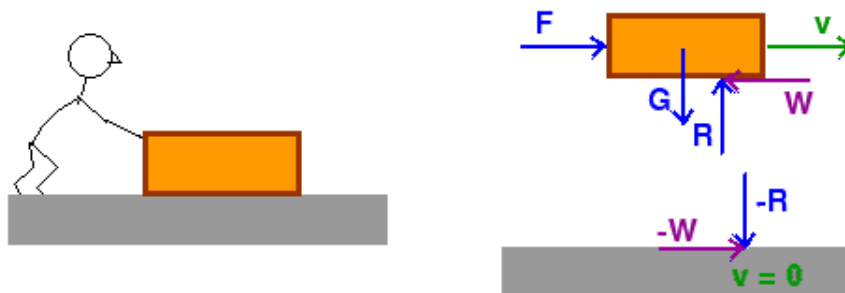
Een grote vereenvoudiging van deze formule treedt echter op als men te maken heeft met **ideale verbindingen**. Een ideale verbinding wordt gedefinieerd als **een verbinding die geen arbeid levert en er ook geen opneemt**. De krachten die optreden in ideale verbindingen kan men in bovenstaande energieberekening dus rustig weglaten.

Om het mechanisme van de ideale verbindingen te begrijpen, moet men een onderscheid maken tussen inwendige verbindingen en verbindingen met de omgeving.

- Voor **inwendige verbindingen** komt het erop neer dat zowel actie- als reactiekracht dezelfde verplaatsing ondergaan volgens de richting of werklijn van de krachten. Daar beide krachten echter een tegengestelde zin hebben, zal de totale arbeid nul zijn. Er is echter wel iets gebeurd: er is energie van één onderdeel van het systeem naar een ander onderdeel overgebracht, daar elke component van het actie-reactiekoppel op een ander onderdeel werkt. Dit is b.v. duidelijk het geval bij een scharnier.

- Bij **verbindingen met de omgeving** werkt slechts één van beide krachten op het beschouwde systeem. De mogelijkheden om geen arbeid te hebben zijn dan ofwel geen verplaatsing (b.v. vaste scharnier) of een verplaatsing loodrecht op de kracht (b.v. volkomen glad oppervlak: schaatser op ijs, luchtkussentafel).

Als voorbeeld van een geval waarbij **actie en reactie niet dezelfde verplaatsing** hebben, kan men het geval beschouwen van een kist die men vooruitduwt (fig. 6.13). Er is wrijving tussen de kist en de grond. De wrijvingskracht die aangrijpt op de grond en de wrijvingskracht die aangrijpt op de kist vormen een actie-reactiekoppel. Maar het aangrijpingspunt van de wrijving op de kist verplaatst zich met de kist. Er wordt dus **arbeid onttrokken aan de kist** (die uiteindelijk moet geleverd worden door de man die de kist duwt). De wrijvingskracht op de grond grijpt telkens op een ander punt aan, maar **ieder van die punten staat stil**. Er wordt dus geen mechanische arbeid doorgegeven aan de grond. De arbeid die onttrokken wordt aan de kist zal vooral gaan naar **wrijvingswarmte** en dus als mechanische energie verdwijnen uit het systeem.



Figuur 6.13: Kist met wrijving

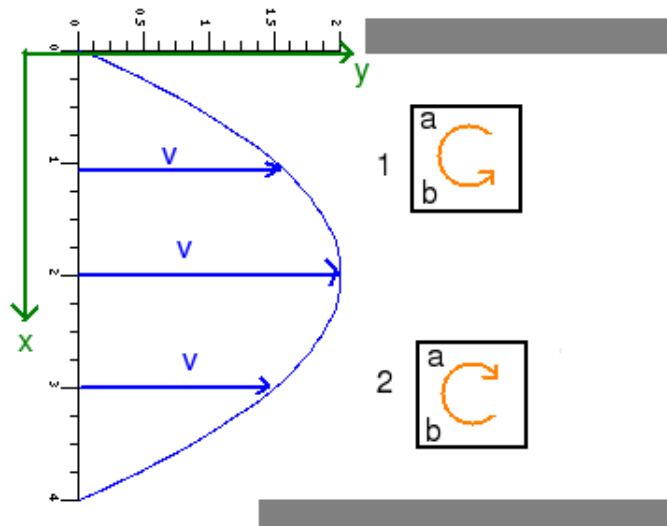
### 6.4.3 Speciaal geval : potentiaalkrachten en behoud van energie

Het blijkt dat de arbeid van sommige krachten **onafhankelijk is van de gevolgde weg** en alleen bepaald wordt door begin- en eindpunt. Deze krachten noemt men **conservatieve krachten of potentiaalkrachten**.

Voor deze krachten geldt ook dat als men een weg in één zin en daarna in de tegengestelde zin doorloopt (omwisselen van begin- en eindpunt), men dezelfde arbeid eens zal moeten leveren en eens zal ontvangen. Bij het doorlopen van een gesloten kromme moet de arbeid dus nul zijn. Als een integraal van een functie over een gesloten kromme nul is, dan moet de **rotor** van deze functie binnen de kromme nul zijn:  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ .  $\vec{\nabla}$  staat voor de nabla-operator  $\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ . Zie ook [nabla-operator](#). Men krijgt dan voor de rotor van een vector:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Dit levert dus een middel om te controleren of een gegeven kracht een potentiaalkracht is of niet. De naam 'rotor' is ontstaan omdat een voorwerp dat geplaatst wordt in een krachtveld met rotor verschillend van 0, de neiging zal vertonen te beginnen draaien.



Figuur 6.14: Stroomsnelheden in beek als voorbeeld van rotationeel veld

Een eenvoudig voorbeeld is het water in een beek dat trager stroomt tegen de zijkant dan in het midden. In het voorbeeld van de figuur hiernaast is  $v_y = -0,5 \cdot x^2 + 2x$ . Als men hierin een vierkant plankje laat drijven dicht bij de oever, dan zal het deel dat meer in het midden van de beek ligt harder vooruit geduwd worden dan het deel bij de oever. Het plankje zal daardoor beginnen draaien. Men vindt hier voor de rotor alleen een z-component. Een positieve component betekent een rotatie in tegenwijzerzin (van x-naar y-as). Men vindt:

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -x + 2$$

Voor  $x < 2$  levert dit een positief resultaat, voor  $x > 2$  een negatief resultaat, zoals men intuïtief ook verwacht.

Wanneer een kracht een potentiaalkracht is, dan definieert men de **potentiële energie** van een voorwerp in een bepaalde positie onder invloed van die potentiaalkracht als **het tegengestelde van de arbeid die nodig is om het voorwerp in die positie te brengen** :

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

In het rechterlid staat een onbepaalde integraal. Deze is slechts op een constante na bepaald. Normaal zal men een **ijking** uitvoeren door:

- ofwel van deze onbepaalde integraal een bepaalde integraal te maken door een vaste vertrekpositie in te voeren
- ofwel de constante te ijken door een bepaalde waarde toe te kennen aan de potentiële energie in een bepaalde positie. Om de zaken eenvoudig te houden zal men meestal deze energie gelijk aan nul kiezen op de plaats waar de integraal zonder de constante nul is. Dan wordt de constante = 0 en hoeft men geen constante mee te nemen bij het uitrekenen van de potentiële energie.

Uit bovenstaande betrekking volgt dan ook dat de arbeid geleverd door een potentiaalkracht bij verplaatsing van een positie naar een andere, het tegengestelde is van de verandering van potentiële energie.



$$A = \int_A^B \vec{F}_p \cdot d\vec{r} = -(E_p(B) - E_p(A)) = E_p(A) - E_p(B)$$

Wanneer de rotor van een functie nul is, dan kan deze functie ook altijd geschreven worden als de gradiënt van een andere functie. Hier betekent dit dat men de potentiële energie ook kan definiëren als een functie zodanig dat de kracht het tegengestelde is van de gradiënt van deze functie (zie ook [gradient](#)) :

$$\vec{F}_p = -\vec{\nabla} E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k}\right)$$

Deze definitie is wiskundig iets veiliger - men moet niet eerst een speciale eis stellen aan de kracht - maar geeft minder fysisch inzicht in de betekenis van potentiële energie en geeft ook geen manier om deze te berekenen.

Bemerk dat men in de praktijk bijna altijd met **verschillen in de potentiële energie** zal moeten werken en dat het verschil van twee functiewaarden alleen gelijk is aan de functiewaarde van het verschil van de argumenten voor een lineaire functie. Dit betekent in de praktijk dat men, indien de potentiaalfunctie een lineaire functie is, op elke willekeurige plaats de oorsprong kan leggen van het argument en er de potentiële energie gelijk aan nul stellen zonder een constante te moeten meenemen in de uitdrukking van de potentiële energie. Dit is het geval bij de formule voor de potentiële energie van de gravitatie aan het aardoppervlak ( $E_p = mgh$ ), maar niet voor de potentiële energie volgens de algemene gravitatieformule of voor de potentiële energie van een veer.

#### 6.4.3.1 Strikt behoud van energie

Bij een systeem dat uitsluitend beïnvloed wordt door potentiaalkrachten, kan men de arbeid geleverd door deze krachten in hetzelfde lid brengen als de kinetische energie en opschrijven als het tegengestelde van de verandering van de potentiële energie. Men bekomt dan een som waarvan de waarde constant moet blijven, een hoeveelheid die behouden moet blijven. Deze hoeveelheid noemt men de **mechanische energie**. Wiskundig schrijft men de **wet van behoud van energie** kortweg op als:

$$\sum E_p + \sum E_k = C$$

Dit constant blijven geldt in eerste instantie voor een **verandering van positie**. Daar men echter geen ogenblikkelijke verandering van positie kan hebben (versnelling oneindig!), zal er ook altijd een tijdsverschil nodig zijn. Bij behoud van hoeveelheid van beweging speelt in de eerste plaats het tijdsverschil en dit kan eventueel zonder verschil in positie van de betrokken massa's. Hier heeft het geen zin om het systeem te bekijken in dezelfde positie maar op twee verschillende tijdstippen: de snelheden en de potentiële energie(ën) moeten dan dezelfde zijn. Essentieel is hier dat men twee verschillende posities bekijkt.

Daar de potentiële energie functie is van de plaats en de kinetische energie functie van de snelheid (en/of hoeksnelheid), legt deze wet een **verband tussen positie en snelheid**. En daar de kinetische energie het kwadraat van de snelheid bevat, houdt ze geen rekening met de richting van de snelheid. M.a.w. deze wet zegt dat een massa die aan deze wet onderworpen is, steeds met even grote snelheid door een gegeven positie (in termen van het argument van de potentiële energie) zal passeren, wat ook de richting van de snelheid zij.

In de praktijk bepaalt men best deze som in beide posities, liever dan de afzonderlijke verschillen:

$$(\sum E_p + \sum E_k)_{pos1} = (\sum E_p + \sum E_k)_{pos2}$$

Bemerk dat de correcte formulering in termen van verschillen is:

$$\Delta E_p + \Delta E_k = 0 \Leftrightarrow \Delta E_p = -\Delta E_k$$

Het is dus **niet** "het verschil in potentiële energie is gelijk aan het verschil in kinetische energie" maar **wel** "het verschil in potentiële energie is het **tegengestelde** van het verschil in kinetische energie".

#### 6.4.3.2 Uitgebreid behoud van energie

In de praktijk zijn er veel problemen waarbij niet-potentiaalkrachten optreden zoals b.v. wrijving. Men kan dan toch de energiebalans zodanig schrijven dat men kan zeggen dat de som van de energieën in een

eerste positie gelijk is aan de som van de energieën in de tweede positie. Brengt men in de energiestelling de potentiaalkrachten naar het rechterlid over en behoudt men alleen de niet-potentiaalkrachten in het linkerlid dan kan met schrijven:

$$U = \Delta E_p + \Delta E_k$$

met  $U$  de arbeid van de niet-potentiaalkrachten.

Men kan nu deze arbeid verdelen over de arbeid die geleverd wordt aan het systeem en de arbeid die onttrokken wordt aan het systeem. De eerste arbeid is positief en die laten we in het linkerlid als  $E_{\text{geleverd aan het systeem}}$ . De tweede arbeid is negatief. Als men die overbrengt naar het rechterlid dan wordt ook die positief. Men kan die noteren als  $|E_{\text{onttrokken uit het systeem}}|$ . Men krijgt dan de volgende uitgebreide behoudsformulering:

$$(\sum E_p + \sum E_k)_{\text{pos1}} + E_{\text{geleverd aan het systeem}} = (\sum E_p + \sum E_k)_{\text{pos2}} + |E_{\text{onttrokken uit het systeem}}|$$

Het voordeel van deze formulering is dat het een somformulering is. Een som is commutatief (volgorde van de termen heeft geen belang) en kan zoveel termen bevatten als men wil. Een verschil kan slechts tussen twee termen en de volgorde is van belang.

### 6.4.3.3 Berekening van enkele potentiële energieën

#### 1. Potentiële energie van de aantrekkingskracht op aarde

In een assenkruis met  $x$ - en  $y$ -as in het horizontale vlak en de  $z$ -as verticaal omhoog kan men de aantrekkingskracht van de aarde rond het aardoppervlak schrijven als  $m(0,0,-g)$ . In hetzelfde assenkruis wordt  $d\vec{r} = dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z$ . De potentiële energie wordt dan:

$$E_p = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int m(0,0,-g) \cdot (dx, dy, dz) = \int mg \cdot dz = mgz + C$$

Bemerk dat men bij een  $z$ -as naar beneden als resultaat  $-mgz + C$  bekomt

Daar dit een lineaire functie van  $z$  is, kan men voor het berekenen van verschillen in potentiële energie de oorsprong in een willekeurig punt gelijk aan nul stellen en tevens in dit punt de constante gelijk nul kiezen. Alleen bij een lineaire functie geldt immers:  $L(x_2) - L(x_1) = L(x_2 - x_1)$ , m.a.w; alleen het verschil van de argumenten telt, niet hun feitelijke waarde. Dit leidt tot de praktische formule:

$$E_p(mg) = mgh$$

Waarbij men  $h = 0$  mag kiezen waar men wil en  $h$  moet stijgen met de hoogte boven het nulniveau. Bij een hoogte-as die positief naar beneden georiënteerd is, krijgt men:  $E_p(mg) = -mgh$  !

#### 2. Potentiële energie van de algemene gravitatie

Als men zich op grote afstand van de aarde bevindt, kan men de aantrekkingskracht van de aarde niet meer als constant beschouwen. Men moet dan beroep doen op de formule van de algemene gravitatie. De kracht tussen de voorwerpen is daarbij alleen functie van de afstand tussen de voorwerpen, d.i. alleen functie van  $r$  als men in bolcoördinaten (5.3.2.6) werkt. Hierbij moet  $r$  bepaald worden als de afstand tussen de massacentra. De kracht tussen de massa  $m_1$  en  $m_2$  wordt dan:

$$\vec{F}(G) = - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r.$$

In bolcoördinaten is  $d\vec{r} = dr \cdot \vec{u}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{u}_\theta + r \cdot \cos \phi \cdot d\phi \cdot \vec{u}_\phi$ . De drie eenheidsvectoren die hierin voorkomen staan loodrecht op elkaar. Na het scalair product tussen kracht en deze  $d\vec{r}$  blijft dus alleen de term in  $dr$  (scalair) over. Die invullen in de basisformule levert:

$$E_p = - \int - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \vec{u}_r \cdot d\vec{r} = \int \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} dr = - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} + C$$

Bemerk dat het uiteindelijke minteken afkomstig is van de  $r^{-1}$  als noemer van de integraal.

Dit is geen lineaire functie in  $r$ . Om geen constante te moeten meenemen moet men een referentiepunt kiezen waar de potentiële energie nul is. Dat punt is op  $r$  oneindig. Het gevolg is wel dat voor alle reële afstanden de potentiële energie negatief is. Men moet daarbij erop letten dat  $-100$  kleiner is dan  $-10$  en dat weer kleiner dan  $0$ . M.a.w. alhoewel de potentiële energie dan  $0$  is op oneindig, is die waarde op oneindig nog altijd de hoogste waarde. Dit levert de bekende formule:

$$E_p(G) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r}$$

Bij het bekende probleem van de **ontsnappingsnelheid** uit de aantrekkingskracht van de aarde zal men moeten stellen dat op het aardoppervlak geldt:

$$E_p = -\frac{G \cdot m_a \cdot m_2}{r_a}$$

$$E_k = \frac{m_2 v^2}{2}$$

Op oneindig zijn beide nul. Men krijgt dan:

$$E_p(\text{aardopp.}) + E_k(\text{aardopp.}) = 0$$

$$-G \cdot m_a \cdot m_2 / r_a + m_2 v^2 / 2 = 0$$

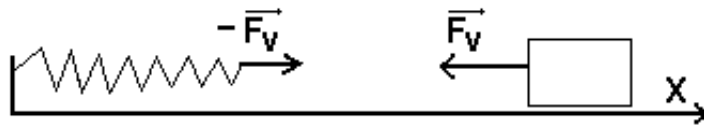
$$G \cdot m_a \cdot m_2 / r_a = m_2 v^2 / 2$$

$$v^2 = 2G \cdot m_a / r_a$$

Hierin is  $G \cdot m_a = 4,0 \cdot 10^{14}$  in  $\text{m}^3/\text{s}^2$  (MKS-eenheden) en  $r_a = 6370$  km (gemiddeld). dit levert een ontsnappingsnelheid van 11,2 km/s

Het is dus niet  $E_p(\text{aardopp.}) = E_k(\text{aardopp.})$ ! Als men dit opschrijft moet men de vierkantswortel trekken uit een negatief getal.

### 3. Potentiële energie van een veer



Figuur 6.15: Kracht van veer

De **grootte** van de veerkracht is gegeven door  $k(x-x_0)$ , waarin  $x_0$  de onbelaste positie is van het losse einde van de veer,  $x$  de actuele positie en  $k$  de veerconstante, die normaal uitgedrukt wordt in Newton/meter of met symbolen voor de eenheden: N/m. Veer en massa zijn hier uit elkaar getekend om duidelijk te kunnen aangeven welke kracht op wat werkt. Men moet de kracht op het blokje in rekening brengen. Men krijgt dan:

$$\vec{F}_v = -k(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

$$E_p(\text{veer}) = -\int -k(x - x_0)dx = \int k(x - x_0)d(x - x_0) = k(x - x_0)^2/2 + C$$

Stelt men deze  $E_p = 0$  bij  $x = x_0$  dan wordt ook  $C = 0$ . Men krijgt dan de bekende formule, met  $l$  de actuele lengte van de veer en  $l_0$  de onbelaste lengte:

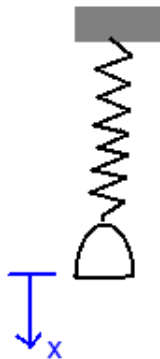
$$E_p(\text{veer}) = k(l-l_0)^2/2$$

Wanneer aan beide einden van de veer getrokken wordt moet men bedenken dat de beide veerkrachten gelijk maar tegengesteld moeten zijn omwille van het 3e postulaat en het feit dat de massa van de (ideale) veer nul is. Men komt dan op een uitdrukking waarbij alleen de verandering van de lengte van de veer een verandering in potentiële energie veroorzaakt, wat op fysische gronden natuurlijk evident is. De bovenstaande formule blijft dan dus geldig.

Bemerk dat het **minteken** alleen zinvol is in de **vectoriële vorm** voor de kracht van de veer. Het zegt dat de zin van de kracht altijd tegengesteld is aan de zin van de vervorming van de veer. Daar het hier om een ééndimensioneel probleem gaat, laat men dikwijls de vectorstreepjes weg. Men weet dan echter niet waarover men juist aan het praten is: alleen over de grootte of over grootte en zin van de kracht? Als men over de grootte van de kracht wil praten, dan moet men de norm nemen van beide leden van de vectoriële vorm en dan is het eerste wat verdwijnt het minteken voor het rechterlid van de vectoriële vorm hierboven.

#### Voorbeeld

De afbeelding 6.16 stelt een schaalpje voor dat aan een veer hangt. De onbelaste lengte van de veer is 10 cm, de veerconstante 100 N/m en het schaalpje weegt 100 g. Wat is de nieuwe lengte van de veer met het schaalpje eraan en in rust?



Figuur 6.16: Schaalpje aan veer

Als het schaalpje in rust hangt, wordt het gewicht van het schaalpje in evenwicht gehouden door de kracht van de veer:

$$mg = k(l - l_0)$$

of met de getalwaarden:

$$0,1 \cdot 10 = 100(l - 0,1)$$

Hieruit vindt men dat de actuele lengte  $l = 0,11$  m of 11 cm.

Men legt nu in het schaalpje een massa van 200 g. Bereken de maximale uitwijking van het schaalpje.

Oplossing: Wanneer men een massa van 200 g in het schaalpje legt, is de kracht van de veer niet meer voldoende om dit totale gewicht van 300 g op te houden. Het schaalpje zal naar beneden versnellen en met een zekere snelheid door de nieuwe evenwichtsstand passeren. Eens voorbij die stand wordt het afgeremd door de veer omdat de kracht van de veer dan groter is dan 3 N. Uiteindelijk zal het schaalpje stoppen, maar dan ogenblikkelijk terug naar boven versnellen. Het hele gebeuren wordt beheerst door de wet van behoud van energie. Men past die toe door de totale energie te berekenen bij de begin- en bij de eindpositie. Om die posities te bepalen wordt een x-as naar beneden ingevoerd met nulpunt in de vertrekpositie van het schaalpje.

Beginpositie: potentiële energie van de zwaartekracht = 0

$$\text{potentiële energie van de veer} = k(l - l_0)^2/2 = 100(0,01)^2/2 = 0,005 \text{ J}$$

$$E_k = 0$$

De eindpositie is die waarbij de snelheid = 0 is en dus ook  $E_k = 0$ . Voor potentiële energieën geldt:

veer: men moet rekenen met de totale uitrekking van de veer en dat is  $x + 1$  cm. Dus

$$E_p = 100(x+0,01)^2/2$$

$$\text{zwaartekracht: } E_p = -mgx = -0,3 \cdot 10 \cdot x$$

Alles bij elkaar levert dit de vergelijking:

$$0,005 = -3 \cdot x + 100(x+0,01)^2/2$$

Dit is een kwadratische vergelijking in  $x$ . Er zijn dus 2 oplossingen:  $x = 0,04$  m en  $x = 0$  m. Als men het houdt bij de beschrijving zoals hierboven gegeven, dan blijft dit systeem ten eeuwigden dagen tussen deze posities op en neer gaan. In werkelijkheid treedt er energieverlies op door de luchtweerstand en door inwendige verliezen in de veer, zodat de beweging na een tijdje stopt in een nieuwe evenwichtsstand. Deze stand ligt bij een lengte van de veer van 13 cm (cfr. eerste deel). De beide gevonden oplossingen liggen symmetrisch t.o.v. van deze stand want ze beantwoorden resp. aan een lengte van 15 cm en 11 cm.

Een variant op dit probleem bestaat erin dat de massa vanaf een zekere hoogte  $h$  boven het schaalpje erin valt en eraan blijft kleven. Dan bestaat het probleem uit 3 fases: het vallen van de massa wordt beheerst door behoud van energie. De botsing met het schaalpje, waarbij men onderstelt dat er wel verandering van snelheid is maar niet van positie, door behoud van impuls. De beweging na de botsing wordt opnieuw beheerst door behoud van energie, maar er is nu wel een  $E_k$  in de beginpositie.

#### 6.4.4 Vermogen

Het vermogen geleverd door een kracht is de arbeid per tijdseenheid of  $\mathbf{P} = d\mathbf{A}/dt$ .

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

Hieruit volgt op basis van de definitie van differentiaal (niet door  $dt$  van rechter- naar linkerlid over te brengen):

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Het vermogen wordt uitgedrukt in **Watt** met symbool W.  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ .

Vermogen x tijd levert opnieuw energie. Een bekende praktische eenheid die volgens dit stramien gemaakt is is de **kilowattuur** of **KWh** .  $1 \text{ KWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$  of  $3600 \text{ KJ}$ .

Een andere niet-coherente eenheid van vermogen is de paardekracht of PK. Dit is het vermogen nodig om een massa van 75 kg in 1 s 1 m hoog te trekken. Normaal rekent men met  $1 \text{ PK} = 736 \text{ W}$ . Het probleem is dat de waarde van de valversnelling g een rol speelt bij het omrekenen en die is niet overal op aarde dezelfde.



# Hoofdstuk 7

## Dynamica van voorwerpen

### Inhoudsopgave

---

<b>7.1</b>	<b>Het massacentrum</b>	<b>128</b>
7.1.1	Bepaling van het massacentrum	128
7.1.2	Eigenschappen van het massacentrum	129
7.1.3	Beweging t.o.v. het massacentrum	129
7.1.4	Massacentrum en behoud van impuls	130
7.1.5	Impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp	130
7.1.6	Massacentrum en energie	130
<b>7.2</b>	<b>Rotatie rond as met vaste richting</b>	<b>132</b>
7.2.1	Inleiding	132
7.2.2	Grootheden	132
7.2.3	Basiswet	133
7.2.4	Formule van Steiner	134
7.2.5	Voorbeelden	135
7.2.5.1	Kracht werkend op een wiel	135
7.2.5.2	Schijf in een lus	136
7.2.6	Afgeleide wetten	136
7.2.6.1	Impulsmoment en Behoud van Impulsmoment	136
7.2.6.2	Arbeid, potentiële en kinetische energie	140
7.2.7	Gevalstudie: het dynamisch gedrag van een auto	141
7.2.7.1	Vertragen en versnellen in rechte lijn	141
7.2.7.2	In de bocht	142
7.2.7.3	Onderstuur, overstuur en ESP	143
7.2.7.4	Gladde baan	144
<b>7.3</b>	<b>Algemene rotatie</b>	<b>145</b>
7.3.1	Inleiding	145
7.3.2	Basiswet	145
7.3.3	Traagheidsensor	147
7.3.4	Gyroscopisch effect	148
7.3.5	Trillende autowielen	150
7.3.6	Hoofdtraagheidsassen	150
7.3.7	Het rechterlid: de afgeleide van $L$	152
7.3.8	Praktische aanpak	153
7.3.9	Kinetische energie - Behoud van impulsmoment	154
7.3.9.1	Kinetische energie	154
7.3.9.2	Behoud van impulsmoment	155
7.3.10	Een complexer voorbeeld	156
7.3.10.1	De momentenvergelijkingen!	156
7.3.10.2	Deel II: de wet van Newton	158

7.3.10.3	Alternatieve oplossing . . . . .	159
7.3.11	Precessie bij een vrij bewegend voorwerp . . . . .	161
7.3.12	Aanvullingen . . . . .	162
7.3.12.1	De hoeken van Euler . . . . .	162
7.3.12.2	Gyratiestraal - Traagheidsellipsoïde . . . . .	163
7.3.13	Transformaties van de traagheidstensor en de traagheidsellipsoïde . . . . .	164
7.3.13.1	Rechtstreekse berekening van de traagheidstensor . . . . .	164
7.3.13.2	De transformatie van het assenkruis . . . . .	165
7.3.13.3	Het diagonaliseren van de traagheidstensor . . . . .	167
7.3.13.4	De traagheidsellipsoïde . . . . .	168
7.3.13.5	Traagheidsmoment volgens een willekeurige richting . . . . .	169
7.3.14	Nota . . . . .	171

---

## 7.1 Het massacentrum

### 7.1.1 Bepaling van het massacentrum

In het vorige hoofdstuk werd de beweging bestudeerd van een puntmassa. Een puntmassa kan niet roteren aangezien ze geen richting heeft. Reële voorwerpen zullen eerst beschouwd worden als een verzameling van puntmassa's, waarop men de conclusies uit het vorige hoofdstuk kan toepassen. Hieruit kan men dan specifieke wetten voor rotatie afleiden.

In eerste instantie kan men zich de vraag stellen of er een punt is dat beweegt alsof alle uitwendige krachten daarop werken. Men onderstelt hiervoor een verzameling van puntmassa's  $m_i$  met posities  $\vec{r}_i$  t.o.v. een vast punt. Op elk punt werken een aantal uitwendige krachten met resultante  $\vec{F}_i^{ext}$  en inwendige krachten met resultante  $\vec{F}_i^{int}$ . Volgens de tweede wet van Newton kan men dan schrijven:

$$\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int} = m_i \vec{a}_i$$

Wanneer men deze vergelijkingen lid aan lid optelt voor alle punten, dan verdwijnen de inwendige krachten uit deze som. Er blijft dus:

$$\sum \vec{F}_i^{ext} = \sum m_i \vec{a}_i \quad (1)$$

Stelt men  $m = \sum m_i$ , dan kan men zoeken naar een punt met coördinaat  $\vec{r}_C$  zodat geldt:

$$m \vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i$$

Een oplossing hiervoor is:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} \quad (2)$$

Men noemt dit punt het **massacentrum** van het systeem. Er geldt dan ook, door differentiëren:

$$m \vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$m \vec{a}_C = \sum m_i \vec{a}_i$$

Wanneer men dit invult in de vergelijking (1), dan krijgt men:

$$\sum \vec{F}_i^{ext} = m \vec{a}_C$$

Of in woorden: het massacentrum beweegt alsof alle uitwendige krachten erop aangrijpen. Alles wat in vorig hoofdstuk gezegd werd over de beweging van een puntmassa, geldt voor de beweging van het massacentrum (anders had men waarschijnlijk niet zoveel aandacht besteed aan de beweging van een puntmassa).

Deze afleiding geldt zowel voor vervormbare als onvervormbare systemen. Bij onvervormbare systemen zal het massacentrum een vaste plaats hebben in het voorwerp, bij vervormbare zal het zich binnen het systeem kunnen verplaatsen.



Men kan de coördinaten van het massacentrum uitrekenen door de uitdrukking (2) te projecteren op b.v. de assen van een cartesisch assenkruis:

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{m} \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{m} \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{m}$$

Indien men een voorwerp beschouwt als opgebouwd uit een continue massaverdeling, dan zal de som vervangen worden door een integraal:

$$x_C = \frac{\int x \cdot dm}{\int dm} \quad y_C = \frac{\int y \cdot dm}{\int dm} \quad z_C = \frac{\int z \cdot dm}{\int dm}$$

Men ziet dat deze formules overeenkomen met de formules van het zwaartepunt voor zover de aantrekkingskracht van de aarde door evenwijdige krachten kan voorgesteld worden.

### 7.1.2 Eigenschappen van het massacentrum

1. Men kan zich bij de bepaling van het massacentrum ook laten leiden door het feit dat als het systeem een symmetrievlak of een symmetrieas heeft, het massacentrum dan in dat symmetrievlak of op die symmetrieas moet liggen.

Onderstelt men b.v. dat het zx-vlak een symmetrievlak is dan betekent dit dat er voor elk punt met massa  $m_i$  en coördinaat  $y_i$  er ook een punt met massa  $m_j = m_i$  en coördinaat  $y_j = -y_i$  moet zijn. Bij sommeren over alle massa's vallen die tegen elkaar weg en eindigt men met een  $y_C = 0$ , m.a.w. in het xz-vlak.

Op analoge manier kan men aantonen dat bij aanwezigheid van een symmetrieas het massacentrum op die symmetrieas moet liggen. Zij b.v. de z-as een symmetrieas. Dan moet er voor elk punt met massa  $m_i$  en coördinaat  $x_i$  en  $y_i$  ook een punt zijn met massa  $m_j = m_i$  en coördinaat  $x_j = -x_i$  en  $y_j = -y_i$ . Bij sommeren over alle massa's zal men dus komen op een  $x_C = 0$  en  $y_C = 0$  d.i. op de z-as.

2. Het massacentrum wordt bepaald via een som (of integraal). Men kan die som opdelen in deelsommen. Dit betekent dat men een complexsysteem eerst kan opsplitsen in eenvoudiger onderdelen waarvan het massacentrum gemakkelijk kan bepaald worden en dan die onderdelen kan combineren voor het massacentrum van het geheel. Hierbij beschouwt men de totale massa van elk onderdeel als geplaatst in het massacentrum van dat onderdeel. Voor een voorbeeld: zie bepaling van het zwaartepunt 2.5.1.1 in het hoofdstuk over equivalente vectorsystemen.

3. Het massacentrum van een systeem hoeft niet noodzakelijk een materieel punt van dat systeem te zijn. Bij een holle bol zal het massacentrum samenvallen met het centrum van de bol maar daar is er geen massa aanwezig.

4. De aangrijpingspunten van de uitwendige krachten hebben dus geen belang voor de beweging van het massacentrum. Zij hebben nochtans wel belang voor de rotatie van het voorwerp of, meer algemeen, de beweging t.o.v. het massacentrum. Men zal verder de algemene beweging van een voorwerp splitsen in een beweging van het massacentrum, de translatiecomponent, en een beweging t.o.v. het massacentrum. Als het voorwerp roteert dan zal de verplaatsing van het aangrijpingspunt van de uitwendige krachten anders zijn dan indien het niet roteert. Men zal verder aantonen dat de som van de uitwendige krachten met de verplaatsing van het massacentrum bepalend is voor de kinetische energie van de translatie en de verplaatsing t.o.v. het massacentrum voor een tweede term. Bij een onvervormbaar voorwerp zal die de kinetische energie van de rotatie voorstellen.

5. Massacentrum en zwaartepunt worden bepaald met dezelfde formules voor zover men mag onderstellen dat de aantrekkingskrachten van de aarde op elk deeltje van een voorwerp evenwijdige krachten zijn. Als deze onderstelling niet meer klopt, dan zal het massacentrum niet samenvallen met het zwaartepunt.

### 7.1.3 Beweging t.o.v. het massacentrum

Men kan de positie van de samenstellende massa's ook bepalen t.o.v. het massacentrum zelf. Deze positievectoren zullen aangegeven worden met een accent. Wanneer men vertrekt van het massacentrum zelf als referentiepunt dan moet gelden:  $r_C = 0$ . Men heeft dus ook:

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0 \quad \sum m_i \vec{v}_i = 0 \quad \sum m_i \vec{a}_i = 0$$

Deze betrekkingen zullen voortdurend terugkomen bij de studie van de rotatiebeweging en ervoor zorgen dat de formules sterk vereenvoudigen als men de beweging van een voorwerp beschrijft als een beweging van het massacentrum + een beweging t.o.v. het massacentrum.

### 7.1.4 Massacentrum en behoud van impuls

Wanneer er geen uitwendige krachten werken op een systeem, dan moet de totale hoeveelheid van beweging constant blijven. Als men de uitdrukking hiervoor vergelijkt met de uitdrukking voor de snelheid van het massacentrum hierboven, dan blijkt dat ook de snelheid van het massacentrum dan constant is.

$$\sum m_i \vec{v}_i = \vec{C} \quad \Leftrightarrow \quad m \vec{v}_C = \vec{C}$$

### 7.1.5 Impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp

Het impulsmoment van een voorwerp t.o.v. een punt wordt gedefinieerd als som van de momenten van de impulsen van alle (punt)massa's t.o.v. dat punt:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Men kan de positie van een puntmassa opschrijven als de positie van het massacentrum + de relatieve positie van die massa t.o.v. het massacentrum. Dus:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}'_i$$

Ook voor de snelheden kan men schrijven:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i$$

Wanneer men dit invoert in de formule voor het impulsmoment bekomt men:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum (\vec{r}_C + \vec{r}'_i) \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}'_i) \\ &= \vec{r}_C \times (\sum m_i) \vec{v}_C + \vec{r}_C \times (\sum m_i \vec{v}'_i) + (\sum_i m_i \vec{r}'_i) \times \vec{v}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i) \end{aligned}$$

Daar  $\sum m_i \vec{r}'_i = 0$  en  $\sum m_i \vec{v}'_i = 0$  zijn de tweede en de derde term = 0. Er blijft:

$$\vec{L} = \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \sum (\vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i)$$

In sommige landen is deze formule bekend als **de eerste wet van König**. De eerste term wordt ook wel het **baanimpulsmoment** genoemd en soms aangeduid als **J**. De tweede term is het impulsmoment t.o.v. het massacentrum. Bij een roterend onvervormbaar voorwerp zal dit ook wel met **S** van **spin** aangeduid worden. De formule wordt dan:

$$\vec{L} = \vec{J} + \vec{S}$$

Bij het berekenen van het impulsmoment t.o.v. het massacentrum mag men zowel met de absolute als met de relatieve snelheden rekenen. Dat is uit deze formule te begrijpen. Bij een berekening t.o.v. het massacentrum is  $r_C = 0$ , zodat alleen de bijdrage van de relatieve snelheden over blijft.

### 7.1.6 Massacentrum en energie

Bij opsplitsen in een beweging van het massacentrum en een beweging t.o.v. het massacentrum vindt men voor de kinetische energie:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \vec{v}_C + \vec{v}'_i \\ \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2} &= \frac{(\sum m_i) v_C^2}{2} + \sum \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2} + (\sum m_i \vec{v}'_i) \cdot \vec{v}_C \end{aligned}$$

Hierin is de laatste term = 0 (zie hierboven), zodat er overblijft:

$$E_k = \frac{m v_C^2}{2} + \sum \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2}$$

- De eerste term geeft de kinetische energie van het massacentrum alsof de hele massa daarin geconcentreerd is.
- De tweede term geeft de kinetische energie van de beweging t.o.v. het massacentrum.

Deze formule staat in de literatuur bekend als **de (tweede) wet van König**. Bemerkt wel dat alleen bij een opsplitsen in beweging van het massacentrum en beweging t.o.v. het massacentrum de uitdrukking van de kinetische energie vereenvoudigt tot 2 termen i.p.v. 3.

König (1712 - 1757) publiceerde deze wetten in 1751 toen hij in Berlijn werkte. Voor meer over de figuur van König, zie [John Samuel König](#) en [Samuel König](#).

De arbeid van alle krachten van een systeem waarop zowel inwendige als uitwendige krachten werken, kan men berekenen door de verplaatsing van elk aangrijpingspunt samen te stellen uit een verplaatsing van het massacentrum en een verplaatsing t.o.v. het massacentrum:

$$d\vec{r}_i = d\vec{r}_C + d\vec{r}'_i$$

Men bekomt dan:

$$\sum \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}_i = (\sum \vec{F}_i^{ext}) \cdot d\vec{r}_C + \sum \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}'_i + (\sum \vec{F}_i^{int}) \cdot d\vec{r}_C + \sum \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}'_i$$

Omwille van de actie-reactiewet moet de som van de inwendige krachten = 0 zijn. De derde term valt dus weg. Vergelijkt men deze uitdrukking met de uitdrukking voor de kinetische energie, dan is het duidelijk dat:

- $(\sum \vec{F}_i^{ext}) \cdot d\vec{r}_C = \frac{mv_C^2}{2}$
- $\sum \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{r}'_i + \sum \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{r}'_i = \sum \frac{m_i \cdot v_i'^2}{2}$

- Voor de berekening van de kinetische energie geassocieerd met het massacentrum moet men alleen rekening houden met de verplaatsing van het massacentrum, ongeacht het aangrijpingspunt van de krachten.

- Voor de berekening van de kinetische energie van de beweging t.o.v. het massacentrum moet men rekening houden met de effectieve verplaatsing van de aangrijpingspunten t.o.v. het massacentrum. Als het voorwerp een onvervormbaar voorwerp is, dan kunnen de inwendige krachten geen netto arbeid leveren en valt de bijdrage van de arbeid van de inwendige krachten weg.

## 7.2 Rotatie rond as met vaste richting

### 7.2.1 Inleiding

Bij rotatie kan men een onderscheid maken tussen **rotatie om een as met vaste richting** en de **algemene rotatie** (7.3). De eerste beweging kan beschreven worden met vrij eenvoudige formules, die sterk parallel lopen met de formules voor de lineaire beweging. Het algemene geval speelt zich af in drie dimensies, doet beroep op vectoriële producten en matrixbewerkingen en is daardoor veel complexer.

Wanneer men met een fiets rechtdoor rijdt, eventueel over een vertragingsbult, valt de beweging van de wielen onder het eerste geval. De as beweegt wel, maar de richting ervan verandert niet. Wanneer men echter met een boog rond een putje in het fietspad rijdt, valt de beweging onder het algemene geval. De beweging van veel draaiende onderdelen in machines valt ook onder de eerste beschrijving.

Bij **rotatie rond een as met vaste richting** zijn de formules eendimensioneel. Men kan dus spreken van **eendimensionele rotatie**. Dikwijls wordt deze beweging ook **vlakke beweging** genoemd, omdat alle punten van het voorwerp blijven bewegen in een vlak loodrecht op de rotatieas. Meer algemeen is een vlakke beweging een beweging waarbij de baan van elk punt in een vlak blijft en banen van verschillende punten in hetzelfde of evenwijdige vlakken liggen. Ook een driedimensioneel voorwerp kan dus een vlakke beweging uitvoeren.

Er wordt hier uitsluitend gesproken over onvervormbare of starre voorwerpen.

### 7.2.2 Grootheden

Wanneer een voorwerp kan draaien rond een as, kan men zijn **positie** vastleggen door een **hoek**  $\theta$  gemeten vanuit een referentiepositie. Als het voorwerp draait, heeft het een **hoeksnelheid**  $\omega$ . Als die snelheid verandert, is er sprake van een **hoekversnelling**  $\alpha$ . Men krijgt dus de volgende parallel tussen lineaire beweging of translatie en rotatie:

	translatie	rotatie
positie	positievector $\vec{r}$	hoek $\theta$ eenheid: radialen
eerste afgeleide	snelheid $\vec{v}$ m/s	hoeksnelheid $\omega$ rad/s
tweede afgeleide	versnelling $\vec{a}$ m/s <sup>2</sup>	hoekversnelling $\alpha$ rad/s <sup>2</sup>

Daaruit volgen formules analoog aan de lineaire beweging. Voor een eenparige rotatie geldt:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Voor een eenparig versnelde rotatie:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \alpha \cdot t^2 / 2$$

De hoeksnelheid  $\omega$  wordt voorgesteld als een **vector gericht langs de rotatieas**. Bij rotatie rond een as met vaste richting zal ook  $\alpha$  volgens deze as liggen. Er zijn dan maar 2 mogelijkheden voor de zin van beide. Volgens één richting zal men de waarden van  $\omega$  en  $\alpha$  als positief rekenen, volgens de andere als negatief. Zolang men geen vectoriële producten gebruikt, kan men vrij kiezen welke zin men positieve zin noemt.

Het **moment van een kracht t.o.v. de as** is gelijk aan het product van de component van de kracht in een vlak loodrecht op de as met de afstand van de as tot de drager van die component. In de meeste gevallen gaat het over krachten die werken in een vlak loodrecht op de rotatieas, zoals wanneer je op de pedalen van je fiets duwt, zodat de component hierboven in feite de volledige kracht is. Dan krijgt men dus het klassieke moment = kracht x krachttarm. Voor een uitgebreider bespreking van mogelijke manieren om een moment uit te rekenen zie het einde van Elementaire bewerkingen met vectoren 1.2 in het eerste hoofdstuk.

In het algemeen kan men de beweging van een voorwerp (b.v. een fietswiel) beschrijven als de beweging van een referentiepunt (b.v. punt op de fietsas) en een rotatie van het voorwerp rond een as door dat referentiepunt. Het blijkt dat die **rotatie onafhankelijk is van het referentiepunt, maar typisch voor het voorwerp**. De formules voor het beschrijven van deze beweging worden sterk vereenvoudigd als men een as beschouwt die **ofwel stilstaat ofwel door het massacentrum van het voorwerp** gaat. In dat laatste geval zal men meestal de beweging moeten beschrijven als samengesteld uit twee bewegingen: een beweging van het massacentrum en een rotatie rond een as door het massacentrum. Voorbeelden vindt men hieronder.

### 7.2.3 Basiswet

Als een zeer eenvoudig voorbeeld wordt 1 massa  $m$  op een afstand  $r$  van een as genomen. Die as wordt aan het draaien gebracht door een riem die over een schijf loopt. De riem trekt aan de schijf met kracht  $F$  op afstand  $d$  van de as. Deze kracht heeft een moment t.o.v. de as  $M = Fd$ . Dit moment zal zich laten voelen op de massa als een kracht  $F'$  volgens de formule  $F \cdot d = F' \cdot r$ . Dit is een momentenvergelijking die zegt dat het moment van  $F$  t.o.v. de as hetzelfde moet zijn als het moment van  $F'$  t.o.v. de as. Anderzijds is de versnelling  $a$  van de massa te schrijven als  $r \cdot \alpha$ . De wet van Newton zegt nu:  $F' = m \cdot a$ . Vermenigvuldigt men beide leden met  $r$  dan bekomt men:  $r \cdot F' = r \cdot m \cdot a$ . Gebruikt men nu de bovenstaande gelijkheden dan kan men dit schrijven als :

$$d \cdot F = m \cdot r^2 \cdot \alpha$$

De grootte  $m \cdot r^2$  heet het **traagheidsmoment van  $m$  t.o.v. de as** en wordt normaal voorgesteld als  $I$  (de  $I$  van "inertia"). Een gewoon voorwerp zal normaal beschouwd worden als opgebouwd uit meerdere puntmassa's of uit een continue massaverdeling. Het traagheidsmoment wordt dan gedefinieerd als:

$$\text{traagheidsmoment t.o.v. een as : } I_{as} = \sum m_i \cdot r_i^2 \quad \text{of} \quad I_{as} = \int r^2 dm$$

met  $r$  = afstand van elk punt tot de as.

Men kan de formule dus lezen als: het moment van de kracht t.o.v. de as moet gelijk zijn aan traagheidsmoment  $\times$  hoekversnelling.

Voor een meer realistische situatie met een reëel voorwerp i.p.v. juist één massa, zal men dit voorwerp beschouwen als opgebouwd uit kleine massa's. Men moet dan de som nemen over al deze massa's en als er meerdere krachten zijn ook over de momenten van alle krachten. Dit levert dan de echte basisformule voor de rotatie (met  $M_{as}F$  het moment van  $F$  t.o.v. de as,  $I_{as}$  het traagheidsmoment t.o.v. dezelfde as):

$$\sum M_{as} \vec{F}_i = I_{as} \cdot \alpha$$

**De som van de momenten van de krachten t.o.v. de as moet gelijk zijn aan het traagheidsmoment t.o.v. die as  $\times$  hoekversnelling**

Het bewijs hierboven is voor een stilstaande (vaste) as. De formule geldt **ook voor een as door het massacentrum**, zelfs als die beweegt. Het bewijs hiervoor kan men vinden bij de afleiding van de formules voor de algemene rotatie (7.3.2). In feite moet zich dus afvragen:

- Draait het voorwerp rond een stilstaande as? Dan kan men meestal volstaan met de momentenvergelijking zoals hierboven gegeven.
- Is er geen stilstaande rotatieas? Dan moet de beweging beschreven worden als een combinatie van een translatie van het massacentrum + een rotatie rond een as door het massacentrum. Men zal dan steeds zowel de wet van Newton als de momentenvergelijking moeten opschrijven.

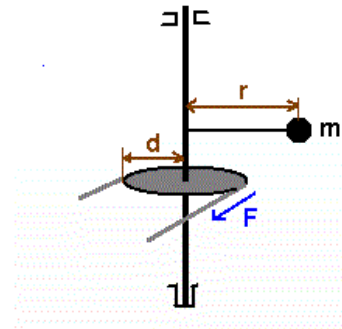
#### Algemener bewijs

Men kan voor een meer algemeen bewijs vertrekken van de wet van Newton voor één massa. Men onderstelt de beweging in of evenwijdig aan het  $xy$ -vlak, zodat de momenten volgens de  $z$ -as liggen, en neemt het moment van beide leden t.o.v. de rotatieas:

$$(\vec{r} \times \sum \vec{F}_i)_z = (\vec{r} \times m\vec{a})_z$$

Bij een roterend voorwerp kan de versnelling geschreven worden als de som van een normale en een tangentiële versnelling. Daar de normale versnelling door de as wijst, is haar moment t.o.v. de as = 0. Er blijft:

$$(\vec{r} \times \sum \vec{F}_i)_z = m r^2 \alpha$$



Figuur 7.1: Eenvoudigste geval

Voor meerdere massa's past men deze formule toe op elke massa waarna men lid aan lid optelt:

$$\sum_j (\vec{r}_j \times \sum \vec{F}_{ij})_z = \sum m_i r_i^2 \alpha$$

De krachten kunnen nu uitwendige krachten zijn of inwendige, tussen twee massa's. Volgens de actie-reactiewet moeten de inwendige krachten in paren voorkomen die op dezelfde drager liggen, zodat de momenten tegen elkaar wegvallen. Er blijven dus alleen de uitwendige krachten over. Normaal formuleert men de som over de momenten van de krachten met één sommatie, waarbij sommige  $r_i$  dan dezelfde zullen zijn. Men krijgt dan:

$$\sum (\vec{r}_i \times \sum \vec{F}_i)_z = \sum m_i r_i^2 \alpha = I_{as} \alpha$$

of:

$$\sum M_{as} F_i = I_{as} \alpha$$

#### Enkele voorbeelden van traagheidsmomenten

Voor een volle schijf is het traagheidsmoment t.o.v. een as door het centrum en loodrecht op de schijf:  $I_C = m \cdot r^2 / 2$

Voor een dunne staaf met lengte  $L$ :  $I_C = m \cdot L^2 / 12$

Voor een rechthoekige plaat met lengte  $L$  en breedte  $B$ :

- t.o.v. van een as loodrecht op de plaat:  $I_1 = m(L^2 + B^2)/12$
- t.o.v. van een as in het vlak van de plaat evenwijdig aan  $L$ :  $I_2 = m \cdot B^2 / 12$

Voor schetsen van beide situaties: zie voorbeelden verder.

Voor tabellen van traagheidsmomenten van verschillende voorwerpen, zie [traagheidsmoment](#).

#### Opmerking

Hierboven werd gesteld dat men de formules moet opschrijven t.o.v. een stilstaande as of t.o.v. een as door het massacentrum. Bij een as door het massacentrum moet men normaal ook de wet van Newton opschrijven, zodat men een stelsel vergelijkingen heeft (index  $C$  verwijst naar het massacentrum):

$$\sum \vec{F}_i = m \vec{a}_C$$

$$\sum M_{as,C} \vec{F}_i = I_{as,C} \alpha$$

De verplaatsingsformule 2.2 legt een verband tussen de linkerleden van deze formules. Hetzelfde verband moet dan ook gelden tussen de rechterleden. Als het in een bepaald geval zonder vaste as interessanter is om het moment uit te rekenen t.o.v. een ander punt dan het massacentrum, b.v.  $P$ , dan kan men het rechterlid van de momentenvergelijking naar daar verplaatsen met de formule:

$$\sum M_{as,P} \vec{F}_i = I_{as,C} \alpha + (\vec{PC} \times m \vec{a}_C)_z$$

Van het vectoriële product moet men natuurlijk alleen de component loodrecht op het bewegingsvlak gebruiken. Op deze manier heeft men feitelijk een grote vrijheid bij het opschrijven van de momentenvergelijking, tenminste voor ogenblikkelijke berekeningen.

### 7.2.4 Formule van Steiner

Als men een traagheidsmoment uitgerekend heeft t.o.v. een as en men heeft later het moment nodig t.o.v. een andere as, dan kan men zich afvragen of men volledig opnieuw moet beginnen met de berekening of men zijn vorig resultaat nog kan gebruiken. Een zekere Steiner vond dat dat laatste kan, op voorwaarde dat men vertrekt van een as door het massacentrum. Dan is het traagheidsmoment t.o.v. elke parallelle as door punt  $P$  gegeven door:

$$I_P = I_C + m \cdot d^2$$

met  $m$  de totale massa van het voorwerp en  $d$  de afstand tussen de 2 assen. Voorbeelden infra.

**Bewijs**

Men onderstelt dat het traagheidsmoment gegeven is t.o.v. een  $z$ -as en gevraagd wordt t.o.v. een evenwijdige  $z'$ -as. Voor elke puntmassa in het systeem kan men dan schrijven dat, in een vlak loodrecht op de assen, de positie t.o.v. de  $z'$ -as gegeven is als:

$$\vec{r}'_i = \vec{d} + \vec{r}_i$$

Bemerk dat de vectoren  $r_i$  en  $r'_i$  alleen een  $x$ - en  $y$ -component hebben en geen  $z$ -component.

