

Euclid's
ELEMENTS OF GEOMETRY

Preface

This document is compiled from Greek texts borrowed from *Perseus Digital Library*¹ and drawings that are created by *Myungsun Ryu* with a geometrical drawing language “EUKLEIDES”.² The drawings are based on the JavaTM script drawings on David Joyce’s *Euclid’s Elements* Web Page³.

This document is created to assist those people who want to read *Euclid’s Elements* in the original Greek language and to provide a printer friendly version with all the diagrams for the document. The text is available at the *Perseus Digital Library* and each word is linked to morphological analysis tools. While the diagrams are crucial in understanding what Euclid’s text they are all absent from the site. The correspondent of *Perseus Digital Library* says the site is going to host a revised text including the figures, sooner or later. In the meanwhile, and when you feel tired of reading off the screen, you can use this document in a printed form.

The Greek text of *Euclid’s Elements* is in the public domain. But the morphological tools serviced on *Perseus Digital Library* are protected by copyright laws. I have made a brief contact with Perseus personel and got an answer that *Perseus Digital Library* is not claiming the copyright on the Greek text of this work of Euclid and that I can use the Greek text for this document.

If you get stimulated by this document and decide to read the book you are strongly recommended to visit *Perseus Digital Library* and get the help from the learning tools there. This document is not meant to be used on its own, to say, it has no linguistic comment or vocabulary help. You can get the full linguistic assistance from *Perseus Digital Library*’s philological tools.

This document can be freely distributed (as long as there’s no copyright infringement to *Perseus Digital Library*’s part) and I claim no copyright of any kind except in case you use this document for any commercial interest.

Nov. 15. 2004.
Myungsun Ryu

¹<http://www.perseus.tufts.edu/cgi-bin/ptext?doc=Perseus:text:1999.01.0085;layout=;loc=1;query=-toc>, mirrors at <http://perseus.mpiwg-berlin.mpg.de/> and at <http://perseus.uchicago.edu/>

²<http://perso.wanadoo.fr/obrecht/>

³<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

Contents

Book I	1
Book II	41
Book III	55
Book IV	93
Book V	113
Book VI	135
Book VII	171
Book VIII.	201
Book IX	223
Book X	247
Book XI	351
Book XII	391
Book XIII.	421

Book I

Definitions

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημεῖοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ἧ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστίν ἢ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
9. Ὄταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαί εὐθεῖαι ᾧσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
10. Ὄταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκάτερα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστίν ἢ μείζων ὀρθῆς.
12. Ὄξεῖα δὲ ἢ ἐλάσσων ὀρθῆς.
13. Ὄρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.
14. Σχήμα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τινος ἢ τινῶν ὄρων περιεχόμενον.
15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἢ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.
16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.
17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστίν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφέρειας, ἣτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.
18. Ἡμικύκλιον δὲ ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφέρειας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικύκλου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.
20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.
21. Ἐτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλείαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.
22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μὲν ἐστίν, ὃ ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστίν οὔτε ὀρθογώνιον: τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλεῖσθω.
23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Postulates

1. Ἡιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεισθαι.
4. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Common Notions

1. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστὶν ἴσα.
4. [Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
5. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
6. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
7. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἀλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
8. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστίν].
9. Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

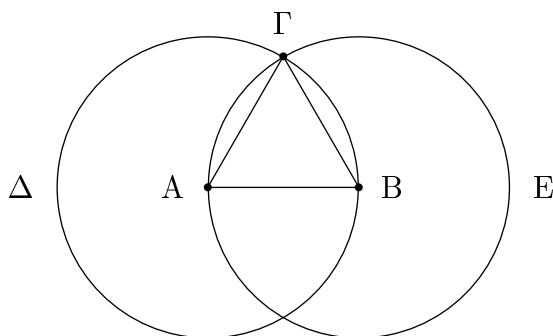
Propositions

I.1

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς AB εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



Κέντρῳ μὲν τῷ A διαστήματι δὲ τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ BΓΔ, καὶ πάλιν [Post.3]
κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ BA κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ
σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ A, B σημεία ἐπεζεύχθωσαν [Post.1]
εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ A σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔB κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ AB: [I.Def.15]
πάλιν, ἐπεὶ τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑE κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆ BA.
ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῆ AB ἴση: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῆ AB ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ
αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆ ΓΒ ἐστὶν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, [C.N.1]
AB, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας
πεπερασμένης τῆς AB.