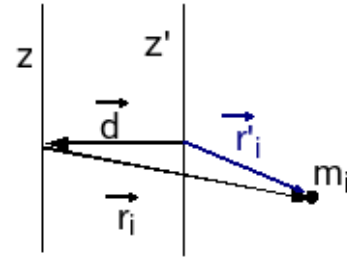
Het traagheidsmoment t.o.v. de  $z'$ -as is dan:

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \sum m_i r_i'^2 = \sum m_i (\vec{d} + \vec{r}_i) \cdot (\vec{d} + \vec{r}_i) = (\sum m_i) d^2 + 2\vec{d} \cdot (\sum m_i \vec{r}_i) + \sum (m_i r_i^2) \\ &= (\sum m_i) d^2 + \sum (m_i r_i^2) \end{aligned}$$

De term  $\sum m_i \vec{r}_i = 0$  indien de  $z$ -as door het massacentrum gaat. In projectie wordt dit immers  $\sum m_i x_i = 0$ ,  $\sum m_i y_i = 0$  en dit is typisch voor het massacentrum als de posities t.o.v. het massacentrum bepaald worden (cfr. supra beweging t.o.v. het massacentrum 7.1.3). De laatste term is het traagheidsmoment t.o.v. deze  $z$ -as. De formule wordt dus, met  $m$  de totale massa:

$$I_{z'} = I_z + m d^2$$

**Nota** : in het Engels is de stelling van Steiner bekend als “the parallel axes theorem”.



Figuur 7.2: Formule van Steiner

**7.2.5 Voorbeelden****7.2.5.1 Kracht werkend op een wiel**

Als 1e voorbeeld wordt een wiel dat rolt zonder slippen behandeld

**a. Eerste aanpak: rotatie rond as door massacentrum**

De rotatie vergelijking:  $r \cdot W = I_C \cdot \alpha$

Bemerk dat  $F$  niet voorkomt in deze vergelijking omdat  $F$  door de as wijst en dus geen moment heeft t.o.v. de as. Men heeft nog aanvullende vergelijkingen nodig. Men moet ook de translatievergelijking opschrijven (Wet van Newton):

$$F - W = m \cdot a_C$$

Er is een verband tussen  $a_C$  en  $\alpha$ :

$$a_C = r \cdot \alpha$$

Als men het wiel als een volle schijf beschouwt, dan is  $I_C = m \cdot r^2 / 2$ . Men krijgt dan als oplossing:

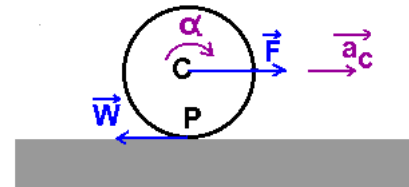
$$\alpha = \frac{2F}{3mr}$$

Bemerk dat er duidelijk wrijving moet zijn om het wiel te doen draaien.

**Nota:** De wrijving die nodig is om het wiel te doen draaien levert geen energie aan het wiel of onttrekt geen energie eraan. Het punt waarop de kracht werkt staat immers stil (en het komt verticaal toe en vertrekt verticaal, dus loodrecht op de kracht). In de praktijk is er wel energie nodig om iets te doen rollen en weet men dat een hard opgepompte fietsband gemakkelijker rolt dan een bijna platte band. Dit komt omdat er in de praktijk altijd een contactvlak is i.p.v. alleen een contactpunt. Hierdoor zijn er verticale reactiekrachten van de grond die vóór het centrum van het wiel passeren en dus een tegenwerkend moment veroorzaken. (zie “Aanvullingen: Wrijving”, “Rollende wrijving” (9.6))

**b. Tweede aanpak: ogenblikkelijke rotatie rond het contactpunt met de grond**

Het contactpunt  $P$  met de grond moet dezelfde snelheid hebben als de grond, anders is het wiel aan het slippen.  $P$  is dus een stilstaand punt en men kan de beweging ook beschrijven als een ogenblikkelijke



Figuur 7.3: Eerste voorbeeld

rotatie rond P met zelfde  $\alpha$ . Men moet nu echter met het traagheidsmoment t.o.v. P werken. Dit wordt berekend met de formule van Steiner:

$$I_P = I_C + m \cdot r^2 = 3m \cdot r^2/2$$

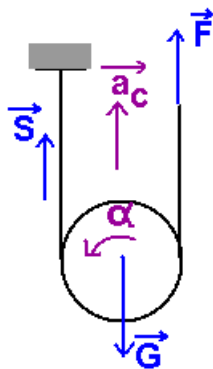
De rotatie vergelijking wordt nu:

$$r \cdot F = I_P \cdot \alpha$$

Dit levert rechtstreeks hetzelfde resultaat.

Bemerk echter dat deze aanpak niet kan gevolgd worden bij een slappend wiel, want dan staat het punt P van het wiel niet stil. De eerste aanpak blijft wel geldig, maar het verband tussen  $a_C$  en  $\alpha$  vervalt.

### 7.2.5.2 Schijf in een lus



Figuur 7.4: Tweede voorbeeld

Als 2e voorbeeld wordt een schijf in een lus van een touw beschouwd. De beweging wordt beschreven als een beweging van het massacentrum en een rotatie rond een as door het massacentrum. Als men voor de momenten en de hoekversnelling linksdraaiend als positieve zin neemt, dan bekomt men:

$$r \cdot F - r \cdot S = I_C \cdot \alpha$$

T.o.v. een as door het middelpunt van de schijf, doet de kracht F de schijf immers naar links en de spanning in het touw de schijf naar rechts draaien. Het gewicht wijst door die as en levert dus geen moment t.o.v. die as. Als de schijf omhoog beweegt, zal de spanning S in het touw kleiner zijn dan F. Er moet immers een netto moment zijn dat linksdraaiend is.

Dit levert 1 vergelijking in 2 onbekenden. Er is nog bijkomende vergelijkingen nodig. Dit wordt weer de translatievergelijking. Met projectie op een as die omhoog gericht is krijgt men:

$$F + S - G = m \cdot a_C$$

Er is een verband tussen  $a_C$  en  $\alpha$ . Het touw links staat stil. Men krijgt dus opnieuw:

$$a_C = r \cdot \alpha$$

De oplossing wordt:

$$\alpha = \frac{2(2F - G)}{3mr}$$

Men ziet dat F minstens de helft van het gewicht moet zijn om de schijf omhoog te laten bewegen.

$$S = \frac{G + F}{3}$$

Bij  $F = G/2$  is ook  $S = G/2$  en is  $\alpha = 0$ : de schijf hangt in evenwicht.

Men zou dit voorbeeld ook kunnen oplossen door de rotatievergelijking op te schrijven t.o.v. het punt waar het touw de schijf raakt, analoog aan de tweede aanpak hierboven. Dat is immers ook een stilstaand punt. Dan zullen F en G voorkomen in de rotatievergelijking, maar S niet.

## 7.2.6 Afgeleide wetten

### 7.2.6.1 Impulsmoment en Behoud van Impulsmoment

Bij translatie kent men grootheid  $mv$  die impuls of hoeveelheid van beweging heet. Bij rotatie heeft men een **impulsmoment L** (in het Engels “angular momentum”, in het Duits “Drehimpuls”, vandaar in het Nederlands ook soms “draaiimpuls”). Het impulsmoment is feitelijk gedefinieerd als de som van de momenten van de impulsen van alle punten van het voorwerp t.o.v. de rotatieas. Deze formule kan bij vlakke beweging vereenvoudigd worden tot:



$$L_{as} = I_{as}\omega \quad \text{met zin als } \omega$$

Door de basiswet van de rotatie te integreren in de tijd komt men tot de **impulsmomentstelling**, die men voor **1 voorwerp** kan opschrijven als:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_{as} \vec{F}_i dt = \Delta I_{as} \cdot \omega$$

waarbij het rechterlid te begrijpen is als de verandering van het impulsmoment, d.i. het impulsmoment op ogenblik  $t_2$  - het impulsmoment op ogenblik  $t_1$ .

Voor **meerdere voorwerpen** moet men alleen rekening houden met de momenten van de uitwendige krachten:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_{as} \vec{F}_{i,uitw} dt = \sum I_{as,i2} \cdot \omega_{i2} - \sum I_{as,i1} \cdot \omega_{i1}$$

Als de som van de uitwendige momenten nul is, dan zal het totale impulsmoment constant zijn. Dit is de wet van **behoud va impulsmoment** :

$$\sum M_{as} \vec{F}_{i,uitw} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum I_{as,i} \omega_i = \text{constante}$$

In de praktijk berekent men het impulsmoment op een eerste ogenblik en op een tweede ogenblik en stelt dan dat beide moeten gelijk zijn. Een voorbeeld en tegenvoorbeeld vindt men verder hieronder.

### Impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp

Als men het impulsmoment moet berekenen van een voorwerp dat rond een **bewegende as** draait, t.o.v. van een punt P buiten de as door het massacentrum, dan geldt voor een vlak systeem:

$$L = M_P m v_C + I_C \cdot \omega$$

De eerste term noemt men ook wel het baanimpulsmoment. In sommige landen is dit bekend als de **eerste formule van König** . Het bewijs ervan kan men hierboven vinden bij de eigenschappen van het massacentrum onder "Impulsmoment van een vrij bewegend voorwerp" (7.1.5) .

**Voorbeeld** : het impulsmoment van de schijf uit het 2e voorbeeld t.o.v. het bevestigingspunt van het touw:

$$L = r \cdot m v_C + I_C \cdot \omega = 3mr^2\omega/2$$

$$\text{want } v_C = r\omega$$

Bemerk dat een bewegende puntmassa ook een impulsmoment heeft t.o.v. een bepaald punt of as.

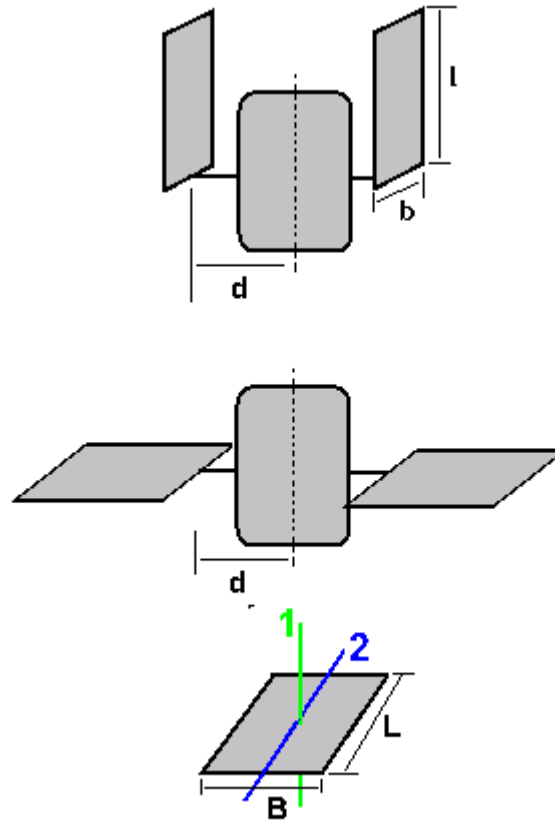
### Voorbeeld van behoud van impulsmoment

Als voorbeeld bij behoud van impulsmoment beschouwt men een satelliet die uitgezet wordt met een hoeksnelheid  $\omega_0$  . De satelliet bestaat uit een centraal deel en twee zonnepanelen. Bij het uitzetten zijn de zonnepanelen opgevouwen langs de satelliet, na het uitzetten worden ze open geplooid. Het centrale deel van de satelliet heeft een gegeven traagheidsmoment  $I_C$ , de zonnepanelen hebben een massa  $m_p$  en afmetingen  $l \times b$ .

Alhoewel de satelliet in een baan rond de aarde beweegt onder invloed van de aantrekkingskracht van de aarde, heeft deze aantrekkingskracht geen invloed op de rotatie van de satelliet rond zijn eigen as. De aantrekkingskracht op alle delen van de satelliet kunnen immers vervangen worden door één **resultante** die aangrijpt in het massacentrum en dat ligt op de rotatieas. Die kracht heeft dus geen moment t.o.v. die rotatieas, m.a.w. heeft geen invloed op de rotatie van de satelliet. De voorwaarde voor behoud van impulsmoment is dus voldaan.

Om het totale traagheidsmoment van de satelliet te berekenen, moet men het traagheidsmoment kennen van een vlakke plaat. Hiervoor zijn echter 2 mogelijkheden:

- ofwel t.o.v. van een as loodrecht op de plaat (as 1 in de figuur), als in de eindsituatie. Dan heeft men:  $I_1 = m(L^2 + B^2)/12$



Figuur 7.5: Satelliet

- ofwel t.o.v. van een as in het vlak van de plaat (as 2 in de figuur), als in de beginsituatie. Dan heeft men:  $I_2 = mB^2/12$

Er wordt ook weer gebruik gemaakt van de formule van Steiner.

Beginsituatie

$$I_{\text{tot,begin}} = I_C + 2 \cdot (m_p \cdot d^2 + m_p \cdot b^2/12)$$

Eindsituatie:

$$I_{\text{tot,einde}} = I_C + 2 \cdot [m_p \cdot (d + l/2)^2 + m_p \cdot (b^2 + l^2)/12]$$

Volgens het behoud van impulsmoment moet nu gelden:

$$I_{\text{tot,begin}} \cdot \omega_0 = I_{\text{tot,einde}} \cdot \omega_{\text{einde}}$$

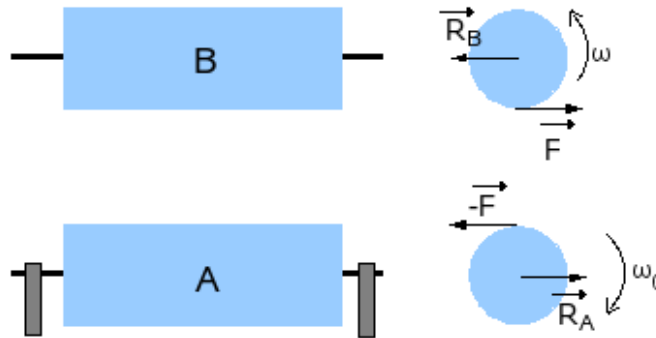
— **Einde voorbeeld** —

### Tegenvoorbeeld

Een cilinder A draait rond zijn as met hoeksnelheid  $\omega_0$ . Een identieke cilinder B die stilstaat wordt tegen deze eerste cilinder geduwd zodat ze beide uiteindelijk met dezelfde hoeksnelheid ronddraaien. Bereken deze nieuwe hoeksnelheid.

Uit de berekeningen zal blijken dat die eindhoeksnelheid de helft is van  $\omega_0$ . Men zou dus kunnen denken dat er hier behoud van impulsmoment speelt. Maar in de eindsituatie draaien beide cilinders in tegengestelde zin. Hun impulsmomenten moeten dus voorgesteld worden door tegengestelde vectoren waarvan de som 0 is. In het begin was er duidelijk een globaal impulsmoment, op het einde is er geen meer. Er is dus zeker geen behoud van impulsmoment. Er moet dus een uitwendig moment opgetreden zijn dat tegengesteld zin had van het oorspronkelijke impulsmoment van cilinder A.

Opmerking: het impulsmoment van beide cilinders moet in de eindtoestand bepaald worden t.o.v. dezelfde as om over het totale impulsmoment van het systeem te kunnen praten. Om het impulsmoment van de



Figuur 7.6: Twee cilinders die tegen elkaar draaien

rol B te berekenen t.o.v. de as van de rol A, moet men de hoger gegeven formule  $L = \text{baanimpulsmoment} + I_C \cdot \omega$  gebruiken. Daar het massacentrum van B echter geen snelheid heeft is het baanimpulsmoment  $= 0$  en blijft alleen  $I \cdot \omega_B$  over. Men kan het vergelijken met het moment van een koppel dat ook onafhankelijk is van het berekeningspunt. Men moet ook bedenken dat de impulsmomentvectoren thuishoren in de ruimte van de momenten, niet in de ruimte van de posities, waarin de rollen getekend zijn.

Om dit alles te begrijpen moet men een krachtenanalyse maken. De 2 cilinders worden iets uit elkaar getekend zodat men duidelijk kan aangeven welke kracht op welk voorwerp werkt. Wanneer de cilinder B tegen cilinder A geduwd wordt, zal deze laatste een kracht  $F$  uitoefenen op B. A zelf ondervindt hiervan de reactie. De krachten die door de as van A of B gaan werden niet getekend werden, nl. het gewicht van A en B, de reacties in de lagers en de druk tussen de twee rollen. Deze krachten hebben geen moment t.o.v. die as, m.a.w. ze beïnvloeden de rotatie van de rollen niet.

Men krijgt volgende rotatievergelijkingen, waarbij de positieve zin telkens gekozen werd in de zin van de hoeksnelheid:

- voor A:  
 $-r \cdot F = I \alpha_A$
- voor B:  
 $r \cdot F = I \alpha_B$

Wanneer men lid aan lid optelt en herschikt krijgt men:

$$I \alpha_A = -I \alpha_B$$

Men integreert beide leden in de tijd:

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha_A \cdot dt = - \int_{t_1}^{t_2} \alpha_B \cdot dt$$

$$\omega_A - \omega_0 = -(\omega_B - 0)$$

Wanneer op het einde beide cilinders zonder slippen tegen elkaar rollen, is natuurlijk

$$\omega_A = \omega_B = \omega$$

Hieruit volgt dan dat  $\omega = \omega_0/2$

Vanwaar komt nu het uitwendig koppel dat het oorspronkelijke impulsmoment vernietigd heeft? Onder invloed van de kracht  $F$  op de cilinder B zou deze naar rechts moeten bewegen. Dat wordt belet door een gelijke maar tegengestelde reactie  $R_B$  die aangrijpt op de as van B. Analoog zal er een kracht  $R_A$  optreden op de as van A. Deze beide reacties vormen een koppel dat tegengesteld is aan de zin van  $\omega_0$ . De koppelarm is  $2r$  zodat het moment  $2x$  groter is dan  $rF$  en zo het oorspronkelijke impulsmoment teniet doet.

Nota

1. De cilinders moeten in het begin over elkaar slippen. Hierbij gaat energie verloren. De kinetische energie van het systeem is in de eindtoestand dan ook lager dan in de beginttoestand:

- Begin:  $E_k = I \cdot \omega_0^2 / 2$
- Einde:  $E_k = 2(I \cdot \omega^2 / 2) = I \omega_0^2 / 4$

2. Als de twee cilinders op één as naast elkaar draaien en zijdelings tegen elkaar gedrukt worden, is er wel behoud van impulsmoment.

— **Einde tegenvoorbeeld** —

### 7.2.6.2 Arbeid, potentiële en kinetische energie

Men kan ook een **arbeid**  $W$  berekenen die een moment levert bij verdraaiing van het voorwerp:

$$W = \int M \cdot d\theta$$

met  $M$  = moment van de kracht t.o.v. de rotatieas. Vergeet niet rekening te houden met de zin van moment en hoekverdraaiing. Als ze tegengestelde zin hebben, dan moet één van beide als negatief genoteerd worden. Bemerkt ook dat een koppel van krachten geen arbeid levert bij een translatie (de som van beide krachten is 0).

En **vermogen** wordt dan natuurlijk  $P = M \cdot \omega$

**Kinetische energie :**

- stilstaande as:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Deze formule volgt onmiddellijk uit:

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i (d_i \omega)^2 = \frac{1}{2} (\sum m_i d_i^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- bewegende as:

$$E_k = m v_C^2 / 2 + I_C \cdot \omega^2 / 2$$

Dit is de (tweede) **formule van König**. De eerste term kan men zien als de bijdrage van de translatie kinetische energie. De afleiding van deze formule werd gegeven onder massacentrum en energie 7.1.6 bij het begin van dit hoofdstuk. Alleen werd de kinetische energie van rotatie hier voor een onvervormbaar voorwerp geschreven in termen van  $\omega$  en het traagheidsmoment.

Hoe kan men beroemd worden met zo'n eenvoudige formule? De uitwerking van  $(a+b)^2$  levert 3 termen:  $a^2 + 2ab + b^2$ . Wanneer men de beweging van een voorwerp beschrijft als de beweging van een referentiepunt en een beweging t.o.v. dat referentiepunt, dan zou men in de kinetische energie normaal ook 3 termen aantreffen. Alleen als men als referentiepunt het massacentrum neemt, blijkt dat de kruistermen, van de vorm  $a \cdot b$ , wegvallen en alleen de 2 zuivere kwadraten overblijven.

**Voorbeeld :** kinetische energie van het wiel uit het eerste voorbeeld

De beweging kan op 2 manieren beschreven worden:

- als een samenstelling van een translatie van het massacentrum met een rotatie rond een as door het massacentrum. Dan moet men de formule van König gebruiken met in dit geval  $I_C = m \cdot r^2 / 2$ :  

$$E_k = m v_C^2 / 2 + m \cdot r^2 \cdot \omega^2 / 4$$
 daar  $v_C = r \cdot \omega$  wordt dit:  

$$E_k = 3 \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 / 4$$
- als een zuivere rotatie rond het stilstaande punt P, het contactpunt met de grond. Dan moet men het traagheidsmoment t.o.v. P gebruiken. Dat werd hoger uitgerekend:  

$$I_P = 3 \cdot m \cdot r^2 / 2$$
 Hiermede vindt men dadelijk:  

$$E_k = I_P \cdot \omega^2 / 2 = 3 \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega^2 / 4$$

**Potentiële energie** kan door rotatie opgestapeld worden in b.v. een spiraalveer:

$$E_p = C \cdot \theta^2 / 2$$

met  $C$  een veerconstante, maar nu met dimensies Nm/rad

Men ziet dat er een perfect parallellisme is tussen de formules van translatie en rotatie. Samen met de hoger gegeven parallellen, ziet men dat de rol van massa overgenomen wordt door het traagheidsmoment, de rol van de kracht door het moment van de kracht.

## 7.2.7 Gevalstudie: het dynamisch gedrag van een auto

### 7.2.7.1 Vertragen en versnellen in rechte lijn

Als toepassing van wat tot nu toe gezien werd zal het gedrag van een auto bij versnellen en vertragen in rechte lijn en in een bocht bekeken worden. Er wordt uitgegaan van een kleine middenklasse wagen met een massa van 1000 kg, een wielbasis van 2,5 m en aangedreven op de voorwielen. Er wordt gerekend met een (klassieke) gewichtsverdeling van 60% op de voorwielen en 40% op de achterwielen. Het massacentrum bevindt zich op 0,5 m boven de grond.

Voor 60% van het gewicht op de voorwielen moet de horizontale afstand van de vooras tot het massacentrum gelijk zijn aan 40% van de wielbasis, d.i. 1 m. De horizontale afstand van massacentrum tot de achteras is dan 1,5 m. Voor de eenvoud wordt  $g = 10 \text{ m/s}^2$  genomen (fout kleiner dan 2%). Hiermede wordt het gewicht 10 KN. Hiervan komt dus in rust of bij constante snelheid 6 KN op de vooras en 4 KN op de achteras.

Wanneer de auto versnelt, dan is er een horizontale kracht  $F$  van de grond op de wielen nodig om deze versnelling te veroorzaken. Deze kracht heeft een moment in wijzerzin t.o.v. het massacentrum. Dit moment moet opgevangen worden door een nieuwe verdeling van het gewicht over de verticale reactiekrachten van de grond. Omwille van de elasticiteit van de vering resulteert dit ook in een neus van de wagen die omhoog gaat en de achterzijde die wat daalt. Voor een versnelling van  $2 \text{ m/s}^2$  krijgt men volgende vergelijkingen:

- horizontaal:  $F = ma = 10^3 \cdot 2 = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$
- verticaal:  $V_V + V_A - G = 0$
- momentenvergelijking t.o.v. het massacentrum, positief in wijzerzin:  $1V_V - 1,5V_A + 0,5F = 0$

Als men de laatste vergelijking van de vorige aftrekt, krijgt men:

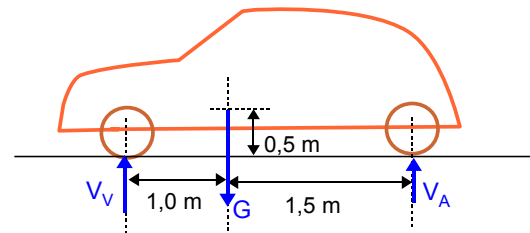
$$2,5V_A = 1G + 0,5F = 10\,000 + 1000 = 11\,000$$

Hieruit volgt:  $V_A = 4\,400 \text{ N}$  en  $V_V = 5600 \text{ N}$ .

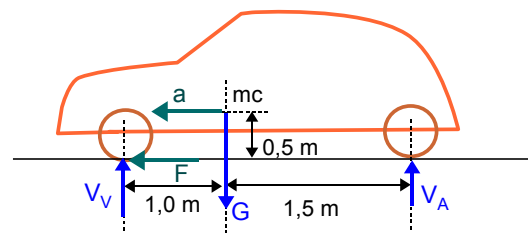
In feite moet men eerst de tweede vergelijking met 1 m(eter) vermenigvuldigen als men de dimensies wil laten kloppen. Numeriek is dat natuurlijk niet te zien. Er werd toch maar een coëfficiënt 1 voor  $G$  gezet.

Er is dus 400 N minder gewicht op de voorwielen en evenveel meer op de achterwielen. Dit is geen gelukkige situatie voor een voorwielaangedreven wagen. De horizontale kracht  $F$  moet immers geleverd worden via de wrijving met de weg. Minder druk op de weg betekent ook kleinere  $F$ . Bij de legendarische Citroën Traction Avant (1934) had men het differentieel, vanwaar de aandrijfassen naar de wielen vertrekken, tussen het motorblok en de versnellingsbak geplaatst (zie fig. 7.9) om meer druk op de voorwielen te hebben. Deze aanpak werd ook gevolgd in de 2CV, de Renault R4 en R5. Alhoewel er reeds in de jaren 30 door DKW gewerkt werd met een dwarsgeplaatste tweetaktmotor, was het vooral de revolutionaire Mini (1959), ontworpen door Alec Issigonis, die de dwarsgeplaatste motor populair maakte. De versnellingsbak zat bij deze in het motorcarter. Bij de huidige wagens is die op zijn normale plaats aan het einde van het motorblok bevestigd. Bij een dwarsgeplaatste motor zit het differentieel naast het motorblok, zoveel mogelijk naar het midden toe. Bij kleinere wagens staat de motor voor de (theoretische) vooras, bij grotere motoren ligt de motor iets schuin over de vooras.

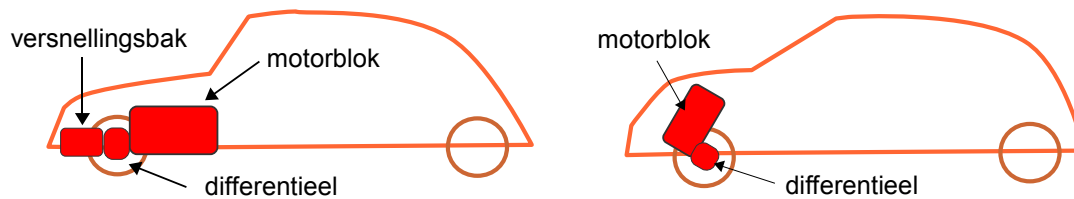
Bij het afremmen gebeurt het omgekeerde: de voorwielen worden zwaarder belast en de achterwielen minder. De remkracht moet evenredig hiermede verdeeld worden over de voor- en achterwielen. De voorwielen zullen dus altijd het grootste werk moeten doen bij het afremmen. Ze zijn dan ook altijd veel zwaarder uitgevoerd. Bij wagens met schijfremmen vooraan en trommelremmen achteraan is er nog het bijkomende probleem dat de remkracht bij schijfremmen lineair stijgt met de druk op het rempedaal, maar bij trommelremmen eerder exponentieel. In zult een systeem zit er altijd een begrenzer op de druk



Figuur 7.7: De modelauto

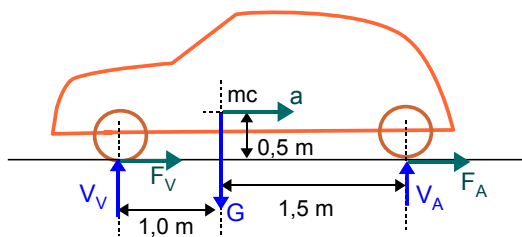


Figuur 7.8: Versnellende auto



Figuur 7.9: Motorblok bij voorwielaandrijving

naar de achterwielen om het slippen van de achterwielen te vermijden. Deze regelaar of begrenzer wordt meestal gestuurd door de afstand van achteras tot het chassis, als maat voor de helling van de wagen. Bij wagens die met ABS uitgerust zijn moet dat zorgen voor een correcte verdeling van de remkracht.



Figuur 7.10: Afremmende wagen

Gaat men opnieuw uit van een vertraging van  $2 \text{ m/s}^2$ , dan krijgt men volgende vergelijkingen:

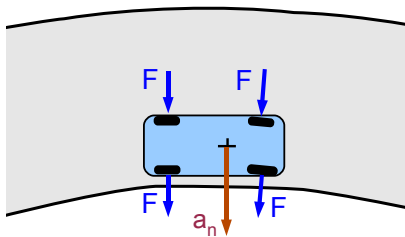
- horizontaal:  $F_V + F_A = ma = 10^3 \cdot 2 = 2 \cdot 10^3 \text{ N}$  maar nu naar rechts gericht
- verticaal:  $V_V + V_A - G = 0$
- momentenvergelijking t.o.v. het massacentrum, positief in wijzerzin:  $1V_V - 1,5V_A - 0,5(F_V + F_A) = 0$

Men krijgt nu:  $2,5V_A = 1G - 0,5 \cdot 2000 = 10\,000 - 1000 = 9\,000 \text{ N}$

Of:  $V_A = 3\,600 \text{ N}$  en  $V_V = 6\,400 \text{ N}$

Het resultaat is dat nu de neus van de wagen naar beneden duikt.

### 7.2.7.2 In de bocht



Figuur 7.11: Auto in bocht

Wanneer een auto een bocht neemt, dan moet niet alleen het massacentrum een boog beschrijven maar moet ook de wagen gedraaid worden om zijn eigen as. Wanneer de bocht mooi aangelegd is met een constante straal, dan gebeurt dit draaien met constante hoeksnelheid en is er geen moment nodig. Er moeten dan alleen middelpuntzoekende krachten geleverd worden, die zich samenstellen tot één resultante in het massacentrum. De grootte van deze resultante wordt bepaald door de massa van de wagen en de normale versnelling van het massacentrum. Als men onderstelt dat de wagen van hierboven door een bocht gaat met een straal van  $125 \text{ m}$  aan een snelheid van  $90 \text{ km/u}$  ( $= 25 \text{ m/s}$ ), dan blijkt er een normale versnelling nodig van  $v^2/R = 25^2/125 = 5 \text{ m/s}^2$ . Dit vereist een wrijvingscoëfficiënt van  $0,5$ , wat de grens is op een natte baan. Opdat de resultante in het massacentrum zou

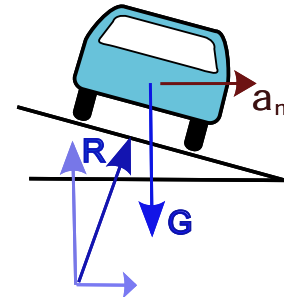
aangrijpen, moet er weer een 60/40 verdeling zijn over voor- en achterwielen. Voor beide voorwielen is dat dus  $3000 \text{ N}$ , voor de beide achterwielen  $2000 \text{ N}$ . Hierbij wordt ondersteld dat alle krachten evenwijdig zijn. Een wielbasis van  $2,5 \text{ m}$  op een straal van  $125 \text{ m}$  levert tenslotte maar een hoek van iets meer dan  $1^\circ$ .

Wanneer men hard gaat remmen, kan de situatie kritisch worden voor de achterwielen. Er moet dan immers ook nog een remkracht in de richting van het wiel geleverd worden, terwijl de druk op de achterwielen zal afnemen. Hierboven werd berekend dat bij een afremmen met  $2 \text{ m/s}^2$  de achterwielen een druk van  $3600 \text{ N}$  zullen uitoefenen.

Als de remkracht evenredig met de druk over voor- en achterwielen verdeeld wordt, is dit  $2000 \times (3600/10000) = 720 \text{ N}$  voor beide achterwielen samen. Met de middelpuntzoekende kracht van  $2000 \text{ N}$  wordt dit een totale kracht van  $\sqrt{2000^2 + 720^2} = 2126 \text{ N}$ . Hiervoor is een wrijvingscoëfficiënt nodig van

$2126/3600 = 0,59$  ! Indien de remverdeling niet optimaal is maar de 60/40 verhouding volgt, zit men aan een wrijvingscoëfficiënt van 0,6. Door hard te remmen verhoogt men dus de kans op uitbreken van de achterwielen. Daarom is de klassieke raad: remmen voor de bocht en eventueel lichtjes accelereren in de bocht. Dit laatste was vooral de raad bij de achterwielaangedreven wagens.

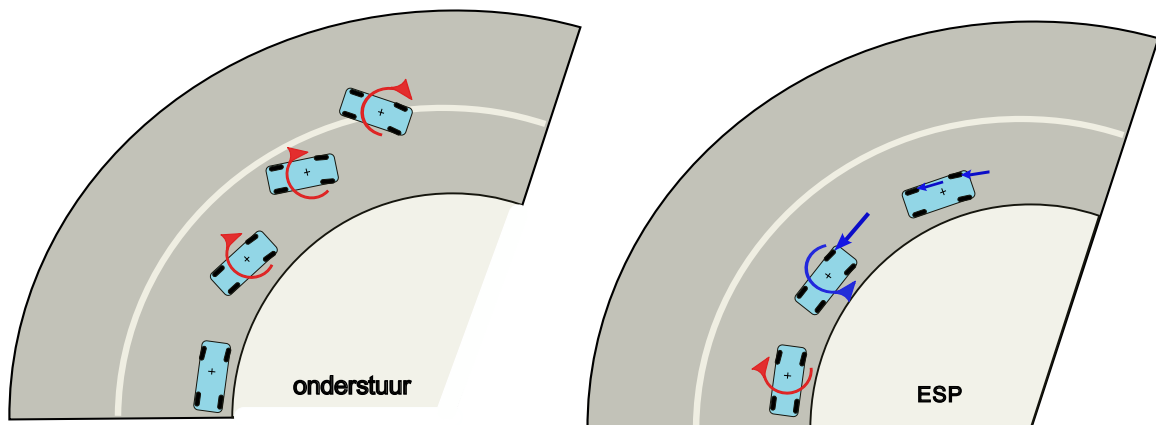
De situatie kan natuurlijk ontmijnd worden door de baan te laten hellen in de bocht. Dan is er een schuine reactie van de grond op de wagen. Bij een juiste keuze van de hoek kan men ervoor zorgen dat de verticale component hiervan het gewicht opvangt en de horizontale de middelpuntzoekende kracht levert. Voor het geval dat hier beschouwd wordt moet de hellingshoek gelijk zijn aan  $\text{atan}(ma/mg) = \text{atan}(a/g) = \text{atan}(5/10) = 26^\circ 34'$ . Merk op dat het resultaat onafhankelijk is van de massa van de wagen.



Figuur 7.12: Helling in bocht

### 7.2.7.3 Onderstuur, overstuur en ESP

Wanneer een bocht te snel genomen wordt, dan kan een wagen op twee manieren in de fout gaan. Ofwel breekt de achtertrein eerst uit. Dan gaat de wagen tollen in de zin van de bocht (in de figuur dus rechtsom). De wagen zal dus meer draaien dan nodig is. Daarom noemt men dit gedrag **overstuur**. Dit is het meest frequente gedrag. Ofwel breken de voorwielen eerst uit. Dan draait de wagen minder dan nodig is. Men noemt dit dan ook **onderstuur**.



Figuur 7.13: Overstuur en bijsturing door ESP

Wanneer de achterwielen hun greep op de weg verliezen, zal waarschijnlijk ook de totale wrijvingskracht te klein zijn om het massacentrum in de gewenste baan te houden. De wagen begint dan naar de buitenkant van de bocht te schuiven. Het resultaat is dat een onervaren bestuurder de neiging heeft om de wagen meer naar de binnenkant van de bocht te sturen, dus voor de figuur rechtsom. Daarmee versterkt hij echter nog het tollen van de wagen en loopt de zaak volledig uit de hand. Wat moet gebeuren is **tegensturen**, d.i. tegen de zin van het tollen van de wagen in sturen, hier dus naar links. Daarmee zal men wel een beetje naar links opschuiven maar het is de enige manier om het tollen te stoppen. Om het eenvoudig te onthouden: als de achterwielen van uw wagen de voorwielen willen voorbijsteken, dan moet je de voorwielen terug voor achterwielen brengen.

Vele huidige wagens zijn uitgerust met een elektronisch systeem om het uitbreken te verhinderen. Dit systeem heet "*Electronic Stability Program*" of kortweg **ESP**. Dit systeem is gecombineerd met het ABS systeem, dat het slippen van de wielen bij hevig remmen moet vermijden. Het ESP systeem houdt de hoeksnelheid van de wagen continu in de gaten. Wanneer het systeem vaststelt dat de achterwielen willen uitbreken (rode gekromde pijl op de rechtse figuur), zal het de gasklep wat terugdraaien om de snelheid te minderen en het buitenste voorwiel afremmen (blauwe pijl). Op die manier ontstaat een moment t.o.v. het massacentrum (blauwe gekromde pijl) dat het tollen van de wagen tegengaat en de wagen op de voorzien koers houdt. Eventueel zal men op beide wielen aan de buitenkant van de bocht ingrijpen. Als

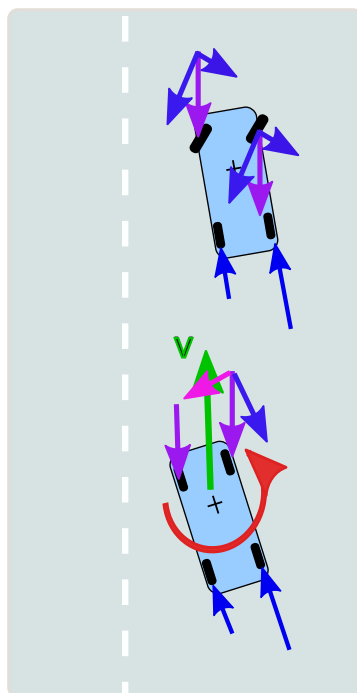
het tollen veroorzaakt wordt door te hard remmen in de bocht, dan kan het systeem ook de remdruk op de wielen aan de binnenkant van de bocht verminderen.

Bij onderstuur verliezen de voorwielen hun greep op de weg en zou de wagen op figuur linksom beginnen tollen. In dat geval zal er op het achterwiel aan de binnenkant van de bocht geremd worden om een tegenwerkend moment te veroorzaken.

Door de elasticiteit van de band, treedt er in alle richting een zekere slip op tussen de theoretische en de werkelijke beweging van het wiel. Bij een snel genomen bocht zal het voorwiel niets meer gedraaid zijn dan de weg die het wiel effectief volgt. Dit komt omdat er een klein verschil is tussen de richting van de velg en de richting van het contactvlak met de baan. Bij het sterk versnellen zal de band voor dit contactvlak samengedrukt worden. De velg zal dus iets sneller draaien dan de omtrek van de band. Het omgekeerde gebeurt bij sterk remmen. Dan wordt de band uitgerokken voor het contactvlak en samengedrukt erachter, zodat de velg trager draait dan de omtrek van de band. Het zijn feitelijk vooral de schommelingen in die slip die de elektronica toelaten om een kritieke situatie te herkennen voor het uit de hand loopt.

#### 7.2.7.4 Gladde baan

Het is bekend dat een voorwielaangedreven wagen beter onder controle te houden is op een gladde baan dan de normale achterwielaangedreven wagen (er wordt hier niet gesproken over wagens met de motor in het midden). Om dit te begrijpen moet men beseffen dat, bij een achterwielaangedreven wagen, een kracht op de voorwielen in de richting van het wiel (loodrecht op de as), dat wiel alleen maar zal doen draaien maar voor de rest geen invloed heeft op de wagen. Alleen zijdelingse krachten zullen ook op de wagen overgedragen worden. Wanneer, door een ongelijke kracht van de achterwielen, de wagen zich schuin op zijn bewegingsrichting opstelt (zie figuur hieronder, onderste wagen), dan treedt er op elk voorwiel een kracht op die tegengesteld is aan de snelheid van de auto (paars). Die kracht kan ontbonden worden in een kracht volgens het wiel en een kracht loodrecht op het wiel. Deze laatste versterkt het tollen van de wagen. Door tegen te sturen doet men krachten ontstaan die het tollen tegenwerken (bovenste wagen). Bij een voorwielaangedreven wagen zullen de zijdelingse krachten op de achterwielen het tollen echter tegenwerken.



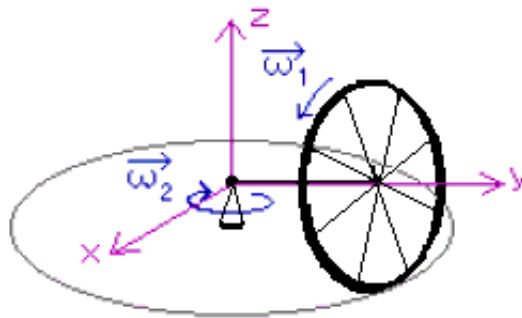
Figuur 7.14: Slippende auto en tegenstuur



## 7.3 Algemene rotatie

### 7.3.1 Inleiding

Hierboven werd het geval besproken van de rotatie rond een as met vaste richting. Deze as mag bewegen, maar hij mag niet veranderen van richting. Het werd daar eendimensionele rotatie genoemd. Het is absoluut nodig dat men het begin van dat eerste deel gelezen en begrepen heeft om dit vervolg te kunnen begrijpen. De algemene of driedimensionele rotatie is immers veel ingewikkelder dan de eendimensionele, om verscheidene redenen. Vooreerst speelt alles zich af in 3 dimensies. Die moet in een perspectieftekening voorgesteld worden. Wie weinig ruimtelijk inzicht heeft kan hiermede problemen hebben. Vervolgens gedragen de systemen die hier beschouwd worden, zich absoluut niet zoals men intuïtief verwacht. En tenslotte moet men om alles in formules te gieten beroep doen op enige meer gevorderde wiskunde, zoals vectoriële producten en matrices. Normaal behoort deze stof tot de universitaire opleidingen. Er zal toch geprobeerd worden om aan iedereen enig inzicht in de fenomenen te geven.



Figuur 7.15: Eerste voorbeeld: rollend wiel

Eerst zal een eerder **kwalitatieve beschrijving** en verklaring gegeven worden van een paar fenomenen en daarna een meer grondige wiskundige aanpak.

De figuur 7.15 geeft een eenvoudig voorbeeld van een situatie waarbij de eendimensionele aanpak niet meer werkt. De rotatie-as van het wiel verandert voortdurend van richting. Dit valt dus niet onder de vorige formules.

### 7.3.2 Basiswet

Men kan het rechterlid van de wet van Newton schrijven als m.a, maar ook als de afgeleide van de impuls  $p = m \cdot v$  als:

$$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Op analoge manier is de basiswet voor de rotatie te schrijven als (afleiding infra):

$$\boxed{\sum_i M_P \vec{F}_i = \frac{d\vec{L}_P}{dt}}$$

of in woorden: **de som van de momenten van de uitwendige krachten moet gelijk zijn aan de verandering van het impulsmoment** .

Bij de eendimensionele rotatie moet men het moment nemen van alle krachten t.o.v. de rotatie-as. Hier moet men het moment nemen t.o.v. een punt P. Dit punt moet een stilstaand punt zijn of het massacentrum. Er is nog een derde mogelijkheid, nl. een punt waarvan de snelheid evenwijdig is aan de snelheid van het massacentrum. Dit is meestal maar een tijdelijke situatie, die niet kan gebruikt worden voor het opstellen van differentiaalvergelijkingen. Daarom wordt ze meestal niet vermeld. Voor

de eenvoud van de formules voert men normaal een assenkruis in zodat dat punt P de oorsprong van het assenkruis is. Het moment van een kracht wordt dan gegeven door het vectoriële product van de positievector van het aangrijpingspunt van die kracht met de kracht.

De praktische berekening van het rechterlid wordt hieronder nog verder uitgewerkt.

### Afleiding

Voor één massa zegt de wet van Newton:

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Wanneer men het moment neemt van beide leden t.o.v. de oorsprong dan bekomt men nog altijd een gelijkheid want de positievector voor het linker- en het rechterlid is dezelfde:

$$\vec{r} \times \sum \vec{F}_i = \vec{r} \times m\vec{a}$$

Wanneer men een verzameling van puntmassa's beschouwt, de wet van Newton op elke massa toepast en dan het moment neemt van beide leden en alles lid aan lid optelt, bekomt men:

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \quad (1)$$

Men zou normaal een dubbele som moeten invoeren voor de krachten, maar men kan het ook bij één som houden, waarbij sommige  $\vec{r}_i$  dezelfde zullen zijn. Bedenk dat de index i in het linkerlid niets te maken heeft met de index i in het rechterlid. De krachten kan men verdelen in uitwendige en inwendige krachten, d.i. krachten tussen de massa's onderling. Als men onderstelt dat die krachten actie-reactiekoppels vormen, die op dezelfde drager liggen, dan valt het moment van elk koppel krachten tegen elkaar weg. Men moet dus alleen rekening houden met de uitwendige krachten.

Anderzijds zou men het rechterlid willen schrijven als de afgeleide van het impulsmoment L, nl.  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$ . Als men hiervan de afgeleide neemt, dan bekomt men twee sommen. De vraag is nu in welke gevallen dit zich herleidt tot één som zoals in de betrekking hierboven. Om dit volledig algemeen te bekijken, kan men het moment nemen t.o.v. een willekeurig punt P, dat niet noodzakelijk moet stilstaan. Als  $\vec{r}_P$  de positievector is van P t.o.v. de oorsprong en  $\vec{r}_i$  de positie van het i-de punt t.o.v. de oorsprong, dan is de positie van dit punt t.o.v. P gegeven door:

$$\vec{r}_{iP} = \vec{r}_i - \vec{r}_P$$

En het impulsmoment t.o.v. P wordt:

$$\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i$$

Als men dit differentieert krijgt men:

$$\sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_P) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{a}_i$$

Dit kan nog herschreven worden in 3 termen:

$$\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{v}_P \times \sum_i m_i \vec{v}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{a}_i$$

Hierin is de eerste term = 0 want een vectorieel product van een vector met zichzelf is 0.

- De tweede term is zeker ook 0 als P een stilstaand punt is. Bemerkt dat het geen belang heeft of P een versnelling heeft, alhoewel men in dat geval het punt alleen kan gebruiken voor een ogenblikkelijke berekening en niet voor het opstellen van een differentiaalvergelijking.

- De tweede term is ook 0 als de snelheid van P evenwijdig is aan de snelheid van het massacentrum. Uit de definitie van het massacentrum volgt immers :

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = (\sum_i m_i) \vec{v}_C$$

- De tweede term is tenslotte ook 0 als P het massacentrum is. Dan is immers  $\vec{v}_P = \vec{v}_C$ . De term  $\vec{r}_i - \vec{r}_P$  is dan de **relatieve positie van elk punt t.o.v. het massacentrum**. Dit zal hier opnieuw, zoals in 7.1.3, aangeduid worden als  $\vec{r}_i'$ .

In de laatste term staan nu nog de afgeleiden van de absolute snelheden. Het zou logischer zijn om voor het impulsmoment ook te werken met de relatieve snelheden. Het blijkt dan men bij het berekenen van het impulsmoment t.o.v. het massacentrum, zowel met de absolute als met de relatieve snelheden mag werken. Men heeft:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}'_i \times m_i(\vec{v}_C + \vec{v}'_i) = \sum_i m_i \vec{r}'_i \times \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i$$

De eerste term hierin is 0 want bij positiebepaling t.o.v. het massacentrum geldt:

$$\sum_i m_i \vec{r}'_i = m \vec{r}'_c = 0$$

### 7.3.3 Traagheidstensor

De notie van impulsmoment kwam ook reeds voor bij eindimensionale rotatie hierboven (7.2.6.1). Daar werd het impulsmoment geschreven als  $L = I\omega$ . In het algemene geval moet men teruggrijpen naar de definitie als som van de momenten van de impulsen van alle (punt)massa's t.o.v. een punt:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Bij een onvervormbaar voorwerp kan men die  $\vec{v}_i$  schrijven in functie van de hoeksnelheid  $\omega$  m.b.v. een **vectorieel product** als  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . Als men dat invoert in de vorige formule (zie afleiding infra) krijgt men een resultaat dat kan voorgesteld worden, mits de complexiteit een beetje te verschuiven, als:

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

De 3 x 3 matrix noemt men de **traagheidstensor**. Men spreekt van een **tensor** omwille van de manier waarop de elementen veranderen bij verandering van het assenkruis. In elke element zit 2x een positie verwerkt, zodat de elementen bij b.v. een rotatie van het assenkruis op een andere manier zullen veranderen dan de componenten van een vector. Deze traagheidstensor kan gevisualiseerd worden als een ellipsoïde. Zie op het einde van dit hoofdstuk 7.3.12.2

#### Afleiding: L als functie van $\omega$

Voor een onvervormbaar voorwerp is het handiger om de hoeksnelheid  $\omega$  van het voorwerp en de totale massa te kunnen gebruiken. Hiervoor wordt elke  $v_i$  herschreven als  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ . De impulsmomentvector wordt dan:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Voor de uitwerking kan men eerst  $\vec{\omega} \times \vec{r}_i$  schrijven als  $\vec{v}_i$ . Men bekomt dan:

$$\vec{r}_i \times \vec{v}_i = (y_i v_{zi} - z_i v_{yi})\vec{i} + (z_i v_{xi} - x_i v_{zi})\vec{j} + (x_i v_{yi} - y_i v_{xi})\vec{k}$$

Op analoge manier is

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = (\omega_y z_i - \omega_z y_i)\vec{i} + (\omega_z x_i - \omega_x z_i)\vec{j} + (\omega_x y_i - \omega_y x_i)\vec{k}$$

Voor de x-component van  $\vec{L}$  vindt men:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)] = \sum_i m_i (y_i^2 \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z + z_i^2 \omega_x) \\ &= \sum_i m_i [(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z] \end{aligned}$$

Op analoge manier krijgt men:

$$L_y = \sum_i m_i [-x_i y_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2) \omega_y - x_i z_i \omega_z]$$

$$L_z = \sum_i m_i [-x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2) \omega_z]$$

Men stelt:

- $I_{xx} = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = \int (y_i^2 + z_i^2) dm$  is het **traagheidsmoment t.o.v. de x-as**.  
De term tussen de haakjes is immers de loodrechte afstand van  $m_i$  naar de x-as.
- $I_{xy} = \sum m_i x_i y_i = \int x y dm$  is een **traagheidsproduct**.

en analoog voor de andere elementen. Het is duidelijk dat  $I_{xy} = I_{yx}$

Hiermede kan de uitdrukking voor L geschreven worden als een matrixproduct van een **traagheidstensor I** met de hoeksnelheid  $\omega$  :

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Deze traagheidstensor is een symmetrische matrix:  $I_{ij} = I_{ji}$ . Soms worden de traagheidsproducten hier zonder mintekens genoteerd. Dan wordt er een minteken ingevoerd bij de definitie ervan.

— Einde van de afleiding —

Het is altijd mogelijk om een assenkruis te kiezen, **vast verbonden aan het voorwerp**, zodat deze matrix vereenvoudigd wordt tot:

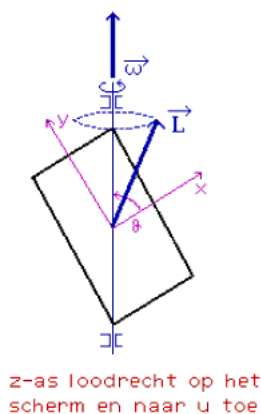
$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x \\ I_{yy}\omega_y \\ I_{zz}\omega_z \end{bmatrix}$$

Het assenkruis waarin men deze eenvoudige vorm bekomt heet een **hoofdtraagheidsassenkruis** en de assen ervan zijn **hoofdtraagheidsassen**. In het voorbeeld hieronder werd een schuin assenkruis gebruikt omdat de assen dan hoofdtraagheidsassen zijn. Verder wordt nog uitvoerig gehandeld over hoofdtraagheidsassen.

Het traagheidsmoment uit de eendimensionele rotatie komt overeen met het element  $I_{zz}$ , het traagheidsmoment t.o.v. de z-as. Het algemene geval is dus minstens 3x zo ingewikkeld als het eendimensionele. Zie [traagheidsmoment](#) voor tabellen met de traagheidsmomenten van enkel voorwerpen.

Uit bovenstaande formule volgt ook dat  $\vec{L}$  en  $\vec{\omega}$  normaal niet meer dezelfde richting hebben. Dit wordt verduidelijkt in de figuur 7.16.

#### Voorbeeld : rechthoek draaiend rond diagonaal



**Gegeven :**  $\vec{\omega}$  constant,  $\varphi$  constant

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx}\omega_x \\ I_{yy}\omega_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

De componenten van  $\vec{L}$  in het bewegend assenkruis zijn constant.

Daar  $I_{xx} > I_{yy}$ , zal  $\vec{L}$  **niet** evenwijdig zijn met  $\vec{\omega}$

Gevolg : tijdens het draaien beschrijft  $\vec{L}$  een kegel rond  $\vec{\omega}$ .

Figuur 7.16: Rechthoekige plaat draaiend rond diagonaal

Een vector die ronddraait is een veranderende vector. Volkomen algemeen geldt dat als de grootte van de vector ongewijzigd blijft maar de richting continu verandert, als de vector ronddraait, de afgeleide loodrecht staat op die vector. Het meest bekende geval is de beweging met constante snelheid van een punt op een cirkel. De positievector van dat punt draait rond en de snelheidsvector is steeds loodrecht op de positievector. Hier draait de impulsmomentvector rond. De afgeleide ervan zal de richting hebben van de snelheid van de top van deze vector en zal zelf ook mee ronddraaien met de impulsmomentvector. Deze situatie vraagt dus een voortdurende inwerking van een uitwendig moment volgens de afgeleide van de impulsmomentvector.

Deze elementen zijn voldoende om een reeks interessante effecten te bespreken.

### 7.3.4 Gyroscopisch effect

Er wordt even teruggekeerd naar het rollend wiel (fig.7.15). Het impulsmoment heeft een component volgens de z-as veroorzaakt door  $\omega_2$  en een component volgens de y-as veroorzaakt door  $\omega_1$ . De z-component is constant, alleen de y-component draait rond. De top ervan heeft een snelheid evenwijdig

aan de x-as en volgens de positieve zin ervan. Volgens de basiswet van de rotatie moet er een uitwendig moment geleverd worden in dezelfde richting en zin.

Op het wiel grijpen volgende krachten aan:

- het gewicht in het [massacentrum](#)
- een tegengestelde kracht van de grond om die op te vangen.

De som van deze beide krachten is nul en men kan ze verder vergeten.

Er is ook nog een kracht nodig die het centrum van het wiel naar binnen trekt en zo de middelpuntzoekende versnelling kan veroorzaken. Deze levert geen moment t.o.v. de oorsprong.

Het uitwendige moment kan alleen geleverd worden door een koppel van supplementaire krachten, één van de grond op het wiel (omhoog) en één in de bevestiging in de oorsprong (omlaag). Door de rotatie gaat het wiel dus harder op de grond drukken.

Wanneer men het wiel maar aan 1 zijde ondersteunt, krijgt men een zeer eigenaardige reactie (zie figuur hiernaast). Het gewicht en de reactie in het steunpunt vormen een koppel met moment  $M$ , voor te stellen als een vector die horizontaal en naar achter gericht is (rechtsdraaiende schroef). Volgens de basiswet moet de punt van de impulsmomentvector nu ook naar achter bewegen. Hij moet rond een verticale as beginnen draaien. Men noemt deze rotatie ook de **precessie**. Waar een wiel dat niet draait gewoon zou vallen, begint een draaiend wiel rond te draaien. Op het einde vindt men links naar video's van dit fenomeen.

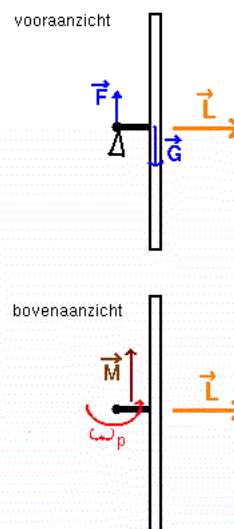
Men krijgt zo de eigenaardige situatie dat een moment loodrecht op de rotatie een rotatie uitlokt die opnieuw loodrecht staat op deze vectoren. Dit eigenaardige gedrag staat bekend als **gyroscopisch effect**. Men kan het ook beschrijven als het feit dat, als men een kracht uitoefent op de as van een snel draaiend voorwerp, de as niet zal draaien in de richting van de kracht maar in een richting loodrecht erop, nl. in de richting van het moment van de kracht.

Omgekeerd: als men een snel draaiend voorwerp doet draaien om een as loodrecht op zijn rotatie, dan reageert het door te proberen weg te draaien volgens een rotatierichting loodrecht op de beide. Dit kan men gemakkelijk zelf vaststellen. Als men een draaiend fietswiel vasthoudt aan uiteinden van de as, met de as horizontaal, en men probeert het wiel te kantelen om de as verticaal te brengen, dan voelt men een eigenaardige reactie van het wiel. Als men probeert om één uiteinde omhoog en het ander omlaag te brengen, dan oefent men een koppel uit als op de figuur hiernaast. Het wiel zal proberen rond een verticale as te draaien. Normaal probeert men ogenblikkelijk om die ongewenste beweging te stoppen, wat betekent dat men nu horizontale krachten gaat uitoefenen op de as. Dat is precies wat nodig is om het wiel te doen kantelen, wat het dan ook zal doen.

Een sneldraaiend voorwerp laat veel moeilijker zijn richting veranderen dan een niet-draaiend voorwerp: er moet een groter moment op uitgeoefend worden en in een andere richting. Daarom geeft men kogels en andere projectielen een draaiende beweging. Daarom ook geeft men aan een discus of een frishbee een roterende beweging mee.

Wanneer een fietser bij het nemen van een bocht naar de binnenzijde van de bocht leunt, dan veroorzaken zijn gewicht en de verticale reactie van de grond ook een koppel dat de fietswielen de bocht doet nemen. De wielen van een fiets draaien echter niet snel en wegen niet veel, zodat dit effect niet zo belangrijk is. De situatie is totaal anders bij motoren. Daar draaien de wielen wel snel en ze zijn veel zwaarder. Motorrijders gebruiken het gyroscopisch effect op 2 manieren: om hun motor te doen hellen en om hem de bocht te doen nemen. Vanaf snelheden boven de 40 km/u zal een motorrijder bij het ingaan van de bocht een duwtje geven op zijn stuur in tegengestelde richting van de bocht. Dit zal het voorwiel niet doen draaien maar wel doen kantelen volgens de langsas van de motor. Als de motorrijder dan mee gaat hellen, creëert hij opnieuw een koppel dat helpt om zijn motor door de bocht te draaien.

Het gyroscopisch effect zorgt ook voor supplementaire krachten op de lagers van de turbines van straalvliegtuigen als die een bocht nemen.



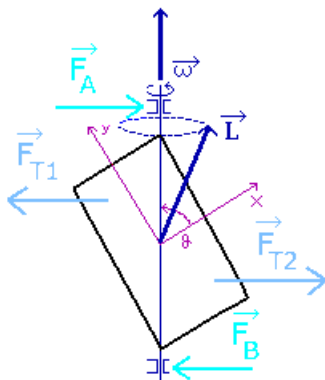
Figuur 7.17: Precessiebeweging

Het effect wordt natuurlijk ook gebruikt in [gyroscopen](#) voor automatische besturing en in het [gyrokompas](#). Voor wie filmpjes en veel meer informatie wil over het gyroscopisch effect in allerlei toepassingen kan vertrekken van <http://www.gyroscopes.org/>

### 7.3.5 Trillende autowielen

#### Voorbeeld : rechthoek draaiend rond diagonaal - 2

Gegeven :  $\vec{\omega}$  constant,  
 $\theta$  constant



z-as loodrecht op het scherm en naar u toe

Figuur 7.18: Rechthoekige plaats draaiend rond diagonaal

Wanneer men een nieuwe band laat zetten op een autowiel, dan wordt dat thans ook altijd uitgebalanceerd om te vermijden dat het wiel bij hoge snelheid gaat trillen. Waarvoor dit nodig is kan men begrijpen aan de hand van het tweede voorbeeld, de rechthoekige plaat die draait rond een diagonaal. De L-vector verandert voortdurend van richting en dat vraagt een moment loodrecht op de rotatie-as en de L-vector. Dit moment moet geleverd worden door 2 krachten in de lagers: de krachten  $F_A$  en  $F_B$  op de figuur hiernaast. Die krachten moeten meedraaien met de plaat.

Men kan de noodzaak van deze krachten ook begrijpen als men denkt in termen van middelpuntvliedende krachten (of traagheidskrachten). Wanneer de rechthoek draait, zullen de delen naast de as naar buiten willen bewegen alsof er een kracht  $F_{T1}$  en  $F_{T2}$  op werkt. Deze krachten moeten opgevangen worden door  $F_A$  en  $F_B$ . Men kan ook begrijpen dat als de plaat kon draaien rond haar middelpunt, ze zou draaien tot ze horizontaal ligt. Dan liggen de beide middelpuntvliedende krachten in elkaars verlengde en veroorzaken geen rotatie meer (moment is nul). Dan draait de rechthoek ook volgens een hoofdtraagheidsas en ligt L volgens de rotatie-as.

Conclusie: een voorwerp probeert altijd volgens een hoofdtraagheidsas te draaien. Als dat niet het geval is moeten er voortdurende krachten op uitgeoefend worden om het in de gevraagde positie te houden. Wanneer er enige elasticiteit is in de bevestiging zal dat aanleiding geven tot trillen of slingeren.

Bij een niet uitgebalanceerd wiel valt de hoofdtraagheidsas van het wiel niet samen met de rotatie-as (die dan natuurlijk horizontaal is). Door kleine gewichtjes toe te voegen kan men beide wel doen samenvallen en verdwijnt het trillen.

Bemerk dat de theorie van de ééndimensionele rotatie niets kan zeggen over dit trillen. Bij die theorie kijkt men immers alleen naar de componenten van de verschillende grootheden volgens de rotatie-as. Die theorie zegt niets over wat in de 2 andere dimensies gebeurt.

### 7.3.6 Hoofdtraagheidsassen

Hierboven werd de meest algemene vorm van de traagheidstensor gegeven met de formules voor de diagonaalelementen.

De nevendiaagonaalelementen worden **traagheidsproducten** genoemd en worden berekend als:

$$I_{xy} = \sum m_i \cdot (x_i \cdot y_i) \text{ of als } I_{xy} = \int (x \cdot y) dm$$

Deze tensor is een symmetrische matrix, d.i.  $I_{xy} = I_{yx}$ .

Nota: Hierboven werden in de traagheidstensor mintekens geplaatst voor de traagheidsproducten. Dan moeten die hier positief gedenieerd worden. Men kan ook in de traagheidstensor alle elementen als positief noteren en hier dan een minteken voor de traagheidsproducten plaatsen.

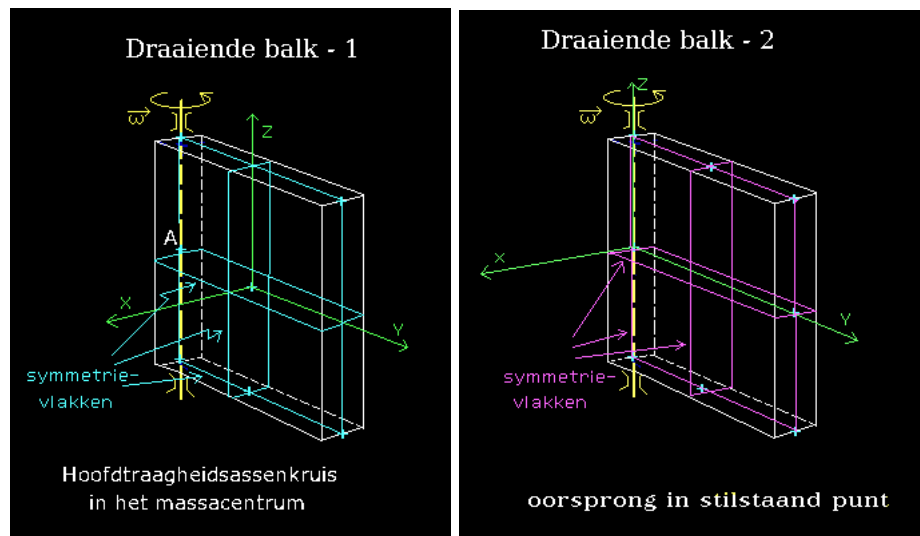
Men kan deze matrix visualiseren als een ellipsoïde (zie 7.3.12.2). Een omwentelingsellipsoïde is het volume dat men bekomt door een ellips rond een hoofd-as te laten draaien. Het lijkt dus een beetje op een

rugbybal. Een ellipsoïde heeft 3 symmetrievlakken die loodrecht op elkaar staan. De snijlijnen van deze vlakken vormen 3 symmetrieassen. Als men deze assen gebruikt voor het opstellen van de vergelijking van de ellipsoïde bekomt men de eenvoudigste vorm. Evenzo leidt het gebruik van deze assen om de traagheidstensor te bepalen tot de eenvoudige diagonaalvorm. Een traagheidstensor kan men dus altijd herleiden tot een diagonaalvorm mits een gepast assenkruis te kiezen. Hoe dit in een algemeen geval kan uitgewerkt worden, wordt uitgelegd op het einde van dit hoofdstuk in 7.3.13.3, diagonaliseren van de traagheidstensor.

Wanneer een voorwerp zelf symmetrie-elementen bevat, dan kan men op basis daarvan een hoofdtraagheidsassenkruis vinden. De regels hiervoor zijn:

- elke symmetrieas is een hoofdtraagheidsas, waar men ook de oorsprong kiest op die as;
- een as loodrecht op een symmetrievlak is een hoofdtraagheidsas als de oorsprong in het symmetrievlak ligt.

Om een assenkruis te gebruiken voor berekeningen volgens bovenstaande formules, moet de oorsprong van het assenkruis echter in het **massacentrum** vallen of in een **stilstaand punt**.



Figuur 7.19: Hoofdtraagheidsassenkruisen

Men kan dit illustreren m.b.v. een homogene rechthoekige balk (fig 7.19). Zulk een balk heeft drie symmetrievlakken, die 3 symmetrieassen bepalen. Deze snijden elkaar in het massacentrum. Deze symmetrieassen kan men dus gebruiken als hoofdtraagheidsassen (eerste figuur). Wanneer men de oorsprong van het assenkruis horizontaal verplaatst naar A, dan blijft het een hoofdtraagheidsassenkruis: de y-as is een symmetrieas, de x- en z-assen staan loodrecht op een symmetrievlak en de oorsprong ervan ligt in het symmetrievlak (figuur 2). Echter voor de berekeningen is alleen het punt A bruikbaar want alleen dat is een stilstaand punt.

Wat gebeurt er als men het onderste hoekpunt als oorsprong neemt? Dat is een stilstaand punt, maar dan heeft men geen hoofdtraagheidsassenkruis meer. Alleen de x-as is nog een hoofdtraagheidsas. De traagheidsproducten  $I_{yz} = I_{zy}$  zullen verschillen van 0. Men kan ze berekenen als (met h=hoogte, b=breedte en d=dikte van de balk):

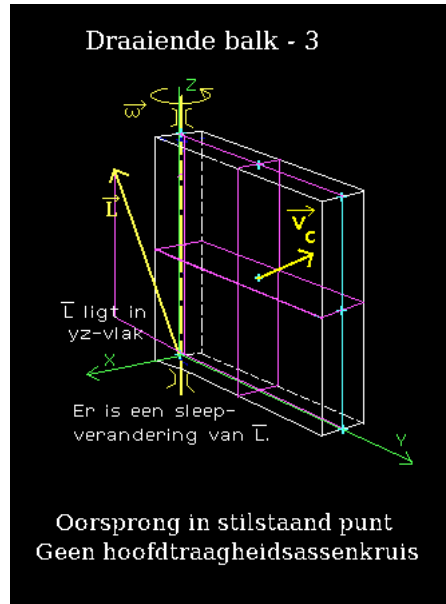
$$I_{yz} = - \int (y \cdot z) dm = - \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^b \int_0^h x \cdot y \cdot \rho \, dz dy dx = - \frac{mhb}{4}$$

De impulsmomentvector L wordt dan:

$$\vec{L} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -\frac{mhb}{4} \\ 0 & -\frac{mhb}{4} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{mhb\omega}{4} \\ m\omega(\frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{12}) \end{vmatrix}$$

Deze impulsmomentvector heeft dus een y-component en zal dus ronddraaien met de balk.

$I_{zz}$  t.o.v. het hoekpunt werd hierbij afgeleid uit  $I_{zz}$  t.o.v. het massacentrum m.b.v. de formule van Steiner (7.2.4)



Figuur 7.20: Geen hoofdtraagheidsassenkruis bij balk

T.o.v. het massacentrum:

$$I_{zz,C} = \frac{m}{12}(b^2 + d^2)$$

T.o.v. het hoekpunt:

$$I_{zz,P} = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) + \frac{mb^2}{4} = m\left(\frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{12}\right)$$

Er is nog een andere manier om  $L$  te berekenen. Volgens de verplaatsingsformule of de formule van König (7.1.5) moet  $L$  in het onderste hoekpunt gelijk zijn aan de  $L$  berekend in het massacentrum vermeerderd met het moment van de impuls van het massacentrum t.o.v. dat hoekpunt. In formules:

$$\vec{L} = \vec{L}_{mc} + \vec{r}_{mc} \times m\vec{v}_{mc} = I_{zz}\omega\vec{k} + \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \frac{b}{2} & \frac{h}{2} \\ -m\frac{b}{2}\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{mhb\omega}{4}\vec{j} + m\omega\left(\frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{12}\right)\vec{k}$$

Met een totaal andere aanpak bekomt men precies hetzelfde als het vorige, zoals het hoort.

### 7.3.7 Het rechterlid: de afgeleide van $L$

Opdat de traagheidstensor onafhankelijk zou zijn van de tijd (tenminste bij onvervormbare voorwerpen), heeft men een assenkruis gebruikt vast verbonden aan het voorwerp. Als men de afgeleiden van de impulsmomentvector  $L$  berekent door differentiëren van de componenten in dat assenkruis, heeft men alleen de verandering van  $L$  binnen dat assenkruis. Men noemt dit de **relatieve verandering**. Om de **absolute verandering** te hebben, d.i. zoals iemand die ziet die buiten het assenkruis staat, moet men nog rekening houden met het feit dat de impulsmomentvector mee ronddraait met het assenkruis, meegesleept wordt met de beweging van het assenkruis. Als een vector ronddraait beschrijft zijn eindpunt een cirkel. Bij een vlak systeem wordt de snelheid van een punt op een cirkel gegeven als  $r\omega$ . In 3 dimensies moet men een vectorieel product gebruiken:  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Dit levert als uiteindelijke formule:

$$\frac{d\vec{L}}{dt}|_{abs} = \frac{d\vec{L}}{dt}|_{rel} + \vec{\omega}_{assenkruis} \times \vec{L}$$

De tweede term in deze formule kan men de sleepverandering noemen.

De **basiswet voor de driedimensionale rotatie** wordt dan:

$$\sum_i M\vec{F}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}|_{rel} + \vec{\omega}_{assenkruis} \times \vec{L}$$



De uitwerking van deze formule in projecties op de 3 assen wordt de **vergelijkingen van Euler** genoemd. Ze kunnen ook via andere wegen bekomen worden. Ze worden hier niet gegeven omdat het efficiënter is om van de vectoriële vorm te vertrekken voor berekeningen. Men ziet dan veel sneller welke termen 0 zijn en wat de nuttige berekeningen zijn die men moet maken.

Bij de voorbeelden die tot nu toe gezien werden zijn de projecties van  $\vec{L}$  in het bewegend assenkruis constant. De eerste term, de relatieve verandering is dus telken 0. De sleepverandering wordt voor het 2e voorbeeld (fig. (7.16)):

$$\vec{\omega}_{\text{assenkruis}} \times \vec{L} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & 0 \\ L_x & L_y & 0 \end{bmatrix} = (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y \vec{k}$$

Daar  $I_{xx}$  groter is dan  $I_{yy}$  ligt dat resultaat volgens de negatieve z-as. De punt van  $\vec{L}$  beweegt op het getekende ogenblik inderdaad naar achter.

Er is één **uitzondering** op de regel dat het assenkruis meedraait met het voorwerp. Wanneer men een **rotatiesymmetrisch voorwerp** heeft, zoals het wiel in het 1ste voorbeeld, **en dat voorwerp draait rond die symmetrieas, dan zal men het assenkruis deze laatste rotatie NIET laten volgen**. Het is duidelijk dat de traagheidsmomenten volgens de x- en z-as niet veranderen als het wiel draait. De massaverdeling t.o.v. die assen blijft dezelfde. Men bekomt dus reeds een constante traagheidstensor door **het assenkruis alleen  $\omega_2$  te laten volgen**. De impulsmoment vector is:

$$\vec{L} = (0, I_{yy}\omega_1, I_{zz}\omega_2)$$

Ook hier is de relatieve verandering 0 (de componenten zijn constant). De sleepverandering is:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\omega_2 \\ 0 & L_y & L_z \end{bmatrix} = \omega_2 \cdot L_y \vec{i} = I_{yy}\omega_1\omega_2 \vec{i}$$

En dat is een resultaat volgens de positieve x-as, zoals uit de figuur verwacht wordt.

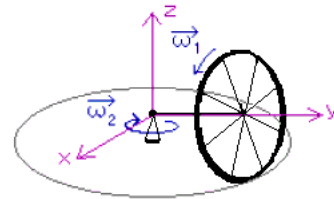
Nota 1. Als men het assenkruis toch volledig zou laten meedraaien met het wiel, dan moet men wel bedenken dat enige ogenblikken na de getekende stand, de z-as niet meer verticaal omhoog en de x-as niet meer horizontaal zouden zijn. Beide zouden iets linksom gedraaid zijn. De vector  $\omega_2$  blijft echter wel verticaal naar beneden gericht. Binnen het (bewegend) assenkruis moet men die dan beschrijven als een vector die met hoeksnelheid  $\omega_1$  rond draait in het xz-vlak, maar in tegengestelde zin van  $\omega_1$  (cfr. het complexere voorbeeld hieronder). Het is als met iemand in de trein die de indruk heeft dat het station weg rijdt i.p.v. zijn trein. Dan zouden er wel afgeleiden zijn van  $\omega_2$  en dus een relatieve verandering van L. Deze termen zouden echter wegvallen tegen even grote maar tegengestelde termen in de sleepverandering. Het is dan natuurlijk efficiënter en veiliger om een aanpak te volgen waarbij deze termen nooit berekend worden. Dat gebeurt door het assenkruis niet te laten meedraaien met  $\omega_1$ .

Nota 2. De rotatie rond de symmetrieas, hier  $\omega_1$ , noemt men de **spilomwenteling** (in het Engels : **spin**). In de literatuur wordt het verschil tussen de hoeksnelheid van een assenkruis dat volledig vast is aan het voorwerp of een assenkruis dat de spilomwenteling niet volgt, aangegeven door met een kleine  $\omega$  of een grote  $\Omega$  te werken. De hier gevolgde formulering met een  $\omega_{\text{assenkruis}}$  voor de sleepverandering dekt beide gevallen en is zelfverklarend.

### 7.3.8 Praktische aanpak

Problemen van rotatie in drie dimensies kan men best in de volgende volgorde aanpakken:

1. Zoek een punt dat als oorsprong kan dienen voor het assenkruis verbonden met het voorwerp. Dat punt moet ofwel stilstaan ofwel het massacentrum zijn.
2. Bepaal de richting van de assen. Als er symmetrie-elementen in het voorwerp zijn, zal men proberen hiervan gebruik te maken om een hoofdtraagheidsassenkruis te bekomen. Bij rotatie rond een as kan



Figuur 7.21: Rotatiesymmetrisch voorwerp

eventueel nog geschoven worden met de oorsprong over die as. Dat de traagheidstensor diagonaal zou zijn, is in feite niet zo belangrijk in de methode met matrixrekenen, die hier gevolgd wordt. Die traagheidstensor is in feite alleen nodig voor het berekenen van de impulsmomentvector  $L$ . Het voorbeeld hierboven toont dat men die ook via de verplaatsingsformule kan berekenen, zonder eventuele neventriagonaalelementen te moeten berekenen

3. Bepaal de totale ogenblikkelijke rotatie en projecteer die op de assen van het gekozen assenkruis.
4. Bereken de impulsmomentvector  $L$  op de klassieke methode (traagheidstensor  $\times$  ogenblikkelijke rotatie) of een minder klassieke methode.
5. Bereken de afgeleiden van  $L$  binnen het assenkruis, als die bestaan. # Bereken de sleepverandering van  $L$ . Maak zo nodig een onderscheid tussen totale ogenblikkelijke rotatie en de rotatie van het assenkruis.
6. Bereken de momenten van de uitwendige krachten t.o.v. de coördinaatassen
7. Stop dit alles in de momentenvergelijking
8. Pas zo nodig nog de wet van Newton toe, met in het rechterlid de totale massa en de versnelling van het massacentrum.

### 7.3.9 Kinetische energie - Behoud van impulsmoment

#### 7.3.9.1 Kinetische energie

In het algemeen geldt:

$$E_{kin} = (\vec{\omega} \cdot \vec{L})/2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_x \\ L_y \\ L_z \end{vmatrix}$$

In functie van de traagheidstensor kan men schrijven:

$$E_{kin} = (\vec{\omega}^T I \vec{\omega})/2$$

Wanneer de traagheidstensor gediagonaliseerd is, wordt dit eenvoudig:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2)$$

#### Afleiding

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{v}_i \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Men past nu cyclische permutatie toe op het "triple product" en brengt men  $\omega$  voor het somteken:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum m_i \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \frac{\vec{\omega}}{2} \cdot \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{L}}{2}$$

Voor een **vrij bewegend voorwerp** zal men opnieuw beroep moeten doen op de (2e) **stelling van König** (zie hoger massacentrum en energie 7.1.6):

$E_{kin}$  = kinetische energie van de translatie van het massacentrum (met totale massa) + kinetische energie van rotatie rond een as door het massacentrum.

Men kan dit nu eens toepassen voor de kinetische energie van de draaiende balk 7.3.6, die hoger gebruikt werd als voorbeeld bij hoofdtraagheidsassen en waarvan het impulsmoment berekend werd in een hoofdtraagheidsassenkruis en in een niet-hoofdtraagheidsassenkruis.

Voor het **hoofdtraagheidsassenkruis** in het massacentrum moet men dus opschrijven:

$$E_{kin} = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_{zz}\omega^2}{2} = \frac{m}{2}(\frac{b}{2}\omega)^2 + \frac{m}{24}(b^2 + d^2)\omega^2 = m\omega^2(\frac{b^2}{6} + \frac{d^2}{24})$$

Voor het **assenkruis in het punt linksonder** :

$$E_{kin} = (\vec{\omega} \cdot \vec{L})/2 = \frac{1}{2} [0 \ 0 \ \omega] \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{mhb\omega}{4} \\ m\omega(\frac{b^2}{3} + \frac{d^2}{12}) \end{vmatrix} = m\omega^2(\frac{b^2}{6} + \frac{d^2}{24})$$

### 7.3.9.2 Behoud van impulsmoment

Wanneer er **geen uitwendige momenten** op een voorwerp werken, dan kan het impulsmoment van dat voorwerp zich niet wijzigen (basisformule!). Er geldt dan een **behoud van impulsmoment**. De basisformule is echter een vectoriële wet en dan kunnen er soms geen uitwendige momenten zijn t.o.v. één bepaald richting. Dan geldt er een behoud van het impulsmoment t.o.v. die richting (of: van de projectie van het impulsmoment op die richting).

In de dagelijkse werkelijkheid ondervinden alle voorwerpen een aantrekkingskracht van de aarde. Verticale krachten hebben echter geen moment t.o.v. een verticale as. Er bestaat dan ook een **vrij spectaculaire proef** i.v.m. het behoud van impulsmoment in verticale richting. De proef is ook in verschillende “exploratoria” aanwezig.

De proef gebruikt een persoon die plaats neemt op een stoel (of plateau) die gemakkelijk kan draaien rond een verticale as (een geperfectioneerde bureaustoel). Men geeft aan de persoon een wiel, met een as met 2 stevige handvatten. Soms wordt een fietswiel gebruikt waarvan de velg met lood gevuld is om een groter traagheidsmoment te bekomen. De persoon houdt de as eerst horizontaal en men brengt het wiel vrij snel aan het draaien. Dan vraagt men de persoon om de as verticaal te brengen. Tot zijn grote verbazing zal hij in tegenstelde zin van het wiel beginnen draaien. Brengt hij de as weer horizontaal dan stopt hij. Draait hij de as in de ander richting naar de verticale stand, dan draait hij in de andere richting.

#### Verklaring

De enige uitwendige krachten die op de persoon en het wiel werken zijn aantrekkingskrachten van de aarde. Dat zijn verticale krachten en ze hebben dus geen moment t.o.v. de verticale as van de stoel. Ze kunnen m.a.w. geen rotatie rond de as op gang brengen of die rotatie op enige manier beïnvloeden. Bij het begin van de proef is het impulsmoment volgens een verticale gelijk 0: de persoon draait niet en het wiel heeft een horizontaal impulsmoment. De som van het impulsmoment van de persoon en de verticale component van het impulsmoment van het wiel, berekend t.o.v. de as van de stoel, moet dus steeds 0 blijven. Daarom gaat de persoon, met het wiel in de handen, in tegenovergestelde richting van het wiel beginnen draaien. Een kort **Quicktime filmpje** over deze proef kan men vinden op <http://users.telenet.be/hubert.christiaen/mechanics/BehoudImpulsmoment.htm>

Het mechanisme hierachter is vrij eenvoudig. Uit het gedeelte over het gyroscopisch effect weet men dat er een verticaal moment moet uitgeoefend worden op het wiel om de as ervan rond een horizontale as te laten kantelen. De persoon ondervindt de reactie van het moment dat hij op het wiel uitoefent en begint daardoor zelf te draaien.

Om te berekenen hoe snel de man zal draaien, heeft men het impulsmoment van het fietswiel t.o.v. de as van de stoel nodig. Hiervoor moet men beroep doen op de formule dat voor een vrij bewegend voorwerp geldt (7.1.5):

$$\vec{L} = \vec{J} + \vec{S}$$

met

$\vec{J}$  = baanimpulsmoment, d.i. impulsmoment van het massacentrum, waaraan men de totale massa van het voorwerp toekent;

$\vec{S}$  = impulsmoment t.o.v. een as door het massacentrum (S van “spin”). Hierbij moet gerekend worden met de absolute rotatie.

Zij hier:

$I_w$  : traagheidsmoment van het wiel t.o.v. zijn as

$\omega_w$  : hoeksnelheid van het wiel (bij het begin)

$m_w$  : totale massa van het wiel

$I_m$  : traagheidsmoment van man+stoel t.o.v. de as van de stoel

$\omega_m$  : hoeksnelheid van man+stoel

$d$  = afstand tussen as van het wiel (in verticale stand) en as van de stoel

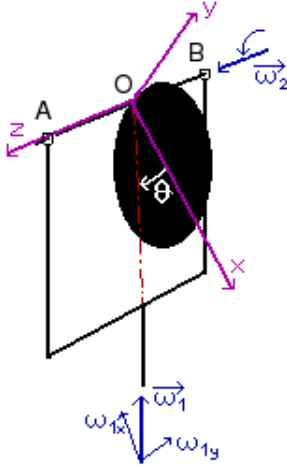
De snelheid van met massacentrum is natuurlijk  $d \cdot \omega_m$ .

Als de man de as van het fietswiel verticaal heeft moet dus gelden, na projectie op de verticale:

$$I_w \omega_w = (m_w \cdot d^2 + I_m) \omega_m$$

### 7.3.10 Een complexer voorbeeld

#### 7.3.10.1 De momentenvergelijkingen!



Figuur 7.22: Schijf slingerend in roterend systeem

Als volgend voorbeeld wordt een schijf beschouwd die slingerend opgehangen is aan de rand ervan. Het geheel draait echter rond met een contacte hoeksnelheid  $\omega_1$ .

#### Oplossing

Men voert een rechtsdraaiend assenkruis in dat een hoofdtraagheidsassenkruis is en waarvan de oorsprong stil staat. Om de positie van de schijf weer te geven moet men ook een hoek  $\theta$  invoeren. Er zijn vele mogelijkheden om die te definiëren. Best werkt men van een as naar een bepaalde lijn, hier van de x-as naar de verticale. In eerste instantie wordt de hoeksnelheid van de schijf rond de as AB als  $\omega_2$  aangeduid. Het verband met de afgeleide van  $\theta$  wordt later bepaald.

De totale hoeksnelheid van de schijf:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = (-\omega_1 \cos \theta) \vec{i} + (\omega_1 \sin \theta) \vec{j} + (\omega_2) \vec{k}$$

De impulsmomentvector L wordt dan:

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\omega_1 \cos \theta \\ \omega_1 \sin \theta \\ \omega_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -I_{xx}\omega_1 \cos \theta \\ I_{yy}\omega_1 \sin \theta \\ I_{zz}\omega_2 \end{vmatrix}$$

Het is duidelijk dat de projecties van  $\omega_1$  voortdurend veranderen. In de formules komt dit tot uiting in het feit dat  $\theta$  een functie is

van de tijd. Er bestaan dus afgeleiden van de impulsmomentvector binnen het bewegend assenkruis:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{rel} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} -I_{xx}\omega_1 \cos \theta \\ I_{yy}\omega_1 \sin \theta \\ I_{zz}\omega_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{xx}\omega_1 \sin \theta \cdot \dot{\theta} \\ I_{yy}\omega_1 \cos \theta \cdot \dot{\theta} \\ I_{zz}\dot{\omega}_2 \end{vmatrix}$$

Het is duidelijk dat de grootte van de afgeleide van  $\theta$  overeenkomt met de grootte van  $\omega_2$ , maar niet noodzakelijk het teken. Dit laatste hangt af van de manier waarop  $\theta$  gedefinieerd werd. Als  $\theta$  hier toeneemt, dan krijgt men een rotatie in de zin van de positieve  $\omega_2$ . In dit geval kan men dus  $\omega_2$  overall vervangen door  $\dot{\theta}$  om niet te veel onbekenden te hebben.

Om de absolute afgeleide van  $\vec{L}$  te bekomen moet men nog de sleepverandering toevoegen:

$$\begin{aligned} \omega \times \vec{L} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_1 \cos \theta & \omega_1 \sin \theta & \dot{\theta} \\ -I_{xx}\omega_1 \cos \theta & I_{yy}\omega_1 \sin \theta & I_{zz}\dot{\theta} \end{vmatrix} \\ &= [(I_{zz} - I_{yy}) \sin \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta}] \vec{i} + [(I_{zz} - I_{xx}) \cos \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta}] \vec{j} + [(I_{xx} - I_{yy}) \sin \theta \cdot \omega_1^2] \vec{k} \end{aligned}$$

De traagheidsmomenten (met r de straal en m de massa van de schijf):

$$I_{xx} = mr^2/4 \text{ (uit de tabellen van traagheidsmomenten)}$$

$$I_{yy} = mr^2/4 + mr^2 = 5mr^2/4 \text{ (als vorige + Steiner)}$$

$$I_{zz} = mr^2/2 + mr^2 = 3mr^2/2 \text{ (tabel + Steiner)}$$

Hiermede kan men nu de absolute afgeleide van  $\vec{L}$  berekenen:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{abs} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

x-component:

$$(I_{xx} + I_{zz} - I_{yy}) \sin \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta} = \frac{5}{2} mr^2 \sin \theta \cdot \omega_1 \dot{\theta}$$

y-component:

$$(I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \cos \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta} = \frac{5}{2} m r^2 \cos \theta \cdot \omega_1 \dot{\theta}$$

z-component:

$$\frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta} - m r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \omega_1^2$$

De laatste term in de z-component kan men interpreteren als een middelpuntvliedende kracht, een zogenaamde traagheidsreactie (zie: Aanvullingen: Traagheidskrachten (10)). Bij een gegeven  $\theta$  beschrijft het massacentrum van de schijf een cirkel rond de verticale met straal  $r \cdot \sin \theta$ . Daarbij hoort een normale versnelling  $r \cdot \sin \theta \cdot \omega_1^2$ . Voor iemand binnen het roterend systeem lijkt het alsof er een naar buiten werkende kracht gelijk aan  $m \cdot a_n$  werkt. T.o.v. de z-as heeft deze kracht een moment dat gelijk is aan  $r \cdot \cos \theta \cdot m \cdot a_n$ . Het is echter eerder toevallig dat deze traagheidskracht in het massacentrum schijnt aan te grijpen. Dit moment is immers het resultaat van de som van de momenten van alle elementaire traagheidskrachten die op elk punt van de schijf aangrijpen, en die worden groter naarmate men zich van de as verwijderd.

Het merkwaardige aan deze term is echter dat hij verdwijnt als  $I_{xx} = I_{yy}$ . Dat is het geval bij een halve schijf (fig. 7.23). Daar het traagheidsmoment een kwadratische functie is van de afstand tot de as, maakt het geen verschil uit of de twee kwartcirkelsegmenten aan dezelfde of tegenstelde zijden van de as liggen. De frequentie waarmee deze halve schijf slingert wordt dus niet beïnvloed door  $\omega_1$ !

Om de volledige momentenvergelijkingen te kunnen opstellen moeten nu nog de momenten van de krachten berekend worden (fig. 7.24). Er zijn drie krachten: het gewicht en de reactiekrachten in A en B. Deze onbekende reactiekrachten worden beschreven met componenten volgens de assen. Volgens de z-as is er alleen een component in A en niet in B, anders wordt het systeem hyperstatisch. Men moet er wel aan denken dat, als de oplossing een constante component zou opleveren, dit betekent dat die component constant is in grootte maar mee beweegt met het assenkruis. De volledige momentenvergelijking geeft dan in projecties het volgende stelsel van 3 vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{2} (Y_B - Y_A) &= \frac{1}{2} m r^2 \sin \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta} \\ \frac{AB}{2} (X_A - X_B) &= \frac{5}{2} m r^2 \cos \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta} && \text{Stelsel I} \\ -m g r \sin \theta &= \frac{3 m r^2}{2} \ddot{\theta} - m r^2 \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \omega_1^2 \end{aligned}$$

De laatste vergelijking bepaalt het slingeren van de schijf. Ze kan vereenvoudigd worden tot:

$$\ddot{\theta} - \frac{2 \sin \theta}{3} (\omega_1^2 \cos \theta - \frac{g}{r}) = 0$$

Als men alleen in deze beweging geïnteresseerd is, dan zou deze vergelijking veel sneller en efficiënter kunnen bekomen worden met de methode van Lagrange 8. Het is er uitgewerkt als derde voorbeeld. Als men de schijf loslaat met  $\theta = 0$  en in rust, dan gebeurt er niets. Als men de schijf loslaat met een relatieve beginsnelheid en/of bij een hoek  $\theta > 0$ , dan zal de schijf beginnen slingeren. Daar niet alleen het moment van het gewicht speelt, maar ook iets dat men als een middelpuntvliedende kracht kan interpreteren, is de beweging zeker geen harmonische trilling. Men ziet dit duidelijk in de grafiek hieronder.

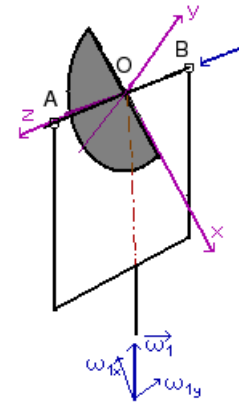
Indien er enige damping in het systeem aanwezig is, zal het naar een evenwichtstoestand gaan met relatieve hoekversnelling en hoeksnelheid = 0 en dus

$$g \sin \theta = r \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot \omega_1^2$$

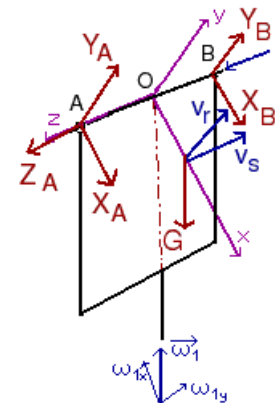
Voor een beginsituatie met  $\theta$  verschillend van 0 leidt dit tot de uitdrukking:

$$\cos \theta = g / (r \omega_1^2)$$

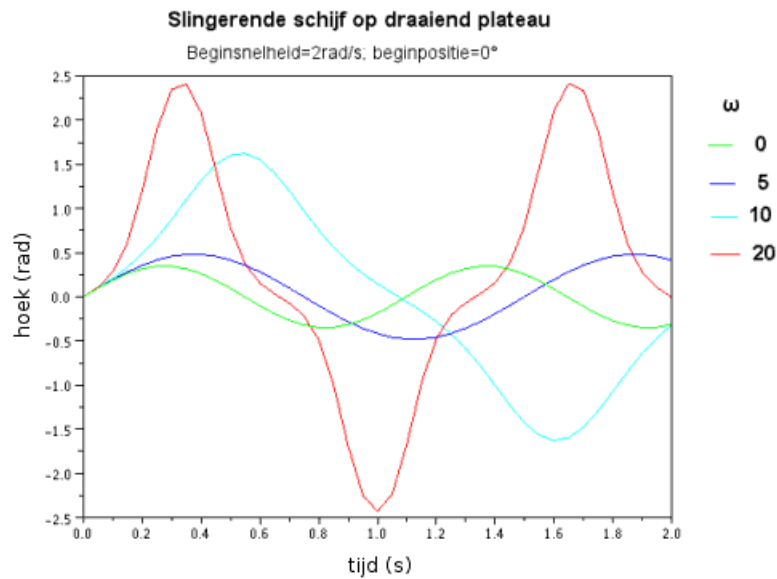
Voor kleine  $\omega_1$  levert dit een uitdrukking die groter is dan 1. Voor die waarden zal het systeem evolueren naar  $\theta = 0$  en voor die positie is de bovenstaande afleiding niet geldig. Er is dus een minimum  $\omega_1$  nodig



Figuur 7.23: Halve slingerende schijf

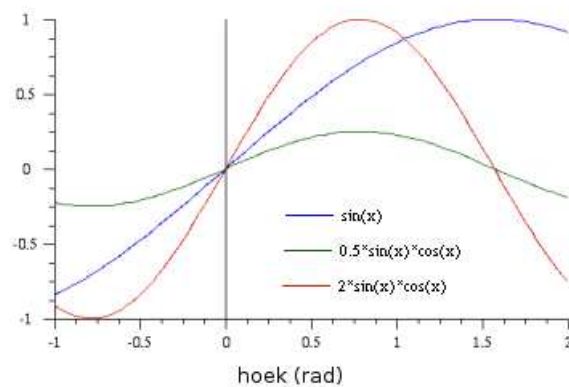


Figuur 7.24: Krachten



Figuur 7.25: Grafiek van slingerende schijf op draaiend plateau

voor de schijf een schuine stand zal aannemen. Dit komt doordat de middelpuntvliedende kracht niet constant is, maar zelf functie is van  $\theta$ . Men kan dit duidelijk zien in de grafieken hiernaast, waarin de coëfficiënt van  $\sin(x) \cdot \cos(x)$  overeenkomt met  $r \cdot \omega_1^2 / g$ . Men ziet duidelijk dat deze coëfficiënt groter moet zijn dan 1 vooraleer er een snijpunt in het interval  $0 < x < 90^\circ$  mogelijk is (de x-as is in radialen,  $90^\circ = 1,57$  rad). Dat snijpunt zal ook altijd vallen vóór  $x = 1,57$  rad ( $= 90^\circ$ ) want voor die waarde gaat  $\sin(x)$  naar 1 terwijl  $\sin(x) \cdot \cos(x)$  er een nulpunt heeft.



Figuur 7.26: Grafiek van  $\sin x$  en  $\sin x \cdot \cos x$

### 7.3.10.2 Deel II: de wet van Newton

Voor een volledige beschrijving van het systeem moet men nog de wet van Newton toepassen op de beweging van het massacentrum met daarin de totale massa van de schijf. Voor de versnelling van het massacentrum zal men moeten beroep doen op de volledige uitdrukking van de versnelling 5.3.2.3 in een roterend systeem met een sleep-, relatieve en complementaire versnelling:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_s + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

- De sleepversnelling bestaat hier alleen. uit een normale versnelling daar  $\omega_1$  constant is:  

$$\vec{a}_s = r \sin \theta \omega_1^2 (-\sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j})$$

- De relatieve versnelling heeft een normale en een tangentiële component:  
 $\vec{a}_r = r\dot{\theta}^2\vec{i} + r\ddot{\theta}\vec{j}$

- voor de complementaire versnelling is de relatieve snelheid nodig:  
 $\vec{v}_r = r\dot{\theta}\vec{j}$

Hiermede wordt de complementaire versnelling:

$$2\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\omega_1 \cos \theta & \omega_1 \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & r\dot{\theta} \end{vmatrix} = -2r \cos \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta} \vec{k}$$

Alles bij elkaar krijgt men voor de Wet van Newton toegepast op het massacentrum:

$$X_A + X_B + mg \cos \theta = -mr(\sin^2 \theta \omega_1^2 + \dot{\theta}^2)$$

$$Y_A + Y_B - mg \sin \theta = -mr(\sin \theta \cos \theta \omega_1^2 + \ddot{\theta}) \quad \text{Stelsel II}$$

$$Z_A = -2mr \cos \theta \cdot \omega_1 \cdot \dot{\theta}$$

Deze 3 vergelijkingen vormen samen met het stelsel I de volledige beschrijving van de beweging en alle krachten die erbij optreden

### Kinetische energie

Ze wordt hier uitgerekend ter controle voor de volgende aanpak.

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2) \\ &= \frac{mv^2}{2} \left( \frac{1}{4} \cos^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{5}{4} \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{mv^2}{2} \left( \frac{\omega_1^2}{4} + \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned}$$

### 7.3.10.3 Alternatieve oplossing

Een schijf is een rotatiesymmetrisch voorwerp. Bij de bovenstaande oplossing werd dit niet uitgespeeld. Als men deze eigenschap wel wil benutten (zie de uitzondering in 7.3.7), dan moet men een translarend assenkruis invoeren met oorsprong in het middelpunt van de schijf. “Translerend” betekent dus dat de x- en y-as horizontaal en vertikaal blijven. Men vindt nu voor de verschillende grootheden:

$$\vec{\omega} = (0, \omega_1, \dot{\theta})$$

$$\vec{L} = (0, I_{yy}\omega_1, I_{zz}\dot{\theta})$$

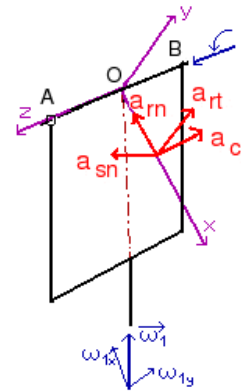
De rotatie van het assenkruis bestaat nu alleen uit  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt}|_{abs} &= \frac{d\vec{L}}{dt}|_{rel} + \vec{\omega}_1 \times \vec{L} \\ &= (0, 0, I_{zz}\ddot{\theta}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & I_{yy}\omega_1 & I_{zz}\dot{\theta} \end{vmatrix} \\ &= I_{zz}\ddot{\theta}\vec{k} + I_{zz}\omega_1\dot{\theta}\vec{i} \end{aligned}$$

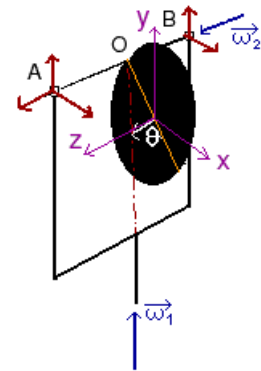
Dit is een bijzonder eenvoudige uitdrukking die weinig gelijkenissen vertoont met de vorige berekening. Om aan te tonen dat de beide voorstellingen wel equivalent zijn kan men ook hier de kinetische energie berekenen. Men moet nu wel rekenen volgens de formule van König (zie Massacentrum en energie 7.1.6. Deze formule kan hier geschreven worden als:

$$E_k = \frac{mv_C^2}{2} + \frac{1}{2}(I_{yy}\omega_1^2 + I_{zz}\dot{\theta}^2)$$

De snelheid van het massacentrum bestaat uit een sleepsnelheid en een relatieve snelheid. Deze laatste heeft nu 2 componenten:



Figuur 7.27: Versnelling van massacentrum bij slingerende schijf



Figuur 7.28: Slingerende schijf: translarend assenkruis

$$\vec{v}_C = r\dot{\theta} \cos \theta \vec{i} + r\dot{\theta} \sin \theta \vec{j} + r \sin \theta \omega_1 \vec{k}$$

Dit is een ontbinding in een orthogonaal assenkruis. Dus:

$$\begin{aligned} v_C^2 &= \sum v_{C,i}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \omega_1^2 \\ &= r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \omega_1^2 \end{aligned}$$

De traagheidsmomenten:

- $I_{xx} = I_{yy} = mr^2/4$
- $I_{zz} = mr^2/2$

Hiermede wordt de kinetische energie:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{mv^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \omega_1^2 + \frac{\omega_1^2}{4} + \frac{\dot{\theta}^2}{2}) \\ &= \frac{mv^2}{2} (\frac{3\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\omega_1^2}{4} + \sin^2 \theta \omega_1^2) \end{aligned}$$

... en dit is precies wat men hoger ook gevonden heeft.

Voor het berekenen van de momenten van de krachten worden eerst de coördinaten van de aangrijpingspunten bepaald:

- voor A  $(-r \sin \theta, r \cos \theta, AB/2)$
- voor B  $(-r \sin \theta, r \cos \theta, -AB/2)$

Het gewicht heeft nu als componenten:  $G(0, -mg, 0)$ . Hiermede bekomt men voor de momentenvergelijkingen het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} (r \cos \theta Z_A - \frac{AB}{2} Y_A) + \frac{AB}{2} Y_B &= I_{zz} \omega_1 \dot{\theta} \\ (\frac{AB}{2} X_A + r \sin \theta Z_A) - \frac{AB}{2} X_B &= 0 \\ -r \sin \theta Y_A - r \cos \theta X_A - r \sin \theta Y_B - r \cos \theta X_B &= I_{zz} \ddot{\theta} \end{aligned}$$

De laatste vergelijking schijnt niet veel gelijkenissen te vertonen met de vorige z-component van de momentenvergelijking. Er zal verder nochtans aangetoond worden dat ze daarnaar kan worden herleid.

Om de vergelijkingen van de wet van Newton te kunnen opschrijven, moet men de versnelling projecteren in het huidige assenkruis:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{sn} &= -r \sin \theta \omega_1^2 \vec{i} \\ \vec{a}_r &= \vec{a}_{rn} + \vec{a}_{rt} = r\dot{\theta}^2 (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}) + r\ddot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \\ \vec{v}_r &= r\dot{\theta} (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}) \\ \vec{a}_c &= 2 \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_1 & 0 \\ r\dot{\theta} \cos \theta & r\dot{\theta} \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = -2r \cos \theta \omega_1 \dot{\theta} \vec{k} \end{aligned}$$

Hiermede leidt de Wet van Newton tot het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} \sum X_i &= X_A + X_B = mr(-\sin \theta \omega_1^2 - \sin \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta}) \\ \sum Y_i &= Y_A + Y_B - G = mr(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}) \\ \sum Z_i &= Z_A = -2mr \cos \theta \omega_1 \dot{\theta} \end{aligned}$$

Om de z-component van de momentenvergelijking te herleiden tot de uitdrukking van de vorige oplossing, wordt die herschreven als:

$$-r \sin \theta (Y_A + Y_B) - r \cos \theta (X_A + X_B) = \frac{mv^2}{2} \ddot{\theta}$$



Hierin kan men nu gemakkelijk de uitdrukkingen voor  $X_A + X_B$  en  $Y_A + Y_B$  uit de vergelijkingen van Newton substitueren. Na een halve bladzijde rekenen zal men vaststellen dat men uitkomt op de vorige uitdrukking voor de z-component.

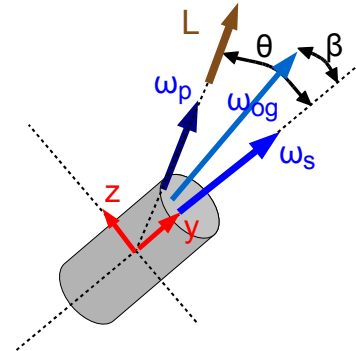
In deze benadering komt er nergens een hint dat een halve schijf een speciaal gedrag vertoont. Dat kan ook moeilijk want een halve schijf is geen rotatiesymmetrisch voorwerp en kan dus met deze aanpak niet worden behandeld.

### 7.3.11 Precessie bij een vrij bewegend voorwerp

Bij een vrij bewegend voorwerp, waarop alleen de zwaartekracht werkt en geen enkel uitwendig moment, moet het impulsmoment behouden blijven. Uit het voorgaande zou men de indruk kunnen krijgen dat dan alleen een rotatie rond een hoofdtraagheidsas mogelijk is. Het blijkt echter dat ook een combinatie van spin en precessie tot een constant impulsmoment kan leiden. Dit is bv. het geval bij een discus, die een waggelende beweging kan uitvoeren tijdens zijn vlucht.

Men onderstelt een rotatiesymmetrisch voorwerp dat draait rond zijn as met een  $\omega_s$ . Terzelfdertijd roteert het met een hoeksnelheid  $\omega_p$  onder een hoek  $\theta$ . Beide bewegingen kunnen zich combineren tot een constant impulsmoment.

Als het impulsmoment een onveranderlijke richting moet hebben, dan kan dat alleen als het de richting heeft van  $\omega_p$ . Als het naast  $\omega_p$  zou vallen, dan zou het, in een vast referentiesysteem, een kegeloppervlak beschrijven rond  $\omega_p$ .



Figuur 7.29: Precessie bij vrij bewegend voorwerp

Er wordt een assenkruis verbonden aan het voorwerp ingevoerd met de y-as volgens  $\omega_s$  en met  $\omega_p$  en het impulsmoment in het yz-vlak. De x-as wijst naar de toeschouwer. Daar het om een rotatiesymmetrisch voorwerp gaat, is  $I_{xx} = I_{zz}$ . Deze traagheidsmomenten zullen als  $I_d$  (met de d van "dwars") aangeduid worden. Het traagheidsmoment volgens de symmetrieas zal  $I_a$  genoemd worden. Het impulsmoment  $\vec{L}$  wordt:

$$\vec{L} = I_a(\omega_s + \cos\theta\omega_p)\vec{j} + I_d \sin\theta\omega_p\vec{k}$$

Het is duidelijk dat  $\omega_x = 0$  en ook  $L_x = 0$  is. Daar er geen uitwendige momenten zijn, moet dit ook zo blijven. Dit betekent dat ook  $\theta$  constant is en  $\omega_p$  en  $L$  steeds in het yz-vlak blijven.