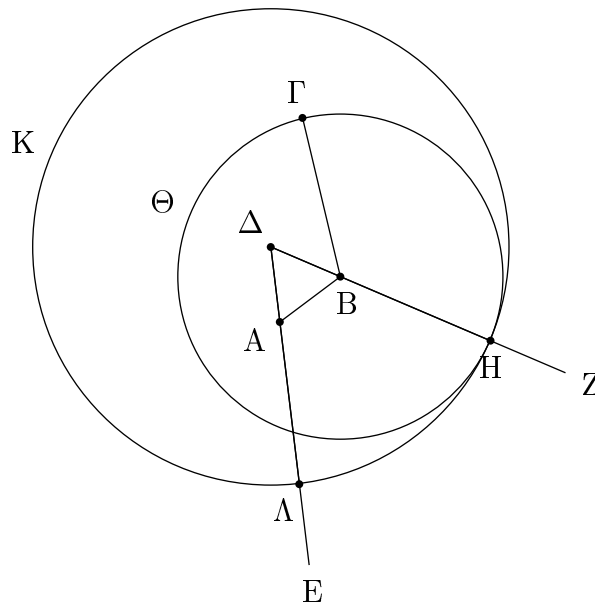
[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]: [I.Def.20]
ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.2

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῆς δοθείσης εὐθείας ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ A, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ: δεῖ δὴ πρὸς τῷ A
σημείῳ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ B σημεῖον εὐθεῖα ἡ AB, καὶ συνεστάτω
ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔAB, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, [I.1]
ΔB εὐθεῖαι αἱ ΑE, ΒZ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ B διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω
ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔH κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

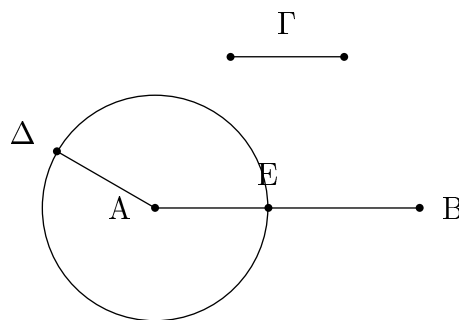


Ἐπει οὖν τὸ B σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῆ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῆ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπὴ τῆ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆ ΒΗ ἴση: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῆ ΒΗ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῆ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῶ δοθέντι σημείῳ τῶ Α τῆ δοθείσης εὐθείας τῆ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κείται ἡ ΑΛ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.3

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῆ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἀνισοὶ αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ: δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῆ ἐλάσσονι τῆ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

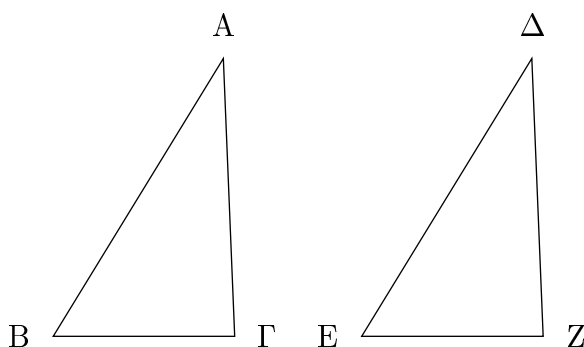
Κείσθω πρὸς τῶ Α σημείῳ τῆ Γ εὐθείας ἴση ἡ ΑΔ: καὶ κέντρῳ μὲν τῶ Α διαστήματι δὲ τῶ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆ ΑΔ: ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῆ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῆ ΑΔ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῆ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν AB, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῆ ἐλάσσονι τῆ Γ ἴση ἀφήρηται ἡ AE : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.4

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῆ γωνία ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῶ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma, \Delta EZ$ τὰς δύο πλευρὰς τὰς $AB, A\Gamma$ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς $\Delta E, \Delta Z$ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα τὴν μὲν AB τῆ ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῆ ΔZ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῆ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴσην. λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσει τῆ EZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῶ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρα, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῆ ὑπὸ ΔEZ , ἡ δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῆ ὑπὸ ΔZE .

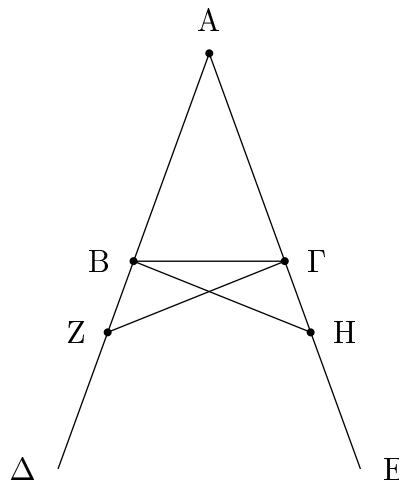
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔE , ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ E διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν AB τῆ ΔE : ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς AB ἐπὶ τὴν ΔE ἐφαρμόσει καὶ ἡ $A\Gamma$ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔZ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίαν τῆ ὑπὸ $E\Delta Z$: ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆ ΔZ . ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόκει: ὥστε βάσις ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν B ἐπὶ τὸ E ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Z ἡ $B\Gamma$ βάσις ἐπὶ τὴν EZ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσις ἐπὶ τὴν EZ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται: ὥστε καὶ ὅλον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔEZ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῶ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῆ ὑπὸ ΔEZ ἡ δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῆ ὑπὸ ΔZE .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν γωνίαν τῆ γωνία ἴσην ἔχη τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην,

καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῶν τριγώνων ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.5

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθειῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Ἐστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ABΓ ἴσην ἔχον τὴν AB πλευρὰν τῇ AG πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς AB, AG εὐθεῖαι αἱ BΔ, ΓΕ: λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ABΓ γωνία τῇ ὑπὸ AΓB ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓBΔ τῇ ὑπὸ BΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς BΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Z, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AE τῇ ἐλάσσονι τῇ AZ ἴση ἢ AH, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZΓ, HB εὐθεῖαι.

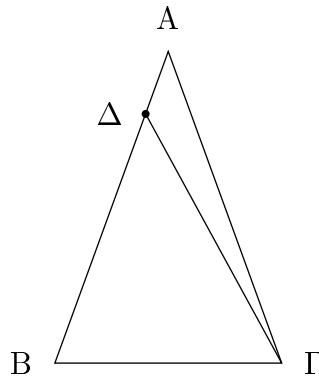
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἡ μὲν AZ τῇ AH ἢ δὲ AB τῇ AG, δύο δὲ αἱ ZA, AG δυσὶ ταῖς HA, AB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν: καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ZAH: βάσις ἄρα ἡ ZΓ βάσει τῇ HB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ AZΓ τρίγωνον τῶν AHB τριγώνων ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ AΓZ τῇ ὑπὸ ABH, ἡ δὲ ὑπὸ AZΓ τῇ ὑπὸ AHB. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ AZ ὅλη τῇ AH ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ AB τῇ AG ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἢ BZ λοιπὴ τῇ ΓH ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZΓ τῇ HB ἴση: δύο δὲ αἱ BZ, ZΓ δυσὶ ταῖς ΓH, HB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BZΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓHB ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ BΓ: καὶ τὸ BZΓ ἄρα τρίγωνον τῶν ΓHB τριγώνων ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, ὅφ' ἂς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ZBΓ τῇ ὑπὸ HΓB ἢ δὲ ὑπὸ BΓZ τῇ ὑπὸ ΓBH. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ABH γωνία ὅλη τῇ ὑπὸ AΓZ γωνία ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓBH τῇ ὑπὸ BΓZ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ABΓ λοιπὴ τῇ ὑπὸ AΓB ἐστὶν ἴση: καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ABΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZBΓ τῇ ὑπὸ HΓB ἴση: καὶ εἰσὶν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθειῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.6

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ γωνίᾳ: λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἢ AB πλευρᾷ τῇ $A\Gamma$ ἔστιν ἴση.



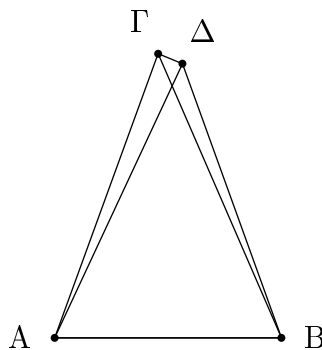
Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστιν ἢ AB τῇ $A\Gamma$, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἢ AB , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς AB τῇ ἐλάττωσι τῇ $A\Gamma$ ἴση ἢ ΔB , καὶ ἐπεζεύχθω ἢ $\Delta\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστίν ἢ ΔB τῇ $A\Gamma$ κοινὴ δὲ ἢ $B\Gamma$, δύο δὴ αἱ ΔB , $B\Gamma$ δύο ταῖς $A\Gamma$, ΓB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἐστὶν ἴση: βάσις ἄρα ἢ $\Delta\Gamma$ βάσει τῇ AB ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Gamma B$ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι: ὅπερ ἀτοπον: οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἢ AB τῇ $A\Gamma$: ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ᾤσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.7