Men schrijft nu de basiswet voor de rotatie verder uit. De uitwendige momenten en de relatieve verandering van  $L$  zijn 0. De hoeksnelheid van het assenkruis is enkel  $\omega_p$ . Er blijft dus:

$$\vec{\omega}_p \times \vec{L} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega_p \cos\theta & \omega_p \sin\theta \\ 0 & L_y & L_z \end{bmatrix} = 0$$

Hieruit blijkt dadelijk dat er enkel een x-component is, nl.:

$$\omega_p \cos\theta L_z - \omega_p \sin\theta L_y = 0$$

Na invullen van de waarden voor de componenten van  $L$  en wat vereenvoudigen bekomt men:

$$\omega_p = \frac{I_a \omega_s}{(I_d - I_a) \cos\theta}$$

Men werkt met een  $\theta$  in het eerste kwadrant en dus een positieve  $\cos\theta$ . Men moet 2 gevallen onderscheiden:

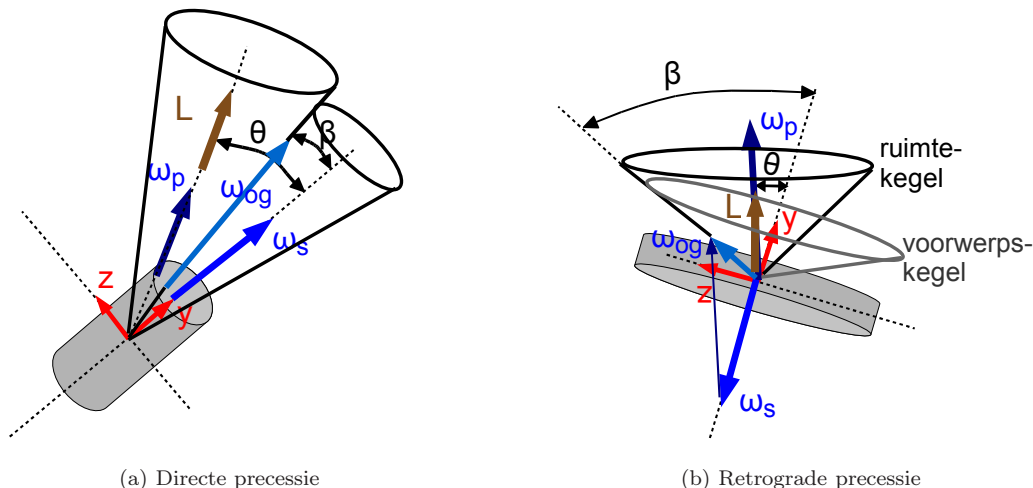
1.  $I_d > I_a$ : dan zijn  $\omega_s$  en  $\omega_p$  positief.
2.  $I_d < I_a$ : dan zijn  $\omega_s$  en  $\omega_p$  tegengesteld gericht (hun scalair product is negatief)

Beide gevallen worden nu wat meer in detail besproken. Het **eerste geval** treedt op bij een eerder uitgerokken, langwerpige voorwerp. Dan is  $I_d < I_a$ . De totale ogenblikkelijke rotatievector  $\omega_{og}$  beschrijft, in een vast referentiesysteem, een kegeloppervlak rond  $\omega_p$  met hoeksnelheid  $\omega_p$ . Wanneer een bewegende kegel over een stilstaande kegel rolt, dan ligt de ogenblikkelijke rotatievector op de raaklijn tussen de twee kegels. De situatie hier kan dus voorgesteld worden als het rollen van 2 kegels over elkaar. De kegel

rond  $\omega_p$  stelt de stilstaande kegel voor en noemt men de **ruimtekegel**. De kegel rond  $\omega_s$  noemt men de **voorwerpskegel**. De voorwerpskegel heeft een halve tophoek die  $\beta$  genoemd wordt. Men kan L nu ook opschrijven als functie van  $\omega_{og}$  en die  $\beta$  :  $\vec{L} = I_a \cos \beta \vec{j} + I_d \sin \beta \vec{j}$ . Hiermede kan men een verband vinden tussen  $\theta$  en  $\beta$ :

$$\tan \theta = \frac{L_z}{L_y} = \frac{I_d}{I_a} \tan \beta$$

Als  $I_d > I_a$  dan zal  $\beta$  kleiner zijn dan  $\theta$ . Men krijgt een voorwerpskegel die uitwendig over de ruimtekegel rolt. Men noemt dit **directe precessie**.



Figuur 7.30: Precessie van vrij bewegend voorwerp - 2

Het **tweede geval** treedt op bij een voorwerp dat uitgebreider is in een richting loodrecht op de symmetrieas dan in de richting hiervan. Dit is bv. het geval bij een discus. In dat geval moeten  $\omega_s$  en  $\omega_p$  tegengestelde richtingen hebben. Of wiskundig correcter: hun scalair product moet negatief zijn. Zodra dat het geval is wordt de positie van de kegels omgewisseld. Men krijgt een ruimtekegel die aan de binnenzijde van de voorwerpskegel zit. Het blijkt dat  $\omega_p$  vrij groot moet zijn in vergelijking met  $\omega_s$  om aan de projecties van L in functie van  $\omega_{og}$  en  $\beta$ ; te kunnen voldoen. L en  $\omega_{og}$  moeten daarvoor in hetzelfde kwadrant vallen. Dat kan alleen als zowel  $\omega_p$ ,  $\omega_{og}$  en L in hetzelfde kwadrant vallen. Klassiek verkiest men dan om  $\omega_s$  volgens de negatieve as te richten zodat de drie andere vectoren positieve componenten hebben. Men krijgt dan de situatie zoals in de derde figuur. Volgens de hoger gegeven betrekking tussen  $\theta$  en  $\beta$  moet  $\beta$  nu groter zijn dan  $\theta$ , wat inderdaad klopt. De voorwerpskegel rond nu met zijn binnenzijde over de ruimtekegel. Omdat  $\omega_s$  en  $\omega_p$  tegengestelde zin hebben, spreekt men van **retrograde precessie**.

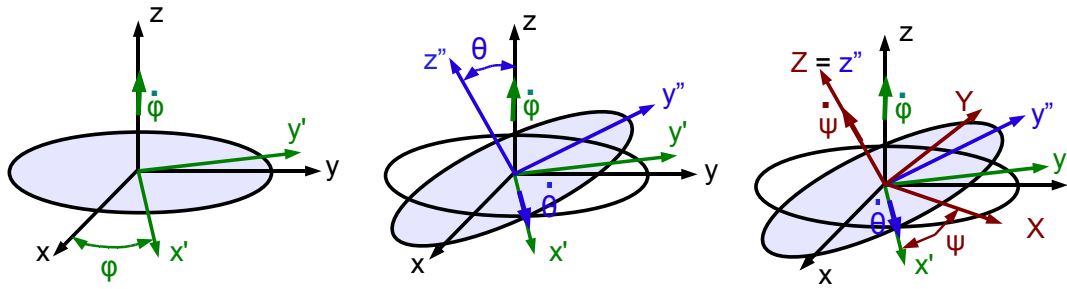
In Dynamics, [meriam], kan men nog een studie vinden van de stabiliteit van dit soort beweging.

### 7.3.12 Aanvullingen

#### 7.3.12.1 De hoeken van Euler

De eerste studies van de algemene rotatie waren vooral gewijd aan het verklaren van de bewegingen van een tol. Euler leverde hierbij belangrijk werk door te bewijzen dat elke willekeurige rotatie kan geschreven worden als de som van drie rotaties die door één punt passeren. Deze worden gedefinieerd via de **hoeken van Euler**. Spijtig genoeg zijn de benamingen en de definities van deze niet uniform bij de verschillende auteurs. Daarom moet men steeds goed uitkijken welke definitie in een bepaald werk gevolgd wordt. Voor een uitvoerige bespreking kan men opnieuw terecht bij <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>. De methode die hier hierboven gevolgd werd voor het analyseren van de willekeurige rotatie en die steunt op matrixrekenen, is recenter en biedt een veel grotere vrijheid bij het behandelen van een probleem.

Bij de rotatie van een star lichaam werkt men met een assenkruis dat vast verbonden is aan het voorwerp. Als dit voorwerp een vast punt heeft maar voor de rest voortdurend van oriëntatie verandert, zoals



Figuur 7.31: Hoeken van Euler

meestal het geval is bij een tol, dan bieden de hoeken van Euler een mogelijkheid om de positie van het referentiesysteem eenduidig te bepalen. Men vertrekt daarbij van een klassiek rechtsdraaiend cartesisch assenkruis  $(x,y,z)$ . Van hieruit gaat men over naar een tweede assenkruis door een rotatie over een hoek  $\phi$  rond de  $z$ -as. Dit levert het assenkruis  $(x',y',z)$ . Door een rotatie rond de  $x'$ -as over een hoek  $\theta$  gaat men over naar het assenkruis  $(x',y'',z'')$ . Door een rotatie over een hoek  $\psi$  rond de  $z''$ -as gaat men uiteindelijk over naar het actuele assenkruis  $(X,Y,Z)$ .

Wanneer deze drie hoeken veranderen in de tijd, krijgt men de rotatie van het voorwerp beschreven als de som van deze drie rotaties. Men moet in de praktijk de projecties ervan in het laatste assenkruis hebben. Deze projecties zijn gemakkelijk te volgen op de figuur. Het meest ingewikkelde geval is de projectie van  $\dot{\phi}$ , de rotatie rond de oorspronkelijke  $z$ -as. Het is duidelijk dat de projectie op de  $Z$ -as gegeven is door te vermenigvuldigen met  $\cos \theta$ . De projectie aan de andere zijde van de oorspronkelijke  $z$ -as, door te vermenigvuldigen met  $\sin \theta$ , valt op de  $y''$ -as en moet dan nogmaals geprojecteerd worden op de  $X$ -as en  $Y$ -as. Projectie op deze assen vraagt een vermenigvuldigen met resp.  $\sin \psi$  en  $\cos \psi$ . Men krijgt dus:

- $\dot{\phi} \vec{u}_z = \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \vec{u}_X + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \vec{u}_Y + \dot{\phi} \cos \theta \vec{u}_Z$
- $\dot{\theta} \vec{u}_{x'} = \dot{\theta} \cos \psi \vec{u}_X - \dot{\theta} \sin \psi \vec{u}_Y$

Alles samen krijgt men in het nieuwe assenkruis:

$$\vec{\omega} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \vec{u}_X + (\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \vec{u}_Y + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \vec{u}_Z$$

De verschillende snelheden hebben een fysische betekenis bij de beweging van een tol of een hemellichaam, zoals bv. onze aarde. De rotatie rond de  $Z$ -as is bij de aarde verantwoordelijk voor dag en nacht. Bij een rotatiesymmetrisch voorwerp noemt men dit de **spin** of **spilomwenteling**. Wanneer de  $Z$ -as helt t.o.v. de oorspronkelijke  $z$ -as en er is alleen een  $\dot{\phi}$ , dan beschrijft de top van de  $Z$ -as een cirkel rond de  $z$ -as. Dit noemt men de **precessie**. Een verandering van de hoek  $\theta$  zorgt voor een **nutatie** (= knikken). Deze beweging treedt normaal zeer sterk op wanneer een tol zijn snelheid verliest. Meestal is er eerst een zuivere precessie, waarbij de eigen as van de tol rond een verticale draait. Hierbij beschrijft de top van de  $Z$ -as een cirkel rond de  $z$ -as. Daarna begint de hoek met deze verticale regelmatig groter en kleiner te worden, met een steeds grotere amplitude. Dit is de nutatie. Dan beschrijft de top van de  $Z$ -as een golvende lijn rond de  $z$ -as.

### 7.3.12.2 Gyratiestraal - Traagheidsellipsoïde

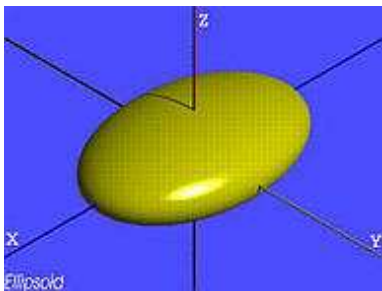
Soms wordt een traagheidsmomenten ook gespecificeerd m.b.v. een **gyratiestraal**. De gyratiestraal is de straal van de cirkel waarop alle massa zich zou moeten bevinden om het gegeven traagheidsmoment t.o.v. een as te hebben. Als de totale massa van een voorwerp  $m$  is, het traagheidsmoment volgens een bepaalde as  $I$ , dan is de gyratiestraal  $R$  bepaald door:

$$mR^2 = I$$

De traagheidstensor kan gevisualiseerd worden als een **ellipsoïde**<sup>1</sup> (fig. 7.32). De standaardvorm van de vergelijking is:

<sup>1</sup>De figuur werd ontleend aan Wiki Commons en is in het publiek domein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Figuur 7.32: Ellipsoïde

waarbij a, b en c de helft zijn van de lengte van de as volgens x, y en z. In de figuur is dit 4, 2 en 1. De traagheidstensor kan zo gevisualiseerd worden als een traagheidsellipsoïde met de vergelijking:

$$[x \ y \ z][I(3 \times 3)] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1$$

Deze ellipsoïde heeft de eigenschap dat de symmetrieassen van de ellipsoïde samenvallen met de hoofdtraagheidsassen van de traagheidstensor. Verder blijkt dat het kwadraat van de afstand van het centrum C tot een punt P op het oppervlak omgekeerd evenredig is met het traagheidsmoment volgens de richting van CP. Om dit aan te tonen wordt gesteund op het feit dat de traagheidstensor het traagheidsmoment  $I_u$  volgens een bepaalde as door de oorsprong levert als

men de eenheidsvector  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  volgens die as gebruikt voor de volgende bewerking (het bewijs volgt op het einde van dit hoofdstuk in 7.3.13.5):

$$I_u = [u_x \ u_y \ u_z][I(3 \times 3)] \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}$$

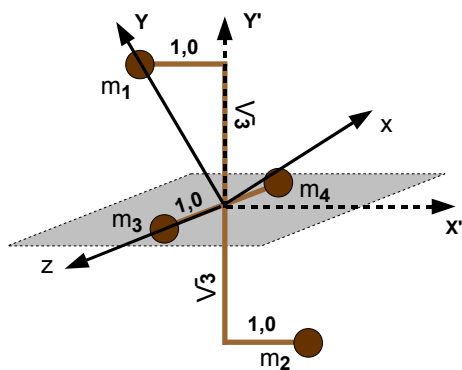
De positievector  $\vec{CP}$  van C naar P kan dan geschreven worden als het product van de lengte CP met een eenheidsvector volgens CP:  $\vec{CP} = CP \cdot \vec{u}_{CP}$ . Vult men deze vector in in de vergelijking van de traagheidsellipsoïde dan krijgt men:

$$CP^2 \cdot I_u = 1 \quad \text{of} \quad I_u = \frac{1}{CP^2}$$

Bemerk dus wel dat het grootste traagheidsmoment overeenkomt met de kortste as van de ellipsoïde. Ook zal de ellipsoïde van vorm veranderen zodra men een ander punt van het voorwerp als oorsprong neemt.

Vroeger definieerde men deze traagheidsellipsoïde door te vertrekken van deze eigenschap, nl. door ze te definiëren als een ellipsoïde zodat de afstand van het middelpunt tot een punt op het oppervlak omgekeerd evenredig is met het de vierkantswortel uit het traagheidsmoment volgens die richting.

### 7.3.13 Transformaties van de traagheidstensor en de traagheidsellipsoïde



Figuur 7.33: Het voorbeeld voor alle berekeningen

In dit deel zal getoond worden hoe de elementen van de traagheidstensor veranderen bij rotatie van het assenkruis. Hiervoor wordt beroep gedaan op het voorwerp weergegeven in de figuur. Dit voorwerp is gevormd door 4 bollen, die als puntmassa's zullen beschouwd worden. De bollen  $m_1$  en  $m_2$  liggen in een verticaal vlak, de twee andere in een horizontaal vlak. Alle bollen hebben een massa van 2 kg. Eerst zal de traagheidstensor rechtsreeks berekend worden in het xyz-assenkruis, dat een hoofdtraagheidsassenkruis is. Daarna zal deze berekend worden in een assenkruis  $x'y'z'$ , dat over  $30^\circ$  naar rechts gedraaid is t.o.v. het vorige. Tenslotte zullen de formules afgeleid worden die tonen hoe de elementen van de traagheidstensor veranderen bij een rotatie van het assenkruis en zal dit toegepast worden op het voorbeeld.

#### 7.3.13.1 Rechtstreekse berekening van de traagheidstensor

**In eerste assenkruis** De coördinaten van de 4 bollen kunnen gemakkelijk afgelezen worden van de figuur 7.33.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (0; 2; 0) \\ \vec{r}_2 &= (0; -2; 0) \\ \vec{r}_3 &= (0; 0; 1) \\ \vec{r}_4 &= (0; 0; -1)\end{aligned}$$

Hiermede kunnen de elementen van de traagheidstensor uitgerekend worden:

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) = m(4 + 4 + 1 + 1) = 20 \text{ kgm}^2 \\ I_{yy} &= \sum m_i(z_i^2 + x_i^2) = m(1 + 1) = 4 \text{ kgm}^2 \\ I_{zz} &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = m(4 + 4) = 16 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

De traagheidsproducten moeten nul zijn:

$$\begin{aligned}I_{xy} &= -\sum m x_i y_i = 0 \\ I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i = 0 \\ I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = 0\end{aligned}$$

Dit leidt tot een diagonale traagheidstensor van de vorm:

$$I = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

**In tweede assenkruis** De coördinaten van de 4 bollen worden weer afgelezen worden van de figuur.

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= (-1; \sqrt{3}; 0) \\ \vec{r}_2 &= (1; -\sqrt{3}; 0) \\ \vec{r}_3 &= (0; 0; 1) \\ \vec{r}_4 &= (0; 0; -1)\end{aligned}$$

De diagonaalelementen van de traagheidstensor worden:

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \sum m_i(y_i^2 + z_i^2) = m(3 + 3 + 1 + 1) = 2.8 = 16 \text{ kgm}^2 \\ I_{yy} &= \sum m_i(z_i^2 + x_i^2) = m(1 + 1 + 1 + 1) = 8 \text{ kgm}^2 \\ I_{zz} &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = m[(1 + 3) + (1 + 3)] = 16 \text{ kgm}^2\end{aligned}$$

De traagheidsproducten worden nu:

$$\begin{aligned}I_{xy} &= -\sum m x_i y_i = -m(-\sqrt{3} - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \text{ kgm}^2 \\ I_{xz} &= -\sum m_i x_i z_i = 0 \\ I_{yz} &= -\sum m_i y_i z_i = 0\end{aligned}$$

Dit leidt tot een traagheidstensor van de vorm:

$$I = \begin{bmatrix} 16 & 4\sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

**Invarianten** De traagheidstensor heeft een paar invarianten onder de rotatie van het assenkruis.

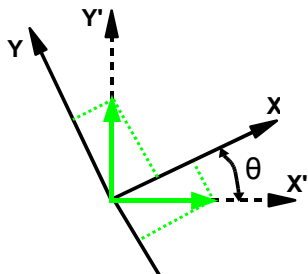
1. Het **spoor van de matrix**, d.i. de som van de elementen op de hoofdiagonaal. Bij de eerste matrix is dit  $20+4+16 = 40$ . Bij de tweede matrix is dit  $16+8+16 = 40$ .
2. De **determinantwaarde** van de matrices. Bij de eerste is dit gewoon het product van de elementen op de hoofddiagonaal:  $20 \cdot 4 \cdot 16 = 1280$ . Bij de tweede is dit  $16 \cdot 8 \cdot 16 - 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 16 = 2048 - 768 = 1280$

### 7.3.13.2 De transformatie van het assenkruis

De enige transformatie die hier zal beschouwd worden is een rotatie van het assenkruis. In het voorbeeld moeten ook alleen de xy-assen gerooteerd worden, zodat alleen een rotatie in het vlak zal behandeld worden.

Een transformatie kan altijd op twee manieren bekeken worden: als een transformatie van het assenkruis of als een transformatie van een figuur. Bij een fysisch probleem, waarbij het voorwerp een bepaalde oriëntatie heeft, bv. t.o.v. de gewichtsvector, zal men een transformatie eerder zien als een verandering van

het assenkruis. Bij een tekenprogramma echter werkt men meestal binnen een vast assenkruis verbonden aan het tekenblad en werkt men met transformaties die de figuren veranderen of verplaatsen. Een transformatie die een rotatie van een assenkruis naar rechts voorstelt, zal bij een tekenprogramma resulteren in een rotatie naar links van de figuur. Het is dus belangrijk dat men steeds hetzelfde standpunt blijft innemen bij het bespreken van transformaties. Hier wordt er gesproken over een transformatie van het assenkruis.



Figuur 7.34: Rotatie van het assenkruis

wordt gevormd door deze geprojecteerde basisvectoren te gebruiken als rijen:

$$R(-30^\circ) = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -0,5 & 0 \\ 0,5 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Men kan gemakkelijk controleren dat het product van één van de geprojecteerde basisvectoren met deze matrix leidt tot een basisvector in het nieuwe assenkruis. Bij vermenigvuldigen van een rij van de matrix met een geprojecteerde eenheidsvector als kolomvector komt overeen met een scalair product van die vector met zichzelf, wat als resultaat 1 levert, of met een andere geprojecteerde basisvector. Daar de basisvectoren loodrecht op elkaar staan is het resultaat dan 0. Men kan ook gemakkelijk controleren dat deze transformatie toegepast op de posities van  $m_1$  en  $m_2$  in het oude assenkruis de posities in het nieuwe leveren.

Bemerk dat bij de inverse rotatie, over  $+30^\circ$ , alleen de elementen van de nevendagonaal, de  $\sin\theta$ , van teken wisselen.

Elk element van de traagheidstensor is de som van producten van 2 coördinaten. Er is echter geen mogelijkheid om de traagheidstensor in zijn geheel te schrijven in termen van matrixproducten. Men moet daarom beroep doen op de formulering van een algemene term van de nieuwe traagheidstensor. Een algemene formule voor een nieuwe coördinaat na transformatie van een vector  $a$  is:

$$a'_i = \sum_j R_{ij} a_j$$

Voor het product van 2 coördinaten krijgt men:

$$a'_i b'_k = \sum_j R_{ij} a_j \cdot \sum_l R_{kl} b_l$$

Dit levert in driedimensionaal systeem 9 termen die elke bestaan uit het product van 4 getallen. Daar een product commutatief is, heeft het geen belang in welke volgorde men die getallen opschrijft. Het heeft trouwens ook geen belang in welke volgorde men de sommaties uitvoert. het resultaat zal steeds dezelfde producten van 4 getallen opleveren. Men kan daarom kortweg opschrijven:

$$a'_i b'_k = \sum_{jl} R_{ij} R_{kl} a_j b_l$$

Dit is ook de transformatieformule voor de elementen van de traagheidstensor:

$$I'_{ik} = \sum_{jl} R_{ij} R_{kl} I_{jl} \quad (\text{I})$$

Dit kan nu toegepast worden voor het transformeren van de eerste traagheidstensor in de tweede. Gelukkig zijn vele elementen van de eerste matrix 0 en ook een deel elementen van  $R$ . Het eerste element van de nieuwe tensor wordt uitgerekend met de formule:

Er zal ook regelmatig gesproken worden van het "oude" assenkruis ( $xy$ -assen) en het "nieuwe" assenkruis ( $x'y'$ -assen). Een rotatie van het assenkruis kan voorgesteld worden door een vierkante matrix, in dit geval  $2 \times 2$ . De elementen ervan kunnen op eenvoudige wijze bepaald worden door de basisvectoren van het nieuwe assenkruis te projecteren in het oude. Bemerk echter dat de rotatie van het oude assenkruis naar het nieuwe hier een rotatie over  $-30^\circ$  is. Voor de  $z$ -component verandert er niets in het voorbeeld.

Men vindt:

$$\begin{aligned} \vec{u}'_x &= \cos\theta \cdot \vec{u}_x + \sin\theta \cdot \vec{u}_y = (\sqrt{3}/2)\vec{u}_x - 0,5\vec{u}_y \\ \vec{u}'_y &= \sin\theta \cdot \vec{u}_x + \cos\theta \cdot \vec{u}_y = 0,5\vec{u}_x + (\sqrt{3}/2)\vec{u}_y \end{aligned}$$

De [matrix](#) voor de transformatie van oud naar nieuw assenkruis

$$I'_{11} = \sum_j R_{1j} (\sum_l R_{1l} I_{jl})$$

$$\begin{array}{rcc} & l=1 & l=2 & l=3 \\ j=1 & I_{11} = R_{11}(R_{11}I_{11} & +R_{12}I_{12} & +R_{13}I_{13}) \\ j=2 & & +R_{12}(R_{11}I_{21} & +R_{12}I_{22} & +R_{13}I_{23}) \\ j=3 & & +R_{13}(R_{11}I_{31} & +R_{12}I_{32} & +R_{13}I_{33}) \end{array}$$

Daar zeer veel termen 0 zijn, blijft uiteindelijk over:

$$I'_{11} = R_{11}R_{11}I_{11} + R_{12}R_{12}I_{22} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 20 + 0,5^2 \cdot 4 = 16 \text{ kgm}^2$$

Op analoge manier vindt men:

$$I'_{12} = I'_{21} = R_{11}R_{21}I_{11} + R_{12}R_{22}I_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0,5 \cdot 20 - 0,5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \text{ kgm}^2$$

$$I'_{22} = (R_{21})^2 I_{11} + (R_{22})^2 I_{22} = 0,5^2 \cdot 20 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot 4 = 8 \text{ kgm}^2$$

De overige termen blijven ongewijzigd.

Verder zal blijken dat er toch wel een manier is om dit in termen van matrixvermenigvuldiging te schrijven.

### 7.3.13.3 Het diagonaliseren van de traagheidstensor

Er werd hoger gesteld dat men de traagheidstensor altijd kan omvormen tot een diagonale matrix door een geschikte keuze van het assenkruis. Er zal nu geprobeerd worden om de tweede matrix te diagonaliseren en zo, hopelijk, de eerste terug te vinden. Dat zal echter maar gedeeltelijk lukken. Daar alleen de x- en y-coördinaten bij de transformatie betrokken zijn, zal alles behandeld worden als een tweedimensionaal probleem.

Het diagonaliseren van een matrix berust op het zoeken van de **eigenvectoren**. Eigenvectoren van een matrix zijn vectoren die door die matrix niet van richting veranderd worden, alleen van grootte. Formeel opgeschreven:  $\vec{a}$  is een eigenvector van de matrix R als  $R\vec{a} = \lambda\vec{a}$ . De coëfficiënt  $\lambda$  wordt de **eigenwaarde** van de vector genoemd. Men krijgt:

$$\begin{vmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} = 0$$

Voor een oplossing verschillend van de nulvector moet de determinant van het stelsel = 0 zijn. Dit levert een kwadratische vergelijking in  $\lambda$  en zal dus 2 oplossingen voor  $\lambda$  leveren. Dat de determinant van het stelsel 0 is, betekent echter ook dat er een onbepaaldheid zal zitten op de eigenvector. Het is echter duidelijk dat als  $\vec{a}$  een eigenvector is, ook elke vector van de vorm  $k\vec{a}$  een oplossing zal zijn en dus ook een eigenvector. Voor het voorbeeld krijgt men:

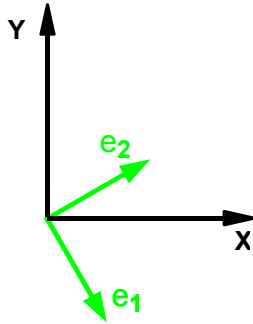
$$\begin{vmatrix} 16 - \lambda & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{of } (16 - \lambda)(8 - \lambda) - (4\sqrt{3})^2 = \lambda^2 - 24\lambda + 80 = 0$$

De oplossingen zijn  $\lambda_1 = 4$  en  $\lambda_2 = 20$  (wat verwacht werd). Hier duikt nu een eerste probleem op als men wil terugkeren naar de oorspronkelijke matrix. Men heeft geen enkele aanduiding welke eigenwaarde bij de basisvector volgens de nieuwe x-as hoort en welke bij de nieuwe y-as. Men kan en moet er alleen ervoor zorgen dat men een rechtsdraaiend assenkruis behoudt. Deze eis wordt wiskundig vertaald naar een transformatiematrix met determinantwaarde = +1.

De eerste eigenvector  $\vec{e}_1$  haalt men uit het stelsel dat men bekomt door  $\lambda_1$  te substitueren in het stelsel dat de eigenvectoren definieert:

$$\begin{array}{l} 12e_x + 4\sqrt{3}e_y = 0 \\ 4\sqrt{3}e_x + 4e_y = 0 \end{array}$$



Figuur 7.35: De eigenvectoren

Men ziet dat beide rijen afhankelijk zijn, wat een uitdrukking is van de verwachte onbepaaldheid. Men moet voor één coördinaat zelf een waarde kiezen, daarna volgt een waarde voor de andere coördinaat uit om het even welke van beide vergelijkingen. Kiest men  $e_x = 1$  dan volgt  $e_y = -\sqrt{3}$  Om deze vector als basisvector te kunnen gebruiken wordt hij genormeerd:

$$\|\vec{e}_1\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \quad \text{Hiermede wordt } e_{1x} = 1/2 \text{ en } e_{1y} = -\sqrt{3}/2$$

Op analoge manier vindt men voor de tweede eigenvector dat  $e_{2y} = 1/\sqrt{3}$  Na normeren krijgt men:  $\vec{e}_2 = (\sqrt{3}/2; 1/2)$

Men kan gemakkelijk controleren dat beide vectoren loodrecht op elkaar staan.

Hiermede kan een transformatiematrix R geconstrueerd worden:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

De determinantwaarde is +1. Als men  $\vec{e}_1$  gebruikt voor de x'-as en  $\vec{e}_2$  voor de y'-as en de huidige z-as, dan heeft men een rechtsdraaiend assenkruis. Om naar de originele matrix terug te keren moet men een rotatie over  $+30^\circ$  uitvoeren. Het element  $R_{22}$  is  $\sin\theta$ . Het blijkt dat de matrix een rotatie over  $-60^\circ$  voorstelt. De x'-as zal dus samenvallen met de vroegere -y-as en de y'-as met de x-as!

Als men de volgorde van de eigenvectoren omwisselt, bekomt men als transformatiematrix

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}$$

De determinantwaarde hiervan blijkt -1 te zijn. Dat betekent dat men de richting van één van de vectoren moet omklappen. Een rotatiematrix voor een hoek  $< 90^\circ$  heeft normaal positieve elementen op de hoofddiagonaal. Het is dus aangewezen om de onderste vector met -1 te vermenigvuldigen. Dan komt men wel terug op het eerste assenkruis.

Men kan nu deze rotatiematrix gebruiken om opnieuw de tweede tensor om te rekenen naar de eerste. Hierbij zullen de eerste 2 diagonaalelementen wel omgewisseld worden. Men bekomt:

$$I_{11} = R_{11}(R_{11}I'_{11} + R_{12}I'_{12}) + R_{12}(R_{11}I'_{21} + R_{12}I'_{22})$$

$$I_{11} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8\right) = 1 + 3 = 4$$

Op analoge manier bekomt men:  $I_{12} = I_{21} = 0$  en  $I_{22} = 20$

Het kan gebeuren dat 2 eigenwaarden gelijk zijn. Dan is er een bijkomende onbepaaldheid en moet men 2 coördinaten vrij kiezen. Dit zal bv. gebeuren bij een omwentelingsellipsoïde. Een doorsnede loodrecht op de omwentelingsas is dan een cirkel en een cirkel heeft geen voorkeursrichtingen. Elk paar orthogonale vectoren in dat vlak kan als basis dienen.

### 7.3.13.4 De traagheidsellipsoïde

Hoger werd reeds gesteld dat men de traagheidstensor kan visualiseren als een ellipsoïde door hem te gebruiken in de vergelijking:

$$\left| \begin{matrix} x & y & z \\ |I(3x3)| & & \end{matrix} \right| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} = 1$$

Men kan dit ook schrijven als een scalair product:  $\vec{r}(x, y, z) \cdot I \vec{r}(x, y, z) = 1$



Dit scalair product moet immers volgens de eerste formulering uitgewerkt worden.

Er bestaat een eenvoudige manier om dit soort formules om te zetten naar een formulering in een gedraaid assenkruis. Hiervoor moet men de oude coördinaten vervangen als functies van de nieuwe, d.i. men moet gebruik maken van  $\mathbf{x} = f(x', y', z')$ . Bij dit soort substitutie moet men dus gebruik maken van de inverse transformatie, van de transformatie van nieuw naar oud assenkruis. Met  $\vec{r}' = R^{-1}\vec{r}$  krijgt men in het nieuwe assenkruis:

$$(R^{-1}\vec{r}') \cdot I (R^{-1}\vec{r}') = 1$$

Bij een rotatiematrix is de transpose (de matrix met de rijen en kolommen omgewisseld) dezelfde als de inverse matrix. Men krijgt dus links bij het uitwerken  $(R^{-1})^T = R$ . De elementen van de oude traagheidstensor worden hier bekeken als constanten en niet als functies van de oude coördinaten. In termen van matrixproducten krijgt men dus:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ |R(3x3)| & |I(3x3)| & |R^{-1}(3x3)| \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = 1$$

Of voor de nieuwe tensor:

$$I' = R.I.R^{-1} \quad (\text{II})$$

Toegepast op de transformatie van de eerste tensor naar de tweede (om de berekeningen eenvoudig te houden) krijgt men:

$$I' = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 10\sqrt{3} & 10 \\ -2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix}$$

Men kan aantonen dat in dit speciale geval beide transformaties, (I) en (II) hetzelfde zijn. Als A en B vierkante matrices zijn, dan wordt een element van het product AB gevormd door elk element van een rij van A te vermenigvuldigen met het overeenkomstig element van een kolom van B. Of:

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Bij A loopt de index dus over de kolommen, bij B over de rijen. In de formule (I) voor de transformatie van I, hieronder hernomen, blijkt de index telkens over de kolommen van transformatiematrix te lopen. Men kan dit veranderen door één matrix te vervangen door zijn transpose:

$$C_{jk} = \sum_l I_{jl} (R^T)_{lk}$$

$$I'_{ik} = \sum_{jl} R_{ij} R_{kl} I_{jl} = \sum_j R_{ij} (\sum_l I_{jl} R_{kl}) = \sum_j R_{ij} (\sum_l I_{jl} (R^T)_{lk}) = \sum_j R_{ij} C_{jk}$$

Daar bij een rotatiematrix de transpose ook de inverse is, is de transformatie van de traagheidstensor in (I) in dit speciale geval gelijk aan de matrixvermenigvuldiging in (II)

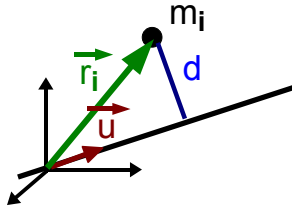
### 7.3.13.5 Traagheidsmoment volgens een willekeurige richting

In vorig deel werd gesteld dat men het traagheidsmoment volgens een willekeurige as met richting  $\vec{u}$  door het centrum van traagheidsellipsoïde kan vinden met de bewerking:

$$I_{as} = \vec{u} \cdot I \vec{u} \quad (\text{III})$$

Om dit te bewijzen moet men eerst het traagheidsmoment van een puntmassa  $m_i$  met positievector  $\vec{r}_i$  t.o.v. deze as bepalen. Dit traagheidsmoment is  $m_i d^2$  waarin  $d$  de loodrechte afstand is van de puntmassa naar de as.

Uit de figuur blijkt dat  $d$  een rechthoekszijde is van een rechthoekige driehoek. De andere rechthoekszijde wordt gevormd door de projectie van  $\vec{r}_i$  op de as. Dit kan uitgewerkt worden door een scalair product van  $\vec{r}_i$  met  $\vec{u}$ . Om met numerieke indices te kunnen werken zullen de componenten van  $\vec{r}_i$  aangeduid worden als  $r_{i,j}$ , met  $j=1,2,3$  voor de coördinaten  $x,y,z$ . Men krijgt dus:



$$d^2 = r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{u})^2 = r_i^2 - \sum_j (r_{i,j} u_j)^2 - 2r_{i,1}r_{i,2}u_1u_2 - 2r_{i,1}r_{i,3}u_1u_3 - 2r_{i,2}r_{i,3}u_2u_3$$

Er is nu nog nood aan een algemene vorm voor een element van de traagheidstensor. Dit kan m.b.v. de **Kroneckerdelta**. Dit is een functie die de waarde 0 of 1 kan aannemen volgens de volgende conventie:

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & \text{voor } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$$

Hiermede kan men schrijven (met dank aan **[gruber]**)

Figuur 7.36: Traagheidsmoment volgens een willekeurige richting

$$I_{ij} = \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - r_{k,i} r_{k,j}) \quad \text{of, voor een continue massaverdeling:}$$

$$I_{ij} = \int dm (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j) \quad (\text{met } r_1 = x, \text{ enz.})$$

Men kan dit controleren door de uitdrukking uit te schrijven voor een paar termen:

$$I_{11} = \sum_k m_k (r_k^2 - r_{k,1}^2) = \sum_k m_k (r_{k,2}^2 + r_{k,3}^2)$$

$$I_{12} = \sum_k m_k (-r_{k,1} r_{k,2})$$

Men ziet reeds duidelijk het patroon dat optreedt en inderdaad leidt tot de traagheidstensor. Als men hiermede de uitdrukking (III) wil uitwerken, dan moet men schrijven:

$$I_{as} = \sum_{ij} I_{ij} u_i u_j = \sum_{ij} \left[ \sum_k m_k (r_k^2 \delta_{ij} - r_{k,i} r_{k,j}) \right] u_i u_j$$

Als men dit uitwerkt voor één massa bekomt men:

$$\begin{aligned} & m_k [r_k^2 u_1^2 - r_{k,1}^2 u_1^2 - r_{k,1} r_{k,2} u_1 u_2 - r_{k,1} r_{k,3} u_1 u_3 \\ & - r_{k,2} r_{k,1} u_2 u_1 + r_k^2 u_2^2 - r_{k,2}^2 u_2^2 - r_{k,1} r_{k,3} u_1 u_3 \\ & - r_{k,3} r_{k,1} u_3 u_1 - \dots ] \end{aligned}$$

Hierbij leveren de termen in  $r_k^2$  uiteindelijk  $r_k^2 (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = r_k^2$ . De overige, negatieve, termen leveren duidelijk het kwadraat van het scalair product, zodat men dus inderdaad heeft:

$$I_{as} = \sum_k m_k [r_k^2 - (\vec{r}_k \cdot \vec{u})^2] = \vec{u} \cdot I \vec{u}$$

Wat moest bewezen worden.

Er werd hier vooral een matrixformulering gebruikt. Historisch gezien werd eerder met functies gewerkt. Voor het traagheidsmoment volgens een willekeurige richting werd de eenheidsvector eerst geschreven in functie van de cosinussen van de hoeken met de assen:

$$u_x = \cos \alpha \quad u_y = \cos \beta \quad u_z = \cos \gamma$$

Hiermede kan men de  $d^2$  uit de figuur 7.36 opschrijven als

$$r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{u})^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2$$

Als men de eerste term vermenigvuldigt met 1, maar onder de vorm van  $(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$ , alles met  $m_i$  vermenigvuldigt en sommeert over alle massa's, dan bekomt men het traagheidsmoment volgens de gegeven richting als een homogene kwadratische functie van de cosinussen van de hoeken:

$$J(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

Van hier was het een kleine stap naar de traagheidsellipsoïde. Ook de kinetische energie werd met deze functie berekend, met de componenten van de ogenblikkelijke rotatievector i.p.v. de cosinussen. De componenten van de ogenblikkelijke rotatievector  $\omega$  kan men schrijven als  $\omega_x = \omega \cos \alpha$ ,  $\omega_y = \omega \cos \beta$ ,  $\omega_z = \omega \cos \gamma$ . Hiermede wordt  $J(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = I_{as} \omega^2$ . Het is immers een homogene kwadratische functie. Dus:

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 I_{as} = \frac{1}{2} J(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

Met deze uitdrukking voor de kinetische energie kon men dan aan de slag om de bewegingsvergelijkingen op te stellen met de methode van Lagrange (volgend hoofdstuk 8).

**Toepassing**

Men kan dit ter controle even toepassen. In het eerste assenkruis wordt de richting van de x-as gekozen: (1; 0; 0). Het is vrij duidelijk dat dit een  $I = 20$  oplevert. In het tweede assenkruis wordt dit de richting

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (\text{of: een eenheidsvector in de richting } +30^\circ)$$

Hiermede krijgt men:

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 16 & 4\sqrt{3} & 0 \\ 4\sqrt{3} & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 10\sqrt{3} & 10 & 0 \\ 10 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 15 + 5 = 20$$

Q.E.D.

**7.3.14 Nota**

Alles wat in dit laatste deel staat over de transformatie van de traagheidstensor en de traagheidsellipsoïde, is terug te vinden in [goldstein] (zie in de Bibliografie) en ook in [gruber], maar wat meer wiskundig en zonder de uitgewerkte voorbeelden. De aandacht voor de alternatieve manier om het impulsmoment te berekenen berust op [gruber] en op eigen ervaring.



# Hoofdstuk 8

## De methode van Lagrange

### Inhoudsopgave

---

<b>8.1</b>	<b>Vergelijkingen van Lagrange van de eerste vorm</b>	<b>174</b>
<b>8.2</b>	<b>De Lagrangiaan</b>	<b>176</b>
<b>8.3</b>	<b>Speciale gevallen</b>	<b>177</b>
<b>8.4</b>	<b>Voorbeelden</b>	<b>177</b>
8.4.1	Massa aan veer	177
8.4.2	Gekoppelde slingers	178
8.4.3	Blokje in draaiende buis	180
8.4.4	Slingerende schijf	181
<b>8.5</b>	<b>Dynamisch evenwicht</b>	<b>182</b>
8.5.1	Eerste voorbeeld: slingerende schijf	183
8.5.2	Tweede voorbeeld: draaiende staaf	183

---

De methode die de wiskundige [Lagrange](#) uitwerkte voor het opstellen van de differentiaalvergelijkingen, die de beweging van een systeem beschrijven, behoort waarschijnlijk tot één van de belangrijkste bijdragen aan de fysica na de wetten van Newton. De man wordt als Fransman beschouwd, maar werd met de naam 'Lagrangia' in Turijn geboren in 1736. Daar staat dan ook een standbeeld van hem. Hij werkte zowel in Frankrijk als in Pruisen en stierf uiteindelijk in Parijs in 1813. Hij werd er begraven in het Pantheon. Hij en Euler worden beschouwd als de grootste wiskundigen van de achttiende eeuw. Zijn aanpak gaat uit van de kinetische en potentiële energie. Dit zijn scalaire functies, die vrij gemakkelijk op te schrijven zijn. Als scalaire functies zijn ze ook additief. De totale kinetische energie van een systeem is de som van de kinetische energieën van de delen. Verder gebruikt hij zogenaamde veralgemeende coördinaten. Dit kan elke parameter, elke variabele zijn waarmee de positie van een onderdeel van een systeem eenduidig kan aangegeven worden. De bewegingsvergelijkingen worden afgeleid door differentiëren, een vrij eenvoudige bewerking. Zijn aanpak bleek ook buiten de mechanica toepasbaar.

De aanpak van Lagrange bouwt verder op de ideeën van vrijheidsgraden en veralgemeende coördinaten [4.3](#), die reeds in het hoofdstuk over virtuele arbeid voorgesteld werden. Wie niet vertrouwd is met deze begrippen, wordt sterk aangeraden om de paragraaf uit virtuele arbeid eens te lezen vooraleer verder te gaan.

Even ter herhaling:

**het aantal vrijheidsgraden van een systeem is het aantal onafhankelijke parameters dat nodig is om de positie van het systeem eenduidig te bepalen, bij behoud van de bestaande verbindingen .**

**Onafhankelijk** betekent dat het mogelijk is de waarde van één parameter te veranderen zonder dat er iets verandert aan de andere. Deze parameters noemt men de **veralgemeende coördinaten**  $q_i$ .

Binnen een systeem zijn de verschillende punten dus aan beperkingen onderworpen, die men verbindingen noemt. Deze verbindingen kunnen onder verschillende vormen voorkomen. Er zijn:

- **holonome verbindingen** . De naam is ontleed aan het griekse  $\sigma\lambda\omicron\varsigma$  = geheel en  $\nu\omicron\mu\omicron\varsigma$  = regel. Dit zijn verbindingen die kunnen beschreven worden als een functie van 2 of meer coördinaten en eventueel de tijd, zodat het totaal aantal parameters om het systeem te beschrijven met 1 kan verminderd worden. Ze nemen normaal de vorm aan van een functie

$$f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_n, t) = 0$$

- **niet-holonome verbindingen** : de verbinding kan niet in de bovenstaande vorm gegoten worden, maar is b.v. te schrijven als een ongelijkheid  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 < C$  of omdat de verbanden moeten geschreven worden onder de vorm van differentiaalvergelijkingen, die samen met de bewegingsvergelijkingen moeten opgelost worden.

Men onderscheidt verder:

- **scleronome verbindingen** : verbindingen die niet veranderen in de tijd, niet expliciet functie zijn van de tijd. Van het Grieks  $\sigma\kappa\lambda\eta\rho\sigma$  = hard, niet veranderend.
- **rheonome verbindingen** : verbindingen die wel veranderen in de tijd. Van het Grieks  $\rho\epsilon\omega$  = vloeien.

## 8.1 Vergelijkingen van Lagrange van de eerste vorm

Voor wat volgt wordt ondersteld dat men werkt met **holonome verbindingen** . In de praktijk is dat meestal het geval. Het formalisme van Lagrange kan afgeleid worden uit de virtuele arbeid of via variatierekenen. Meest klassiek is de afleiding vertrekkend van virtuele arbeid, die ook hier zal gevolgd worden. Hiervoor moet de formulering echter eerst uitgebreid worden voor dynamische situaties. De wet van Newton kan geschreven worden in functie van de impuls  $p$  van een puntmassa in het  $i$ -de punt als:

$$\sum_j \vec{F}_{i,j} = \dot{\vec{p}}_i$$

waarbij het linkerlid alle krachten bevat die op die massa werken.

Wanneer men het rechterlid naar het linkerlid overbrengt, bekomt men een som die 0 moet zijn, als in de statica. Daarbij wordt de  $-\dot{\vec{p}}$  meestal gezien als een **traagheidskracht** . Men noemt dit ook het **principe van d'Alembert** . Past men hierop nu virtuele arbeid toe en sommeert men over het hele systeem, dan krijgt men:

$$\begin{aligned} \sum_i (\sum_j \vec{F}_{i,j} - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \\ (\sum \vec{F}_i - \dot{\vec{p}}) \cdot \delta \vec{r}_i &= 0 \end{aligned}$$

Er is echter een reeks krachten die geen arbeid leveren, bv. de inwendige krachten bij een star voorwerp, de ideale verbindingskrachten. De krachten die wel arbeid leveren zullen **actieve krachten** genoemd worden. De bovenstaande formule kan dus vereenvoudigd worden tot:

$$\sum_i (\sum_j \vec{F}_{i,j}^a - \dot{\vec{p}}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad . \quad (I)$$

waarbij  $F^a$  een actieve kracht voorstelt.

Men moet deze virtuele arbeid nu echter kunnen uitdrukking als functie van de veralgemeende coördinaten  $q_i$ . Dit gebeurt op basis van de transformatievergelijking:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t)$$

In tegenstelling tot de virtuele arbeid in de statica, kunnen deze transformatievergelijkingen ook expliciet de tijd bevatten. Men vindt voor de snelheid van een punt:

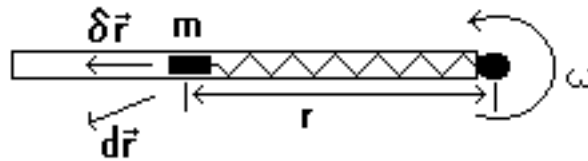
$$\vec{v}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad . \quad (II)$$

De virtuele verplaatsing kan dan geschreven worden in functie van de veralgemeende coördinaten als:

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

De grote vraag is nu waarom er hier geen rekening gehouden wordt met de tijdsafhankelijkheid. Een klassiek antwoord hierop is dat men bij virtuele arbeid het systeem beschouwt op een bepaald ogenblik,

terwijl men voor de werkelijke verplaatsing ook de verplaatsing als functie van de tijd mee rekent. Dit is feitelijk de klassieke interpretatie van partiël differentiëren. Die interpretatie gaat perfect op bij bv. een lopende golf. Op elk gegeven ogenblik heeft men dan een patroon in 2 of 3 dimensies, dat men verder kan exploreren. M.a.w. de x-coördinaat en de tijd zijn onafhankelijke veranderlijken. Hier echter zijn alle  $q_i$  uiteindelijk functie van de tijd en veranderen slechts als de tijd verandert. Op elk gegeven ogenblik heeft men één toestand, niet een patroon. Een betere hypothese lijkt me te stellen dat er alleen expliciete tijdsafhankelijkheid kan optreden bij holonome verbindingen indien er een vrijheidsgraad in het systeem is, waaraan men reeds een beweging opgelegd heeft zodat die niet meer als effectieve vrijheidsgraad beschouwd wordt. Men differentieert dan niet naar de tijd om de virtuele arbeid te berekenen omdat de tijdsafhankelijkheid die vrijheidsgraden beschrijft waarvoor reeds een oplossing bestaat.



Figuur 8.1: Verschil tussen virtuele en reële verplaatsing

Stelt men dat een systeem, zoals in de figuur 8.1, met constante snelheid rond draait. dan is er geen vrijheidsgraad van rotatie rond de as. De reële verplaatsing  $d\vec{r}$  is dan de som van de virtuele verplaatsing  $\delta\vec{r}$  en een bijdrage  $r\omega dt$  loodrecht op de gleuf. Als men zou vragen welk moment er moet uitgeoefend worden op de as om een constante hoeksnelheid te bekomen tijdens het trillen van de massa, dan zou men wel een vrijheidsgraad van rotatie rond de as moeten beschouwen. Een voorbeeld is echter geen bewijs.

De virtuele arbeid van de actieve krachten wordt zoals in de statica:

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

De  $Q_j$  die hierin voorkomt, de coëfficiënt van  $\delta q_j$  bij het berekenen van de virtuele arbeid, noemt men de **veralgemeende kracht** en beantwoordt dus aan:

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$$

Deze  $Q_j$  hoeven niet de dimensie van een kracht te hebben, maar de producten met de  $\delta q_j$  moeten de dimensie hebben van een arbeid.

Tenslotte zullen een paar ingenieuze transformaties toegepast worden op de term

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i,j} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Als men het differentiëren naar de tijd naar voor brengt, krijgt men meer dan nodig is:

$$\frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j})$$

De term die men nodig heeft wordt dus:

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[ \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) \right] - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) \quad . \quad \text{(III)}$$

Wanneer men naar de uitdrukking II voor de snelheid kijkt, dan blijkt dat

$$\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

Hiermede word de eerste term in III:

$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}) = \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial\vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}) = \sum_i \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(m_i \cdot v_i^2 / 2)) = \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j})$  met  $T$  = de kinetische energie van het systeem.

Om het differentiëren naar de tijd in de tweede term in III uit te werken, wordt dezelfde weg gebruikt als voor het berekenen van de snelheid. Men krijgt dan:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial t}$$

Wanneer men deze uitdrukking vergelijkt met de uitdrukking voor de snelheid, dan blijkt dat

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j}$$

De tweede term in III kan dus geschreven worden als

$$\sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} = \sum_i \frac{\partial}{\partial q_j} (m_i v_i^2 / 2) = \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Alles invullen in I

$$\sum_j \left[ \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) - Q_j \right] \delta q_j = 0$$

Daar de  $q_j$  onafhankelijk zijn van elkaar, moet de coëfficiënt van elke  $\delta q_j$  gelijk zijn aan nul. Men krijgt dus een stelsel van vergelijkingen van de vorm:

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] - Q_j = 0$$

Deze vorm wordt soms de **vergelijkingen van Lagrange van de eerste vorm** genoemd. Het stelsel bevat zoveel vergelijkingen als er vrijheidsgraden zijn.

Naar analogie met de snelheid  $v$  als afgeleide van de positie naar de tijd, worden de  $\dot{q}_j$  **veralgemeende snelheden** genoemd.

## 8.2 De Lagrangiaan

Wanneer de inwerkende krachten afleidbaar zijn van een potentiële energie  $V$  (6.4.3), dan geldt dat de virtuele arbeid kan geschreven worden in functie van de veralgemeende coördinaten als:

$$\delta A = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i$$

M.a.w. de veralgemeende kracht die hierbij hoort is

$$Q_j = \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

Daar de potentiële energie normaal alleen afhangt van de positie en niet van de snelheid, kan de vorige formule van de vergelijkingen van Lagrange dan ook geschreven worden als:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_j} = 0 \text{ voor elke } q_j$$

Men voert nu een grootheid in die men de **Lagrangiaan  $L$**  noemt:  $L = T - V$ . Hiermede kan de vorige vergelijking eenvoudiger geschreven worden als:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \text{ voor elke } q_j$$

Dit wordt soms de **tweede vorm van de vergelijkingen van Lagrange** genoemd.

Als er nog niet-potentiaalkrachten spelen, dan kan men die natuurlijk nog altijd in het rechterlid houden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j \text{ voor elke } q_j$$

Dit wordt soms de **derde vorm van de vergelijkingen van Lagrange** genoemd.

De uitdrukking

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$



wordt ook wel een **veralgemeende impuls** genoemd.

Alhoewel men bij bovenstaande afleiding ondersteld heeft dat de potentiaalfunctie enkel afhangt van de veralgemeende coördinaten  $q_j$  en niet van de veralgemeende snelheden, kan het formalisme ook gebruikt worden bij potentiaalfuncties waarvoor geldt:

$$Q_j = \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

Dit soort functies komt o.a. voor bij de studie van elektrische velden. De potentiaalfunctie  $V$  wordt dan een veralgemeende potentiaal genoemd.

**Nota :** de vergelijkingen van Lagrange kunnen ook via [variatierekenen](#) afgeleid worden. Waarschijnlijk is dit zelfs de manier waarop Lagrange zelf ze afgeleid heeft. Zie hiervoor bv. [\[goldstein\]](#).

## 8.3 Speciale gevallen

Wanneer de Lagrangiaan een bepaalde  $q_j$  **niet** bevat, dan herleidt de tweede vorm zich tot:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

waaruit dan weer ogenblikkelijk volgt dat de bijhorende veralgemeende impuls constant is:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = C$$

Men noemt de veralgemeende coördinaat  $q_j$  een **cyclische coördinaat**. (Er is echter geen volledige eensgezindheid over de juiste definitie van deze term.)

De aanwezigheid van cyclische coördinaten wijst op sommige constanten van de beweging. Als de  $q_j$  een verplaatsing voorstelt, dan zal het probleem een behoud van impuls kennen volgens die richting. Men kan ook zeggen dat een verplaatsing van het systeem in die richting geen invloed heeft op de oplossing. Wanneer de  $q_j$  een rotatie voorstelt, dan zal er een behoud van impulsmoment gelden voor het systeem. Een rotatie van het systeem verandert dan niets aan de probleemstelling.

## 8.4 Voorbeelden

### 8.4.1 Massa aan veer

Als eerste voorbeeld wordt een massa slingerend aan een veer beschouwd. er zijn 2 vrijheidsgraden: een translatie volgens de richting van de veer (veralgemeende coördinaat  $r$ ) en een roteren rond het bevestigingspunt (veralgemeende coördinaat  $\theta$ ). De veer heeft een veerconstante  $k$  en rustlengte  $l_0$ . De snelheid van de massa kan eenvoudig beschreven worden in termen van poolcoördinaten. Men krijgt:

$$T = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2$$

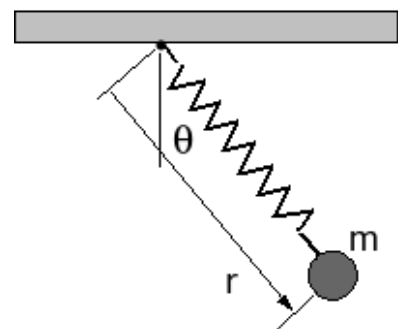
$$V = k(r - l_0)^2/2 - mgr\cos\theta$$

$$L = T - V = m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)/2 - k(r - l_0)^2/2 + mgr\cos\theta$$

Voor  $r$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r}$$



Figuur 8.2: Massa slingerend aan veer

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - l_0) + mg \cos \theta$$

De eerste vergelijking wordt dus:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - l_0) - mg \cos \theta = 0$$

Voor  $\theta$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}mr^2\dot{\theta} = mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta}$$

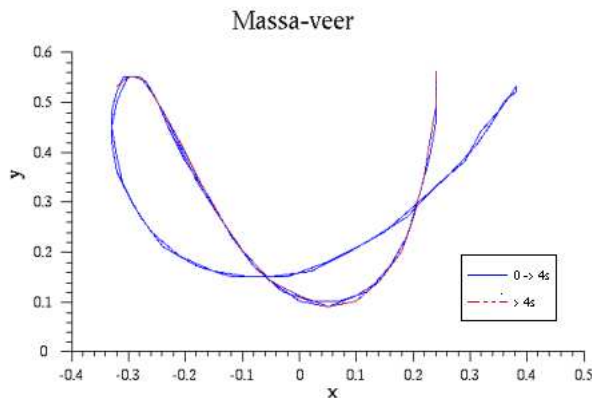
$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta$$

De tweede vergelijking wordt dan:

$$mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} + mgr \sin \theta = 0$$

Er kan een factor  $mr$  weggedeeld worden:

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + g \sin \theta = 0$$



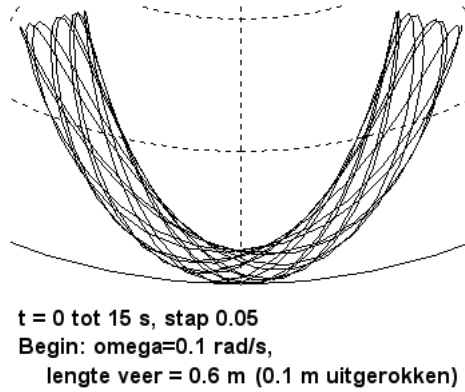
Figuur 8.3: Baan van massa slingerend aan veer

Het eerste wat echter opvalt is dat een eenvoudig systeem reeds aanleiding geeft tot ingewikkelde differentiaalvergelijkingen, waarvoor geen oplossing bestaat onder de vorm van een functie voor  $r$  en  $\theta$ . De enige mogelijkheid om te weten wat deze vergelijkingen voorstellen is numerieke simulatie. In de afbeelding hiernaast vindt men hiervan een voorbeeld. Er werd uitgegaan van een massa van 0,2 kg aan een veer met rustlengte 0,5 m. De massa werd losgelaten uit rust vanuit een hoek van 0,5 radialen (iets meer dan  $28^\circ$ ) en vanuit de rustlengte van de veer. Voor de berekening van de  $y$ -coördinaten werd de bevestiging van de veer in het punt  $(0, 1)$  geplaatst zodat  $y = 1 - r \cdot \cos \theta$ . Het vertrekpunt bevindt zich juist boven het kadertje met de legende aan de binnenste lijn.

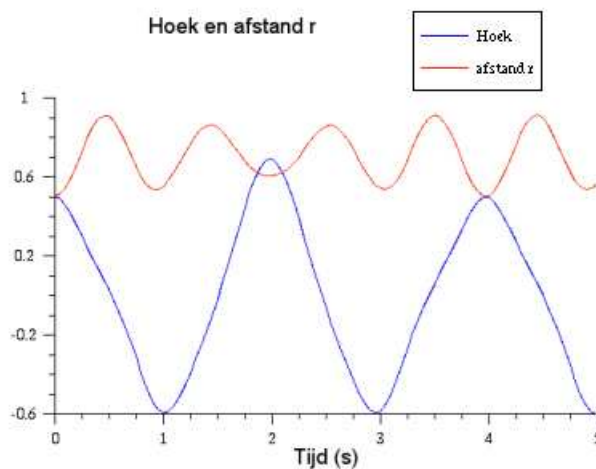
Daar er behoud van energie geldt, moet het systeem regelmatig door zijn beginpositie passeren. Hier gebeurt dat reeds na 4 s. Daar de stap voor de simulatie wat aan de grote kant was, vallen de wegen niet volledig samen. Dit heeft het voordeel dat men duidelijker ziet waar er 2x gepasseerd werd. Alleen in de buurt van het vertrekpunt vallen de 3 banen perfect samen. Na 4 s herhaalt het patroon zich. Die baan werd in rode stippellijn getekend. Dit steeds terugkeren van hetzelfde patroon wordt ook door andere simulatiesoftware getoond, maar niet door alle applets die men op internet kan vinden. Als de beginsituatie anders gekozen wordt, met bv. een beginsnelheid en een beginspanning in de veer, dan wordt de beweging complexer en duurt het langer vooraleer het systeem terug door de beginpositie passeert. Een voorbeeld hiervan is in de onderste grafiek weergegeven. De herhalingsperiode van de beweging was hier 6 s.

### 8.4.2 Gekoppelde slingers

Dit systeem van massa en veer kan in feite op 2 manieren trillen of slingeren. Als men de massa los laat met de veer verticaal, dan krijgt men een verticaal trillen van de massa. Als de veer een staaf zou



Figuur 8.4: Baan van massa slingerend aan veer

Figuur 8.5:  $r$  en hoek van massa slingerend aan veer

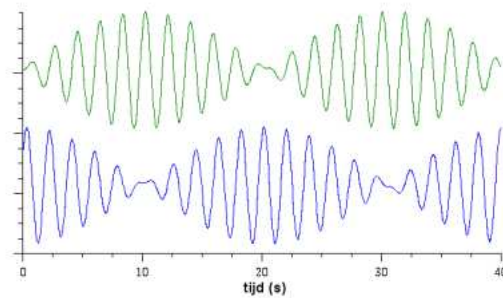
zijn, dan zou men de massa zijdelings kunnen laten slingeren. Als men de baan van de massa bekijkt in de simulatie hierboven, dan blijkt dat het systeem afwisselend de voorkeur geeft aan één van beide bewegingen. Er is eerst een diep uitrekken van de veer met een kleine zijdelingse verplaatsing en daarna een breed zijdelings slingeren met een kleinere uitrekking van de veer, waarna men opnieuw via een diepe uitrekking terugkeert naar de beginpositie. Dit gedrag is nog duidelijker als men  $r$  en  $\theta$  uitzet in functie van de tijd. Men ziet duidelijk dat er op  $t = 2$  s een grotere uitwijking is ten koste van een kleinere uitrekking van de veer. Dit gedrag staat bekend als het fenomeen van de gekoppelde slingers.

Dit fenomeen kan zeer uitgesproken zijn als de koppeling tussen de twee bewegingsvormen eerder zwak is en beide bewegingen dezelfde resonantiefrequentie hebben. De eenvoudige opstelling van de foto laat toe om dit op zeer duidelijke manier te tonen. Als men één van de twee (lege) bierflesjes doet slingeren (in een vlak loodrecht op het horizontale touw), dan zal het horizontale touw lichtjes meeschommelen met dat flesje. Hierdoor wordt ook het tweede flesje in beweging gebracht en gaat steeds harder schommelen. Daar er geen energie toegevoerd wordt aan het systeem, gaat dit ten koste van het slingeren van het eerste flesje, dat dus vertraagt. Men zou nu verwachten dat het systeem naar een toestand zal gaan waarbij beide flesjes even hard slingeren. Niets blijkt minder waar. Het tweede flesje gaat steeds harder schommelen tot het eerste flesje volledig stil valt. Daarna begint het fenomeen in omgekeerde richting. Men krijgt dus een slingeringspatroon als in de grafiek hieronder. Met de eenvoudige opstelling van de foto wisselt het maximaal slingeren minstens vier maal tussen beide flesjes.

Zeer bekend in deze context is de [slinger van Willberforce](#), die een verticale slinger koppelt aan een roterende slinger. Tot zover deze kleine uitweiding over het merkwaardige gedrag van gekoppelde trillingen.



Figuur 8.6: Praktische uitvoering



Figuur 8.7: Grafiek van gekoppelde slingers

### 8.4.3 Blokje in draaiende buis

Als tweede voorbeeld wordt een de beweging van een blokje in een draaiende buis bestudeerd. Gegeven is een cirkelvormige buis, die opgesteld in in een verticaal vlak en draait rond een diagonale verticale as. De buis heeft een straal  $r$  en traagheidsmoment  $I$  t.o.v. de as en wordt in rotatie gehouden door een constant moment  $M$ . In de buis kan een blokje met massa  $m$  op en neer rollen. Men vraagt de bewegingsvergelijkingen op te stellen.

De snelheid van het blokje bestaat uit een sleepsnelheid en een relatieve snelheid 5.3.1.1. Daar beide loodrecht op elkaar staan wordt de uitdrukking voor de kinetische energie van het blokje eenvoudig:

$$E_k(\text{kogel}) = \frac{m}{2}(v_s^2 + v_r^2) = \frac{m}{2}[(r \sin \theta \cdot \dot{\varphi})^2 + (r\dot{\theta})^2] = \frac{mr^2}{2}(\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2)$$

De totale kinetische energie wordt dan:

$$E_k = T = \frac{mr^2}{2}(\sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}$$

Er is alleen veranderende potentiële energie voor het blokje:

$$E_{pot} = V = -mgr \cos \theta$$

De lagrangiaan wordt dus:

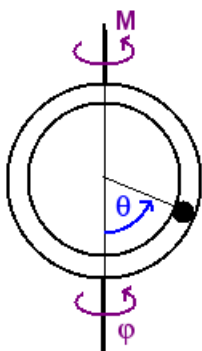
$$L = T - V = \frac{mr^2}{2}(\sin^2 \varphi + \dot{\theta}^2) + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mgr \cos \theta$$

Voor de vergelijking in  $\theta$  krijgt men:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mr^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgr \sin \theta + mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

De eerste vergelijking wordt hiermede



Figuur 8.8: Kogel in roterende buis

$$mr^2(\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2) + mgr \sin\theta = 0$$

Voor de vergelijking in  $\varphi$

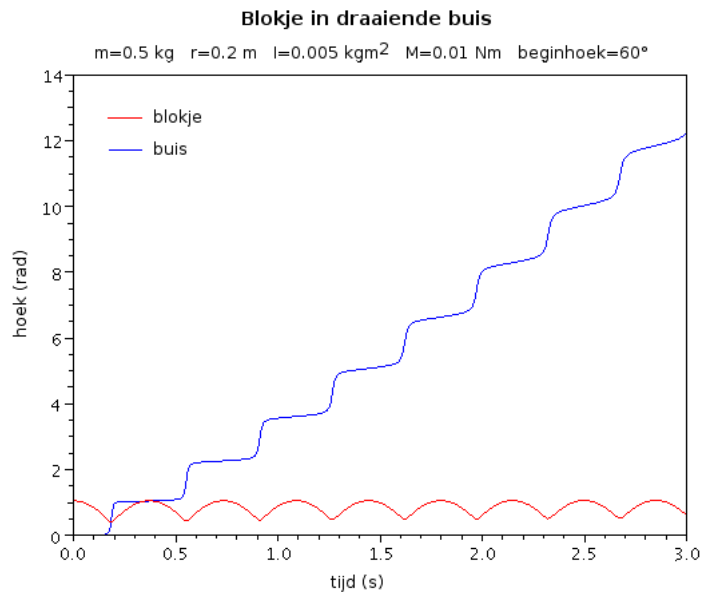
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} + I \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mr^2 (2 \sin\theta \cos\theta \dot{\varphi} \dot{\theta} + \sin^2 \theta \ddot{\varphi}) + I \ddot{\varphi} = M$$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ , maar  $\varphi$  is geen cyclische coördinaat omdat er een rechterlid is. Zonder het uitwendig moment  $M$  zou  $\varphi$  wel cyclisch zijn als teken van behoud van impulsmoment t.o.v. de as.

De tweede vergelijking wordt dan:

$$(mr^2 \sin^2 \theta + I) \ddot{\varphi} + 2mr^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = M$$



Figuur 8.9: Beweging van blokje in draaiende buis

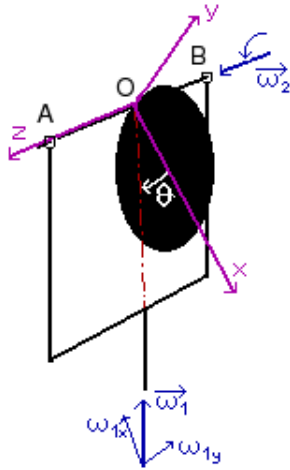
Men herkent in de term  $2mr^2 \sin\theta \cos\theta \dot{\theta} \dot{\varphi}$  het moment t.o.v. de as van de massa van het blokje x de Coriolisversnelling en in de term  $mr^2 \sin^2 \theta \ddot{\varphi}$  het moment t.o.v. de as van de massa het blokje x de tangentiële versnelling. De Coriolisversnelling 5.3.2.3 is hier via een totaal andere weg tevoorschijngekomen dan bij de behandeling van de versnellingen.

**Nota** : indien men i.p.v. het blokje een kogel zou nemen die in de buis rolt, dan zou er in de kinetische energie een term voor de rotatie-energie moeten bijkomen. Voor een massieve bol is het traagheidsmoment t.o.v. een diagonaal  $2mr^2/5$ . Dit zou een term leveren in de kinetische energie van  $mv_r^2/5$ . Hiermede wordt de uitdrukking voor de kinetische energie iets ingewikkelder en minder elegant, zonder dat er aan het inzicht iets wordt toegevoegd.

#### 8.4.4 Slingerende schijf

Bij de behandeling van de algemene rotatie werd als tweede voorbeeld 7.3.10 een slingerende schijf behandeld. De figuur wordt hier hernomen. Er wordt ondersteld dat het systeem met een constante hoeksnelheid  $\omega_1$  rond zijn verticale as draait. Er werd daar gezegd dat, als men alleen geïnteresseerd is in de vergelijking die het slingeren van de schijf beheerst, men deze veel sneller zou kunnen vinden met de methode van Lagrange. Dit wordt hier nu uitgewerkt.

De enige vrijheidsgraad van het systeem is het slingeren rond de horizontale as. Voor de methode van Lagrange moet men  $\omega_1$  vervangen door  $\dot{\theta}$ .



Figuur 8.10: Schijf slingerend in roterend systeem

De ogenblikkelijke rotatievector wordt dan:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \dot{\theta} \vec{k} = (-\cos \theta \cdot \omega_1) \vec{i} + (\sin \theta \cdot \omega_1) \vec{j} + (\dot{\theta}) \vec{k}$$

Daar er met een hoofdtraagheidsassenkruis gewerkt wordt, is de kinetische energie gegeven als:

$$\begin{aligned} E_{kin} = T &= \frac{1}{2} (I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2) \\ &= \frac{1}{2} (I_{xx} \cos^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{yy} \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{zz} \dot{\theta}^2) \end{aligned}$$

Voor de potentiële energie krijgt men:

$$V = -mgr \cos \theta$$

En tenslotte voor de Lagrangiaan:

$$L = T - V = \frac{1}{2} (I_{xx} \cos^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{yy} \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{zz} \dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$$

De afgeleiden:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_{zz} \dot{\theta} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_{zz} \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -I_{xx} \omega_1^2 \cos \theta \sin \theta + I_{yy} \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta - mgr \sin \theta$$

De vergelijking wordt dan:

$$I_{zz} \ddot{\theta} + \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta (I_{xx} - I_{yy}) + mgr \sin \theta = 0$$

De traagheidsmomenten hebben volgende volgende waarden:

$$I_{xx} = mr^2/4 \text{ (uit de tabellen)}$$

$$I_{yy} = mr^2/4 + mr^2 = 5mr^2/4 \text{ (als vorige + Steiner)}$$

$$I_{zz} = mr^2/2 + mr^2 = 3mr^2/2 \text{ (tabel + Steiner)}$$

Hiermede vereenvoudigt de vergelijking zich tot:

$$\frac{3mr^2}{2} \ddot{\theta} - mr^2 \omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = 0$$

of nog:

$$\ddot{\theta} - \frac{2 \sin \theta}{3} (\omega_1^2 \cos \theta - \frac{g}{r}) = 0$$

Dit is ook precies de momentenvergelijking die vroeger gevonden werd. Natuurlijk heeft men hier geen verdere informatie over de reactiekrachten in de verschillende steunpunten.

## 8.5 Dynamisch evenwicht

Het is weinig gebruikelijk, maar de vergelijkingen van Lagrange kunnen ook perfect gebruikt worden voor het bepalen van het dynamisch evenwicht in meer complexe situaties. Met “dynamisch evenwicht” wordt bedoeld dat er een evenwichtstoestand optreedt in aanwezigheid van versnellingen. Een eenvoudig voorbeeld zijn de zetels van een draaimolen die onder een bepaalde hoek gaan hangen als de molen draait. Zoals de klassieke statica kan beschouwd worden als een toepassing van de wet van Newton, maar met versnelling 0, en van de rotatiewetten, maar met hoekversnelling 0, zo kan men ook de vergelijkingen van Lagrange gebruiken voor het zoeken van een positie waarbij een veralgemeende coördinaat een constante waarde aanneemt. Deze veralgemeende coördinaat wordt in het vervolg  $q_k$  genoemd. Men zoekt dan naar een positie waarbij

$$\dot{q}_k = \ddot{q}_k = 0$$

Het is duidelijk dat men best zal vermijden termen te berekenen die toch 0 worden. De termen in de tweede afgeleide van  $q_k$  ontstaan uit de eerste term van de Lagrange-vergelijkingen, waar er gedifferentieerd wordt naar de tijd van termen in  $q_k$ -punt, de eerste afgeleide van  $q_k$ . Als men het geval van een potentiaal die functie is van de veralgemeende snelheid  $q_k$ -punt uitsluit, dan ontstaat de term in de tweede afgeleide

van  $q_k$ ,  $q_k$ -dubbel, door het differentiëren van de kinetische energie. Als dit een zuivere kwadratische (of hogere) functie is van de veralgemeende snelheid  $q_k$ -punt, dan zal elke term die volgt uit het differentiëren naar de tijd een factor in  $q_k$ -punt of  $q_k$ -dubbel bevatten. Als men deze beide later toch nul moet stellen, moet men deze eerste term dus nooit berekenen. De voorwaarde, dat de kinetische energie een zuivere kwadratische functie in  $q_k$ -punt zou zijn, is dat **de parameterkromme voor  $q_k$  loodrecht staat op de andere parameterkrommen**. Dit is een voorwaarde die vrij eenvoudig te controleren is. Men kan zich dus beperken tot de vergelijking:

$$-\frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

### 8.5.1 Eerste voorbeeld: slingerende schijf

Als eerste toepassing wordt teruggekeerd naar het voorbeeld van de slingerende schijf. Uit de bewegingsvergelijking is het duidelijk dat de evenwichtsstand gegeven is door

$$-mr^2\omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = 0$$

Bij de behandeling in het hoofdstuk over de algemene rotatie 7.3.10 wordt een uitvoerige bespreking gegeven van deze vergelijking. Nu moet enkel aangetoond worden dat die hier op een eenvoudige manier kan bekomen worden als:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad .(\text{als er geen rechterlid is, heeft het minteken geen belang})$$

Als men hoger gaat kijken dan vindt men hiervoor inderdaad:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = (I_{xx} - I_{yy})\omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = -mr^2\omega_1^2 \sin \theta \cos \theta + mgr \sin \theta = 0$$

wat precies is wat er moest bekomen worden.

Men kan in feite nog een kleine verdere vereenvoudiging invoeren bij het berekenen van de kinetische energie. Als er in de algemene vorm ervan alleen een kwadratische term in  $q_k$ -punt kan voorkomen en die later toch gelijk 0 zal gesteld worden, dan moet men die feitelijk niet opnemen in de kinetische energie. Men kan dus **de kinetische energie opschrijven zoals die zal zijn op het ogenblik van het dynamisch evenwicht**.

Voor het bovenstaande voorbeeld was de kinetische energie:

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}(I_{xx} \cos^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{yy} \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + I_{zz} \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{mr^2}{2} \left( \frac{1}{4} \cos^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{5}{4} \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right) \\ &= \frac{mr^2}{2} \left( \frac{\omega_1^2}{4} + \sin^2 \theta \cdot \omega_1^2 + \frac{3}{2} \dot{\theta}^2 \right) \end{aligned}$$

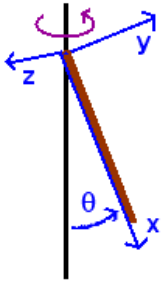
Het is duidelijk dat de eerste term van bovenstaande vergelijking ook bekomen wordt als men de term in  $\theta$ -punt weg laat uit de uitdrukking voor  $E_{kin}$

### 8.5.2 Tweede voorbeeld: draaiende staaf

Als tweede voorbeeld wordt een staaf met lengte  $l$  beschouwd, die scharnierend bevestigd is aan een verticale as, die met constante hoeksnelheid  $\omega$  rond draait.

Met de klassieke benadering dat het traagheidsmoment in de richting van de staaf verwaarloosbaar is, heeft men dus alleen traagheidsmomenten volgens de richtingen loodrecht op de staaf, hier de  $y$ - en  $z$ -as. De totale ogenblikkelijke rotatievector wordt:

$$\vec{\omega}_{tot} = (-\omega \cos \theta, \omega \sin \theta, \dot{\theta})$$



Figuur 8.11: Staaf roterend rond verticale as

De kinetische energie wordt, zonder de term in  $\theta$ -punt:

$$E_{kin} = \frac{I_{yy}\omega^2 \sin^2 \theta}{2} = \frac{ml^2\omega^2 \sin^2 \theta}{6}$$

De potentiële energie wordt:

$$V = -\frac{mgl \cos \theta}{2}$$

$$T - V = \frac{ml^2\omega^2 \sin^2 \theta}{6} + \frac{mgl \cos \theta}{2}$$

$$\frac{\partial(T - V)}{\partial \theta} = \frac{ml^2}{3}\omega^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{mgl \sin \theta}{2} = 0$$

Indien de staaf losgelaten wordt in een begintoestand met  $\theta$  gelijk aan 0, dan blijft ze in die toestand. Voor  $\theta$  verschillend van 0 leidt dit tot de oplossing:

$$\cos \theta = \frac{3g}{2l\omega^2}$$

met de bijkomende voorwaarde dat het rechterlid  $\leq 1$  moet zijn, anders gaat men naar een eindtoestand met  $\theta = 0$ .

In termen van traagheidskrachten kan men de eindtoestand zien als een momentenevenwicht t.o.v. het scharnier van het gewicht en van een middelpuntvliedende kracht die aangrijpt op  $2/3$  van de lengte van de staaf, maar een grootte heeft die overeenkomt met de volledige massa halfweg de staaf.

$$\left(m \frac{l}{2} \sin \theta \cdot \omega^2\right) \left(\frac{2l}{3} \cos \theta\right) = (mg) \left(\frac{l}{2} \sin \theta\right)$$

Dit kan gemakkelijk begrepen worden als men bedenkt dat elk deeltje van de staaf een cirkel beschrijft, die groter wordt naarmate dit deeltje verder van het scharnier af ligt. De straal van die cirkel is immers  $x \cdot \sin \theta$  met  $x$  de afstand van het scharnier tot het deeltje. De bijhorende middelpuntvliedende krachten vormen dus een driehoekig krachtveld. De totale oppervlakte van een driehoek is  $(\text{basis} \times \text{hoogte})/2$ , maar het zwaartepunt ligt op  $2/3$  van de top (of  $1/3$  van de basis). Dit wordt breder uitgewerkt in het hoofdstuk over traagheidskrachten (10.2)



# Hoofdstuk 9

## Wrijving

### Inhoudsopgave

---

<b>9.1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>185</b>
<b>9.2</b>	<b>Slepende wrijving</b>	<b>186</b>
9.2.1	Voorbeeld 1: blok op hellend vlak	187
9.2.2	Voorbeeld 2	188
9.2.3	Voorbeeld 3: ladder tegen muur	190
9.2.4	Voorbeeld 4: lijmkleem	191
<b>9.3</b>	<b>Kantelen</b>	<b>193</b>
<b>9.4</b>	<b>Rollen met slippen</b>	<b>194</b>
<b>9.5</b>	<b>Wrijving over een gebogen oppervlak</b>	<b>196</b>
<b>9.6</b>	<b>Rollende wrijving</b>	<b>197</b>
<b>9.7</b>	<b>Viskeuze wrijving</b>	<b>198</b>

---

### 9.1 Inleiding

Men kan hier op aarde bijna geen enkele beweging uitvoeren zonder dat er wrijving bij betrokken is. De formulering van de eerste wet van Newton, die zegt dat een voorwerp met een constante snelheid zal blijven bewegen als er geen enkele kracht op werkt, is daarom helemaal niet evident. Hij onderstelt immers dat men de wrijving onderkent als een kracht die de beweging tegenwerkt. De wet is dan ook eerst geformuleerd als conclusie uit de studie van de hemellichamen, die geen last hebben van wrijving. Hier op aarde is de ervaring eerder dat elke beweging waarop geen kracht werkt om die beweging in stand te houden, de neiging heeft om uit te doven.

Men kan verschillende soorten wrijving onderscheiden:

1. de **droge wrijving** of **slepende wrijving**, d.i. de wrijving tussen twee voorwerpen die tegen elkaar drukken en zich ten opzicht van elkaar verplaatsen.
2. de **rollende wrijving**. Om b.v. een spoorwegwagon in beweging te brengen op een horizontaal spoor, blijkt een kracht nodig te zijn die evenredig is met het gewicht van de wagon. Het mechanisme dat hiervoor verantwoordelijk is noemt men rollende wrijving. Het heeft echter niets te maken met de droge wrijving.
3. de **viskeuze wrijving** bij beweging van een voorwerp **in een fluïdum**, vloeistof of gas. De studie hiervan behoort meer tot de hydrodynamica.

Hier zal op de eerste plaats de droge wrijving besproken worden. Men moet een onderscheid maken tussen de kracht waarmee de twee contactoppervlakken tegen elkaar gedrukt worden en de eigenlijke wrijvingskracht. De eerste kracht staat loodrecht op het contactoppervlak en noemt men de **normaalkracht**. Symbool: meestal  $N$ . De tweede ligt in het contactoppervlak. Symbool:  **$W$** .

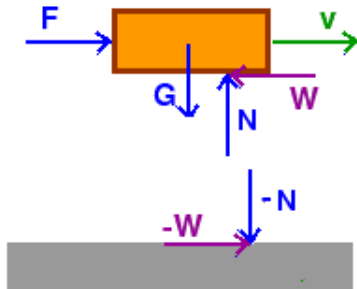
Men kan i.v.m. met de wrijving een aantal wetten formuleren. Deze gelden echter maar bij vrij harde voorwerpen (het ene voorwerp mag het oppervlak van het andere niet indeuken) en bij lage snelheden. Wanneer men op een blok, dat in rust ligt op een horizontaal vlak, een geleidelijk groeiende horizontale kracht laat werken, dan stelt men vast dat het blok gedurende een eerste fase in rust blijft om tenslotte, bij een kritische waarde van de horizontale kracht, in beweging te komen. Dit onderstelt dat de wrijvingskracht in het begin steeds gelijk blijft met de horizontale kracht, m.a.w. groeit met die horizontale kracht. Bij het overschrijden van de kritische waarde echter groeit de wrijvingskracht niet meer mee, is er een netto kracht en komt het voorwerp in beweging.

## 9.2 Slepende wrijving

De verhouding tussen de normale kracht en de wrijvingskracht noemt men de **wrijvingscoëfficiënt**, symbool:  $f$ . Deze verhouding past zich dus aan tot er een maximale waarde bereikt is. Er zijn twee manieren om het onderscheid te maken tussen de veranderlijke wrijvingscoëfficiënt in de eerste fase en de constante wrijvingscoëfficiënt tijdens de beweging:

1. Men noemt wrijvingscoëfficiënt de verhouding tussen normale kracht en wrijvingskracht zoals die gedurende de eerste fase optreedt. De constante waarde die optreedt tijdens een beweging noemt men dan de **maximale wrijvingscoëfficiënt**, symbool:  $f_{\max}$ .
2. Men noemt wrijvingscoëfficiënt de maximale waarde die de verhouding tussen normale kracht en wrijvingskracht kan aannemen. De verhouding tijdens de eerste fase heet dan de **effectieve wrijvingscoëfficiënt**, symbool:  $f_{\text{eff}}$ . Hier zal deze laatste definitie worden gevolgd.

Als verhouding tussen twee krachten is de wrijvingscoëfficiënt  $f$  een dimensieloze grootte.



Figuur 9.1: Blok met wrijving

In sommige omstandigheden is er een kleinere kracht nodig om het blok in beweging te houden dan om het in beweging te krijgen. Men maakt dan een onderscheid tussen de **statische wrijvingscoëfficiënt** en de **dynamische wrijvingscoëfficiënt**. Deze laatste is dan iets kleiner dan de eerste.

De wrijvingskracht is altijd tegengesteld aan de beweging of aan de zin waarin men het voorwerp probeert te doen bewegen. Het is dus een beetje een kameleonkracht, die zich aanpast aan de omstandigheden.

Men kan normale kracht en wrijving samenstellen tot één kracht die men de **totale reactie** noemt. Deze totale reactie  $R$  maakt een hoek  $\varphi$  met de normale kracht die de **wrijvingshoek** heet. Het is duidelijk dat

$$\varphi = \tan f = \tan(W/N)$$

Vele problemen van wrijving kunnen op een elegante manier grafisch opgelost worden als men met deze totale reactie werkt.

I.v.m. de wrijving kunnen een drietal wetten geformuleerd worden.

1. De wrijvingskracht is evenredig met de normale kracht
2. De wrijvingskracht is niet afhankelijk van de grootte van het contactoppervlak.
3. De wrijvingskracht is afhankelijk van de aard van de contactoppervlakken.
4. Bij kleine snelheden is de wrijvingskracht onafhankelijk van de snelheid.

De tweede wet is natuurlijk wel eigenaardig, maar is experimenteel vastgesteld. De verklaring zoekt men in het feit dat, op microscopische schaal, er in feite zeer weinig contacten zijn tussen de oppervlakken. Op microscopische schaal zien de meeste oppervlakken er vrij ruw uit, eerder als grof schuurpapier. Als

men bij zelfde normale kracht het (macroscopisch) contactoppervlak verkleint, dan komt er een grotere kracht per vierkante centimeter, een grotere druk op de oppervlakken. Hierbij zal het microscopische contactoppervlak vergroten en zal daardoor de wrijvingskracht toenemen.

De toestand van de contactoppervlakken heeft natuurlijk een grote invloed op de wrijvingscoëfficiënt. Wat men in de literatuur vindt moet men dan ook als een eerste benadering beschouwen. Uitgebreide tabellen met wrijvingscoëfficiënten kan men b.v. vinden op [http://www.roymech.co.uk/Useful\\_Tables/Tribology/co\\_of\\_frict.htm#coef](http://www.roymech.co.uk/Useful_Tables/Tribology/co_of_frict.htm#coef).

Een paar waarden:

materialen	f
Staal op staal	0,4 - 0,8
Koper op koper	0,7 - 1,2
Eik op eik	0,3- 0,6
Hout op metaal	0,2 - 0,5
Hout op hout	0,2 - 0,6

Om de wrijving te verminderen worden smeermiddelen gebruikt. Dan vermindert niet alleen de wrijving, maar het gedrag van de resterende wrijving is ook anders dan bij de droge wrijving. Er zal meer invloed zijn van de snelheid. Meestal geldt: hoe hoger de snelheid, hoe lager de wrijving. Wanneer de viscositeit van de smeermiddelen sterk verandert met de temperatuur, kan ook de temperatuur een grote invloed hebben.

Bij problemen met wrijvingskrachten moet men zich altijd de vraag stellen of de wrijvingskracht maximaal is of niet. De wrijvingskracht zal maximaal zijn als de voorwerpen langs elkaar bewegen of op het punt staan te gaan bewegen. Als de wrijvingskracht niet maximaal is, dan heeft men een  $f_{\text{eff}}$  die zeker een onbekende is van het probleem.

### 9.2.1 Voorbeeld 1: blok op hellend vlak

Als eerste voorbeeld wordt een blok op een hellend vlak beschouwd. Het blok heeft een gewicht  $G$ , de hoek van de helling is  $\alpha$  en de wrijvingscoëfficiënt is  $f$ . Gevraagd wordt welke kracht  $F$ , parallel met de helling, er nodig is om te beletten dat het blok naar beneden schuift.

#### Oplossing

Het gewicht heeft een component langs de helling die het blok naar beneden duwt en een component loodrecht op de helling die zorgt voor het ontstaan van een normale kracht  $N$ . Voor evenwicht moet gelden:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{W} + \vec{F} = 0$$

Projecteert men dit op een schuin assenkruis dan krijgt men:

$$-G \cdot \sin \alpha + W + F = 0 \quad \dots (1)$$

$$-G \cdot \cos \alpha + N = 0 \quad \dots (2)$$

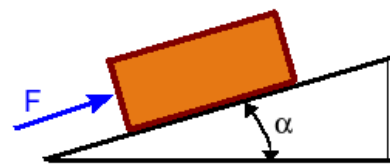
En tenslotte de wrijvingswet:  $W = f \cdot N \quad \dots (3)$

Dit levert 3 vergelijking in 3 onbekenden  $F$ ,  $N$  en  $W$ . Dit is dus oplosbaar.

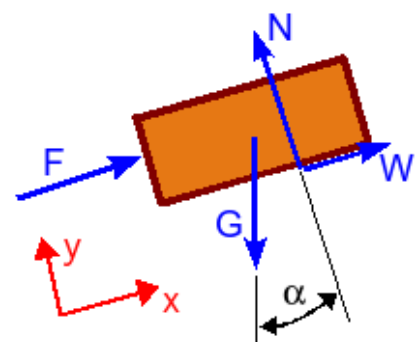
Men substitueert (3) in (1) en elimineert  $N$ . Dit levert:

$$F = G(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

Hieruit blijkt dat  $F=0$  is voor  $\sin \alpha = f \cdot \cos \alpha$  of  $\tan \alpha = f = \tan \varphi$  d.i. **als de maximale wrijvingshoek gelijk is aan het hoek van de helling**. Is de hoek van de helling kleiner, dan komt er een negatieve oplossing uit de bus. Dit betekent dat men nog tegen het blok zal moeten duwen om het naar beneden te laten bewegen. Doet men dat niet,

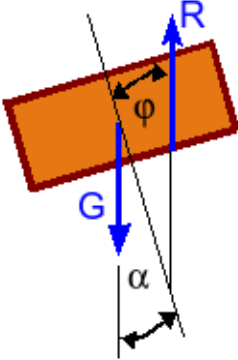


Figuur 9.2: Blok op helling



Figuur 9.3: Blok op helling - 2

dan is er evenwicht mogelijk voor een  $f_{\text{eff}}$  die kleiner is dan de maximale waarde, onafhankelijk van het gewicht van het blok! Het gebeurt bij problemen van wrijving wel meer dat men een negatief resultaat bekommt voor een kracht, terwijl dit niet zinvol is. Meestal is het te wijten aan het ten onrechte onderstellen van maximale wrijving en moet het resultaat geïnterpreteerd worden als: “er is altijd evenwicht mogelijk zonder dat er maximale wrijving nodig is”.



Figuur 9.4: Blok op helling - 3

Denkt men in termen van de totale reactie  $R$  dan zal er evenwicht zijn als  $R$  de tegengestelde vector is van  $G$ . Dit zal altijd mogelijk zijn als  $\alpha \leq \varphi$ . Het gewicht van het blok speelt geen rol omdat zowel  $N$  als  $W$  groeien met het gewicht van het blok. Om te voldoen aan de momentenvergelijking moet  $R$  ook nog in het verlengde liggen van  $G$ , maar dit levert hier geen probleem.

Een analoge situatie ontstaat als men **met een spie een deur wil vastzetten**. Dan is het de druk van de deur die de rol van het gewicht overneemt. Deze druk zal loodrecht staan op de schuine zijde van de spie en zorgt voor een kracht met een component die de spie tegen de grond drukt en een component die de spie wil wegduwen. Zolang de hoek van de spie kleiner is dan de maximale wrijvingshoek die overeenkomt met de wrijvingscoëfficiënt tussen spie en vloer, zal de deur geklemd blijven. Bij een gladde vloer moet men dus een spie met een

kleine hoek gebruiken of een rubberen spie die een grotere wrijvingscoëfficiënt heeft.

## 9.2.2 Voorbeeld 2

Als tweede voorbeeld kan men een variant op de vorige situatie beschouwen. Laat de hoek van de helling groter zijn dan de maximale wrijvingshoek (beide gegeven). Dan zal het blok niet in rust blijven liggen. Men kan nu echter vragen naar de kleinste kracht die nodig is om te beletten dat het blok naar beneden schuift en de kleinste kracht die nodig is om het blok omhoog te doen bewegen en de hoek  $\beta$  waaronder die kracht moet trekken.

### Oplossing

In beide situaties zal de wrijvingskracht maximaal zijn en mag men de wrijvingscoëfficiënt  $f$  als bekend beschouwen. Men moet beide situaties echter afzonderlijk behandelen.

- Minimale kracht om te beletten dat het blok naar beneden beweegt: in dat geval is de wrijving naar omhoog gericht.
- Minimale kracht om het blok omhoog te trekken: in dat geval is de wrijvingskracht naar beneden gericht.

Zij  $\beta$  de hoek van  $F$  met de helling. Men kan dit probleem op een zuiver algebraïsche manier oplossen. Men kan dit probleem ook op een zeer elegante manier grafisch oplossen, waardoor de algebraïsche oplossing plots veel zinvoller wordt.

### 1. Algebraïsche oplossing

a. Blok mag niet naar beneden bewegen.

Men krijgt de vergelijkingen als hierboven, maar nu met 2 componenten voor  $F$ :

$$-G \cdot \sin \alpha + W + F \cdot \cos \beta = 0$$

$$-G \cdot \cos \alpha + N + F \cdot \sin \beta = 0$$

De wrijvingswet:  $W = f \cdot N$

Dit stelsel bevat 4 onbekenden voor 3 vergelijkingen. Men zal  $F$  moeten berekenen als functie van  $\beta$  en dan het minimum van deze functie moeten bepalen. Men vindt op vrij eenvoudige manier:

$$F(\cos \beta - f \cdot \sin \beta) = G(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

Met de substitutie  $f = \text{tg } \phi$  is dit om te vormen tot:

$$F \cdot \cos(\beta + \varphi) = G \cdot \sin(\alpha - \varphi) \quad . \text{ of}$$

$$F = \frac{G \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos(\beta + \varphi)}$$

$\beta$  blijkt alleen in de noemer voor te komen.  $F$  zal dus minimaal zijn als de noemer maximaal is. De cosinusfunctie kan maximaal 1 worden voor een hoek van  $0^\circ$ .  $F$  wordt dus minimaal voor  $\beta + \varphi = 0$  of  $\beta = -\varphi$ . Daar de helling een hoek  $\alpha$  maakt met de horizontale, is dit ook een hoek  $\alpha - \varphi$  t.o.v. de horizontale. Daarbij is

$$F = G \cdot \sin(\alpha - \varphi)$$

b. Minimale kracht om blok omhoog te trekken

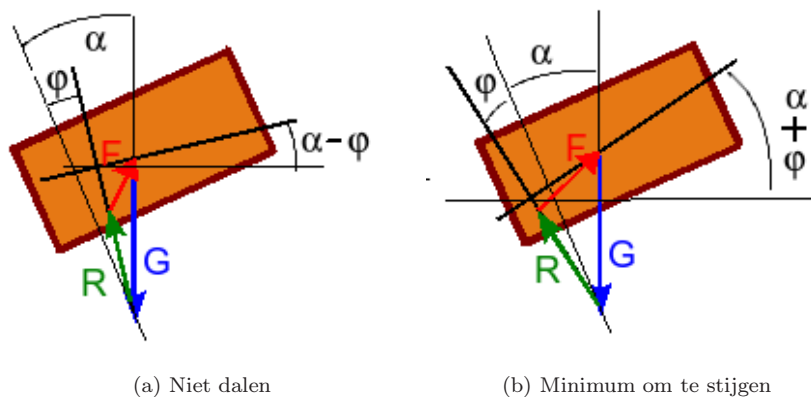
. Het teken van de wrijving verandert, de rest van de vergelijkingen blijft hetzelfde. Dit leidt tot volgend resultaat:

$$F = \frac{G \cdot \sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}$$

Met dezelfde redenering als hierboven komt men tot de conclusie dat  $\beta = \varphi$  of dat de hoek van  $F$  t.o.v. de horizontale  $= \alpha + \varphi$ . Daarbij is  $F$  dan:

$$F = G \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

## 2. Grafische oplossing



Figuur 9.5: Blok op helling

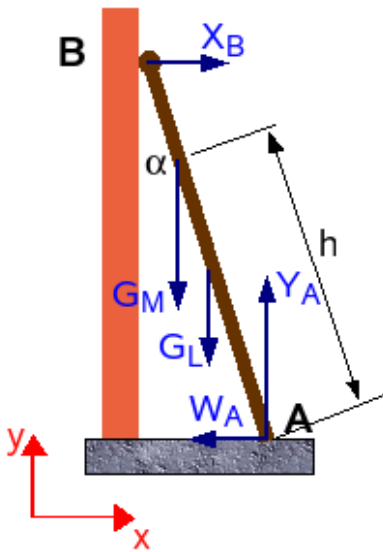
De oplossingen die hierboven gevonden werden voor  $F$  zijn van een intrigerende eenvoud. De grafische aanpak toont waarom.

Voor evenwicht moet de som van de krachten  $= 0$  zijn. Dit betekent dat de betrokken vectoren een gesloten veelhoek moeten vormen. De eerste vector stelt het gewicht voor. Dit is een vector waarvan richting en grootte vastliggen. De tweede vector is de totale reactie. Als men wil beletten dat het blok naar beneden schuift, dan ligt die reactie onder een hoek  $\varphi$  rechts van de normale op de helling. De grootte ervan ligt niet vast. De kracht  $F$  moet de driehoek sluiten. Als men een minimale  $F$  wil, dan komt dat neer op een minimale afstand tussen het beginpunt van  $G$  en de drager van de totale reactie. Die minimale afstand wordt bereikt door een loodlijn uit het beginpunt van  $G$  op die drager (dikkere lijn). Men krijgt dan een rechthoekige driehoek met  $G$  als schuine zijde en een hoek  $(\alpha - \varphi)$  tegenover  $F$ .

Dit levert dus de hoger gevonden eenvoudige oplossing voor de grootte van  $F$ . De richting ervan blijkt ook onder een hoek  $(\alpha - \varphi)$  te liggen t.o.v. de horizontale.

Voor de minimale kracht om het blok omhoog te trekken, krijgt men een analoog verhaal. Alleen ligt de drager van de totale reactie nu links van de normaal op de helling, onder een hoek  $(\alpha + \varphi)$  t.o.v. de verticale. De minimale waarde wordt weer bereikt bij een loodrechte afstand van het beginpunt van  $G$  naar die drager van  $R$ . Men krijgt zo weer een rechthoekige driehoek maar nu met een hoek  $(\alpha + \varphi)$  tegenover  $F$ .

### 9.2.3 Voorbeeld 3: ladder tegen muur



Figuur 9.6: Ladder tegen muur

Als volgend voorbeeld wordt een ladder beschouwd die tegen een muur geplaatst is. De lengte van de ladder is  $l$ , zijn gewicht  $G_L$  en hij staat onder een hoek  $\alpha$  met de verticale. Voor de eenvoud van de zaak onderstellen we dat de ladder bovenaan met wieltjes langs de muur rolt. Er is dan alleen een horizontale reactie van de muur op de ladder. Onderaan is er wrijving tussen ladder en grond met wrijvingscoëfficiënt  $f$ . Op de ladder kruipt een man met gewicht  $G_M$ . Hij bevindt zich op een hoogte  $h$  boven de grond, langs de ladder gemeten. Wat is het verband tussen de maximale hoek  $\alpha$  en  $f$ ?

#### Oplossing

Men kan dit probleem weer zuiver algebraïsch of grafisch oplossen. Voor een algebraïsche oplossing moet men de 3 vergelijkingen voor het evenwicht van de ladder opschrijven en de wrijvingswet.

$$X_B - W_A = 0$$

$$Y_A - (G_L + G_M) = 0$$

$$-X_B \cdot l \cdot \cos \alpha + G_M \cdot h \cdot \sin \alpha + G_L \cdot (l/2) \cdot \sin \alpha \text{ moment t.o.v. A}$$

Wrijvingswet:  $W_A = f \cdot Y_A$

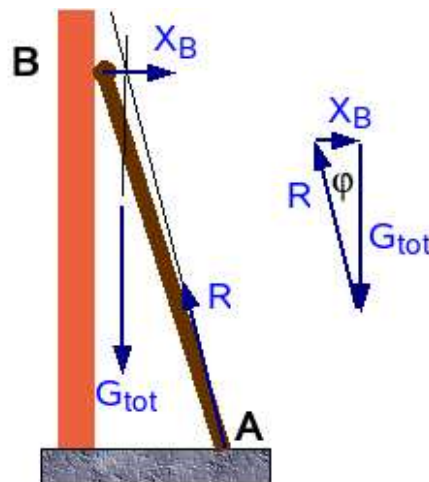
Men vindt:

$$\tan \alpha = f \frac{l \cdot (G_L + G_M)}{l \cdot G_L / 2 + h \cdot G_M}$$

Drukt men de hoogte  $h$  uit als een fractie  $p$  van  $l$ , nl. als  $h = p \cdot l$  met  $0 \leq p \leq 1$ , dan wordt dit:

$$\tan \alpha = f \frac{G_L + G_M}{G_L / 2 + p \cdot G_M}$$

Het is duidelijk dat de noemer van de breuk altijd kleiner zal zijn dan de teller. De breuk heeft dus altijd een waarde groter dan 1. De hoek  $\alpha$  mag dus iets groter worden dan de maximale wrijvingshoek  $\varphi$ . Als men binnen deze maximale wrijvingshoek blijft, zit men zeker veilig.



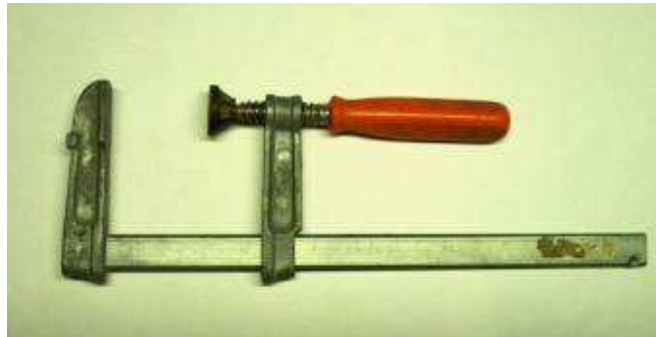
Figuur 9.7: Ladder tegen muur: grafische oplossing

Bemerk dat de situatie kritischer wordt naarmate de man hoger klimt op de ladder. Men zou normaal denken dat het steunpunt onderaan altijd het volle gewicht van man en ladder moet dragen en dat de positie van de man dus weinig uitmaakt. Het probleem is echter dat de vereiste wrijvingskracht stijgt met de hoogte van de man. Als de man op de top van de ladder staat is er een grotere horizontale reactie van de muur vereist voor het momentenevenwicht. Deze grotere reactie vraagt op haar beurt voor een

grotere tegengestelde wrijvingskracht in het contactpunt met de grond en zo wordt de situatie kritischer met de hoogte van de man.

Voor de grafische oplossing (zie fig. 9.7) zal men bedenken dat het evenwicht van de momenten van drie niet evenwijdige krachten vereist dat ze alle drie door één punt gaan. Om tot drie krachten te komen moet men eerst het gewicht van de man en ladder samenstellen tot een totaal gewicht. De drager hiervan zal ergens tussen A en B passeren afhankelijk van de positie van de man. Als de man op de top van de ladder staat, passeert de drager dicht bij B. Het snijpunt van de horizontale reactie in B met deze drager zal dan dicht bij B op de horizontale door B liggen. Verder werkt men weer met de totale reactie in A. Die moet dus ook door dat snijpunt passeren. Daaruit blijkt dus dat de ladder iets schuiner mag staan dan de maximale wrijvingshoek  $\varphi$  en dus te meer naarmate het gewicht van de ladder groter is in verhouding tot het gewicht van de man. Hieruit blijkt ook dat lichte aluminium ladders met de nodige zorgvuldigheid moeten gebruikt worden!

#### 9.2.4 Voorbeeld 4: lijmkleem



Figuur 9.8: lijmkleem

Door schrijnwerkers wordt dikwijls beroep gedaan op lijmklemmen (zie foto) om stukken vast te klemmen. In het Frans heet dit instrument “serre-joint”. In sommige Vlaamse streken werd dat verbasterd tot “sergeant”. Als men de truc niet kent om de beweeglijke arm te verschuiven, dan kan dit een zeer nukkig instrument zijn. Het blijkt dat er een minimale afstand nodig is tussen de staaf waarover deze arm glijdt en de schroef waarmee men de stukken vastzet.

Wanneer er een kracht uitgeoefend wordt op de kop van de schroef, dan zal de arm lichtjes kantelen zodat hij maar in twee diagonaaltegenegestelde punten nog contact maakt met de staaf. Hier is dat in de punten A en C. Men kan de minimale afstand  $d$  weer zuiver algebraïsch of grafisch bepalen. De momentenvergelijking speelt weer een belangrijke rol, zoals bij de ladder tegen een muur hierboven. Als men deze opschrijft t.o.v. het punt C, dan kan men zeggen dat het moment van de kracht  $F$  een tegengesteld moment vraagt van  $Y_A$ . Wanneer  $d$  klein is zal ook  $Y_A$  kleiner uitvallen. Dat leidt dan weer tot een kleinere maximale wrijvingskracht, die uiteindelijk de arm op zijn plaats moet houden. Het blijkt weer dat de grootte van  $F$  geen rol speelt, daar de reactiekrachten en de wrijvingskrachten evenredig met  $F$  toenemen. Alleen de afstand  $d$  speelt een cruciale rol in functie van de wrijvingscoëfficiënt en van de afmetingen van de opening in de arm.