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



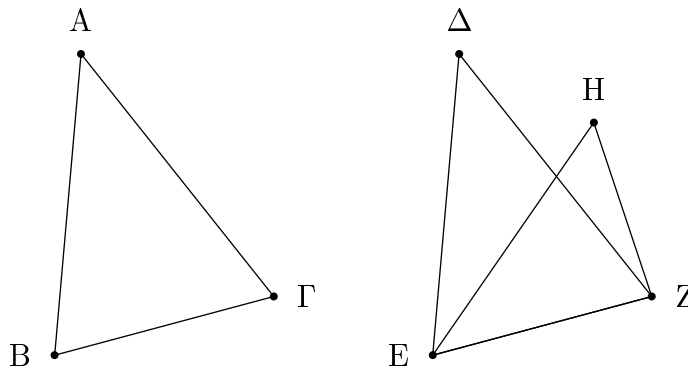
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς AG , GB ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ $A\Delta$, ΔB ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓA τῇ ΔA τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσαν αὐτῇ τὸ A , τὴν δὲ ΓB τῇ ΔB τὸ αὐτὸ πέρασ ἔχουσαν αὐτῇ τὸ B , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ $A\Delta$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AG\Delta$ τῇ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$: μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$ τῆς ὑπὸ $\Delta\Gamma B$: πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $\Delta\Gamma B$. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GB τῇ ΔB , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma B$. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶ μείζων: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.8

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνία ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , AG ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ AG τῇ ΔZ : ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴσην: λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐστὶν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν B σημείου ἐπὶ τὸ E σημεῖον τῆς δὲ $B\Gamma$ εὐθείας ἐπὶ τὴν EZ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Z διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν $B\Gamma$ τῇ EZ : ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς $B\Gamma$ ἐπὶ τὴν EZ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , GA ἐπὶ τὰς $E\Delta$, ΔZ . εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ βάσιν τὴν EZ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ BA , AG πλευραὶ ἐπὶ τὰς $E\Delta$, ΔZ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ EH , HZ , συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλω καὶ ἄλλω σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ: οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς $B\Gamma$ βάσεως ἐπὶ τὴν EZ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ BA , AG πλευραὶ ἐπὶ τὰς $E\Delta$, ΔZ . ἐφαρμόσουσιν ἄρα: ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAG ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ $E\Delta Z$ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

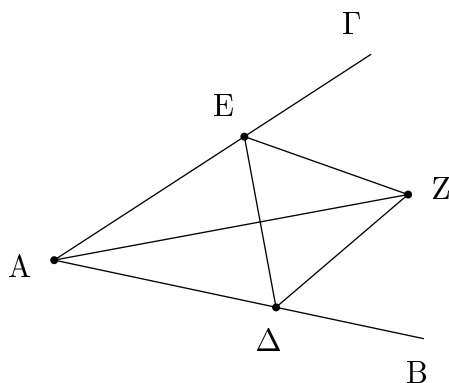
Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.9

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῆ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ: λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.



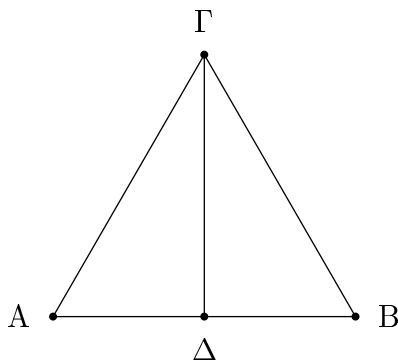
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυοὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα. καὶ βᾶσις ἡ ΔΖ βᾶσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.10

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ: δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $AB\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ AGB γωνία δίχα τῇ $\Gamma\Delta$ εὐθείᾳ: λέγω, ὅτι ἡ AB εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

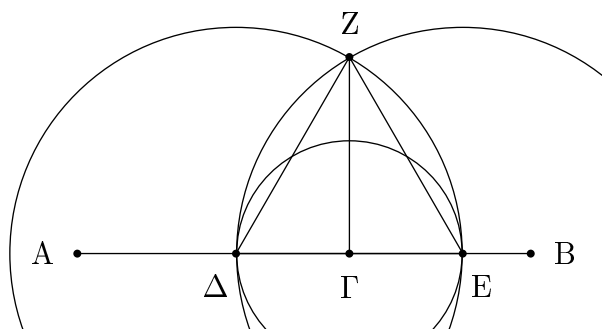
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , κοινὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, δύο δὲ αἱ $AG, \Gamma\Delta$ δύο ταῖς $B\Gamma, \Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AG\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση ἐστίν: βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ $B\Delta$ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.11

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ : δεῖ δὲ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς AG τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κείσθω τῇ $\Gamma\Delta$ ἴση ἡ ΓE , καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔE τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ $Z\Delta E$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Gamma$: λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ $Z\Gamma$.