#### Algebraïsche oplossing

De vergelijkingen worden (zie fig. 9.9):

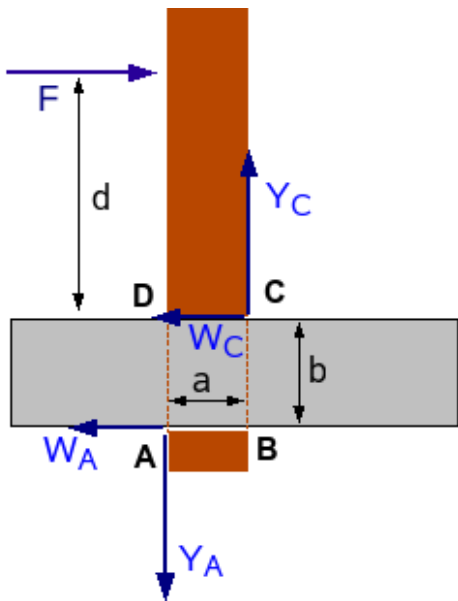
$$F - (W_A + W_C) = 0 \quad \dots (1)$$

$$Y_C - Y_A = 0 \quad \dots (2)$$

$$-d.F - b.W_A + a.Y_A = 0 \quad \dots (3) \text{ momenten t.o.v. C}$$

$$W_A = f.Y_A$$

$$W_C = f.Y_C$$



Figuur 9.9: Krachten op arm van de lijm-klem

Uit (2) volgt dat  $Y_A = Y_C$ , waaruit dan weer volgt dat  $W_A = W_C$ . De eerste vergelijking wordt dus  $F = 2fY_A$ . Alles invullen in de momentenvergelijking levert:

$$2dfY_A = Y_A(a - fb) \quad \dots \text{ of}$$

$$d = \frac{a - f \cdot b}{2f}$$

**Grafische oplossing**

Voor de grafische oplossing werkt men weer met de totale reactie (zie fig. 9.10). Voor evenwicht zullen de twee totale reacties zich moeten samenstellen tot één resultante die tegengesteld is aan F en op dezelfde drager ligt. Dit samenstellen zal gebeuren in het snijpunt van de twee dragers (zie in het hoofdstuk over equivalente vectorsystemen de tekst over samenlopende krachten 2.5.1.3). Bij maximale hoek  $\varphi$  voor beide dragers, zal dit snijpunt het dichtst bij de staaf liggen.

Om de dragers te kunnen beschrijven, wordt een klassiek xy-assenkruis met oorsprong in C ingevoerd. De drager van de totale reactie door A is dan een rechte die door A(-a,-b) passeert en een richtingscoëfficiënt  $1/f$  heeft. De vergelijking hiervan is:

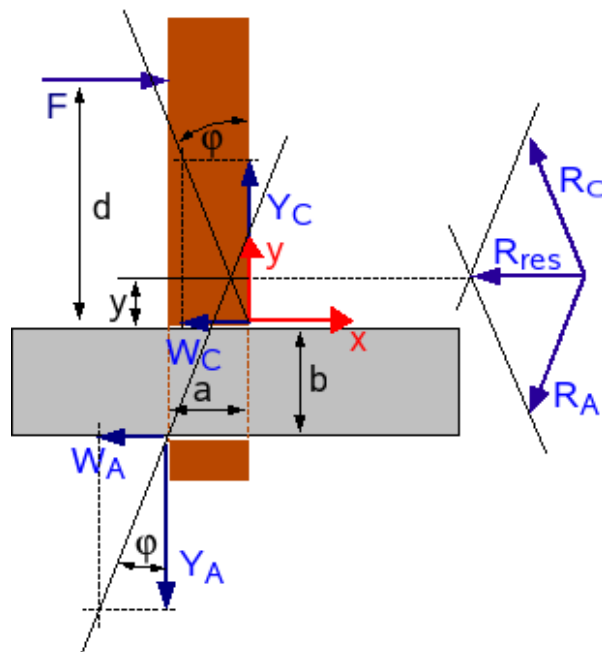
$$\frac{y + b}{x + a} = \frac{1}{f}$$

De drager door C heeft een richtingscoëfficiënt  $-1/f$ . De vergelijking van deze rechte wordt

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{f}$$

De minimale afstand d is de y-waarde van het snijpunt van beide lijnen. Lost men x op uit de laatste vergelijking en substitueert men dat resultaat in de eerste, dan vindt men als y-waarde:

$$y = d = \frac{a - f \cdot b}{2f} \quad \dots \dots \text{ ut supra.}$$



Figuur 9.10: Lijmklem: grafische aanpak

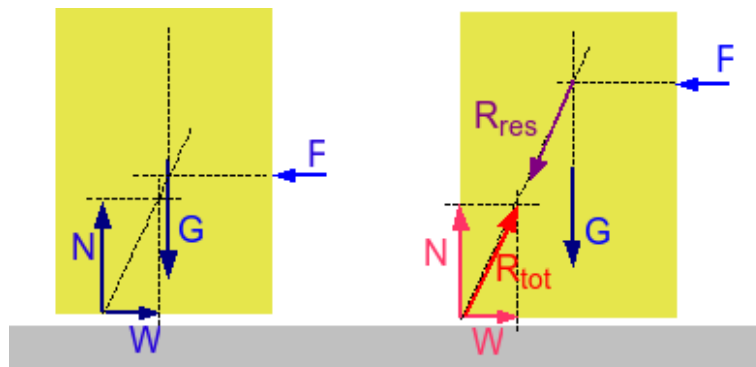


Om de arm van een lijklem zonder problemen te kunnen verschuiven, neemt men deze dus best vast dichtbij de staaf (fig. 9.11). Of men moet aan de arm een rotatie geven die tegengesteld is aan de rotatie die hij normaal zou krijgen door ertegen te duwen. Als men de arm in de foto naar rechts wil bewegen, moet men er een moment op uitoefenen die hem linksom probeert te draaien. Dat leidt dan tot contacten in B en D. Dit moment neutraliseert dan het moment van de schuifkracht, waardoor er geen wrijvingskrachten in A en C kunnen ontstaan.



Figuur 9.11: Lijklem

### 9.3 Kantelen



Figuur 9.12: Ontstaan van kantelen

Wanneer men tegen een blok duwt dat met wrijving op de grond ligt, dan kan men de normale reactie en de wrijving samenstellen tot één totale reactie  $R_{tot}$  en het gewicht van het blok en de kracht waarmee geduwd wordt tot één resultante  $R_{res}$ , die moet passeren door het snijpunt van gewicht en duwkracht. Dit is voorgesteld in de rechtse figuur. Voor evenwicht van de krachten moeten beide vectoren gelijk maar tegengesteld zijn, voor het momentenevenwicht moeten beide op dezelfde drager liggen. Naarmate men hoger gaat duwen zal deze drager in het voorbeeld meer naar links verschuiven, tot hij door het hoekpunt van het blok passeert. Duwt men nog hoger dan valt  $R_{res}$  links van  $R_{tot}$ . Er ontstaat een netto moment en het **blok zal kantelen** rond het hoekpunt van het blok. De grens voor kantelen treedt dus op als de normale reactie (of de totale reactie) aan de grens van het voorwerp komt. Als men een hoge kast wil verschuiven zonder dat die gaat kantelen, dan moet men dus laag duwen tegen die kast.

De resultanten werden niet getekend in de linkse figuur om de figuur niet te overladen.

Indien het blok een breedte  $b$  heeft, dan zou men steunend op de figuur de kritische hoogte  $y_F$  voor de kracht  $F$  kunnen berekenen als

$$y_F = b/(2.tg \phi) = b.cotg \phi/2$$

Voor de algebraïsche aanpak moet men de volgende vergelijkingen opschrijven:

$$W - F = 0 \quad \text{of} \quad W = F$$

$$N - G = 0 \quad \text{of} \quad N = G$$

Momenten t.o.v. het linkse hoekpunt:

$$y_F \cdot F - (b/2) \cdot G = 0$$

En tenslotte:

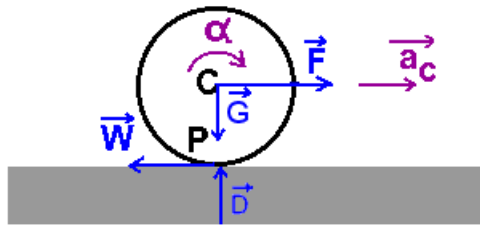
$$W = f \cdot N$$

Uit de eerste twee vergelijkingen en de wrijvingswet volgt:  $G = F/f$ . Vult men dat in in de momentenvergelijking dan bekomt men:

$$y_F = b/(2 \cdot f) \quad \text{of} \quad \dots \text{ ut supra.}$$

## 9.4 Rollen met slippen

De wrijving die optreedt tussen de grond en een rollend voorwerp of tussen twee tegen elkaar rollende voorwerpen, vormt een beetje een speciaal geval. Het is immers niet altijd duidelijk wat de zin van de wrijving zal zijn noch of er zuiver rollen dan wel rollen met slippen zal optreden.



Figuur 9.13: Rollend wiel

Het eenvoudigste geval is dat waar de wrijving noodzakelijk is voor de rotatie van het voorwerp. Dat is bv. het geval wanneer men aan de as van een rol trekt. Dan moet de wrijving met de grond zorgen voor de rotatie rond die as. Als er geen wrijving is, dan zal de rol glijden i.p.v. rollen. In de figuur hiernaast is de wrijving nodig voor de rotatie, maar werkt ze de translatie tegen. Men krijgt als vergelijkingen:

- voor de translatie:  $F - W = m \cdot a_c$
- voor de rotatie t.o.v. het massacentrum:  $r \cdot W = I \cdot \alpha$

Nu is de vraag of er zuiver rollen is of rollen met slippen. Men kan eerst onderstellen dat er zuiver rollen is en berekenen welke wrijvingscoëfficiënt hiervoor nodig is. Blijkt die groter dan wat fysisch mogelijk is, dan moet men besluiten dat er rollen met slippen zal optreden en de berekeningen herbeginnen met een paar kleine wijzigingen.

Voor zuiver rollen geldt de bindingsvergelijking:  $a_C = r \cdot \alpha$

De wrijvingscoëfficiënt moet dan berekend worden uit  $W = f_{eff} \cdot D = f_{eff} \cdot G$

Dit is een systeem van 4 vergelijkingen in de onbekenden  $W, f_{eff}, a_C$  en  $\alpha$ .

Als blijkt dat er rollen met slippen op treedt, dan moet men de bindingsvergelijking laten vallen. Dan is er geen vast verband meer tussen de lineaire snelheid van de as en de hoeksnelheid van de rol. Maar dan verdwijnt ook  $f$  als onbekende uit de vergelijkingen want die wordt dan gewoon de bekende maximale wrijvingscoëfficiënt.

### Numeriek voorbeeld

Zij in bovenstaand voorbeeld  $m = 2$  kg,  $r = 0,2$  m,  $I = m \cdot r^2 / 2 = 0,04$  kgm<sup>2</sup> =  $1/25$  kgm<sup>2</sup>,  $F = 10$  N

Voor de eenvoud van de berekeningen wordt  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> genomen (fout < 2%! ) Dan is  $G = 20$  N

Uit de vergelijkingen blijkt dat voor rollen  $f_{eff} = F/3G = 10/3 \cdot 20 = 0,166\dots$

### Eerste geval : $f = 0,2$

In dit geval heeft men dus rollen. Uit de vergelijkingen volgt:

$$a_C = 2F/3m = 2 \cdot 10 / 3 \cdot 2 = 10/3 = 3 \frac{1}{3} \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = a_C / r = 10 / 3 \cdot 0,2 = 50/3 = 16 \frac{2}{3} \text{ rad/s}^2$$

Als men de zaak nu vanuit energetisch standpunt bekijkt, moet de arbeid geleverd door  $F$  omgezet zijn in kinetische energie. Na 1 s moet dan gelden:

$$s = a_C \cdot t^2 / 2 = 10 \cdot 1^2 / 3 \cdot 2 = 10/6 \text{ m} = 1 \frac{2}{3} \text{ m}$$

$$v_C = a_C \cdot t = 10/3 \text{ m/s} = 3 \frac{1}{3} \text{ m/s}$$

$$\omega = \alpha \cdot t = 50/3 \text{ rad/s} = 16 \frac{2}{3} \text{ rad/s}$$

$$A = F \cdot s = 10 \cdot 10/6 = 50/3 \text{ J} = 16 \frac{2}{3} \text{ J}$$

$$E_k = mv_C^2/2 + I\omega^2/2 = 2(10/3)^2/2 + 0,04(50/3)^2/2 = 50/3 \text{ J} = 16 \frac{2}{3} \text{ J} \quad \dots \text{zoals het hoort!}$$

**Tweede geval :  $f = 0,1$**

Hiermede zit men in het gebied van rollen met slippen. Uit de vergelijkingen volgt:

$$F - f \cdot G = m \cdot a_C \text{ waaruit } a_C = (10 - 0,1 \cdot 20)/2 = 4 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 2 \cdot f \cdot G / (mr) = 2 \cdot 0,1 \cdot 20 / (2 \cdot 0,2) = 10 \text{ rad/s}^2$$

Vanuit energetisch standpunt bekeken, na 1 s, met zelfde formules als hierboven:

$$s = 4 \cdot 1/2 = 2 \text{ m}$$

$$A = 10 \cdot 2 = 20 \text{ J}$$

$$v_C = 4 \text{ m/s} ; \omega = 10 \text{ rad/s}$$

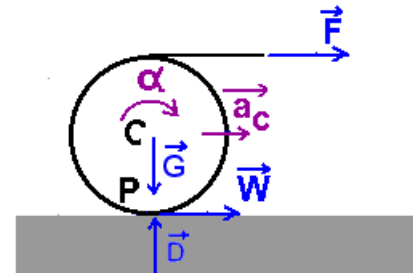
$$E_k = 2 \cdot 4^2/2 + (1/2)(1/25) \cdot 10^2 = 18 \text{ J}$$

Wat ontbreekt is natuurlijk de energie die verloren gegaan is door wrijving bij het slippen. Om die uit te rekenen moet men eerst de absolute versnelling van het contactpunt met de grond kennen:

$$a_{\text{abs}} = a_C - r \cdot \alpha = 4 - 0,2 \cdot 10 = 2 \text{ m/s}^2$$

Met deze versnelling is er na 1s een afstand afgelegde van  $2 \cdot 1/2 = 1 \text{ m}$ . De energie verloren door wrijving is dan  $W \cdot s = 0,1 \cdot 20 \cdot 1 = 2 \text{ J}$ . En hiermede sluit de balans als een bus.

Er zijn echter ook situaties waar er reeds een andere kracht is die zowel voor translatie als rotatie kan zorgen. Hiernaast het geval van een rol waarrond een touw gewikkeld is. Als men aan het touw trekt, dan oefent men een kracht uit die de juiste zin heeft voor zowel de translatie- als rotatieversnelling. De zin van de wrijving is dus moeilijk op het zicht te voorspellen. Als het systeem uit rust vertrekt, kan men in deze situatie kijken wat er zou gebeuren met het contactpunt onderaan de rol als er geen wrijving is. Men kan volstaan met de versnelling van dat punt uit te rekenen, want als er een versnelling in een bepaalde zin is, dan zal er het volgende ogenblik een snelheid en een verplaatsing in die zin zijn. De wrijving zal zich tegen de verplaatsing van dat punt verzetten en dus de tegengestelde zin ervan hebben. Bemerkt dat ook in vorig voorbeeld de juiste zin zo kan gevonden worden.



Figuur 9.14: Wiel met touw

- Voor de translatie:  $F = m \cdot a_C$
- Voor de rotatie t.o.v. het massacentrum:  $r \cdot W = I \cdot \alpha$
- Versnelling van P:  $a_P = a_C - r \alpha$

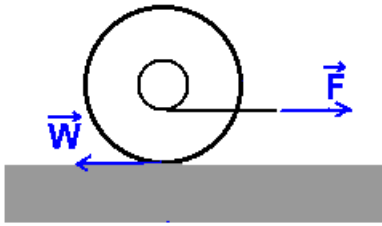
Als het wiel een volle schijf is met  $I = mr^2/2$ , dan volgt uit de 2e vergelijking dat  $r\alpha = 2F/m$ . Uit de 1e vergelijking volgt dat  $a_C = F/m$ . Beide uitdrukkingen invoeren in de 3e vergelijking levert:

$$a_P = \frac{F}{m} - \frac{2F}{m} = -\frac{F}{m}$$

Het minteken betekent dat  $a_P$  naar links gericht is. Men heeft immers de projecties die horizontaal naar rechts gericht zijn als positief genoteerd. De wrijving zal dus naar rechts wijzen, d.i. helpen bij de translatie maar tegenwerken voor de rotatie.

Men kan nu de vergelijkingen opstellen voor rollen met wrijving. Hierbij moet men weer beide mogelijkheden onderzoeken zoals hierboven. Dus:

- Voor de translatie:  $F + W = m \cdot a_C$
- Voor de rotatie t.o.v. het massacentrum:  $r(F - W) = I \cdot \alpha$
- Bij zuiver rollen:  $a_C = r \cdot \alpha$
- Wrijvingskracht:  $W = f_{\text{eff}} \cdot D = f_{\text{eff}} \cdot G$

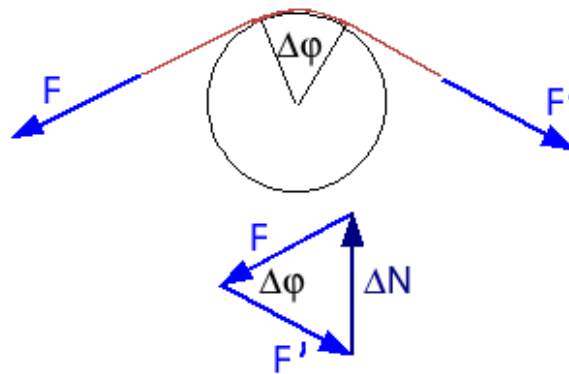


Figuur 9.15: Wiel met touw errond

naar links. De wrijving is in elk geval naar links gericht. Men zal voor stijgende kracht  $F$  vier fazen hebben: eerst een zuiver rollen naar rechts, dan een rollen met slippen, waarbij de rol nog altijd naar rechts draait, dan een zuiver schuiven van de rol als het moment van  $F$  t.o.v. de as van de rol gelijk is aan het moment van de wrijving, en tenslotte een slippen met de rol draaiend naar links (tegenwijzerzin).

Een meer intrigerende situatie is hiernaast geschetst. De eerste vraag die zich stelt is of er zuiver rollen naar rechts mogelijk is. Daarbij zou het touw immers opwinden i.p.v. afwinden. Deze vraag kan snel beantwoord worden als men de zaak weer vanuit energetisch standpunt bekijkt. De kracht  $F$  moet arbeid leveren als de zaak in beweging wil komen. Het touw moet zich dus naar rechts verplaatsen. Men weet dat het onderste punt van de rol het ogenblikkelijk rotatiecentrum is. Dan is het duidelijk dat bij rollen naar rechts het contactpunt van het touw met de rol zich ook naar rechts zal verplaatsen. De snelheid van het middelpunt van de rol naar rechts is groter dan de relatieve snelheid van dat contactpunt

## 9.5 Wrijving over een gebogen oppervlak



Figuur 9.16: wrijving van kabel rond paal

Een zeer speciaal geval van wrijving is de wrijving die optreedt wanneer een kabel rond een gebogen oppervlak gespannen wordt. Wanneer men een kabel, die gespannen staat onder een kracht  $F$ , een stukje rond een cirkelvormig voorwerp leidt, dan kan men voor de totale druk van het voorwerp op de kabel opschrijven:

$$\Delta N = 2 \cdot F \cdot \sin \frac{\Delta \varphi}{2}$$

Dat hier voor een cirkelwormig voorwerp gekozen werd, doet niets af aan de algemeenheid van de afleiding want elke kromme kan men in een punt benaderen door een osculerende cirkel. In de limiet voor  $\Delta \varphi$  gaande naar 0 krijgt men  $dN = F \cdot d\varphi$

Bij een wrijvingscoëfficiënt  $f$  geeft deze druk aanleiding tot een wrijvingskracht  $dW = f \cdot dN = f \cdot F \cdot d\varphi$ . Dit betekent dat er aan één zijde nu een kracht  $dF = dW$  meer mag aangrijpen zonder dat het evenwicht verbroken wordt. Of  $dF = f \cdot F \cdot d\varphi$ . Dit is een differentiaalvergelijking met als oplossing:

$$F_2 = F_1 \cdot e^{f \cdot \varphi}$$

In woorden: als men aan het ene einde van een kabel trekt met een kracht  $F_1$  en die kabel wordt rond een voorwerp geleid zodat hij er een hoek  $\varphi$  is tussen begin en einde, dan mag er aan het andere einde getrokken worden met een kracht  $F_2$ , die exponentieel stijgt met de hoek  $\varphi$ . Dit is een zeer sterke stijging. Voor berekeningen moet  $\varphi$  natuurlijk in radialen uitgedrukt worden, want dat is de enige coherente eenheid voor hoeken. Eén toer is dan  $2\pi$  radialen. Dus  $e^{f \cdot \varphi} = e^{2\pi \cdot f \cdot t} = F_1 \exp(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ . Een paar cijfers:

f	toeren	$\exp(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$
0,1	1	1,87
0,1	2	3,51
0,1	3	6,59
0,2	2	12,3
0,2	3	43,4



Figuur 9.17: Matrosen doen kaapstander draaien

Hiervan wordt dagelijks gebruik gemaakt om lasten op te hijsen op schepen of op werven. Daar werkt men dikwijls met een horizontale of verticale kaapstander. Dit is een cilinder die continu draait. Om iets op te hijsen leidt men het losse einde van de kabel twee of driemaal rond deze cilinder en trekt aan. De man die aan het losse einde trekt hoeft maar een fractie van de kracht uit te oefenen die de kabel aan de andere zijde kan leveren. Laten stijgen of dalen van de last gebeurt niet door de snelheid van de cilinder te regelen, maar gewoon door meer of minder te trekken aan het losse einde van de kabel.

De foto toont hoe vroeger een kaapstander door een groep matrosen in beweging gebracht werd. Hij toont een deel van een maquette in het San Francisco Maritime Museum. Foto afkomstig van <http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:CapstanCrewModel.jpg>

Een **eenvoudig proefje** laat ook zien hoe sterk het verschil in spanning aan beide zijden kan zijn. Men neemt een stekjesdoosje en een sleutelbos en verbindt beiden met een touwtje van 60 à 70 cm. Men leidt dit touwtje over een horizontale ronde staaf (de steel van een houten lepel bv.) zodat de sleutelbos dicht bij de staaf hangt en houdt het andere einde met het doosje horizontaal. Men lanceert het doosje naar beneden. Het blijkt dat na 3 of 4 toeren van het touw rond de staaf de sleutelbos in zijn val gestopt wordt. Het doosje van 8 à 10 g blijkt de sleutelbos van 100 g te kunnen tegenhouden!

## 9.6 Rollende wrijving

Wanneer een voorwerp kan verplaatst worden op wielen, dan weet men dat dit veel minder inspanning vraagt dan het voorwerp verslepen. Het gaat echter niet vanzelf. Ook om een fiets, kar of auto in beweging te houden op een vlakke weg, is een continue kracht nodig. Men zegt dat er een **rollende**

**wrijving** moet overwonnen worden. Het mechanisme achter die rollende wrijving is echter complex. In feite zijn er verschillende mechanismen die spelen.

Een eerste oorzaak van rollende wrijving komt doordat een wiel in zijn contact met de grond altijd een beetje afgeplat wordt. Ook het materiaal waarop het wiel rust zal op die plaats lichtjes ingedeukt worden. Wanneer het wiel in beweging komt, moet het als het ware kantelen (zie vorige paragraaf) rond de voorzijde van deze afgeplatte strook. Dit betekent dat de normale resultante naar voor zal schuiven en daardoor vóór de as van het wiel zal wijzen. Hierdoor ontstaat een tegenwerkend moment, dat voortdurend moet overwonnen worden om de beweging in stand te houden. Het blijkt dat deze kracht, voor zelfde wielen op zelfde ondergrond, in een groot gebied evenredig is met het gewicht van het voorwerp. Vandaar dat men het ook als een soort wrijving beschrijft.

Wanneer het wiel rolt, wordt er natuurlijk telkens vooraan nieuw materiaal samengedrukt. Men zou kunnen denken dat het materiaal dat zich achteraan kan ontspannen hiervoor een compensatie levert, maar dat is niet zo. Geen enkel materiaal is volkomen elastisch, d.w.z. herstelt zich volledig en ogenblikkelijk na een indrukking. Elk materiaal heeft een zekere hysteresis, d.i. het bijhouden van een restje van de vorige toestand. Of meer wetenschappelijk is hysteresis het feit dat bij een vervormbaar materiaal de energie teruggegeven bij herstel van een vervorming, altijd kleiner is dan de energie die nodig was voor de vervorming. Dit heeft ook met inwendige wrijving te maken, die bij de indrukking een verlies van energie veroorzaakt i.p.v. een zuivere omzetting in potentiële energie. Vooral bij banden van fietsen en auto's speelt deze hysteresis een belangrijke rol in de rolweerstand. De energie die erdoor verloren gaat, wordt omgezet in warmte. Banden die te zacht opgepompt zijn, worden bij elke omwenteling van het wiel meer vervormd dan nodig en zullen dus meer opwarmen. Daarom moeten zeker bij een lange rit over een autosnelweg met een goed geladen wagen, zoals bij een vakantieuittocht dikwijls het geval is, de banden correct opgepompt zijn. Velen geven zelfs de raad om in die omstandigheden de banden een  $100 \text{ g/cm}^2$  harder op te pompen dan wat opgegeven wordt. Het energieverlies door de vervorming van de flanken van de band kan verminderd worden door een soepeler rubber te gebruiken voor de flanken (vooral bij fietsbanden).

Voor het karakteriseren van de rollende wrijving zijn twee systemen in gebruik. Het eerste systeem definieert een coëfficiënt voor rolweerstand  $C_{rw}$  als de verhouding van de kracht nodig om de beweging in stand te houden over het gewicht, zoals bij slepende wrijving. Deze wrijvingscoëfficiënt is dan een dimensieloze grootte, zoals die bij slepende wrijving.

Enkele numerieke waarden (naar [http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling\\_Resistance](http://en.wikipedia.org/wiki/Rolling_Resistance) in de Engelstalige Wikipedia):

$C_{rw}$	materiaal
0,0002 - 0,0010	Stalen treinwiel op trein rail
0,005	Tramwiel op tramrail
0,006 - 0,01	banden met lage rolweerstand op een zeer vlakke baan
0,01 - 0,015	gewone banden op betonnen baan
0,02	auto op stenen platen
0,030	auto of bus op asfalt

Het tweede systeem houdt rekening met de diameter van het wiel. Het gaat uit van de redenering dat, bij rollen over een vlakke ondergrond, een kleiner wiel een grotere indeuking zal veroorzaken dan een groot, door zijn grotere kromming in de contactzone. Dit zou een coëfficiënt moeten opleveren die in een breder gebied kan toegepast worden. Men vermenigvuldigt dan de vorige coëfficiënt met de straal van het wiel en bekomt zo een coëfficiënt die de dimensies heeft van een lengte. Om de kracht te berekenen moet men hier die coëfficiënt vermenigvuldigen met het gewicht van de last en delen door de straal van het wiel. Een stalen treinwiel op een treinrail zou dan een  $C_{rw} = 0.5 \text{ mm}$  hebben.

Het is pas op het einde van de 19e eeuw dat de kogel- en rollagers algemeen in gebruik gekomen zijn in de machinebouw. Een goed kogellager vereist immers zeer hard en goed gepolijst staal en zeer nauwe toleranties bij de constructie. Wie hierover meer wil weten kan een mooi geschiedkundig overzicht vinden op <http://www.alexdenouden.nl/08/rolling1.htm> en volgende pagina's.

## 9.7 Viskeuze wrijving

Dit onderwerp behoort tot de hydrodynamica of studie van de stroming van gassen en vloeistoffen. Voor de volledigheid wordt hier een kort woordje erover gezegd.

Wanneer een voorwerp beweegt in een vloeistof of gas, dan ondervindt het een tegenwerkende kracht die bij lage snelheid evenredig is met de snelheid en bij hogere snelheden evenredig met het kwadraat van de snelheid. Een steen die met een kleine beginsnelheid in het water valt, is een voorbeeld van het eerste geval, maar de beweging van een tennisbal valt onder de tweede wet. Wat in deze context als hoge of lage snelheid moet worden beschouwd, wordt bepaald door het **Reynoldsgetal** (zie ook [http://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds\\_number](http://en.wikipedia.org/wiki/Reynolds_number)) Dit getal is gedefinieerd als:

$$R_e = \frac{\rho l v}{\eta}$$

waarin:

$R_e$  = Reynoldsgetal  
 $\rho$  = dichtheid van het medium, vloeistof of gas  
 $l$  = karakteristieke lengte (voor bol: diameter)  
 $v$  = snelheid van de stroming (of van het voorwerp in het medium)  
 $\eta$  : viscositeit van het medium

Waarden kleiner dan 10 beschouwt men als **lage**, tussen  $10^3$  en  $10^5$  als **hoge Reynoldsgetalen**. Wanneer men in een laboratorium een proef op een schaalmodel uitvoert, moet men zorgen voor zelfde Reynoldsgetalen. Voor een kleiner model betekent dit hogere snelheden of werken met een viskeuzer medium.

De bewegingsvergelijking van een bol die valt in een medium kan men schrijven als:

$$m \frac{dv}{dt} = (m - m')g - f_m \text{ waarin:}$$

$m$  = massa van het voorwerp

$m'$  = massa van het verplaatste medium, vloeistof of gas

$f_m$  = tegenwerkende kracht van het medium, hier opwaartse kracht

### 1 - Lage Reynoldsgetalen

Bij lage Reynoldsgetalen is  $f_m$  evenredig met de snelheid. Hiervoor geldt de bekende formule van **Stokes** (ook bekend als formule van Navier-Stokes of formule van **Poiseuille** voor de Franstaligen):

$$f_m = 6\pi\eta r v$$

waarin  $r$  = straal van de bol is en de rest als hoger.

In dit gebied speelt vooral de viscositeit een grote rol.

De bol zal versnellen tot het rechterlid van bovenstaande bewegingsvergelijking 0 is. Dan is de eindsnelheid bereikt. Dit zal het geval zijn voor:

$$v_{fin} = \frac{(m - m')g}{6\pi\eta r}$$

Daar de massa evenredig is met  $r^3$ , betekent dit dat de eindsnelheid, voor zelfde materiaal, evenredig is met  $r^2$ .

De bewegingsvergelijking is een differentiaalvergelijking met als oplossing:

$$v(t) = v_{fin}(1 - e^{-t/\tau})$$

waarin  $\tau = m/6\pi\eta r$

Voor lage Reynoldsgetalen ligt  $\tau$  in het bereik van 1 tot 100 ms. Men kan  $\tau$  zien als de tijd die nodig is om 63% van de eindsnelheid te bereiken. In theorie wordt de eindsnelheid pas na een oneindig lange tijd bereikt. 95% van die eindsnelheid wordt echter bereikt na ongeveer  $3\tau$  en 99% reeds na  $4,61\tau$ . Het is het laatste stukje van het laatste percent dat veel tijd nodig heeft!

### 2 - Hoge Reynoldsgetalen

Bij hoge Reynoldsgetalen kan men de tegenwerkende kracht beschrijven als:

$$f_m = \frac{1}{2}\rho C_d S v^2$$

waarin:

$C_d$  een coëfficiënt is die experimenteel te bepalen is en afhangt van  $R_e$

$S$  = oppervlak van de doorsnede van het voorwerp

$\rho$  = dichtheid van het medium

De eindsnelheid kan nu geschreven worden als:

$$v_{fin} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho C_d S}}$$

Wanneer men weer rekening houdt met het feit dat de massa evenredig is met  $r^3$ , dan is de eindsnelheid nu evenredig met de wortel uit  $r$ .

De bewegingsvergelijking leidt nu tot een differentiaalvergelijking met als oplossing voor de snelheid:

$$v(t) = v_{fin} \tanh\left(\frac{gt}{v_{fin}}\right)$$

De snelheid als functie van de positie is:

$$v(x) = \sqrt{v_f^2(1 - \exp(-2.g/v_f^2)x)}$$

De eindsnelheid wordt nu veel trager bereikt. Voor een voorwerp met een eindsnelheid van 250 km/u (= 70 m/s) wordt 90% van die snelheid pas bereikt na meer dan 560 m.

Voor een vallende persoon ligt de eindsnelheid rond 160 à 180 km/u. Een orkaanwind van boven de 200 km/u kan dus zonder problemen een persoon oppakken en een eindje meevoeren.

Bij nog hogere Reynoldsgetallen, boven  $3.10^5$ , treedt er plots een dip op in de weerstandcoëfficiënt, waarbij de weerstand weer evenredig wordt met de snelheid. De tijdconstante  $\tau$  is nu echter veel groter. Voor een tennisbal ligt die rond 2 s. Als de bal bij de opslag vertrekt met een snelheid van 180 km/u (= 50 m/s) dan is hij op een halve seconde aan de andere zijde van het terrein (ongeveer 24 m). De bal heeft dan nog ongeveer 78% ( $e^{-0.25} \times 100$ ) van zijn beginsnelheid. De vertraging is dus nauwelijks merkbaar. Het donzige oppervlak van een tennisbal en de putjes in een golfbal dienen om de luchtweerstand te verkleinen en nog vroeger in deze dip te komen. De volledige beweging van b.v. een golfbal kan niet in één formule worden gevat, maar alleen realistisch worden berekend via numerieke simulatie, waarbij de luchtweerstand als functie van de snelheid aangepast wordt.

De meeste simulaties van de beweging van een golfbal of een worp in een medium met luchtweerstand, gebruiken waarschijnlijk de formule waarbij de weerstand evenredig is met de snelheid. Deze laat immers nog een analytische oplossing voor de differentiaalvergelijkingen toe, zeg maar een pasklare formule voor de snelheid en de positie in functie van de tijd. Neemt men een klassiek assenkruis met x-as horizontaal en y-as verticaal omhoog, kv de grootte van de weerstand en een bal die vertrekt uit de oorsprong, dan worden de differentiaalvergelijkingen voor de x- en y-as:

$$\begin{aligned} -kv_x &= m \frac{dv_x}{dt} \\ -mg - kv_y &= m \frac{dv_y}{dt} \end{aligned}$$

In de laatste vergelijking is  $v_y$  een veranderlijke die zowel positief als negatief kan zijn. Brengt men deze vergelijkingen in een formulering met de D-operator, dan krijgt men:

$$\begin{aligned} (mD + k)v_x &= 0 \\ (mD + k)v_y &= -mg \end{aligned}$$

De algemene oplossing voor de eerste vergelijking is:

$$v_x = C.e^{-\frac{k}{m}t}$$

Stelt men  $m/k = \tau$  en houdt men rekening met de beginvoorwaarde dat  $v_x = v_{x0}$  voor  $t = 0$ , dan kan de integratieconstante C bepaald worden en krijgt men:

$$v_x = v_{x0}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$



De algemene oplossing voor de tweede differentiaalvergelijking bestaat uit een oplossing voor de homogene vergelijking (d.i. met rechterlid = 0) en een oplossing met constante  $v_y$ :

$$v_y = C.e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{k}$$

De eindsnelheid in de y-richting zal bereikt worden als er geen versnelling meer is. Uit de differentiaalvergelijking blijkt dat die eindsnelheid  $v_f = mg/k$  in grootte is. De integratieconstante wordt bepaald uit de beginvoorwaarde dat  $v_y = v_{y0}$  voor  $t = 0$ . Men krijgt tenslotte:

$$v_y = -v_f + (v_f + v_{y0})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Door integreren van de uitdrukkingen voor  $v_x$  en  $v_y$  en rekening houdend met de beginvoorwaarden dat voor  $x=0$  en  $y=0$  voor  $t=0$ , vindt men:

$$x(t) = v_{x0}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$y(t) = -v_f t + \tau(v_f + v_{y0})(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

De lezer kan controleren dat deze vergelijkingen inderdaad voldoen aan de beginvoorwaarden.

#### Corollarium: de proef van Galileo

[Aristoteles](#) beweerde dat voorwerpen des te sneller vallen naarmate ze zwaarder zijn. Deze theorie bleef aanvaard tot in de Middeleeuwen. Er is een verhaal dat [Galileo](#), ergens tussen 1589 en 1592, 2 loden bollen van verschillende diameter en dus verschillend gewicht van de scheve toren van Pisa naar beneden zou gegooid hebben om de theorie te weerleggen. Het verhaal gaat dat beide bollen gelijktijdig de grond bereikten. Er is echter nergens een betrouwbaar verslag hiervan.

De grote wiskundige uit onze streken, [Simon Stevin](#), heeft de proef ook gedaan en daarvan is wel een verslag. Hij liet in Delft 2 loden bollen, de ene 10 maal zwaarder dan de andere, van 30 voet (ongeveer 10 m) naar beneden vallen. Zijn vriend Johan Cornets-de Groot, burgemeester van Delft, hielp hem hierbij. Simon Stevin noteerde dat ze zo gelijk de grond bereikten dat er maar één klop te horen was. Het is echter niet duidelijk wanneer de proef uitgevoerd werd. Vermoedelijk was het in het jaar 1586. (naar Devreese, J.T. Vanden Berghe, G.: *Wonder is gheen wonder. De geniale wereld van Simon Stevin 1548-1620* Davidsfonds, Leuven (België) ISBN 90-5826-174-3)

Volgens de formules voor de eindsnelheid zou er een verschil moeten optreden, maar na 10 m is het tijdsverschil tussen de botsingen nauwelijks iets meer dan 1 ms en de afstand tussen de bollen dan ongeveer 8 cm. Opdat het verschil op het gehoor of zicht merkbaar zou zijn, moet er van minstens 30 m hoogte worden gewerkt. Dan eerst heeft men tijdsverschillen van meer dan 10 ms en een verschil in afstand van een 30 cm. Er moet immers eerst een verschil in snelheid opgebouwd worden voor er een verschil in positie kan ontstaan.



# Hoofdstuk 10

## Traagheidskrachten

### Inhoudsopgave

---

10.1 Inleiding . . . . .	203
10.2 Resultante en aangrijpingspunt . . . . .	204
10.3 Rotaties . . . . .	205
10.4 Traagheidskrachten en virtuele arbeid . . . . .	205

---

### 10.1 Inleiding

Wanneer men in een auto zit die door een bocht gaat, dan heeft men de indruk naar buiten te worden gedrukt. Theoretisch is er geen kracht die dat fenomeen veroorzaakt. Het is ons lichaam dat gewoon rechtdoor wil blijven gaan zolang er geen kracht is die het naar het middelpunt van de bocht duwt.

Voor een voorwerp dat een cirkel beschrijft, moet men theoretisch opschrijven dat de som van de krachten gelijk is aan de massa x een normale versnelling.

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_n$$

Dikwijls echter wil men een beweging beschrijven binnen een bewegend systeem, bv. een assenkruis verbonden aan de auto. Binnen dat systeem blijft de persoon op zijn plaats en is er dus geen versnelling. Men wil daar dus opschrijven dat de som van alle krachten 0 is. Beide voorstellingen zijn gemakkelijk te verzoenen als men rechterlid van vorige vergelijking naar links overbrengt. Men kan dat dan interpreteren als een **traagheidskracht** :  $-m\vec{a}_n = \vec{F}_T$ . Hiermede krijgt men dan:

$$\sum_i \vec{F}_i + \vec{F}_T = 0$$

Deze voorstelling van zaken komt ook beter overeen met onze ervaring. Bemerkt wel dat de zin van de traagheidskracht het tegengestelde is van de zin van de versnelling. Daar men hier de formule voor het statisch evenwicht gebruikt (som van alle krachten = 0) in een situatie waarin wel versnellingen optreden, noemt men dit **dynamisch evenwicht**.

Wanneer men de beweging van een voorwerp binnen een bewegend systeem wil beschrijven, dan zal men schrijven:

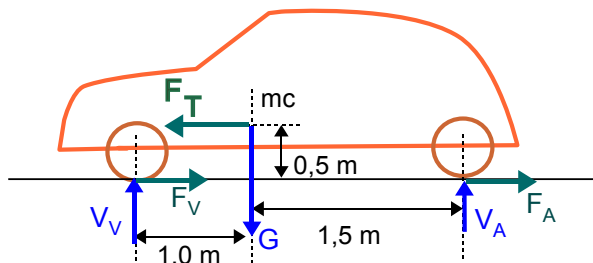
$$\sum_i \vec{F}_i + \sum \vec{F}_{T,i} = m\vec{a}_{rel}$$

Hierbij bevat de som van de traagheidskrachten de massa x alle versnellingstermen buiten de relatieve versnelling. Om precies te weten wat dit allemaal kan zijn moet men teruggaan naar het hoofdstuk over versnellingen in bewegende systemen 5.3.2. Het verschil tussen een traagheidskracht en de andere krachten is dat er bij traagheidskrachten geen ander voorwerp is dat die kracht uitoefent.

Vele fenomenen kan men zich beter voorstellen als men met traagheidskrachten werkt i.p.v. met de versnellingen. Sommigen houden ervan om een dynamische situatie (met versnellingen) te herleiden tot een statische, met som van de krachten = 0, door het gebruik van traagheidskrachten; Hierbij worden

alle versnellingen  $\times$  massa overgeheveld naar linkerlid en er als traagheidskrachten gepresenteerd. In die context spreekt men ook wel van **traagheidsreacties**.

Op het einde van het hoofdstuk over vlakke dynamica werd het voorbeeld behandeld van een afremmende auto (7.2.7.1). Wanneer men daar de massa  $\times$  versnelling vervangt door een traagheidsreactie  $F_T$ , dan ziet men, veel duidelijker dan op de figuur met de versnelling, het koppel  $(F_T, (F_V + F_A))$  dat de neus van de wagen naar beneden duwt. Zie infra voor een verdere verklaring.



Figuur 10.1: Traagheidsreactie bij afremmende auto

## 10.2 Resultante en aangrijpingspunt

Wanneer een voorwerp onderworpen is aan traagheidskrachten, rijst natuurlijk de vraag hoe groot die is en waar die aangrijpt. Feitelijk grijpen de traagheidskrachten aan op elk element van het voorwerp. Men krijgt dus een veld van kleine traagheidskrachtjes. Men zal dit in een gegeven punt kunnen samenstellen tot een resultante met of zonder bijhorend moment volgens de regels uitgelegd in het hoofdstuk over equivalente vectorsystemen 2

Het eenvoudigste geval heeft men bij een voorwerp dat onderworpen is aan een lineaire versnelling. Dan heeft men een veld van evenwijdige traagheidskrachten analoog aan het veld gecreëerd door de aantrekkingskracht van de aarde. Men zal dat veld dus ook kunnen samenstellen tot een zuivere kracht aangrijpend in het massacentrum van het voorwerp en met grootte de totale massa van het voorwerp  $\times$  de lineaire versnelling. Bv. bij een auto die remt, kan men het neerduiken van de neus verklaren door een traagheidskracht in het massacentrum die de wagen naar voor probeert te duwen. Daar de wrijving van de wielen met de grond de wagen naar achter duwt, krijgt men een moment dat de neus naar beneden draait.

Een iets ingewikkelder maar toch nog eenvoudige situatie wordt gevormd door een staaf die met één uiteinde aan de verticale draaiende as is bevestigd. De lengte van de staaf is  $l$  en de massa/lengte-eenheid is  $\rho$ . Elk deeltje van de staaf beschrijft een cirkel, die groter wordt naarmate dit deeltje verder van het scharnier af ligt. Als  $s$  de afstand is van het scharnier tot een bepaald punt, dan is de straal van de cirkel die dat punt beschrijft  $s \cdot \sin \theta$ . De bijhorende middelpuntvliedende krachten vormen dus een driehoekig krachtveld van evenwijdige krachten. Volgens de formules voor het samenstellen van evenwijdige krachten heeft men:

$$s_Z = \frac{\int_0^l \omega^2 \cdot s \sin \theta \cdot s \cdot \rho \cdot ds}{\int_0^l \omega^2 \cdot s \sin \theta \cdot \rho \cdot ds}$$

De noemer geeft ook de grootte van de resultante. Dat blijkt  $\rho \cdot \omega^2 \cdot l^2 \sin \theta / 2$ . Men kan dit lezen als  $(\rho \cdot \omega^2) \times$  het oppervlak van een driehoek met hoogte  $l$  en basis  $l \cdot \sin \theta$ . Voor het berekenen van het aangrijpingspunt kan men  $\rho$ ,  $\omega^2$  en  $\sin \theta$  voor het integraalteken brengen en wegdelen (voor  $\theta$  niet 0). Men krijgt als resultaat:

$$s_Z = (l^3/3)/(l^2/2) = (2/3)l.$$

Dit komt overeen met de positie van het zwaartepunt van een driehoek. Het evenwicht van deze staaf werd reeds besproken bij het berekenen van de evenwichtsstand met de methode van Lagrange 8.5. Bij gebruik van virtuele arbeid kan men het berekenen van de resultante en het aangrijpingspunt echter vermijden. Zie hiervoor infra.

Voor meer complexe situaties, zoals bv. als er nog een tweede staaf aan die eerste staaf hangt, is het gebruik van traagheidsreacties niet meer aangewezen.

## 10.3 Rotaties

Bij rotaties rond een as met vaste richting zal men geen traagheidskracht maar een traagheidsmoment  $M_T$  (niet te verwarren met het traagheidsmoment  $I$ !) moeten invoeren volgens hetzelfde recept als bij de traagheidskracht:

$$M_T = -I \cdot \alpha$$

In sommige situaties zal men zowel een traagheidskracht als een traagheidsmoment moeten invoeren. Wat men moet invoeren en welk traagheidsmoment  $I$  men hierbij moet gebruiken, kan men zien door te kijken naar de manier waarop de kinetische energie kan worden opgeschreven.

- Als er in de kinetische energie een term  $mv^2/2$  voor komt, dan moet men een traagheidskracht  $-ma$  invoeren in het massacentrum. Men is dan immers ergens vertrokken van  $\int m \vec{a} \cdot d\vec{r}$
- Als er in de kinetische energie een term  $m\omega^2/2$  voor komt, dan moet men een traagheidsmoment  $M_T = -I \cdot \alpha$  invoeren met traagheidsmoment  $I$  zoals in de kinetische energie. Men is dan immers ergens vertrokken van  $\int I \cdot \alpha \cdot d\theta$

Deze aanpak is echter niet erg gebruikelijk.

## 10.4 Traagheidskrachten en virtuele arbeid

Bij het gebruik van traagheidskrachten in combinatie met de methode van de virtuele arbeid, kan men soms ook rechtstreeks de virtuele arbeid van de traagheidskrachten berekenen zonder over de berekening van een resultante en een aangrijpingspunt te passeren. Dit is bv. het geval bij de roterende staaf van hierboven. Men heeft als krachten het gewicht en de traagheidsreacties. Voor de virtuele arbeid krijgt men, in een klassiek xy-assenkruis met oorsprong in het scharnier:

$$\vec{G} \cdot d\vec{r} + \int_0^l d\vec{F}_T \cdot d\vec{r} = -G \cdot \delta y + \int_0^l \delta x \cdot dF_T = 0$$

Hierin is (let op het minteken bij  $y_G$ ):

$$y_G = -(l/2) \cos \theta \quad \text{en} \quad \delta y = (l/2) \sin \theta \cdot \delta \theta$$

$$dF_T = \omega^2 s \sin \theta \cdot \rho \cdot ds$$

$$x_T = s \sin \theta \quad \text{en} \quad \delta x = s \cos \theta \cdot \delta \theta$$

Alles invullen:

$$-G \cdot (l/2) \sin \theta \cdot \delta \theta + \int_0^l \omega^2 s \sin \theta \cdot \rho \cdot s \cos \theta \cdot \delta \theta \cdot ds = 0$$

Of met gewicht  $G = \rho l g$  en alles wat geen functie is van  $s$  voor het integraalteken:

$$-\rho l g (l/2) \sin \theta + \rho \omega^2 \sin \theta \cos \theta \int_0^l s^2 \cdot ds = 0$$

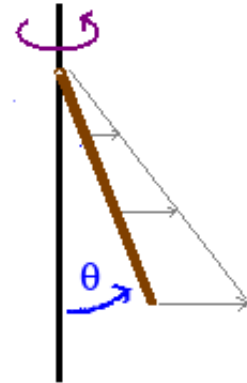
$\rho$  kan weggedeeld worden en voor  $\theta$  verschillend van 0 ook  $\sin \theta$ :

$$gl^2/2 = \omega^2 \cos \theta \cdot l^3/3$$

En uiteindelijk:

$$\cos \theta = \frac{3g}{2\omega^2 l}$$

wat hetzelfde is als hoger gevonden bij de methode van Lagrange.



Figuur 10.2: Staaf bevestigd aan roterende verticale staaf



# Hoofdstuk 11

## Botsingen

### Inhoudsopgave

---

<b>11.1 Inleiding</b> . . . . .	<b>207</b>
<b>11.2 Centrale botsing</b> . . . . .	<b>207</b>
11.2.1 De restitutiecoëfficiënt . . . . .	207
11.2.2 Tweede definitie . . . . .	211
<b>11.3 Schuine botsing</b> . . . . .	<b>212</b>
<b>11.4 Botsingen tussen voorwerpen</b> . . . . .	<b>213</b>
11.4.1 Het slagcentrum . . . . .	215

---

### 11.1 Inleiding

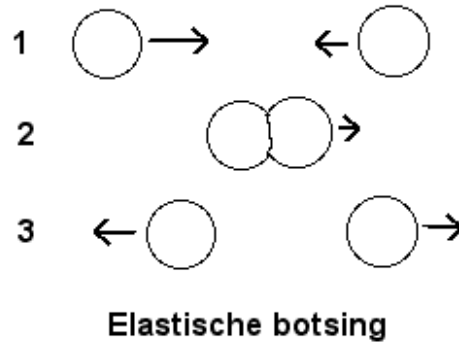
Men onderstelt dat twee voorwerpen op zulke manier met elkaar botsen dat er alleen met de **krachten tussen deze twee voorwerpen** rekening moet worden gehouden. Er werd bij de bespreking van de impuls reeds aangetoond hoe een zeer kleine botsingstijd kan leiden tot het verwaarlozen van niet botsingskrachten zoals bv. de zwaartekracht. Het kan ook om een beweging in een horizontaal vlak gaan: een puck op een luchttafel of een biljartbal op biljarttafel. In eerste instantie zal gesproken worden over **botsende puntmassa's of volkomen gladde voorwerpen**, zodat er tijdens de botsing alleen normaalkrachten, krachten loodrecht op het botsingsvlak, optreden en geen tangentiële krachten. Deze laatste zouden bij een reëel voorwerp een rotatie kunnen doen ontstaan of afremmen. Dat geval zal later behandeld worden.

Men onderscheidt centrale en schuine botsingen. Bij een centrale botsing liggen de snelheden van de massacentra van de twee botsende massa's volgens de verbindinglijn van die centra, bij een schuine botsing niet. Een andere formulering stelt dat bij centrale botsingen de snelheden loodrecht staan op het botsingsvlak en bij een schuine botsing niet.

### 11.2 Centrale botsing

#### 11.2.1 De restitutiecoëfficiënt

Wanneer twee massa's centraal met elkaar botsen, dan kan men twee fases onderscheiden. Wanneer de twee massa's elkaar raken zullen ze elkaar indrukken totdat er geen relatieve snelheid meer is tussen beide, d.i. totdat ze beide dezelfde snelheid hebben. Gedurende die tijd ondervinden beide een gelijke en tegengestelde stoot  $N_s$ . Dit is de **samendrukkingsfase**. De meeste voorwerpen hebben een zekere elasticiteit, zodat ze de deuk proberen te herstellen. Hierbij worden de massa's weer uit elkaar geduwd. Dit is de **ontspanningsfase**. Ook tijdens deze fase ondervinden beide massa's een even grootte maar tegengestelde stoot  $N_o$ .



Figuur 11.1: Elastische botsing

Indien de deuk volledig hersteld wordt, dan heeft men een **volkomen elastische botsing**. De kinetische energie, die tijdens de samendrukkingsfase naar elastische potentiële energie omgezet werd, zal zich terug omzetten naar kinetische energie. Dan gaat er geen energie verloren tijdens de botsing en zal de stoot tijdens de samendrukking even groot zijn als de stoot tijdens de ontspanning. De twee voorwerpen gaan dan terug uiteen met dezelfde relatieve snelheid als die waarmede ze elkaar naderden. De absolute snelheden van beide hoeven echter niet dezelfde te zijn als voor de botsing. Denk maar aan de biljartbal die tegen een stilstaande bal botst zodat de eerste bal nadien stil ligt en de tweede bal nu weg rolt. Dit geval wordt verder als eerste voorbeeld uitgewerkt.

Als er geen enkel herstel is dan spreekt men van **volkomen weke botsing** of **volkomen inelastische botsing**. Dan blijven de beide voorwerpen aan elkaar kleven en bewegen samen verder met de gemeenschappelijke snelheid van het einde van de samendrukkingsfase. Er is geen omzetting van kinetische energie in potentiële, maar de kinetische energie die tijdens de samendrukkingsfase verdwijnt, wordt afgevoerd door inwendige wrijving binnen de twee voorwerpen.

De meeste botsingen liggen echter ergens tussenin. Om die te kunnen typeren voert men de **restitutiecoëfficiënt  $k$**  in. Er zijn hiervan twee definities mogelijk. De eerste definitie zegt dat dit de verhouding is van de grootte van de relatieve snelheid na de botsing over de grootte van de relatieve snelheid voor de botsing. De waarde van  $k$  kan dus variëren van 0 (volkomen weke botsing) tot 1 (volkomen elastische botsing).

$$k = \frac{v_{rel,na}}{v_{rel,voor}}$$

waarbij de conventie gebruikt is dat  $v$  zonder vectorpijlje erboven staat voor de norm of grootte van de vector. Deze definitie wordt toegeschreven aan Newton.

In de meeste gevallen kan men deze relatieve snelheden vrij gemakkelijk opschrijven, zeker als het een botsing is met een stilstaand voorwerp. Als er verscheidene onbekenden in de formules voorkomen, moet men deze relatieve snelheden op een systematische manier berekenen. Men moet zowel voor als na ofwel de snelheid van voorwerp 1 aftrekken van de snelheid van voorwerp 2 of omgekeerd. Als er een relatieve snelheid is na de botsing, heeft die zeker de tegengestelde zin van die voor de botsing. Men moet dus nog een minteken voor de verhouding zetten. In volgende formules duiden alle snelheden op **projecties** op de gemeenschappelijke richting van de snelheden en kunnen dus zowel positief als negatief zijn. De snelheden voor worden aangeduid met het symbool  $v$ , de snelheden na met het symbool  $u$ :

$$k = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$$

### Voorbeeld

Als eerste voorbeeld wordt het geval van de botsende biljartballen gekozen met de onderstelling dat het een volkomen elastische botsing is. Voor de botsing beweegt de eerste bal met een snelheid  $v_1$  van links naar rechts en ligt de tweede bal stil. Men kan dan behoud van impuls opschrijven.

$$m\vec{v}_1 + 0 = m\vec{u}_1 + m\vec{u}_2$$

Men kan alles projecteren op de richting van  $v_1$ :

$$mv_1 + 0 = mu_1 + mu_2$$



Dit kan duidelijk nog vereenvoudigd worden tot:

$$v_1 = u_1 + u_2$$

Er blijken 2 veranderlijken in deze vergelijking te zitten. Men heeft dus nog een bijkomende vergelijking nodig. Dit kan ofwel het behoud van (kinetische) energie zijn, of de restitutiecoëfficiënt.

Met de restitutiecoëfficiënt krijgt men:

$$1 = -\frac{u_2 - u_1}{0 - v_1}$$

of

$$v_1 = u_2 - u_1$$

Beide vergelijkingen samen leveren het eenvoudige stelseltje:

$$v_1 = u_2 + u_1$$

$$v_1 = u_2 - u_1$$

Door eens lid aan lid af te trekken en op te tellen, krijgt men de enige oplossing hiervan:

$$u_1 = 0 \quad \text{en} \quad u_2 = v_1$$

Dit is dus het bekende omwisselen van de snelheden.

Met behoud van energie wordt de tweede vergelijking:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(u_1^2 + u_2^2)$$

Dit kan duidelijk vereenvoudigd worden. Na oplossen van de eerste vergelijking naar bv.  $u_1$  en substitutie in de tweede bekomt men hetzelfde resultaat.



Figuur 11.2: Newtons wieg

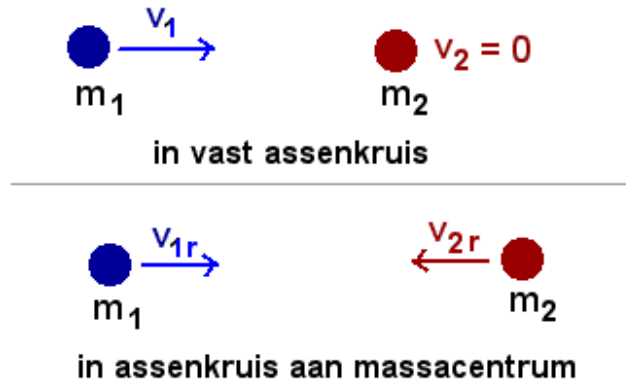
Een ander voorbeeld van een (bijna) volkomen elastische botsing is bekend als de wieg van Newton (zie fig. 11.2). Men kan één of meer balletjes laten botsen en dan worden er aan het andere einde evenveel balletjes weggeslingerd. Het speeltje is hier afgebeeld op de titelpagina van zijn boek “Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica”, kortweg de “Principia” van 1687.

Men kan een simulatie van botsingen vinden bij de bekende fysica applets van [fysica applets van Walter Fendt](http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/Fendt/ph14nl/collision_nl.htm)<sup>1</sup>. Tijdens de botsing wordt het massacentrum van het systeem als een punt in de balk onderaan

<sup>1</sup>[http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/Fendt/ph14nl/collision\\_nl.htm](http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/Fendt/ph14nl/collision_nl.htm)

getoond. Een ander applet, waarbij men met wat meer parameters kan spelen, is te vinden in de [Wiley Simulation Library](#)<sup>2</sup>

De basis voor de wetten van de elastische botsing werd gelegd door René Descartes en Christiaan Huygens. Deze laatste bedacht de truc om de botsing te beschrijven in een systeem verbonden aan het massacentrum.



Figuur 11.3: Botsing in systeem verbonden met massacentrum

Als er geen uitwendige krachten werken op beide massa's, dan beschrijft het massacentrum een rechte baan met constante snelheid. In zo'n systeem mogen de wetten van Newton en de afgeleide wetten ook opgeschreven worden. Dan heeft men dat de totale impuls van beide massa's altijd 0 moet zijn (zie hiervoor Het massacentrum 7.1). Beide massa's moeten dus voor de botsing altijd naar elkaar toekomen en zullen na de botsing in het massacentrum blijven liggen of terug uit elkaar gaan. Voor het voorbeeld van de biljartbal die tegen een stilliggende bal aanbotst heeft men:

$$v_c = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \frac{m v_1}{2m} = 0,5 v_1$$

In een assenkruis dat met deze snelheid beweegt worden de snelheden van beide ballen:

$$v_{1r} = v_1 - v_c = 0,5 v_1$$

$v_{2r} = 0 - v_c = -0,5 v_1$  . dit is een snelheid naar links. In dit assenkruis komen beide ballen dus met even grote snelheden naar elkaar toe.

In het applet uit de Wiley Simulation Library kan men ook duidelijk zien dat, als een zware massa tegen een lichte aanbotst, de lichte massa met grote snelheid weggeslingerd wordt. Voert men in de vergelijking van het behoud van impuls uit vorig voorbeeld een massa  $m_1$  en  $m_2$  in en combineert men dit opnieuw met de vergelijking die volgt uit een restitutiecoëfficiënt = 1, dan krijgt men:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Indien  $m_1 = 10 \times m_2$ , dan wordt  $u_2 = (20/11)v_1$  of bijna het dubbele van de beginsnelheid van  $m_1$ .

Bij een botsende bal (zie fig. 11.4) kan men de afleiden uit de hoogten waarop hij terugkaatst. Wanneer men een bal laat vallen van een hoogte  $h_1$ , dan zal die de grond bereiken (met verwaarlozen van luchtweerstand over de kleine afstand die hier gebruikt wordt) met een snelheid:

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}$$

Na de botsing vertrekt de bal omhoog met een snelheid:

$$v_2 = k \cdot v_1$$

De bal zal dan opnieuw een hoogte  $h_2$  bereiken:

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{k^2 v_1^2}{2g}$$

... en hetzelfde herhaalt zich bij elke bots.

<sup>2</sup><http://www3.interscience.wiley.com:8100/legacy/college/halliday/0471320005/simulations6e/>



Figuur 11.4: Stroboscopische foto van botsende tennisbal

De verhouding van de opeenvolgende hoogten blijkt het kwadraat van  $k$ :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{k^2 v_1^2 / 2g}{v_1^2 / 2g} = k^2$$

Dit betekent dat de hoogten zeer snel afnemen. Bij een  $k=0,9$  is  $k^2$  immers maar 0,81 meer.

### 11.2.2 Tweede definitie

Nota: deze tweede definitie is niet essentieel en kan gerust overgeslagen worden.

De tweede definitie voor  $k$  zegt dat het de verhouding is tussen de grootte van de stoot tijdens de ontspanningsfase,  $N_o$ , over de grootte van de stoot tijdens de samendrukkingsfase,  $N_s$ , voor één der betrokken massa's.

Duidt men de snelheden voor en na de botsing aan zoals hoger en de gemeenschappelijke snelheid als  $v$ , dan geldt:

$$\vec{N}_s = m_1(\vec{v} - \vec{v}_1) = -m_2(\vec{v} - \vec{v}_2)$$

Duidt men de snelheden na de botsing aan als  $u_1$  en  $u_2$  dan geldt:

$$\vec{N}_o = m_1(\vec{u}_1 - \vec{v}) = -m_2(\vec{u}_2 - \vec{v})$$

Bij een centrale botsing liggen alle snelheden volgens de verbinding tussen de twee massacentra. Men kan dus alle vectoren projecteren op een as volgens die lijn, waarbij elke projectie nog positief of negatief kan uitvallen. Men krijgt dan:

$$k = \frac{N_o}{N_s} = \frac{u_1 - v}{v - v_1} = \frac{u_2 - v}{v - v_2}$$

Uit deze vergelijking kan  $v$  geëlimineerd worden:

$$k = \frac{\text{teller1}-\text{teller2}}{\text{noemer1}-\text{noemer2}} = \frac{u_1 - u_2}{-v_1 + v_2} = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1}$$

... zoals ook hoger gevonden.

De gemeenschappelijke snelheid  $v$  tussen de twee fases volgt uit behoud van impuls als:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Hiermede kan nu ook de grootte van het verlies aan kinetische energie tijdens de samendrukkingsfase berekend worden:

$$\Delta E_{ks} = \left( \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2}$$

Na substitutie van de formule voor  $v$  en enig rekenwerk blijkt dit te herleiden tot:

$$\Delta E_{ks} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2$$

Op analoge manier leidt de berekening van de winst aan kinetische energie tijdens de ontspanningsfase tot:

$$\Delta E_{ko} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (u_1 - u_2)^2$$

De verhouding hiervan leidt tot een verrassend resultaat:

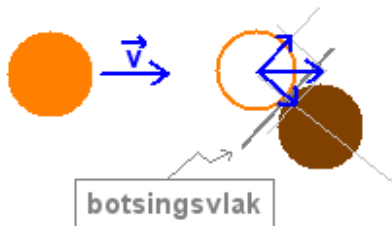
$$\frac{\Delta E_{ko}}{\Delta E_{ks}} = \frac{(u_1 - u_2)^2}{(v_1 - v_2)^2} = k^2$$

Men kan dit ook controleren in het applet van Wiley (zie link hoger).

### 11.3 Schuine botsing

Wanneer de snelheden van de botsende massa's niet volgens de verbindingslijn van de massacentra liggen, heeft men een schuine botsing. Of anders geformuleerd: bij een centrale botsing ligt het botsingsvlak loodrecht op de snelheden, bij een schuine botsing niet. Men blijft hier voorlopig binnen de onderstelling dat er tijdens de botsing geen krachten in het botsingsvlak optreden maar alleen krachten loodrecht op het botsingsvlak.

Een biljartspeler gebruikt veel meer schuine botsingen dan echte centrale botsingen. Wat volgt is hierop vrij goed toepasselijk voor zover het gaat over iemand die zonder speciaal "effect" speelt. Bij effectballen worden ballen gebruikt die niet zuiver rollen, maar ook nog op een andere manier roteren. Voor experimentele controle van de schuine botsing kan men best pucks op een luchtkussentafel gebruiken.



Figuur 11.5: Schuine botsing

Bij een schuine botsing geldt wat gezegd werd over de restitutiecoëfficiënt voor **de componenten van de snelheid loodrecht op het botsingsvlak**. In het licht van de tweede definitie van de restitutiecoëfficiënt, die steunt op de verhouding van de stoten voor en na de botsing, lijkt dit gerechtvaardigd. Men zal dus de snelheden moeten splitsen volgens componenten evenwijdig aan het botsingsvlak en componenten loodrecht op het botsingsvlak.

Als voorbeeld wordt de situatie uit de figuur genomen, met een hoek van  $30^\circ$  tussen de richting van de snelheid en de richting van de component loodrecht op het botsingsvlak. Men voert een rechthoekig assenkruis in, zodat de x-as loodrecht staat op het botsingsvlak en de y-as eraan parallel is. Men krijgt dan als vergelijkingen:

- behoud van impuls:

$$m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2$$

In projecties:

$$m_1 v_{1x} + 0 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} \dots \text{onbekenden } u_{1x} \text{ en } u_{2x}$$

$$m_1 v_{1y} + 0 = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} \dots \text{onbekenden } u_{1y} \text{ en } u_{2y}$$

- Voor de restitutiecoëfficiënt:

$$k = -\frac{u_{2x} - u_{1x}}{0 - v_{1x}} \dots \text{onbekenden } u_{1x} \text{ en } u_{2x}$$

Men ziet dat de vergelijking voor de restitutiecoëfficiënt en de projecties op de x-as een stelsel vormen van 2 vergelijkingen in 2 onbekenden. Dat is afzonderlijk oplosbaar. Er blijft op eerst zicht een probleem voor de projecties op de y-as. Daar er echter gewerkt wordt in de onderstelling dat er geen stoten zijn in het botsingsvlak, kunnen de y-componenten niet gewijzigd worden. Dus  $u_{1y} = v_{1y}$  en voor dit geval blijft  $u_{2y} = 0$ .

Wanneer er behoud van energie geldt (of  $k = 1$ ) dan moeten beide ballen, als de massa's gelijk zijn, onder een rechte hoek uit elkaar gaan. Uit het behoud van de kinetische energie volgt immers dat :

$$v_1^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Dit beantwoordt aan de stelling van Pythagoras en eist dus een rechte hoek tussen  $u_1$  en  $u_2$ . Wanneer  $k < 1$  dan is er wordt de relatieve snelheid volgens de x-as na de botsing kleiner dan in vorig geval. De eerste bal blijft dicht bij zijn oorspronkelijke richting. De tweede bal blijft onder dezelfde hoek vertrekken omdat hij onder dezelfde hoek aangestoten wordt, maar hij vertrekt met een kleinere snelheid. Men kan dit gesimuleerd zien in een applet van B.Surendranath Reddy. Men kan het vinden op zijn eigen site op <http://surendranath.tripod.com/Applets.html> of op de mirror site <http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Applets.html> onder "Dynamics -> collisions". "vrf" betekent v finaal van de rode bal.

## 11.4 Botsingen tussen voorwerpen

Bij botsingen tussen voorwerpen zal men ook rekening houden met het rotatie-effect van de stoten. In het algemeen moet men de impuls wet toepassen op elk voorwerp:

$$\sum_i \vec{N}_i = m(\vec{v}_{na} - \vec{v}_{voor})$$

Men zal ook de impuls momentstelling t.o.v. het massacentrum of een stilstaand punt moeten toepassen. Daar men mag onderstellen dat tijdens de botsing het contactpunt van de stoten zich niet verplaatst, kan men deze schrijven als:

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{N}_i = I(\omega_{na} - \omega_{voor})$$

In vele gevallen kan men echter ook behoud van impuls moment toepassen, waardoor de berekening sterk vereenvoudigd worden. Verder zal de restitutiecoëfficiënt weer toegepast worden voor de snelheden loodrecht op het botsingsvlak. Deze toepassing wordt toegeschreven aan **John Wallis** (1616 -1703) Zie ook het artikel **John Wallis** in de Engelse Wikipedia.

### Voorbeeld 1

Een kleine kogel met massa  $m_1$  botst tegen het einde B van een staaf. De staaf heeft massa  $m_2$  en lengt  $l$ , en is scharnierend opgehangen in haar andere eindpunt A. De restitutiecoëfficiënt is 0,5 . Bereken de snelheid van de kogel en de hoeksnelheid van de staaf na de botsing.

Als men de impulsstelling wil opschrijven voor de staaf, moet men er rekening mee houden dat er tijdens de botsing ook een stoot zal optreden in het ophangpunt A. Men kan echter alle stoten uit de berekening houden door behoud van impuls moment t.o.v. A toe te passen. Hoeksnelheden en momenten worden positief gerekend in tegenwijzerzin. De snelheid van de kogel na de botsing wordt genoteerd als  $-v_f$  in de onderstelling dat die naar links gericht is:

$$lm_1 v_1 = I_c \omega - lm_1 v_f$$

Voor de restitutiecoëfficiënt:

$$0,5 = \frac{l\omega + v_f}{v_1}$$

Dit levert 2 vergelijkingen in de 2 onbekenden  $\omega$  en  $v_f$ .

Indien men geen gebruik maakt van behoud van impuls moment moet men opschrijven:

- voor de kogel: impulsstelling

$$-N_B = m_1(-v_f - v_1)$$

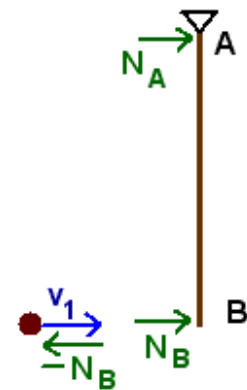
- voor de staaf: impulsstelling:

$$N_A + N_B = m_2(v_c - 0)$$

..impuls moment, bv. t.o.v. A:

$$lN_B = I_A \omega$$

... rotatie rond A:



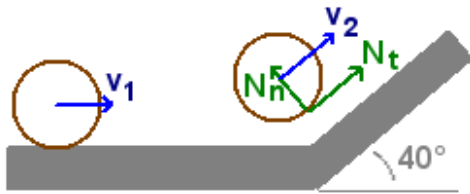
Figuur 11.6: Botsing van kogel en staaf

$$v_c = l\omega/2$$

- en dan nog de vergelijking voor de restitutiecoëfficiënt zoals hoger.

Dit levert 5 vergelijkingen in 5 onbekenden. Op die manier heeft men dus heel wat meer vergelijkingen en onbekenden!

### Voorbeeld 2



Figuur 11.7: Cilinder botsend tegen helling

Een holle buis met massa  $m$  en straal  $r$  rolt met snelheid  $v_1$  tegen een schuine helling. Bereken de snelheid van cilinder langs deze helling in de onderstelling dat er voldoende wrijving is om ervoor te zorgen dat het contactpunt met de helling stilstaat tijdens de botsing (m.a.w. dat er ogenblikkelijk overgegaan wordt naar zuiver rollen langs de helling).

Problemen met wrijvingskrachten tijdens de botsing kan men vereenvoudigen indien men ofwel mag onderstellen dat de wrijving zo groot is dat beide voorwerpen niet over elkaar schuiven in het contactpunt, ofwel zo klein dat men mag onderstellen dat het ene voorwerp wel de hele tijd schuift over het andere. In dit laatste geval moet de wrij-

vingescoëfficiënt voortdurend maximaal zijn zodat men dan kan stellen dat de tangentiële component van de stoot,  $N_t$ , gelijk is aan  $f_{\max}$  maal de normale component,  $N_n$ . Of  $N_t = f_{\max} \cdot N_n$

Als men onderstelt dat het contactpunt met de helling stilstaat, dan kan men opnieuw behoud van impulsmoment t.o.v. dat punt toepassen. Voor de berekening van het impulsmoment moet men hier beroep doen op de eerste formule van König (7.2.6.1):

$$L = M_p m v_{mc} + I\omega$$

De loodrechte afstand van het botsingspunt naar de drager van  $v_1$  is hier  $d = r \cdot \cos 40^\circ$ . Hiermede wordt het behoud van impuls (met  $40^\circ = \theta$ ):

$$r \cos \theta \cdot m v_1 + I\omega_1 = r m v_2 + I\omega_2$$

Het traagheidsmoment van een holle buis met massa  $m$  en straal  $r = mr^2$ . Verder geldt dat bij rollen  $v_{mc} = r\omega$ . Hiermede kan de vergelijking herwerkt worden tot de zeer eenvoudige uitdrukking:

$$v_1(1 + \cos \theta) = 2 v_2$$

$$v_2 = \frac{1 + \cos \theta}{2} = 0,883 v_1$$

Hieruit volgt dus de gevraagde eindsnelheid. Het blijkt dus dat de eis om bij de botsing dadelijk over te gaan op zuiver rollen een welbepaalde onderstelt, in feite een  $k=0$  of een volkomen inelastische botsing. Het contactpunt valt immers stil in de gemaakte onderstelling. Men kan gemakkelijk controleren dat er energie verloren gegaan is. Het blijkt dat voor een rollende holle buis de totale kinetische energie kan geschreven worden als:

$$E_k = \frac{m v_{mc}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = \frac{m v_{mc}^2}{2} + \frac{m r^2 \omega^2}{2} = m v^2$$

Het procentueel verlies in kinetische energie wordt dan:

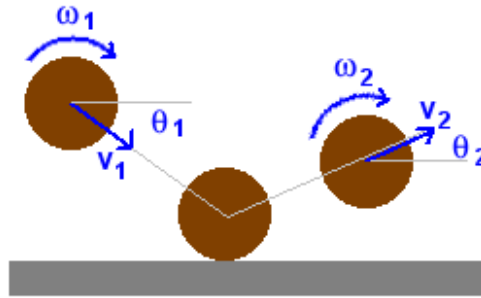
$$100 \frac{\Delta E_k}{E_{k,voor}} = 100 \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{m v_1^2} = 100(0,883^2 - 1) = -22,0 \%$$

### Voorbeeld 3

Als derde voorbeeld wordt een effectbal (in basket bv.) beschouwd. Een bal wordt tegen de grond gegooid met een begin rotatie zoals gegeven op de figuur. Gevraagd wordt de hoek van de terugkaatsende bal, zijn snelheid en hoeksnelheid als de bekend is.

Er wordt opnieuw ondersteld dat de wrijving zo groot is dat het contactpunt met de grond op een bepaald ogenblik niet beweegt t.o.v. de grond. Men kan dus opnieuw behoud van impulsmoment t.o.v. dit contactpunt toepassen (wijzerzin wordt als positief genomen):

$$r \cos \theta_1 \cdot m v_1 + I\omega_1 = r \cos \theta_2 \cdot m v_2 + I\omega_2$$



Figuur 11.8: Botsende bal met effect

Indien het contactpunt stilstaat, betekent dit dat de bal op dat ogenblik rolt zonder slippen:

$$v_2 \cos \theta_2 = r\omega_2$$

Er zijn echter 3 onbekenden. Bij vorig probleem lag de richting van de eindsnelheid vast, hier niet. Er blijft hier dus nog plaats voor een vergelijking waarbij de verticale snelheden van het contactpunt betrokken zijn. Daar de botsing tegen een stilstaand horizontaal vlak is, is de gewoon de verhouding van de verticale snelheden van het contactpunt. Bemerkt dat de rotatie geen invloed heeft op die verticale snelheid van het contactpunt.

$$v_2 \sin \theta_2 = k \cdot v_1 \sin \theta_1$$

Hiermede heeft men stelsel van 3 vergelijkingen in 3 onbekenden. Men kan er een lineair stelsel van maken door met de x- en y-componenten van de snelheden te werken i.p.v. met grootte en hoek. Men krijgt dan:

$$rmv_{1x} + I\omega_1 = rmv_{2x} + I\omega_2$$

$$v_{2x} = r\omega_2$$

$$v_{2y} = k \cdot v_{1y}$$

Uit de laatste vergelijking volgt  $v_{2y}$ . Stelt men  $I = 2mr^2/3$  (traagheidsmoment van een holle bol) dan bekomt men voor  $v_{2x}$ :

$$v_{2x} = v_{1x} + \frac{2}{3}r\omega_1$$

Hieruit blijkt dus duidelijk het effect van de rotatie of spin die aan de bal meegegeven werd.

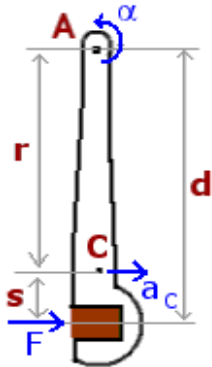
Als men het hoger gegeven voorbeeld van schuine botsing zou willen oplossen met wrijving tussen de beide schijven of ballen, dan moet men de normale en tangentiële stoten op beide schijven invoeren (2 onbekenden). Verder heeft men als onbekenden de beide snelheden van de massacentra na de botsing (4 onbekenden) en de beide hoeksnelheden (2 onbekenden). In het totaal dus 8 onbekenden. Als vergelijkingen kan men opschrijven: de impulsstelling voor elk van de schijven (4 vergelijkingen), de impulsmomentstelling voor elke schijf (2 vergelijkingen) en de vergelijking van de restitutiecoëfficiënt. Als laatste vergelijking moet men nog iets opschrijven i.v.m. de wrijving. Ofwel onderstelt men dat de schijven altijd over elkaar geschoven hebben en krijgt men als laatste vergelijking  $N_t = f_{\max}N_n$

Ofwel komen beide omtrekken in rust t.o.v. elkaar en kan men de tangentiële snelheid van de contactpunten gelijk stellen. Als dat niet opgaat moet men een gedetailleerde numerieke simulatie gebruiken.

### 11.4.1 Het slagcentrum

Als men met een hamer op iets klopt, is er dan een plaats van de steel waar men die kan vasthouden om een minimum of zelfs niets van de slag te voelen? Enkele eeuwen geleden formuleerde men de vraag ook als volgt: kan men een zwaard ontwerpen zodat men in het handvat zo weinig mogelijk voelt van de impact bij het toedienen van een houw? Het antwoord op deze vragen is dat zoiets bestaat. Het heet het **slagcentrum** of in Vlaanderen meestal **percussiecentrum** (onder invloed van het Franse "centre de percussion" en het Engelse "centre of percussion"). Een ander domein waar de vraag gesteld wordt is

bij weerstandstesten, waarbij een zware slinger tegen het testmateriaal slaat. Ook dan verlangt men dat er geen reactie zou zijn in het ophangpunt van de slinger.



Als voorbeeld zal hier de ballistische slinger gebruikt worden. Dit is een apparaat waarmee de snelheid van afgevuurde kogels bepaald wordt. Een ballistische slinger bestaat uit een houten blok onderaan een slinger. Men schiet de kogel in het blok en uit de uitwijking van de slinger kan dan de snelheid van de kogel berekend worden.

Er zijn (minstens) **drie manieren** in omloop om de positie van het slagcentrum wiskundig te bepalen. Een **eerste definitie** speelt zich af op het niveau van krachten en versnellingen. Wanneer men een kracht op een vrij voorwerp uitoefent zodat de werklijn naast het massacentrum passeert, dan zal het resultaat een versnelling van het massacentrum ( $a_C$ ) zijn en een hoekversnelling rond het massacentrum. Voor punten aan de andere zijde van het massacentrum zal de rotatie een relatieve versnelling creëren die tegengesteld is aan  $a_C$ . Het slagcentrum is dan het punt waar de kracht moet uitgeoefend worden, opdat de totale versnelling van het ophangpunt 0 zou zijn.

Figuur 11.9: Ballistische slinger Men kan de situatie ook bekijken **op het niveau van de stoot en de snelheid en hoeksnelheid**. Het slagcentrum is dan het punt waar de stoot moet aangrijpen opdat de totale snelheid van het ophangpunt 0 zou zijn.

Tenslotte is er ook een **meer wiskundige variant** op de eerste formulering. Hierin stelt men dat een kracht die uitgeoefend wordt op een vrij voorwerp, een systeem doet ontstaan met de dimensies van een kracht en een moment, nl.  $(ma_C, I\alpha)$ .

Het slagcentrum is dan het punt waar dit systeem kan herleidt worden tot een zuivere kracht  $ma_C$ , rekening houdend met een verband tussen  $a_C$  en  $\alpha$  ontstaan door het bevestigingspunt. Zie het hoofdstuk over “Equivalenten vectorsystemen” (2) voor de theorie hierachter.

Het massacentrum van de slinger ligt in C. Wanneer men de situatie bekijkt op het niveau van kracht en versnelling krijgt men:

$$F = ma_C$$

$$sF = I_C\alpha$$

De eis aan het ophangpunt A wordt dan:

$$a_A = a_C - r\alpha = 0$$

Lost men de eerste 2 vergelijkingen op resp. naar  $a_C$  en  $\alpha$  en vult men dat in in de derde vergelijking, dan kan s bepaald worden als functie van r,  $I_C$  en de totale massa m, maar onafhankelijk van F:

$$s = \frac{I_C}{mr}$$

Bekijkt men alles op niveau van de stoten en de snelheden dan krijgt men als vergelijkingen:

$$N = mv_Cc$$

$$sN = I_C\omega$$

De eis aan het ophangpunt A wordt dan:

$$v_A = v_C - r\omega = 0$$

Wat met dezelfde aanpak tot hetzelfde resultaat leidt

De derde methode eist dat

$$sma_Cc = I\alpha$$

onder de bijkomende voorwaarde dat

$$r\alpha = a_C$$

Dit leidt duidelijk tot hetzelfde resultaat.



In de bovenstaande berekening werd gewerkt met het traagheidsmoment t.o.v. het massacentrum en alle afstanden werden uitgedrukt t.o.v. het massacentrum. Men kan echter ook werken met het traagheidsmoment t.o.v. het ophangpunt A en de afstand vanaf dat ophangpunt. Volgens de formule van Steiner geldt:

$$I_A = I_C + mr^2$$

Wanneer het moment van F berekend wordt t.o.v. A wordt de tweede vergelijking:

$$dF = I_A A \alpha$$

Dit leidt tot de formule:

$$d = \frac{I_A}{mr}$$

Men moet dus wel opletten dat men beide mogelijkheden niet door elkaar mengt.

Om met een ballistische slinger de snelheid van een kogel te bepalen zal men steunen op het behoud van het impulsmoment t.o.v. A en het behoud van energie na de botsing. Het behoud van impulsmoment levert (met index k voor de kogel):

$$dm_k v_k = (I_a + m_k d^2) \omega$$

Als de slinger uitwijkt over een hoek  $\theta$  krijgt men:

$$(I_a + m_k d^2) \omega^2 / 2 = (m_s r + m_k d) g (1 - \cos \theta)$$

#### Nota

De afbeelding "Newtons wieg" is afkomstig van Wiki Commons:

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newtons\\_cradle\\_animation\\_book.gif](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newtons_cradle_animation_book.gif)

De botsende tennisbal is eveneens uit de Wiki Commons:

[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bouncing\\_ball\\_strobe\\_edit.jpg](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bouncing_ball_strobe_edit.jpg)

Gelieve de betrokken pagina's te raadplegen voor de rechten i.v.m. deze afbeeldingen



# Hoofdstuk 12

## Centrale kracht en planetenbeweging

### Inhoudsopgave

---

<b>12.1 Het twee lichamen-probleem</b> . . . . .	<b>219</b>
<b>12.2 Centrale kracht</b> . . . . .	<b>220</b>
12.2.1 Potentiaalfunctie . . . . .	220
12.2.2 Behoud van impulsmoment . . . . .	221
<b>12.3 Formule van Binet</b> . . . . .	<b>222</b>
<b>12.4 De kegelsneden</b> . . . . .	<b>223</b>
<b>12.5 Satellietbanen</b> . . . . .	<b>225</b>
12.5.1 Voorbeeld . . . . .	227
<b>12.6 De wetten van Kepler</b> . . . . .	<b>228</b>
<b>12.7 Totale energie</b> . . . . .	<b>229</b>
<b>12.8 Aarde niet raken</b> . . . . .	<b>230</b>
<b>12.9 Overgangsbaan</b> . . . . .	<b>230</b>
<b>12.10 De parametervergelijking</b> . . . . .	<b>231</b>
<b>12.11 Afstotingskracht</b> . . . . .	<b>231</b>

---

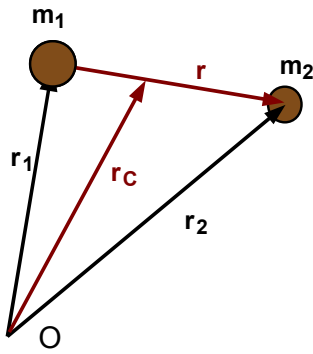
### 12.1 Het twee lichamen-probleem

De aarde draait rond de zon, de maan draait rond de aarde. Dit gebeurt onder invloed van de aantrekkingskracht tussen deze hemellichamen. In het geval van de aarde en de maan kan men zich toch wel afvragen of de aantrekkingskracht van de maan de aarde niet van haar baan om de zon doet afwijken. Dit blijkt inderdaad het geval. De analyse van dit soort situaties staat in de mechanica bekend als “het twee lichamen-probleem”.

In feite draaien aarde en maan rond hun gemeenschappelijk massacentrum en draait dit massacentrum rond de zon. Als men even de aantrekkingskracht van de zon buiten beschouwing laat, dan heeft men 2 voorwerpen die mekaar aantrekken. Men kan hun positie t.o.v. een willekeurige oorsprong beschrijven m.b.v. de twee positievectoren  $\mathbf{r}_1$  en  $\mathbf{r}_2$  (zie fig. 12.1). Men kan ze echter ook beschrijven m.b.v. de positievector  $\mathbf{r}_C$  van het massacentrum en twee relatieve positievectoren  $\mathbf{r}'_1$  en  $\mathbf{r}'_2$ . Als beide de massa's van die voorwerpen gegeven worden door  $m_1$  en  $m_2$ , dan wordt de positie van het massacentrum gegeven door

$$\vec{r}_C = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

De relatieve positievectoren worden dan gegeven door (volgens het recept: relatieve positie = eindpunt - beginpunt):



$$\vec{r}_1' = \vec{r}_1 - \vec{r}_C = \frac{m_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$$

Als men nu een positievector van het tweede voorwerp t.o.v. het eerste invoert

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

dan wordt dit:

$$\vec{r}_1' = -\frac{m_2\vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Op analoge manier vindt men dat:

$$\vec{r}_2' = -\frac{m_1\vec{r}}{m_1 + m_2}$$

Figuur 12.1: Twee lichamen-probleem

De kinetische energie van dit systeem kan m.b.v. de formule van König opgeschreven worden als:

$$E_k = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{r}_C'^2 + \frac{1}{2}(m_1\vec{r}_1'^2 + m_2\vec{r}_2'^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\vec{r}_C'^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}^2$$

De eerste term is de kinetische energie van translatie van het massacentrum. De tweede term kan gelezen worden als de kinetische energie van een voorwerp met massa  $m_1m_2/(m_1 + m_2)$  op een afstand  $r$  van het eerste voorwerp. M.a.w. als men de beweging van de maan rond de aarde wil beschrijven alsof de aarde stilstaat, dan kan dat op voorwaarde dat men aan de maan een andere massa toekent. Die massa noemt men **de gereduceerde massa** en is gegeven door:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Soms wordt dit ook geschreven als

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Hetzelfde geldt voor de baan van een satelliet rond de aarde of de aarde rond de zon. In beide gevallen echter is de massa van het tweede voorwerp zeer klein t.o.v. de massa van het eerste voorwerp. Men kan de eerste definitie van  $\mu$  in teller en noemer delen door  $m_1$ :

$$\mu = \frac{m_2}{1 + m_2/m_1}$$

Als  $m_1$  veel groter is dan  $m_2$ , dan blijft de noemer ongeveer 1 en is de massa  $\mu$  dus zeer dicht bij de werkelijke massa  $m_2$  van de planeet of satelliet.

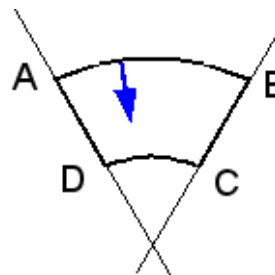
Het feit dat de aarde en de maan rond hun gemeenschappelijk massacentrum draaien, verklaart een deel van de getijden. Het massacentrum van het systeem aarde-maan valt binnen de aarde. er is een hoogtij aan de kant van de maan, veroorzaakt door de aantrekkingskracht van de maan. er is echter ook een hoogtij aan de tegenovergestelde zijde van de aarde, omdat dat punt het verst ligt van dat massacentrum en daardoor een grotere middelpuntvliedende kracht ondervindt (zie hiervoor eventueel het hoofdstuk over traagheidskrachten (10)). Beide effecten blijken in grootte dicht bij elkaar te liggen.

## 12.2 Centrale kracht

### 12.2.1 Potentiaalfunctie

Wanneer men een krachtveld heeft waarin alle dragers van de krachten door één bepaald punt passeren en de grootte alleen afhankelijk is van de afstand tussen de twee voorwerpen, dan spreekt men van een centrale kracht. Er kan aangetoond worden dat de gravitatiekracht die uitgaat van een bol, een resultante heeft die aangrijpt in het centrum van de bol (door integreren over de bol). De aantrekkingskracht van de zon en de planeten is dus een centrale kracht, die kan beschouwd worden als wijzend naar het centrum van de zon of de planeet.

Een centrale kracht heeft altijd een **potentiaalfunctie**. De arbeid die geleverd moet worden om een gesloten kromme te doorlopen in het krachtveld van een centrale kracht is immers altijd 0. Dit wordt geïllustreerd met de kromme ABCD in de figuur. Bij verplaatsen over de boogjes AB en CD staat de kracht loodrecht op de verplaatsing en is er dus geen arbeid. Voor elk punt van het rechte stuk BC is er een overeenkomstig punt van DA waarop dezelfde kracht aangrijpt, maar dat in tegengestelde zin doorlopen wordt. De bijdragen over BC en DA vallen dus tegen elkaar weg. De totale arbeid is dus 0.



Figuur 12.2: Gesloten kromme in centraal krachtveld

Meer wiskundig kan men stellen dat de rotor van een kracht alleen kan verschillen van 0 als een bepaalde component van de kracht functie is van één of meer andere componenten van de positie. In cartesische coördinaten betekent dat bv. dat de x-component van de kracht moet functie zijn van de y- of z-component van de positie. Voor bolcoördinaten betekent het dat de radiale component moet functie zijn van de hoeken  $\theta$  of  $\phi$ . Maar bij een centrale kracht is er alleen een radiale component en die is alleen functie van  $r$ .

Voor een voorwerp dat beweegt in een centraal krachtveld geldt dus de wet van **behoud van energie**. Zoals in het hoofdstuk over elementaire dynamica aangetoond werd, kan de potentiële energie van de gravitatie (6.4.3.3) geschreven worden als

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r} + C$$

Bij de klassieke ijking stelt men deze potentiële energie gelijk 0 voor  $r = \text{oneindig}$ . Op die manier wordt  $C = 0$  en hoeft men geen constante mee te nemen. Het gevolg is wel dat voor alle reële afstanden de potentiële energie negatief is en dat men wel moet bedenken dat -100 kleiner is dan -10. **Voor een voorwerp dat zich juist kan onttrekken aan de gravitatiekracht van de aarde zal de totale energie = 0 zijn**. Hoe dit bekomen wordt kan men zien in het voorbeeld dat uitgerekend wordt na de berekening van deze potentiële energie in het hoger vermelde hoofdstuk. Deze eigenschap zal verder gebruikt worden bij het berekenen van de excentriciteit van een baan.

Een tweede merkwaardige eigenschap is dat voor een cirkelbaan de kinetische energie de helft is van de (absolute) waarde van de potentiële energie. Bij een cirkelbaan zorgt de gravitatiekracht voor de normale versnelling:

$$G \frac{m_1 m_2}{r_c^2} = m_2 v^2 / r_c$$

Hieruit volgt dadelijk  $v_c^2 = G m_1 / r_c$ . Als men dit invult in de kinetische energie, krijgt men voor de totale energie van een voorwerp op een cirkelbaan:

$$E = E_p + E_k = -G \frac{m_1 m_2}{r_c} + \frac{m_2 v_c^2}{2} = -G \frac{m_1 m_2}{r_c} + G \frac{m_1 m_2}{2 r_c} = -G \frac{m_1 m_2}{2 r_c}$$

### 12.2.2 Behoud van impulsmoment

Wanneer een voorwerp beweegt onder invloed van een centrale kracht dan moet er behoud van impulsmoment gelden t.o.v. de oorsprong van die kracht. Er kan immers alleen een verandering in impulsmoment van een voorwerp in beweging optreden onder invloed van een moment uitgeoefend door een inwerkende kracht. Maar de centrale kracht heeft geen moment t.o.v. het centrum van die kracht. een voorwerp dat beweegt onder invloed van een centrale kracht moet dus steeds zijn impulsmoment behouden.

Een gevolg hiervan is dat de baan van dat voorwerp in een vlak loodrecht op die impulsmomentvector moet liggen. Wanneer een satelliet gelanceerd wordt met een bepaald vectoriële snelheid, dan bepalen de positievector van dat lanceerpunt en de richting van die snelheid het vlak waarin de satelliet zal bewegen. De beweging zal kan dan best beschreven worden in poolcoördinaten, d.i. als in termen van een afstand  $r$  en een hoek  $\theta$  t.o.v. een referentierichting.

### 12.3 Formule van Binet

Wie niet geïnteresseerd is in de wiskundige afleiding van planetenbanen kan deze paragraaf overslaan.

Wanneer men de bewegingsvergelijkingen van een massa die beweegt in een centraal krachtveld wil opstellen met de methode van Lagrange (8), dan moet men eerst de kinetische energie opschrijven. In poolcoördinaten wordt dit:

$$E_k = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$$

Er wordt op dit ogenblik nog geen specifieke kracht ondersteld. Alleen weet men dat de potentiaalfunctie alleen zal afhangen van  $r$  en dus kan geschreven worden als  $V(r)$ . Hiermede kan de Lagrangiaan opgeschreven worden als:

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r)$$

Hieruit volgen dan de twee vergelijkingen:

$$\mu r^2 \dot{\theta} = C \quad (1)$$

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad (2)$$

Uit de Lagrangiaan blijkt dat  $\theta$  een cyclische coördinaat(8.3) is. Dat leidt dus tot een invariante van de beweging, in dit geval tot het behoud van impulsmoment. De constante  $C$  in (1) is niets anders dan het impulsmoment  $L_0$ .

Als men de vergelijking van de baan,  $r = f(\theta)$ , wil bekomen, dan doet men dit normaal door de veranderlijke  $t$  (tijd) te elimineren tussen de twee opgeloste differentiaalvergelijkingen. Hier zou men echter de differentiaalvergelijking voor de baan willen bekomen zonder die differentiaalvergelijkingen op te lossen. daarvoor wordt beroep gedaan op de kettingregel van het differentiëren:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

Hierbij kan men de afgeleide van  $\theta$  uit (1) halen:

$$\dot{\theta} = \frac{L_0}{\mu r^2}$$

Hiermede wordt de eerste afgeleide van  $r$ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L_0}{\mu r^2}$$

Voor wie ervaring heeft met oplossen van differentiaalvergelijkingen, suggereert deze uitdrukking dat het interessanter kan zijn om over te schakelen op een nieuwe veranderlijke  $u = 1/r$ . Men krijgt dan immers:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

Hiermede kan de vorige uitdrukking herschreven worden als:

$$\dot{r} = \frac{-L_0}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

Voor de tweede afgeleide van  $r$  naar de tijd wordt opnieuw de kettingregel toegepast op deze uitdrukking:

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \left( \frac{-L_0}{\mu} \frac{d^2u}{d\theta^2} \right) \left( \frac{L_0}{\mu} u^2 \right) = \frac{-L_0^2}{\mu^2} u^2 \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

De partiële afgeleide van de potentiaalfunctie naar  $r$  is niets anders dan de centrale kracht  $F$ . Alles invullen in (2) levert:

$$\frac{L_0^2}{\mu} u^2 \left( \frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) = -F$$

Deze zeer algemene formule staat bekend als de **formule van Binet**, naar de [Franse wiskundige Binet](http://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet)<sup>1</sup> (1786-1856).

<sup>1</sup>[http://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques\\_Philippe\\_Marie\\_Binet](http://fr.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet)

Dit wordt nu toegepast voor de gravitatiekracht, die hier eenvoudig zal opgeschreven worden als  $-k\mu/r^2 = -k\mu u$ , met  $k = G$  maal de som van de twee massa's. Met  $\mu$  de gereduceerde massa krijgt men zo de correcte aantrekkingskeacht als  $Gm_s m_a / r^2$ . Voor een satelliet is  $\mu$  praktisch gelijk aan zijn massa. Men krijgt dan als differentiaalvergelijking voor de baan, na wat vereenvoudigen:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{k\mu^2}{L_0^2}$$

De oplossing hiervan is van de vorm:

$$u = \frac{1}{r} = C \cdot \cos(\theta - \theta_0) + \frac{k\mu^2}{L_0^2}$$

Of in functie van  $r$ :

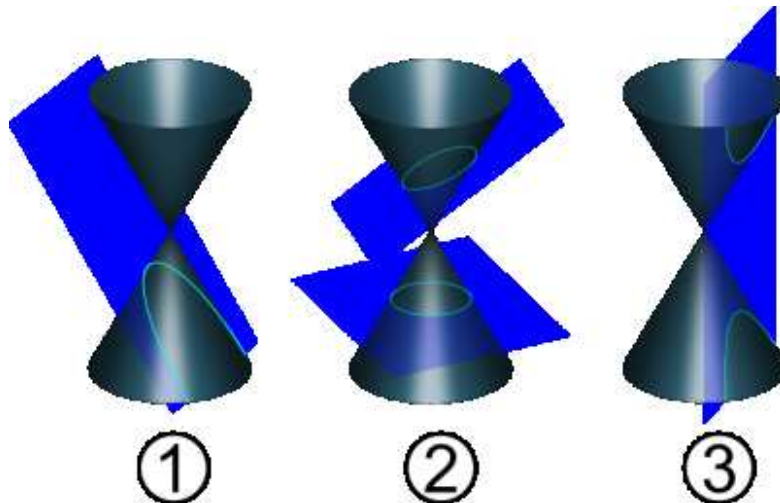
$$r = \frac{L_0^2 / k\mu^2}{1 + (CL_0^2 / k\mu^2) \cos(\theta - \theta_0)}$$

Hierin zijn  $C$  en  $\theta_0$  integratieconstanten, die uit de randvoorwaarden moeten bepaald worden. Dit kan vereenvoudigd worden tot:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

Dit is de vergelijking van een kegelsnede met een brandpunt in de oorsprong en met excentriciteit  $\epsilon$  en met de grote as gedraaid over een hoek  $\theta_0$  t.o.v. de referentierichting (normaal de horizontale). Voor wie hiermede niet vertrouwd is volgt hier een kleine uitweiding over de kegelsneden.

## 12.4 De kegelsneden



Figuur 12.3: 1=parabool, 2=cirkel en ellips, 3=hyperbool (uit Wiki Commons)

De kegelsneden zijn een groep krommen die men kan laten ontstaan door een dubbele ronde kegel te laten snijden met een vlak. Als dat vlak evenwijdig is met het grondvlak en loodrecht op de symmetrieas, dan is de snijlijn een cirkel. Laat men het vlak kantelen, dan bekomt men een ellips. Als de het vlak één kegel snijdt en evenwijdig is aan de andere kegel is de snijlijn een parabool. Als beide kegels gesneden worden bekomt men een hyperbool. Men kan een meer uitvoerige uitleg vinden in de Nederlandse Wikipedia onder "[Kegelsnede](#)". Een nog beter artikel is te vinden in de Engelse Wikipedia onder "[Conics](#)". In het Frans spreekt men van "les coniques". In de figuur is 1=parabool, 2=cirkel en ellips, 3=hyperbool.

Dikwijls wordt vertrokken van de meest eenvoudige vorm van de vergelijkingen voor deze krommen. In een klassiek **cartesisch assenkruis** worden die:

- voor de **ellips** :  

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Voor  $y = 0$  (snijpunten met de x-as) krijgt men dat  $x$  moet gelijk zijn aan  $+a$  of  $-a$ . De parameters  $a$  is dus de halve as in de x-richting. Analoog is  $b$  de halve as in de y-richting. Indien  $a = b$  heeft men een **cirkel**. De vergelijking wordt dan geschreven als  $x^2 + y^2 = r^2$  met  $R$  de straal van de cirkel.

- voor de **parabool**

$$y = ax^2$$

Voor  $x = +1$  of  $-1$  is  $y = a$ . De parameter  $a$  bepaalt dus hoe sterk de parabool opengaat. Voor  $x$  gaande naar oneindig gaat ook  $y$  naar oneindig. Men zegt dat de parabool raakt aan de kromme op oneindig, voor deze formulering: in de richting van positieve y-as.

- voor de **hyperbool**

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

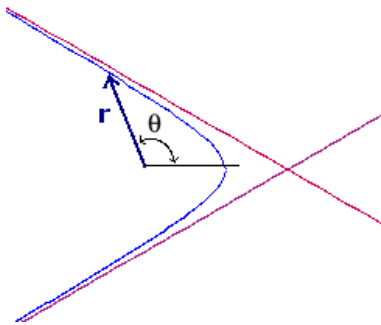
Voor  $y = 0$  krijgt men weer dat  $x$  moet gelijk zijn aan  $+a$  of  $-a$ . Maar voor  $x = 0$  moet men de wortel trekken uit  $-b^2$ . Dat levert dus zogenaamde imaginaire punten op.

De krommen kunnen ook beschreven worden in poolcoördinaten. Dan hebben alle kegelsneden de vorm:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos(\theta)}$$

Hierin is  $\epsilon$  de **excentriciteit**. Naargelang de grote van deze parameter kan men volgende gevallen onderscheiden:

- $\epsilon = 0$  : de vergelijking van een cirkel. Hieraan is dus niets excentriek. In feite staat er dan geen echte vergelijking meer maar alleen  $r = p$ .
- $0 < \epsilon < 1$  : een ellips
- $\epsilon = 1$  : een parabool. Voor  $\theta = 180^\circ$  wordt  $\cos \theta = -1$ . De noemer heeft dan een nulpunt en  $r$  gaat dus naar oneindig.



Figuur 12.4: Hyperboolbaan bij aantrekkingskracht

Voor  $\epsilon > 1$  heeft men een hyperbool. Maar hier liggen de zaken iets moeilijker. In de mechanica moet bij poolcoördinaten **r altijd positief** zijn. Als  $\theta = 180^\circ$  heeft men een negatieve  $r$  en dat is dus niet toegelaten. Men krijgt dus maar 1 tak van de hyperbool. In de meetkunde aanvaardden sommige auteurs een negatieve  $r$  bij poolcoördinaten. Dan levert de zone rond  $\theta = 180^\circ$  de andere tak. Aan de rand van de verboden zone wordt de noemer nul en gaat  $r$  dus naar oneindig. Deze richtingen worden de asymptotische richtingen genoemd. Bij een aantrekkende kracht ligt het aantrekkingscentrum in het brandpunt binnen de toegelaten hyperbooltak. Later zal gezien worden dat bij afstotende krachten het afstotingscentrum in het brandpunt buiten de toegelaten hyperbooltak ligt.

Een ellips kan ook gedefinieerd worden als de verzameling van alle punten zodat de som van de afstanden tot twee gegeven punten

constant is. Die twee punten noemt men de brandpunten of foci van de ellips. Een geanimeerde voorstelling hiervan kan men vinden als [de ellips van de tuinman](#)

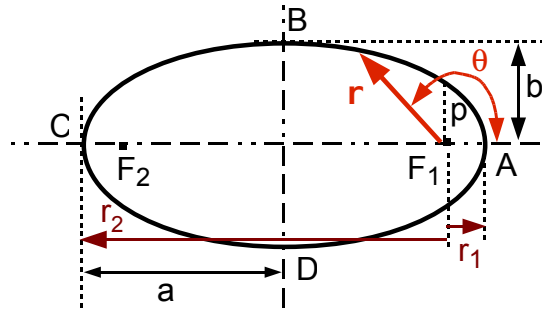
De planetenbanen zijn meestal ellipsen. Voor een ellips kan men nog volgende elementen definiëren (zie fig.12.5):

- de halve grote as  $a$
- de halve kleine as  $b$

- de afstand van een brandpunt tot de meest nabije top van de ellips (A):  $r_1$ . Wordt hier bereikt bij  $\theta = 0^\circ$ . Bij een satelliet die rond de aarde draait noemt men dit het perigeum, voor een planeet die rond een zon draait het perihelium (van de Griekse woorden  $\gamma\eta$  = aarde en  $\epsilon\lambda\iota\omicron\varsigma$  = zon en  $\pi\epsilon\rho\iota$  = dichtbij)

- de afstand van een brandpunt tot de verste top van de ellips (C):  $r_2$ . Wordt hier bereikt bij  $\theta = 180^\circ$ . Bij een satelliet die rond de aarde draait noemt men dit het apogeum, voor een planeet die rond een zon draait het aphelium (van het Griekse woord  $\alpha\pi\omicron$  = ver weg).





Figuur 12.5: Ellips met alle parameters

Nota: de vergelijking kan ook opgeschreven worden met een minteken in de noemer. Dan wordt alles gespiegeld t.o.v. de kleine as. De ellips wordt dan beschreven vanuit  $F_2$ , met  $r_1$  naar links bij  $\theta = 180^\circ$  en  $r_2$  naar rechts bij  $\theta = 0^\circ$

Tussen deze elementen bestaan volgende betrekkingen:

$$2a = r_1 + r_2 \quad b = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

Voor het omrekenen van  $r_1$  en  $r_2$  naar  $a$  en  $b$  moet men een vierkantsvergelijking oplossen:

$$x^2 - 2ax + b^2 = 0$$

met als oplossing:

$$r_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$r_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$$

Voor de excentriciteit heeft men:  $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2}$

De oppervlakte van een ellips is  $\pi ab$ .

### Voorbeeld

Indien de assen gegeven zijn als  $a = 5$  cm en  $b = 3$  cm dan krijgt men

$$r_1 = a - \sqrt{a^2 - b^2} = 5 - \sqrt{25 - 9} = 1 \text{ cm}$$

$$r_2 = a + \sqrt{a^2 - b^2} = 5 + \sqrt{25 - 9} = 9 \text{ cm}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{25 - 9}}{5} = 0.8$$

$$\epsilon = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1 - 9}{1 + 9} = \frac{8}{10}$$

Ter controle:

$$2a = 10 \text{ cm} = r_1 + r_2 = 1 + 9 = 10 \text{ cm}$$

$$b = 3 \text{ cm} = \sqrt{r_1 \cdot r_2} = \sqrt{1 \cdot 9} = 3 \text{ cm}$$

## 12.5 Satellietbanen

Men moet nu deze formule betrekken op de lanceerpositie en -snelheid van de satelliet. er wordt ondersteld dat de satelliet door een raket in een bepaald beginpunt van de baan gebracht wordt met een bepaalde beginsnelheid. In wat volgt wordt dit de lanceerpositie genoemd.  $r_0$  is de afstand tot de lanceerpositie,  $v_0$  de snelheid in dat punt en  $\varphi$  de hoek met de aardstraal door dat punt (zie fig. 12.6). Men heeft dan:

$$L_0 = \|\vec{r}_0 \times \mu \vec{v}_0\| = \mu v_0 \cdot r_0 \cdot \sin \varphi$$

De baan van een planeet of satelliet is in feite onafhankelijk van de massa. Alleen zal er meer energie nodig zijn om een zware satelliet een zelfde lanceersnelheid mee te geven vanuit dezelfde lanceerpositie

dan een lichter satelliet. In de uitdrukkingen die opgesteld werden komt dikwijls de breuk  $L_0/\mu$  voor. Daar  $\mu$  in teller en noemer voorkomt, zal dit in het vervolg vervangen worden door  $c/k$ , waarin  $c = L_0/\mu$  en dus ook een constante is.

$$c = \|\vec{r}_0 \times \vec{v}_0\| = v_0 \cdot r_0 \cdot \sin \varphi$$

$$p = \frac{c^2}{k} = \frac{v_0^2 \cdot r_0^2 \cdot \sin^2 \varphi}{k}$$

Om de excentriciteit te kunnen betrekken in de vergelijkingen, wordt de snelheid uitgerekend. Dit is een vrij omslachtige berekening, die niet wiskundig geïnteresseerden kunnen overslaan.