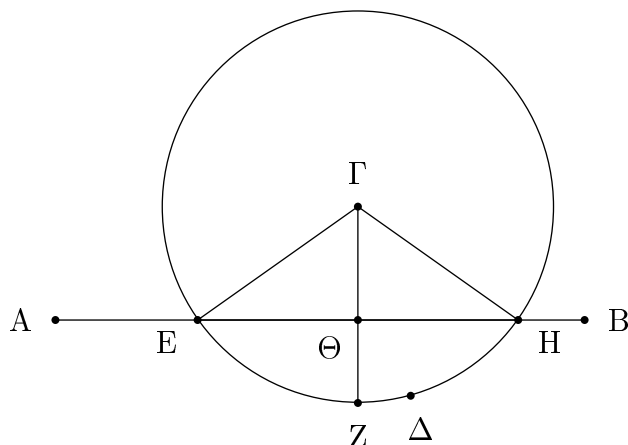
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΓE , κοινὴ δὲ ἡ ΓZ , δύο δὲ αἱ $\Delta\Gamma, \Gamma Z$ δυοὶ ταῖς $E\Gamma, \Gamma Z$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ βάσις ἡ ΔZ βάσει τῇ $Z E$ ἴση ἐστίν: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Gamma Z$ ἴση ἐστίν: καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $\Delta\Gamma Z, Z\Gamma E$.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἤκται ἡ ΓZ : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.12

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ : δεῖ δὲ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



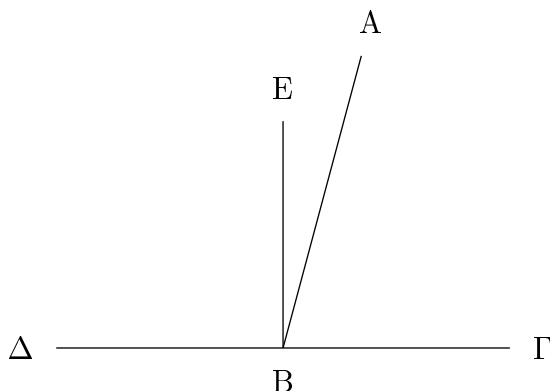
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ $\Gamma\Delta$ κύκλος γεγράφθω ὁ EZH , καὶ τετμήσθω ἡ EH εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓH , $\Gamma\Theta$, ΓE εὐθεῖαι: λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ $\Gamma\Theta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ $H\Theta$ τῇ ΘE , κοινὴ δὲ ἡ $\Theta\Gamma$, δύο δὲ αἱ $H\Theta$, $\Theta\Gamma$ δύο ταῖς $E\Theta$, $\Theta\Gamma$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ βᾶσις ἡ ΓH βᾶσει τῇ ΓE ἐστὶν ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Gamma\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Theta\Gamma$ ἐστὶν ἴση. καὶ εἰσὶν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστὶν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ , ὃ μὴ ἐστὶν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ $\Gamma\Theta$: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.13

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἦτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῆσει.



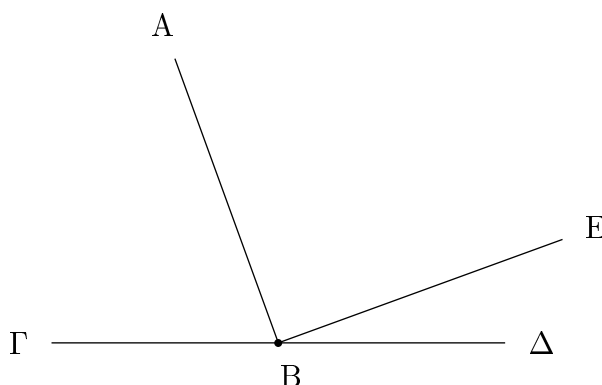
Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ AB ἐπ' εὐθεῖαν τὴν $\Gamma\Delta$ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B \Delta$: λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ $\Gamma B A$, $A B \Delta$ γωνίαι ἦτοι δύο ὀρθαὶ εἰσὶν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἢ ΒΕ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσιν: καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυοὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι: τὰ δὲ τῶ αὐτῶ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα: καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν: ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαὶ εἰσιν: καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυοὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθείαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυοὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσῃ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.14

Ἐὰν πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυοὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῶ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν: λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἢ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶ τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἢ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἢ ΒΕ.

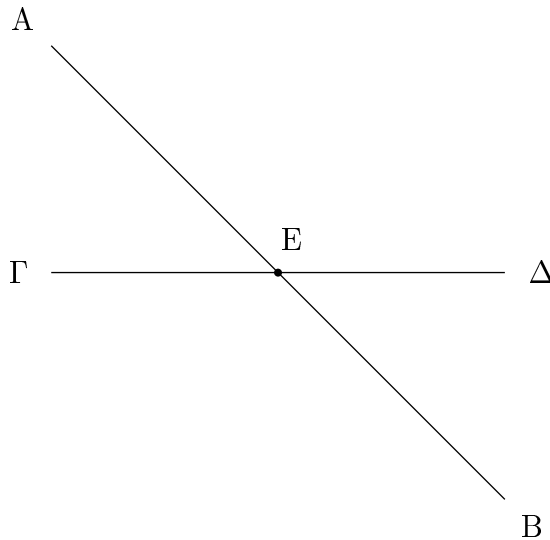
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθείαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι: αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρὸς τινὶ εὐθείᾳ καὶ τῶ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυοὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.15

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιούσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἰ AB , $\Gamma\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ὑπὸ $AE\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEB , ἢ δὲ ὑπὸ ΓEB τῇ ὑπὸ $AE\Delta$.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AE ἐπ' εὐθείαν τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔE ἐπ' εὐθείαν τὴν AB ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ $AE\Delta$, ΔEB , αἱ ἄρα ὑπὸ $AE\Delta$, ΔEB γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: αἱ ἄρα ὑπὸ ΓEA , $AE\Delta$ ταῖς ὑπὸ $AE\Delta$, ΔEB ἴσαι εἰσὶν. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ $AE\Delta$: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓEA λοιπῇ τῇ ὑπὸ $BE\Delta$ ἴση ἐστὶν: ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓEB , ΔEA ἴσαι εἰσὶν.

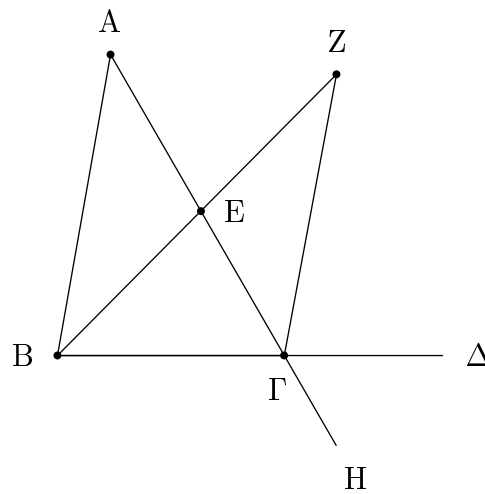
Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.

I.16

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἢ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.



Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἢ $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ Δ : λέγω, ὅτι ἡ ἔκτος γωνία ἢ ὑπὸ $AG\Delta$ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ $\Gamma B A$, $B A \Gamma$ γωνιῶν.

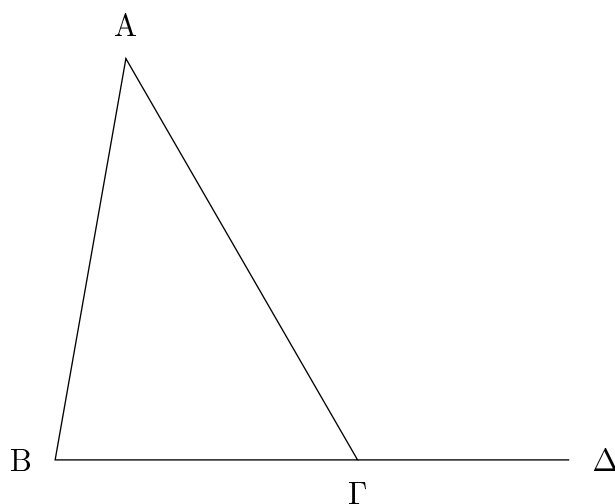
Τετμήσθω ἡ AG δίχα κατὰ τὸ E , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ BE ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Gamma$, καὶ διήχθω ἡ AG ἐπὶ τὸ H .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EG , ἡ δὲ BE τῇ EZ , δύο δὲ αἱ AE , EB δυσὶ ταῖς GE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα: καὶ γωνία ἢ ὑπὸ AEB γωνία τῇ ὑπὸ ZEG ἴση ἐστίν: κατὰ κορυφὴν γάρ: βάσις ἄρα ἢ AB βάσει τῇ $Z\Gamma$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ZEG τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ BAE τῇ ὑπὸ EGZ . μείζων δὲ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $EG\Delta$ τῆς ὑπὸ EGZ : μείζων ἄρα ἢ ὑπὸ $AG\Delta$ τῆς ὑπὸ BAE . ὁμοίως δὲ τῆς $B\Gamma$ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ $B\Gamma H$, τουτέστιν ἡ ὑπὸ $AG\Delta$, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἔκτος γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.17