In poolcoördinaten geldt:

$$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$$

De radiale snelheid wordt, zoals hoger, berekend via de kettingregel en met gebruik van  $r\omega^2 = c$  (behoud van impulsmoment):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{c}{r^2} \\ &= \frac{\epsilon \cdot c \cdot \sin(\theta - \theta_0)}{p} \end{aligned}$$

Uiteindelijk bekomt men:

$$v^2 = \frac{\epsilon \cdot c \cdot \sin(\theta - \theta_0)}{p} + \frac{c^2 [1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)]^2}{p^2}$$

Na nog wat rekenwerk haalt men hieruit:

$$\epsilon^2 - 1 = \frac{c^2}{k^2} \left( v^2 - \frac{2k}{r} \right) \quad (\text{A})$$

Hoger werd bij het behoud van energie reeds opgemerkt dat de minimale snelheid opdat een voorwerp zich zou onttrekken aan de gravitatiekracht van de aarde gegeven wordt door:

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{k\mu}{r} \quad \text{of} \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2k}{r_0}}$$

Om de berekeningen te vereenvoudigen wordt nu de verhouding  $q$  ingevoerd gedefinieerd als:

$$q_0 = \frac{v_0^2}{v_\infty^2}$$

Voor een cirkel moet  $q_0 = 1/2$ , om de reden die hoger bij behoud van energie vermeld werd.

Invoeren van deze  $q_0$  in de vergelijking voor  $\epsilon$  leidt tot:

$$\epsilon^2 = 1 - 4q_0(1 - q_0) \sin^2 \varphi \quad (\text{B})$$

Hiervan mag alleen de positieve wortel gebruikt worden. Bemerkt dat man voor een cirkelbaan steeds loodrecht op de straal moet lanceren, dus met  $\varphi = 90^\circ$ , want de raaklijn aan een cirkel staat altijd loodrecht op de straal.

Men kan de **vergelijking van de baan** dan herschrijven als:

$$r = \frac{2 \cdot r_0 \cdot q_0 \cdot \sin^2 \varphi}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

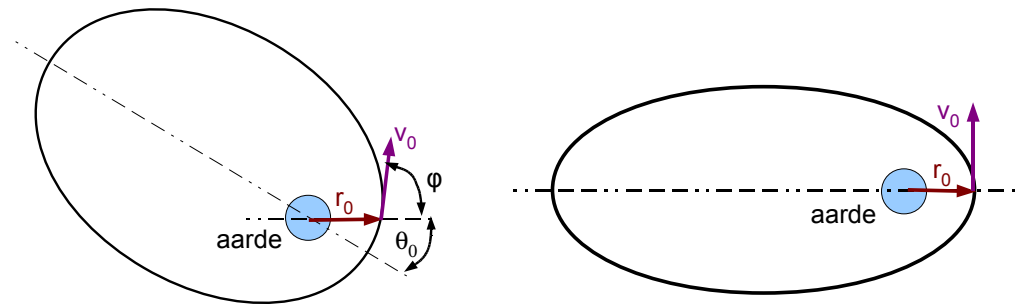
De hoek  $\theta_0$  kan berekend worden uit de vergelijking van de ellips door  $r = r_0$  te stellen en  $\theta = 0$ . Men krijgt:

$$\cos \theta_0 = \frac{1 - 2q_0 \sin^2 \varphi}{\epsilon}$$

Het perigeum wordt gegeven door

$$r_1 = \frac{2 \cdot r_0 \cdot q_0 \cdot \sin^2 \varphi}{1 + \epsilon}$$

Voor het apogeum heeft men:



Figuur 12.6: Lanceerposities voor een satelliet

$$r_2 = \frac{2 \cdot r_0 \cdot q_0 \cdot \sin^2 \varphi}{1 - \epsilon}$$

De som van beide is  $2a$ . M.b.v.  $a$  kan de omlooptijd berekend worden, zoals verder zal getoond worden. De halve kleine as is dan

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$$

De invloed van de hoek  $\varphi$  op de baan wordt duidelijk geïllustreerd in een applet van B.Surendranath Reddy, op zijn eigen site op <http://surendranath.tripod.com/Applets/Dynamics/Kepler/SatelliteApplet.html> of op de mirror site <http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Kepler/Kepler.html>. Er zal later aangetoond worden dat zowel de totale kinetische energie als de omlooptijd alleen afhangen van de halve grote as  $a$ . Daar de kinetische energie niet beïnvloed wordt door de hoek  $\varphi$ , blijven omlooptijd en grote as onveranderd bij verschillende waarden van  $\varphi$ .

De formules worden sterk vereenvoudigd als men lanceert loodrecht op de aardstraal. Dit betekent dat men ofwel in het perigeum of in het apogee lanceert. dan wordt  $\sin \varphi = 1$ ,  $\theta_0 = 0$  en men krijgt:

$$\epsilon^2 = 1 - 4q_0 + 4q_0^2$$

Men kan controleren dat voor  $q_0 = 1/2$ ,  $\epsilon = 0$  wordt, zoals vereist voor een cirkelbaan. Als  $q_0$  groter is dan  $1/2$  dan lanceert men vanuit het perigeum, als  $q_0$  kleiner is dan  $1/2$  dan lanceert men vanuit het apogee. Om een positieve  $\epsilon$  te krijgen moet men dus schrijven:

$$\epsilon = 1 - 2q_{\text{apogee}} \quad \text{of} \quad \epsilon = 2q_{\text{perigeum}} - 1$$

Men krijgt verder:

$$r_{\text{apo}} = \frac{2r_{\text{peri}}q_{\text{peri}}}{1 + \epsilon}$$

$$r_{\text{peri}} = \frac{2r_{\text{apo}}q_{\text{apo}}}{1 - \epsilon}$$

### 12.5.1 Voorbeeld

Men moet voor de numerieke voorbeelden bedenken dat  $r$  gemeten wordt vanaf het centrum van de aarde. Als  $R_a$  de straal is van de aarde en  $h$  de hoogte boven het aardoppervlak, dan  $r = R_a + h$ . Voor de aarde is  $k = 4.10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ ,  $R_a = 6370 \text{ km}$ .

Een satelliet wordt gelanceerd loodrecht op de aardstraal op een hoogte van 400 km met een snelheid van 8,8 km/s. Bereken de elementen van de baan.

Oplossing:

$$r_0 = 6370 + 400 = 6770 \text{ km} = 6,77 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$q_0 = \frac{v_0^2}{v_{\text{inf}}^2} = \frac{(8,8 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14} / 6,77 \cdot 10^6} = \frac{524,27}{800} = 0,6553$$

$q_0$  is groter dan  $1/2$ : er wordt gelanceerd vanuit het perigeum.

$$\epsilon = 2q_{per} - 1 = 2.0,6553 - 1 = 0,3061 r_{apo} = \frac{2r_{peri}q_{peri}}{1 + \epsilon} = \frac{2.6,77 \cdot 10^6 \cdot 0,6553}{1 - 0,3061} = 12870 \text{ km}$$

$$h_{apo} = 12870 - 6370 = 6500 \text{ km}$$

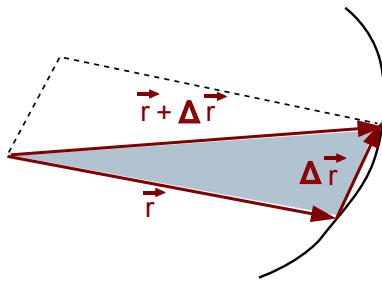
$$\text{De dubbele grote as : } 6770 \text{ km} + 12870 \text{ km} = 19640 \text{ km. } a = 9820 \text{ km}$$

$$b = \sqrt{6770 \cdot 12870} = 9334 \text{ km}$$

## 12.6 De wetten van Kepler

**Johannes Kepler** (1517 - 1630) Gaf voor het eerst een nauwkeurige beschrijving van de banen van de planeten. Later zouden deze dienen als voornaamste inspiratie van het werk van Newton. Zijn ideeën zijn vervat in zijn drie wetten:

- De baan van een planeet is een ellips met de zon in een brandpunt
- De lijn die de zon met de planeet verbindt, doorloopt gelijke oppervlakten in gelijke tijden. Dit wordt ook wel de perkenwet genoemd.
- De kwadraten van de omlooptijden verhouden zich als de derde machten van de halve grote as.



Figuur 12.7: Perkenwet

De eerste wet is hierboven afgeleid en reeds uitvoerig gebruikt. Voor de tweede wet wordt beroep gedaan op het vectorieel product. Als een planeet (of satelliet) gedurende een tijd  $\Delta t$  een verplaatsing  $\Delta \vec{r}$  ondergaan heeft (zie figuur 12.7), dan is de oppervlakte begrensd door  $r$ ,  $\Delta r$  en  $(r + \Delta r)$  de helft van het parallellogram dat men kan construeren met  $r$  en  $\Delta r$ . Als men de oppervlakte hiervan voorstelt als  $\Delta A$ , dan volgt uit de eigenschappen van het vectorieel product dat

$$\Delta A = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \Delta \vec{r}\|$$

Delen door  $\Delta t$  en overgaan naar de limiet voor  $\Delta t$  gaande naar 0:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \|\vec{r} \times \vec{v}\|$$

Uit behoud van impulsmoment bij de planetenbeweging volgt echter dat het rechterlid constant is. Waarmee de perkenwet bewezen is.

Deze wet betekent dat een planeet of satelliet sneller zal bewegen als hij dichterbij het aantrekkend hemellichaam komt en trager naarmate hij er zich van verwijdert.

Voor de derde wet moet eerst de omlooptijd berekend worden. Hiervoor wordt de vorige uitdrukking geïntegreerd over een volledige omwenteling:

$$\int dA = \int_0^T (c/2) dt \quad \text{waaruit} \quad \pi ab = cT/2$$

met  $T$  de gevraagde periode van de planeet of satelliet. In de gevonden uitdrukking zitten echter drie elementen van de baan, nl.  $a$ ,  $b$  en  $c$ . Daartussen bestaan verbanden die moeten toelaten om de formule eenvoudiger te schrijven. Men heeft

$$p = \frac{c^2}{k} \quad \text{of} \quad c^2 = pk$$

Als men de uitdrukking voor  $T$  herschikt en kwadrateert:

$$T^2 = \frac{4\pi a^2 b^2}{c^2} = \frac{4\pi a^2 b^2}{pk}$$

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} \right) = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad (C)$$

Anderzijds heeft men ook:

$$1 - \epsilon^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Substitueert men dit in vorige uitdrukking dan krijgt men de formule voor de **omlooptijd** :

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{k}$$

Dit bevestigt de derde wet van Kepler. Dit wordt nog duidelijker als men de formule herschrijft als:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{k}{4\pi^2} = C$$

### Voorbeeld 1

Op welke hoogte en met welke snelheid moet men satelliet lanceren als men hem in een cirkelvormige baan rond de aarde wil hebben met een omlooptijd van 8 u.

Oplossing:

$$8 \text{ u} = 8 \cdot 3600 \text{ s} = 28800 \text{ s}$$

Bij een cirkelbaan is  $a$  ook de straal van de cirkel:

$$a = \left( \frac{T^2 k}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left( \frac{28800^2 \cdot 4 \cdot 10^{14}}{4\pi^2} \right)^{\frac{1}{3}} = 20331 \text{ km}$$

hoogte =  $20331 - 6370 = 13961 \text{ km}$  boven aardoppervlak

$$v = \sqrt{\frac{k}{r}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{14}}{20,331 \cdot 10^6}} = 4435 \text{ m/s}$$

### Voorbeeld 2

Bereken de omlooptijd van de satelliet uit het vorige voorbeeld.

Oplossing:  $a = 9820 \text{ km}$

$$T = \left( \frac{4\pi a^3}{k} \right)^{0.5} = \frac{2\pi(982 \cdot 10^4)^{\frac{3}{2}}}{2 \cdot 10^7} = \frac{\pi \cdot 982^{\frac{3}{2}}}{10} = 9667 \text{ s} = 2 \text{ u } 41 \text{ min } 7 \text{ s}$$

## 12.7 Totale energie

Er wordt nu aangetoond dat de totale energie enkel afhangt van de halve grote  $a$ . In het begin van dit hoofdstuk werd er reeds aan herinnerd dat de potentiële energie in een gravitatieveld kan geschreven worden als  $-km/r$ . Voor de kinetische energie wordt teruggekeerd naar de formule A hierboven, die opgelost wordt naar  $v^2$ :

$$v^2 = \frac{k^2}{c^2}(\epsilon^2 - 1) + \frac{2k}{r}$$

Hoger werd onder (B) afgeleid dat

$$a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}$$

en anderzijds is er  $p = c^2/k$ . Vult men dat alles in in vorige uitdrukking dan krijgt men:

$$v^2 = \frac{-k}{a} + \frac{2k}{r}$$

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} = \frac{-mk}{2a} + \frac{mk}{r}$$

$$E_{totaal} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{-mk}{2a} + \frac{mk}{r} - \frac{mk}{r} = \frac{-mk}{2a}$$

Deze betrekking zou dus ook kunnen worden gebruikt om de grote  $a$  uit te rekenen en daarmee dan de omlooptijd. Men kan ook gemakkelijk controleren dat de formule klopt voor een cirkelbaan. Het blijkt dus dat de lanceringshoek  $\varphi$  geen invloed heeft op de grote  $a$  noch op de omlooptijd, maar alleen op de excentriciteit van de baan. Aan het einde van de paragraaf over satellietbanen werd verwezen naar een applet waarmee dit zeer duidelijk geïllustreerd wordt.

## 12.8 Aarde niet raken

De eis dat de aarde niet mag geraakt worden komt neer op het eisen dat  $r_{\text{perigeum}}$  groter moet zijn dan  $R_a$ , de straal van de aarde.

$$R_a = \frac{2r_0 q_0 \sin^2 \varphi}{1 + \epsilon}$$

Deze uitdrukking wordt opgelost naar  $\epsilon$

$$\epsilon = \frac{2r_0 q_0 \sin^2 \varphi}{R_a} - 1$$

Als men deze uitdrukking kwadrateert, kan men  $\epsilon^2$  vervangen door de uitdrukking uit (C). Verder uitwerken en rekening houdend met  $r_0 = R_a + h$  levert:

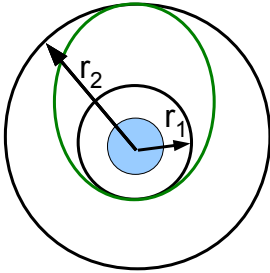
$$q_0 = \frac{R_a \cdot h}{(R_a + h)^2 \sin^2 \varphi - R_a^2}$$

Daar ondersteld wordt dat men niet in het perigeum lanceert, moet deze uitdrukking groter blijven dan 0,5.

Wanneer men loodrecht op de aardstraal lanceert, dan vereenvoudigt deze formule zich tot:

$$q = \frac{R_a \cdot h}{(R_a + h)^2 - R_a^2} = \frac{1}{2 + h/R_a}$$

## 12.9 Overgangsbaan



Reeds in 1925 had een mijnheer Hohmann uitgerekend hoe een ruimtetuig met behulp van twee versnellingen naar een eerste cirkelbaan naar een andere cirkelbaan zou kunnen overgebracht worden. Men noemt deze baan daarom de Hohmann overgangsbaan of in het Engels “Hohmann transfer orbit”.

De berekening maakt gebruik van de hoger vermelde formule voor de totale energie, die hier herschreven wordt als:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{km}{r} = \frac{-mk}{2a}$$

Opgelost naar  $v^2$  levert dit:

$$v^2 = k\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

Figuur 12.8: Overgangsbaan

Voor de eerste cirkelbaan met straal  $r_1$  heeft men natuurlijk dat  $v_1 = k/r_1$ . Voor de snelheid op de ellipsvormige baan in het apogeum moet gelden:

$$v_p^2 = k\left(\frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2}\right) = \frac{2kr_2}{r_1(r_1 + r_2)}$$

In het onderste punt, het perigeum voor de ellipsbaan, moet de snelheid van het ruimtetuig dus opgevoerd worden met een waarde:

$$\Delta v_p = v_p - v_1 = \sqrt{\frac{2kr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - \sqrt{\frac{k}{r_1}} = \sqrt{\frac{k}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1(r_1 + r_2)}} - 1 \right)$$

Analoog heeft men voor het bovenste punt van de ellipsbaan:

$$v_a^2 = 2k\left(\frac{r_1}{r_2(r_1 + r_2)}\right)$$

En voor de versnelling in het apogeum vindt men:

$$\Delta v_a = v_2 - v_a = \sqrt{\frac{k}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \right)$$

De tijd die nodig is voor de overgang is de helft van de omlooptijd op de ellipsbaan:

$$T_H = \pi \sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{8k}}$$

De 8 in de noemer is afkomstig van de derde macht van de noemer in  $a = (r_1 + r_2)/2$ .

Meer hierover kan men vinden in het artikel van de Engelse wikipedia [Hohmann transfer orbit](#)

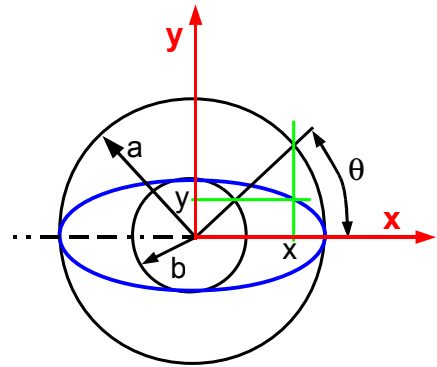
## 12.10 De parametervergelijking

Er bestaat een parametervergelijking voor de ellips:

$$x = a \cos \theta$$

$$y = b \sin \theta$$

Dit kan grafisch uitgewerkt worden in een constructie met twee concentrische cirkels, één met straal  $a$  en de andere met straal  $b$ . Vanuit het gemeenschappelijk centrum wordt een lijn getrokken onder een hoek  $\theta$  die beide cirkels snijdt. Het snijpunt met de grote cirkel levert de  $x$ -coördinaat, het snijpunt met de kleine cirkel de  $y$ -coördinaat. Bemerkt dat de lijn zelf normaal niet door het punt van de ellips wijst. De hoek  $\theta$  die hier gebruikt wordt heeft dus niets te maken met de  $\theta$  uit de vergelijking in poolcoördinaten.



Figuur 12.9: Parametervergelijking voor de ellips

## 12.11 Afstotingskracht

De formule van Binet kan ook gebruikt worden voor een afstotende kracht. Wanneer het gaat om een afstotende kracht die afneemt met het kwadraat van de afstand, vindt men als baan opnieuw een hyperbooltak. Er zijn echter heel wat verschillen met vorige behandeling. Bij de aantrekkingskracht werd vooral het berekenen van banen van satellieten beoogd. Hiervoor werd de onderstelling gebruikt dat de massa van de satelliet verwaarloosbaar is t.o.v. de massa van de planeet. Bij afstotende krachten gaat het echter meestal over microscopische fenomenen, zoals de afstoting van een elektron door een ander negatief geladen deeltje. De vermelde onderstelling gaat dan niet meer op. Ook is de kracht dan geen functie van de massa.

Wanneer men opnieuw vertrekt van de formule van Binet, dan heeft een afstotende kracht een positieve projectie te hebben op de  $r$ -as. De term in het rechterlid wordt dus negatief. Om dit voor de lezer duidelijker te maken zal dit rechterlid daarom geschreven worden als  $-k'/r^2$  of  $-k'u^2$ . De kracht is  $k'/r^2$ . Normaal wordt hier gewoon  $k$  gebruikt i.p.v.  $-k'$ .

De algemene formule voor de baan wordt dan:

$$r = \frac{-L_0^2/(k'\mu)}{1 + \epsilon \cos(\theta - \theta_0)}$$

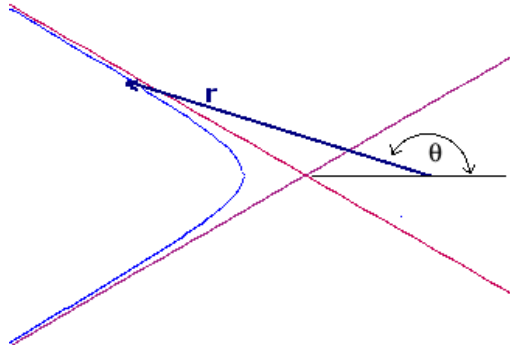
Laat de referentierichting voor  $\theta = 0$  zo gekozen worden dat  $\theta_0 = 0$  is.  $\epsilon$  is hier groter dan 1: het deeltje wordt ondersteld van buiten het krachtveld te komen en het opnieuw te verlaten. Daar  $r$  positief moet zijn, zullen alleen de hoeken aanvaardbaar zijn waarvoor de noemer negatief is.

$$1 + \epsilon \cos \theta < 0$$

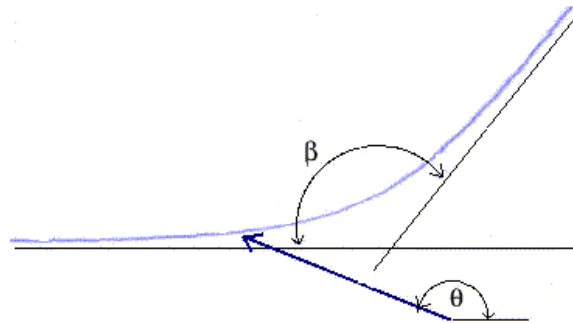
$$\cos \theta < \frac{-1}{\epsilon}$$

Dit betekent dat alleen een bereik rond  $\theta = 180^\circ$  toegelaten is. Dit betekent dat het afstotingscentrum nu het brandpunt is dat buiten de toegelaten hyperbooltak ligt.

In deze figuur liggen de asymptoten onder een hoek van  $30^\circ$  met de horizontale.  $\cos 30^\circ = 0,866$  zodat  $\epsilon$  hier 1,1547 zou moeten zijn en de toegelaten hoeken liggen tussen  $150^\circ$  en  $210^\circ$ . Bemerkt dat de kleinste



Figuur 12.10: Hyperboolbaan bij afstotende kracht



Figuur 12.11: Hyperboolbaan bij verstrooiing

afstand tot de hyperbool nu gegeven wordt door  $1-\epsilon$  in de noemer ( $\theta = 180^\circ$ ). Voor de absolute waarde moet men immers schrijven  $\epsilon-1$  en dat is het grootst als de absolute waarde van  $\cos \theta = 1$  is.

Bij afstotende krachten wordt de baan meestal gedraaid getekend zodat de asymptoot waarlangs het deeltje nadert horizontaal is. Als  $\beta$  het toegelaten bereik is (hier  $60^\circ$ ), dan moet men de figuur dus draaien over  $\beta/2$  of  $\theta_0 = -\beta/2$ .

Om  $\epsilon$  te bepalen zal nu beroep gedaan worden op de uitdrukking voor de totale energie. Daar er behoud van energie geldt is dat een invariant van de beweging. Men kan het zich dus gemakkelijk maken en de berekening uitvoeren voor een punt waar die het eenvoudigst is. Dat punt is in het punt dat het dichtst bij het brandpunt ligt, op afstand  $r_1$ . De snelheid is normaal de som van een radiale en een transversale component, maar in dat punt is de radiale component  $= 0$ . Daar is  $v = r\omega$ , waarbij de hoeksnelheid uit het behoud van impulsmoment gehaald wordt. Dus:

$$E_{tot} = T + V = \frac{m}{2}(r_1\dot{\theta})^2 + \frac{k'}{r_1}$$

Hierin moeten volgende substituties uitgevoerd worden:

$$r_1 = \frac{-L_0^2/(k'^2\mu)}{1-\epsilon}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L_0}{r_1\mu}$$

Na wat rekenwerk komt men tot de uitdrukking:

$$E_{tot} = \frac{k'^2\mu}{2L_0^2}(\epsilon^2 - 1)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2L_0^2 E_{tot}}{k'^2\mu}}$$

Deze uitdrukking kan ook gebruikt worden bij een aantrekkingskracht mits  $k' = Gmm'$ . Bij een aantrekkingskracht is de totale energie  $= 0$  voor een paraboolbaan en negatief voor een ellipsbaan. Men kan



gemakkelijk vaststellen dat dit leidt tot resp. een  $\epsilon = 1$  en een  $\epsilon$  kleiner dan 1. In de praktijk zal men bij een afstotende kracht de kinetische energie op verre afstand gebruiken waarmede het deeltje nadert

Men kan een mooi applet vinden dat de verstrooiing illustreert van een invallende bundel deeltjes op een afstotende kracht bij de applets van B.Surendranath Reddy op

<http://fys.kuleuven.be/pradem/applets/suren/Applets.html> of op <http://surendranath.tripod.com/Applets.html> onder Dynamics, Central forces, collision of many particles.

Er zal hier niet verder ingegaan worden op het onderwerp van afstotende krachten.

---

Nota: de figuur 12.3 is een verkleinde versie van de figuur "Conic\_sections\_with\_plane.svg" uit Wiki Commons. Gelieve daar te kijken voor de licentie.



# Bibliografie

[goldstein] Goldstein H. (1980) *Classical Mechanics*, 2nd. ed., Addison-Wesley. ISBN 0-201-02918-9, 672 p.

Nog altijd een grote klassieker. Theoretisch en wiskundig. Slechts een 10% is op het niveau van deze introductie. Werd vertaald in verscheidene talen, o.a. in het Frans als "Mécanique classique" bij Presses Universitaires de France, 421 p.

[gruber] Gruber, Christian; Benoit, Willy (1998). *Mécanique générale*, 2e éd., rev. et augm, Lausanne, Presses polytechniques et universitaires romandes, Collection Physique, ISBN 2-88074-305-2 , 736 p.

Cursus van de Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, de grote ingenieursschool voor Franssprekenden in Zwitserland. In de vorm van een cursus: stellingen gevolgd door bewijs. Vrij uitgebreid en interessant werk o.a. omdat het voor sommige punten toch een andere benadering volgt dan de Engelstalige werken, die bij ons de toon zetten. Zo is er de notie van torseur en de mooie synthese van "équivalence des torseurs", hier gebracht als "Equivalenten vectorsystemen". Hier werd dit onderwerp echter zo gepresenteerd dat men op het einde van het hoofdstuk voor 99% zeker is dat men alle mogelijke situaties onder ogen genomen heeft. Ook is er, op verscheidene plaatsen, de aandacht voor mogelijk gebruik van de verplaatsingsformule, die in de Engelstalige literatuur onbekend lijkt.

[berkeley] Kittel, Charles ; Knight, Walter D.; Ruderman, Malvin A.; rev. by A. Carl Helmholz e.a. (1973) *Mechanics*, Berkeley physics course vol. 1, 2nd ed., New York (N.Y.): MacGraw-Hill, ISBN 0-07-004880-0, 426 p.

Franse vertaling: Kittel, Charles ; Knight, Walter D.; Ruderman, Malvin A.; trad. de l'anglais par Pierre Lallemand (1979) *Mécanique*, cours de physique ; 1, Paris : Colin, Collection U, 481 p.

Een boek dat geschreven is om begrijpelijk te zijn voor iedereen die hoger onderwijs aankan. Op het einde zijn een paar hoofdstukken bijgevoegd over speciale relativiteit (Lorentz transformatie) het meten van de lichtsnelheid en het meten van het verschil tussen gravitiemassa en traagheidsmassa. Veel illustraties.

[meriam] Meriam, J. L.; LinkKraige, L. G. (1993) *Engineering mechanics 1 : Statics*, 3rd ed., SI version, New York (N.Y.): Wiley, ISBN 0-471-59272-2 , 522 p.

Meriam, J. L.; LinkKraige, L. G. (1993) *Engineering mechanics 2 : Dynamics*, 3rd ed., SI version, New York (N.Y.): Wiley, ISBN 0-471-59273-0, 719 p.

Typische cursus voor Amerikaanse "undergraduate" (= eerste 2 jaar aan universiteit) ingenieurstudenten. Matig wiskundig, gericht op de praktijk met veel voorbeelden en oefeningen.

[beer] Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell (Jr.) ; Eisenberg, Elliot R. (2007) *Vector mechanics for engineers : statics* (SI Units), 8th ed., Singapore : McGraw-Hill, ISBN 978-007-125765-7 (paperback), 599p.

Beer, Ferdinand P.; Johnston, E. Russell (Jr.) ; Eisenberg, Elliot R. (2007) *Vector mechanics for engineers : dynamics* (SI Units), 8th ed., Singapore : McGraw-Hill, ISBN 978-007-125875-3 (paperback), 686 p.

Twee boeken in dezelfde trant als Meriam. Veel voorbeelden en opgaven met uitkomsten. De titel is eigenaardig.

- [fowles] Fowles, Grant R.; Cassiday, George L. (2005 ) *Analytical mechanics*, 7th ed., Belmont : Thomson/Brooks/Cole, ISBN 978-0-534-40813-8 (paperback), 0-534-40813-3 (paperback), 514 p.

514 p. + appendices (elementen van algebra en analyse), uitkomsten en index. Behandelt ook vergelijkingen van Hamilton en iets over chaos. Uitgewerkte oefeningen in Mathcad en Mathematica (o.a. valbeweging in fluïdum)

- [collinson] Collinson, C. D. (1980) *Introductory mechanics*, London : Arnold, ISBN 0-7131-2786-4

Uitgebreid hoofdstuk over centrale kracht: satellieten en scattering. Lorentz transformatie

- [smith] Smith, Charles E (1976) *Applied mechanics : statics*, New York (N.Y.): Wiley, ISBN 0-471-80460-6, 200 p.  
*Applied mechanics : dynamics*, ISBN 0-471-80178-X, 184 p.  
*Applied mechanics : more dynamics*, ISBN 0-471-79996-3, 244 p.

Het laatste boek gaat over algemene rotatie, virtuele arbeid en trillingen.

- [matzner] Matzner, Richard A.; LinkShepley, Lawrence C. (1991) *Classical mechanics*, Englewood Cliffs (N.J.): Prentice Hall, ISBN 0-13-138272-1, 245 p.

# Bijlage : Vrije Documentatie Licentie (GFPL)

Version 1.2, November 2002 Copyright (C) 2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc. 51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed

## . 0. PREAMBLE

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom: to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others. This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation: a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "Document", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "you". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "Modified Version" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "Secondary Section" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "Invariant Sections" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "Cover Texts" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "Transparent" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "Opaque".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format,  $\LaTeX$  input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "Title Page" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "Entitled XYZ" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "Acknowledgements", "Dedications", "Endorsements", or "History".) To "Preserve the Title" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties: any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or noncommercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts: Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible

at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

#### 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version:

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.

B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.

C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.

D. Preserve all the copyright notices of the Document.

E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.

F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.

G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.

H. Include an unaltered copy of this License.

I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.

K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.

L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles. M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.

N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.

O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements."

## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.



## 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

## 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

### How to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page:

Copyright (c) YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this: with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.



# Index

- aangrijpingspunt
  - resultante samenlopende kr., 31
  - resultante vlak systeem, 31
  - v. gewicht, 29
  - v. resultante, 28
  - van traagheidskrachten, 204
- aantrekkingskracht
  - v. gravitatie, 122
- aarde, 122, 219, 227, 229
  - niet raken met satellietbaan, 230
- absolute beweging, 84
- actie-reactiewet, 42, 43, 106, 111, 134
- afstand
  - langs baan, 66
  - op helling, 76
  - stopafstand, 70
- aphelium, 224
- apogeum, 224, 226, 227, 230
- arbeid
  - bij rotatie, 140
  - definitie, 118
  - door kracht, 118
  - door wrijvingskracht, 119, 194, 195
- as
  - grote as v. ellips, 223, 224, 227–229
  - kleine as v. ellips, 224, 227, 228
- assenkruis, 17
  - bewegend, 84
  - bolcoördinaten, 91
  - differentiëren in roterend, 88
  - keuze bewegend, 85
  - keuze bij virtuele arbeid, 60
  - linksdraaiend, 17
  - orthonormaal, 91
  - poolcoördinaten, 78
  - rechtsdraaiend, 17
  - roterend, 86, 89, 90
  - translerend, 86, 89
  - vast, 85, 86
- auto
  - afremmend, 141
  - ESP, 143
  - in bocht, 142
  - onderstuur, 143
  - overstuur, 143
  - rotatiecentrum, 94
  - versnellend, 141
  - voorwiel- vs achterwielaandrijving, 144
  - voorwielaandrijving, 141
- baan
  - v. hemellichaam, 226
- baanimpulsmoment, 130
- balans, 60
- basis, 15
  - orthogonale basis, 15
  - orthonormale basis, 15
- behoud
  - strikt b. v.energie, 121
  - uitgebreid b.v. energie, 121
  - v. energie, 115, 178, 221, 232
  - v. impulsmoment, 137, 213, 214, 221, 228, 232
  - v. impulsmoment(algem.), 155
  - v. impulsmoment: proef, 155
  - v. impulsmoment: voorbeeld, 137
  - v. kinet.energie, 212
  - van impuls, 113, 114, 121
- bewegend assenkruis
  - keuze, 85
- bewegend systeem, 84, 203
- beweging
  - absolute, 84
  - eenparig, 68
  - eenparig versneld, 68
  - eenparige cirkelbeweging, 68
  - langs kromme, 68
  - relatieve, 84
  - vlakke, 132
- bewegingsvergelijking, 182
  - blokje in buis, 180
  - massa aan veer, 178
- biljartbal
  - botsing v., 208
- Binet
  - formule v., 222, 231
- bolcoördinaten, 91, 122
- bolscharnier, 39
- botsing, 114, 207
  - centrale, 207, 211
  - cilinder tegen helling, 214
  - elastische, 208, 210
  - en wrijvingskracht, 214
  - energieverlies, 214
  - in systeem verbonden aan mc., 210
  - inelastisch, 208
  - ontspanningsfase, 207
  - rotatie-effect, 213
  - samendrukkingsfase, 207
  - schuine, 207, 212, 215

- staaf en kogel, 213
  - tussen voorwerpen, 213
  - v. effectbal, 214
  - volkomen elastisch, 208
  - weke, 208
- botsingstijd, 115
- botsingsvlak, 212
- brandpunt, 223, 224, 228, 231
- cilinder
  - botsend tegen helling, 214
- cirkel
  - osculerende, 72
- cirkelbeweging, 67, 82, 83, 85
  - constante hoekversnelling, 69
  - eenparige, 68
- coördinaat
  - cartesische, 71
  - cyclische, 177, 181
  - veralgemeende, 54, 173
- contact
  - glijdend, 85
  - meervoudig, 46
  - met omgeving, 107
  - vrij contact, 39
- Corioliskracht, 90
- Coriolisversnelling, 81, 89, 90, 181
- cyclische permutatie, 17
- cyclische permutatie, 16
- cycloïde, 93, 96
- d'Alembert
  - principe van d'A., 174
- diagonaliseren
  - van matrix, 167
- differentiaal, 23
- dimensie, 14
- draagwijdte
  - van worp, 73
- draaizin, 16
  - positieve d. in assenkruis, 16
- druk, 48
- Eötvös effect, 90
- eenheden
  - coherente eenheden, 14
  - eenhedenstelsels, 13
  - MKS-stelsel, 14
- eenheidsvector
  - afgeleide, 92
- eenparig
  - versnelde beweging, 68
- eenparige beweging, 68
- effectbal, 214
- eigenvector, 167
- eigenwaarde, 167
- eindsnelheid, 199, 200
- ellips, 223, 224, 226, 228
  - oppervlakte, 225
  - parametervergelijking, 231
- ellipsoïde, 150
  - traagheidsellipsoïde, 164
- energie
  - behoud v., 115, 178, 209, 221, 232
  - behoud v. kinet. energie, 212
  - kinetische, 121, 140, 175, 180
  - kinetische, algem. rotatie, 154, 170
  - mechanische, 119, 121
  - potentiël v. gravitatie, 122
  - potentiële, 59, 124, 176, 180
  - potentiële bij rotatie, 140
  - potentiële v. aantrekkingskracht, 122
  - potentiële, 2e definitie, 121
  - potentiële, berekeningen, 122
  - potentiële, definitie, 120
  - potentiële, ijking, 120
  - potentiële v. veer, 123
  - strikt behoud v., 121
  - totale e., 232
  - totale e. v. hemellichaam, 229, 230
  - uitgebreid behoud v., 121
  - verlies bij botsing, 214
- energiestelling
  - 1 massa, 118
  - meerdere massa's, 118
- equivalentie, 25
  - v. rotaties, 99
  - van krachten, 27
- ESP, 143
- Euler
  - hoeken van E., 162
  - vergelijkingen v., 153
- evenwicht
  - dynamisch, 182, 183, 203
  - hyperstatisch, 40
  - hypostatisch, 40
  - isostatisch, 40
  - onbepaald, 40
  - onmogelijk, 40
  - onvormbaar voorwerp, 36
  - samengestelde voorwerpen, 41
  - strikte evenwichtsvoorwaarde, 40
  - vormbaar systeem, 42, 45
- evenwichtsvoorwaarde
  - bij virtuele arbeid, 58
- excentriciteit, 221, 223, 225, 226, 229
- foci
  - van ellips, 224
- Galileo
  - proef v., 201
- getijden, 220
- golfbal, 78, 200
- gravitatie
  - algemene, 121
  - potentiële energie, 221
- gyratiestraal, 163

- gyroscopisch effect, 148, 149
- hoeksnelheid, 20, 67, 102
- hoekversnelling, 67
  - constante hoekversnelling, 69
- Hohmann
  - overgangsbaan v. H., 230
- hoofdtraagheidsas, 148, 150
  - en kinetische energie, 154
  - kenmerken, 151
- hyperbool
  - als kegelsnede, 223
  - baan bij afstoting, 232
- hyperstatisch, 40
- hypostatisch, 40
- hysteresis, 198
- impuls, 112
  - behoud v., 113, 114, 121
  - veralgemeende, 177
- impulsmoment, 136, 146–148, 151
  - behoud v., 137, 140, 213, 214, 221, 226, 228, 232
  - behoud v. (algem.), 155
  - behoud v.: proef, 155
  - bij centrale kr., 222
  - geen behoud, 138
  - met traagheidstensor, 147
  - voorbeeld behoud, 137
  - vrij bewegend vwp, 130, 137
- impulsmomentstelling, 215
  - 1 vwp (eendim.), 137
  - meerdere vwp (eendim.), 137
- impulsstelling, 213, 215
  - 1 massa, 112
  - meerdere massa's, 113
- impulswet, 213
- inklemming, 39
- isostatisch, 40
- Joule, 118
- König
  - eerste wet, 130, 137, 152, 214
  - tweede wet, 131, 140, 154, 159, 220
- kaapstander, 197
- kantelen, 193
- kegelsnede, 223
- Kepler, 228
  - derde wet, 228, 229
  - drie wetten, 228
  - tweede wet, 228
- keukenbalans, 60
- kinetische energie, 121, 140, 159, 175, 180, 220
  - algem. rotatie, 154
  - definitie, 118
  - v. hemellich. op cirkelbaan, 221
  - v. hemellichaam, 227
- knooppunt, 48
  - fictief, 47
- kogellager, 198
- koppel, 26, 139, 149
  - fietser in bocht, 149
  - moment, 26
  - van rotaties, 101
- kracht
  - aangrijpingspunt, 131
  - aantrekkingskracht, 122, 123
  - actieve, 40, 174
  - actieve k. bij virtuele arbeid, 54
  - afstotingskracht, 231
  - arbeid v., 118
  - centrale, 220, 221
  - conservatieve, 119
  - en massacentrum, 129
  - equivalentie, 27
  - evenwijdige krachten, 28
  - gravitatiekracht, 220
  - inwendige, 113, 118, 174
  - koppel, 26
  - middelpuntvliedende, 90, 150, 158, 184, 204, 220
  - minteken bij veerkracht, 123
  - moment, 18
  - moment t.o.v. as, 132
  - niet-potentiaalkrachten en lagrangiaan, 176
  - normaalkracht, 185
  - op bocht in buis, 116
  - potentiaalkracht, 59, 119
  - reactie, 38
  - reactiekracht, 60
  - samenlopende, 31, 38
  - uitwendige, 113, 118
  - veralgemeende, 175
  - verbindingskracht, 38
  - vlak systeem, 31
- krachtveld, 184
  - centraal, 220, 222
  - met rotor, 120
  - van traagheidskrachten, 204
- krik, 61
- kromtemiddelpunt, 72, 83
- kromtestraal, 72
- Kroneckerdelta, 170
- Lagrange, 173
  - methode v., 36, 222
  - vergelijking, 1e vorm, 174, 176
  - vergelijking, 2e vorm, 176
  - vergelijking, 3e vorm, 176
- lagrangiaan, 176, 177, 180, 182, 222
- lanceerpositie
  - v. satelliet, 225
- lijmklem, 191
- luchtweerstand, 77, 200
- maan, 219
- massa

- gereduceerde, 220
- massacentrum
  - behoud van impuls, 130
  - bepaling, 128
  - beweging t.o.v. mc, 129
  - botsing in syst. aan mc, 210
  - eigenschappen, 129
  - en kinetische energie, 130
  - en Steiner, 134
  - symmetrieas, 129
  - symmetrievlak, 129
  - transl. energie, 220
  - van 2 hemellichamen, 219
- massadebiet, 116
- matrix
  - diagonaliseren, 167
  - transpose, 169
- MKS-stelsel, 14
- mof, 39
- moment, 181
  - arbeid v., 140
  - berekening, 18
  - bij scharnier, 39
  - t.o.v. as, 132
  - van koppel, 26
  - van kracht, 18
- momentenvergelijking, 135, 136, 156, 157, 160, 182, 188, 191, 194
- nabla-operator, 119
- Navier-Stokes
  - formule v., 199
- Newton, 228
  - derde wet, 106
  - eerste wet, 106
  - notatie van N., 91
  - tweede wet, 106
  - wet van N., 35, 96, 107, 118, 133–135, 145, 158, 160, 174
  - wet van N. toepassen, 107
  - wet van N.: controle, 108
  - wieg v., 209
- nutatie, 163
- omlooptijd
  - numeriek vb., 229
  - op overgangsbaan, 231
  - v. hemellichaam, 227–229
- ontsnappingsnelheid, 123, 226
- ontspanningsfase, 207
- operator
  - voor differentiëren in rot. assenkruis, 88, 91, 102
- overgangsbaan
  - voor satelliet, 230
- parabool
  - als kegelsnede, 223
  - hoge, 74
  - lage, 74
  - veiligheidsparabool, 75
- parameterkromme, 56, 91, 183
- parameternet, 56, 57
- percussiecentrum, *zie* slagcentrum
- perigeum, 224, 226–228, 230
- perihelium, 224
- perkenwet, 228
- PK, 125
- planeet
  - baan, 224, 225, 228
- Poiseuille
  - formule v., 199
- Polonceau, 49
- pool
  - momentane, 93
- poolbaan, 95, 96
- poolcoördinaten, 57, 78, 177, 226
  - bij bolcoördinaten, 92
  - praktisch, 79
  - r positief, 224, 231
  - snellheid, 79
  - versnelling, 79
  - voor baan v. hemellichamen, 221
- poolkromme, 95, 96
- positie, 66
  - positievector, 66
  - relatieve, 84
- potentiële energie, 124, 176, 180
  - 2e definitie, 121
  - berekeningen, 122
  - bij rotatie, 140
  - definitie, 120
  - ijking, 120
  - v. aantrekkingskracht, 122
  - v. gravitatie, 122, 221
  - v.veer, 121, 123
- potentiaal
  - veralgemeende, 177
- potentiaalfunctie
  - v. centrale kracht, 221
- precessie, 149, 163
  - directe precessie, 162
  - retrograde precessie, 162
  - vrij bewegend voorwpr, 161
- puntmassa, 55, 105, 128
- raakcirkel, 72
- radiaal, 67
- reactie, 38
- reactiekracht, 60
- relatieve beweging, 84
- remweg, 69
- restitutiecoëfficiënt, 209, 212, 213
  - 1e definitie, 208
  - 2e definitie, 211
- resultante, 220
  - herleiding tot zuivere resultante, 28
  - v. evenwijdige krachten, 28

- v. samenlopende krachten, 31
  - v. vlak krachtensysteem, 31
  - van traagheidskrachten, 204
- Reynoldsgetal, 199
- rollager, 198
- rollen, 102
  - inwendig, 95
  - kinetische energie, 181
  - met slippen, 136, 194, 195
  - uitwendig, 94
  - zonder slippen, 93, 135, 194, 196, 214
- rolweerstand
  - coëfficiënt, 198
  - van banden, 198
- rotatie, 132
  - algem. bewijs (eendim), 133
  - algem., complexer vb., 2de opl., 159
  - algem.: complexer vb., 156
  - algemeen, 145
  - als vector, 16, 132
  - basiswet (algem.), 145, 152
  - basiswet (eendim), 133
  - eindige, 98
  - en hoeken van Euler, 163
  - en massacentrum, 129
  - en potent. energie, 140
  - en vermogen, 140
  - equivalente systemen, 99
  - evenwijdige, 101
  - invarianten, 165
  - kinetische energie (algem.), 154
  - koppel van r., 101
  - lineaire snelheid uit r., 20, 99
  - positieve draaizin, 16
  - samenlopend, 101
  - samenstellen, 98
  - schroefas, 102
  - t.o.v. translatie, 132
  - van assenkruis, 165
  - vaste as, 132
  - vrijheidsgraad v., 38
- rotatiecentrum
  - o.r. bij auto in bocht, 94
  - ogenblikkelijk, 93–95
  - versnelling, 95
- rotatiesymmetrisch voorwerp, 153, 159, 163
- rotor, 119, 221
- ruimtekegel, 162
- samendrukkingsfase, 207
- satelliet, 220
  - baan, 225
  - lanceerpositie, 225
  - numeriek voorbeeld, 227
- scalair product, 15, 58
  - differentiëren, 21
  - goniometrische vorm, 15, 59
  - met orthogonale coörd., 16
- scharnier, 39
- schijf
  - in lus, 136
  - rotatiesymmetrie, 159
  - slingerend op roterend syst., 156, 181, 183
- schroefas, 28, 31
  - bij rotaties, 102
- Simon Stevin, 201
- slagcentrum, 215
  - drie definities, 216
- sleepsnelheid, 84, 88, 92, 180
  - rotatiecomponent, 85
  - translatiecomponent, 85
- sleeperandering, 88, 102, 152, 153
- sleeperplaatsing, 60
- sleeperversnelling, 88, 92
  - normale component, 89
  - tangentieële component, 89
  - translatiecomponent, 88
- slinger, 54
  - ballistische, 216
  - gekoppelde, 179
  - Wilberforce, 179
- smeermiddel, 187
- snelhedendriehoek, 86
  - ontaard, 86
- snelheid, 66, 80
  - hoeksnelheid, 20, 67
  - in poolcoördinaten, 79
  - lineaire snelheid, 20
  - met veralgem. coördinaten, 174
  - ontsnappingssnelheid, 123, 226
  - relatief, 86
  - relatieve, 180
  - sleepsnelheid, 84
  - vectorieel, 67
  - veralgemeende, 176
- somformulering, 122
- spilomwenteling, 153, 163
- spin, 130, 153, 163
- staaf
  - aan draaiende as, 183, 204, 205
  - ideale, 39, 48
- Steiner
  - formule v. S., 134, 138, 151, 156, 182
- Stokes
  - formule v., 199
- stoot, 112
- stopafstand, 70
- stroming
  - continue, 115
  - stationaire, 115
- stuwkracht, 116
- symmetrieas
  - bij balk, 151
  - en massacentrum, 129
  - en traagheidstensor, 151
- symmetrievlak
  - bij balk, 151

- en massacentrum, 129
  - en traagheidstensor, 151
- tandwielen, 102
- tennisbal, 78, 200
- tol, 163
- touw, 39
- traagheidsellipsoïde, 164, 168
- traagheidskracht, 150, 157, 174, 184, 203
  - en virtuele arbeid, 205
- traagheidsmoment, 133, 137, 148, 156, 165, 182, 183
  - als traagheidsreactie, 205
  - en gyratiestraal, 163
  - formules, 134
  - volgens willek. as, 169
- traagheidsproduct, 147, 150
- traagheidsproducten, 165
- traagheidsreactie, 204
  - voorbeeld, 204
- traagheidstensor, 147, 150, 163–165
  - algem.vorm van element, 170
  - en symmetrievlakken, 151
  - geen  $f(t)$ , 152
  - historische nota, 170
  - invarianten bij rotatie, 165
- traagheidswet, 106
- transformatievergelijking, 54, 174
- translatie, 61, 101
  - t.o.v. rotatie, 132
  - vrijheidsgraad v., 38
- translerend
  - assenkruis, 86
- trek, 48
- twee lichamen-probleem, 219
  
- vakwerk, 48
- valbeweging, 73
- valparabool, 73
  - met luchtweerstand, 77
  - omhullende, 75
- valversnelling, 73
- variatierekenen, 174, 177
- vector, 15
  - afgeleide v. eenheidsvector, 92
  - box product, 20
  - constante grootte, 71
  - differentiëren, 21
  - dubbel vectorproduct, 20
  - glijdende vector, 27
  - ontbinding, 20
  - positievector, 66
  - rotatie als vector, 16, 132
  - scalair product, 15
  - snelheidsvector, 67
  - triple product, 20
  - vectorieel product, 17
  - versnellingsvector, 66
  - voorstelling onbekende vector, 21
  - vrije vector, 26
  - zin, 15
- vectorieel product, 17
  - differentiëren, 21
  - goniometrische vorm, 17
  - orthogonale coörd., 17
- veer
  - massa aan v., 177
  - minteken bij kracht, 123
  - potentiële energie, 121
  - veerkracht, 123
- veerconstante, 123, 124
- veiligheidsparabool, 75
- verbinding, 38, 85
  - glijdend contact, 85
  - holonome, 174
  - ideale, 60
  - ideale v. bij virtuele arbeid, 54
  - ideale v.: definitie, 119
  - inwendige, 119
  - met omgeving, 119
  - rheonome, 174
  - scleronome, 174
  - staaf, 85
- verbindingskracht
  - ideale, 55, 174
  - inwendige, 55
  - met virtuele arbeid, 62
- vermogen, 124
  - bij rotatie, 140
  - eenheid, 125
- verplaatsing
  - reële, 175
  - virtuele, 174
- verplaatsingsformule, 25, 27, 134, 152
- versnelling, 66, 80, 88
  - absolute, 88, 89
  - bepaling, 107
  - berekenen normale, 81
  - berekenen tangentiële, 81
  - complementaire, 89, 92
  - Coriolisversnelling, 81, 89, 90, 181
  - hoekversnelling, 67
  - in bewegend systeem, 158
  - in poolcoördinaten, 79
  - middelpuntzoekende, 149
  - normale, 71, 72, 80, 109
  - relatieve, 88
  - sleeptersnelling, 88
  - tangentieel, 67, 71, 72, 80, 133
  - vectorieel, 66
- virtuele arbeid, 36, 53, 174, 176
  - algemene formulering, 58
  - en traagheidskrachten, 205
  - keuze van assenkruis, 60
  - klassieke uitwerking, 58
  - singulariteit, 62
- virtuele vermogens, 54
- virtuele verplaatsing, 63, 174



- als differentiaal, 63
- viscositeit, 187, 199
- vlakke beweging, 132
- voorwerpskegel, 162
- vrijheidsgraad, 38, 55, 57, 173, 175
  - bij virtuele arbeid, 54
- vrijmaken, 107, 109, 111
  
- Watt, 125
- wiel
  - in lus, 136
  - rollend, 135
  - rollend op cirkel, 145, 148, 153
- Wilberforce
  - slinger v., 179
- worp
  - op helling, 76
- wrijving, 109, 119, 185
  - arbeid, 194, 195
  - droge, 185
  - over gebogen oppervlak, 196
  - rollende, 185, 197
  - slepende, 185, 186
  - totale reactie, 186, 188, 189, 192, 193
  - viskeuze, 198
  - wrijvingswetten, 186
  - zin, 195
- wrijvingscoëfficiënt, 186, 188, 190, 191, 194, 196
  - dynamische, 186
  - effectieve, 186
  - maximale, 186
  - statische, 186
  - waarden, 187
- wrijvingshoek, 186
  - maximale, 190
- wrijvingskracht
  - bij botsing, 214
- wrijvingswet, 187, 188, 190, 194, 215
  
- zin, 66
  - bij projectie, 16
  - v. vector, 15
- zon, 219, 228
- zwaartepunt, 29, 129