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντη μεταλαμβανόμεναι.



Ἐστω τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$: λέγω, ὅτι τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ Δ .

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $AB\Gamma$ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ $AG\Delta$, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ $AB\Gamma$. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ AGB : αἱ ἄρα ὑπὸ $AG\Delta$, AGB τῶν ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $AG\Delta$, AGB δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ BAG , AGB δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ GAB , $AB\Gamma$.

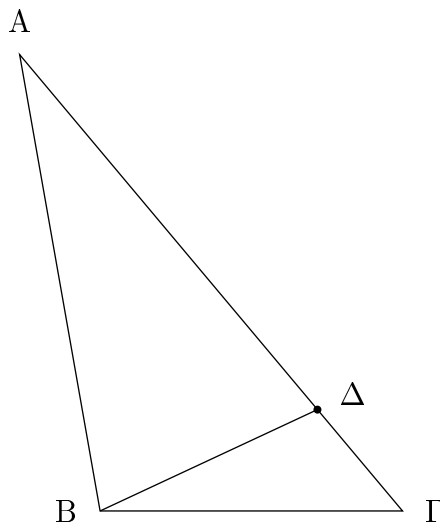
Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.18

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ μείζονα ἔχον τὴν AG πλευρὰν τῆς AB : λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ $B\Gamma A$.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ AG τῆς AB , κείσθω τῇ AB ἴση ἡ $A\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$.

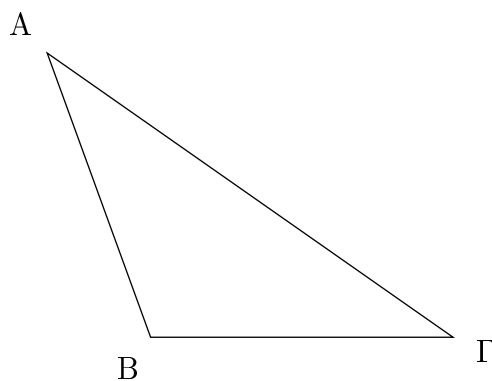


Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντός καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ: ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση: μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ: πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.19

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.



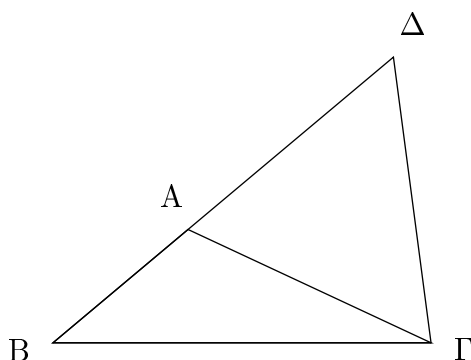
Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ: λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων: ἴση μὲν οὖν οὐκ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ: ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ: οὐκ ἐστὶ δέ: οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ: ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ: οὐκ ἐστὶ δέ: οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.20

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



Ἐστω γὰρ τρίγωνον τὸ ABΓ: λέγω, ὅτι τοῦ ABΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν BA, AΓ τῆς BΓ, αἱ δὲ AB, BΓ τῆς AΓ, αἱ δὲ BΓ, ΓA τῆς AB.

Διήχθω γὰρ ἡ BA ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓA ἴση ἡ AΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

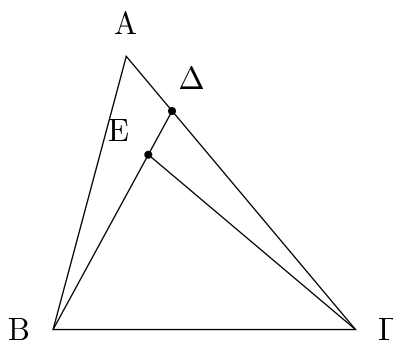
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AΔΓ τῇ ὑπὸ AΓΔ: μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ BΓΔ τῆς ὑπὸ AΔΓ: καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓB μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ BΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ BΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔB ἄρα τῆς BΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔA τῇ AΓ: μείζονες ἄρα αἱ BA, AΓ τῆς BΓ: ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν AB, BΓ τῆς ΓA μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ BΓ, ΓA τῆς AB.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.21

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ABΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς BΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν B, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ BΔ, ΔΓ: λέγω, ὅτι αἱ BΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν BA, AΓ ἐλάσσονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ BΔΓ τῆς ὑπὸ BΑΓ.



Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονες εἰσιν: κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ: αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονες εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ: αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονες εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ: πολλῶ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονες εἰσιν.

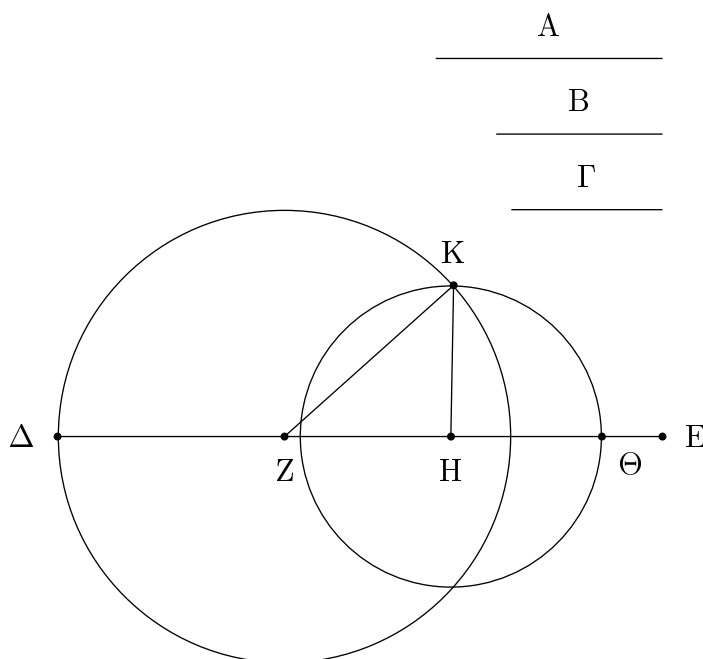
Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταῦτα τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ: πολλῶ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.22

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἱ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις [εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι: δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντη μεταλαμβανομένας].

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α: δεῖ δὲ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.



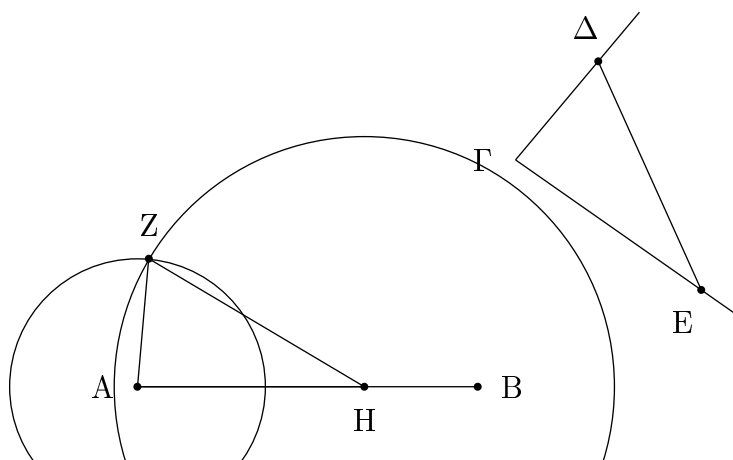
Ἐκκείσθω τις εὐθεΐα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῆ μὲν Α ἴση ἢ ΔΖ, τῆ δὲ Β ἴση ἢ ΖΗ, τῆ δὲ Γ ἴση ἢ ΗΘ: καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ: πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ: λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῆ ΖΚ: ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῆ Α ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῆ Α ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῆ ΗΚ: ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῆ Γ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῆ Γ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆ Β ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἱ εἰσὶν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.23

Πρὸς τῆ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῆ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$: δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν $\Gamma\Delta$, ΓE τυχόντα σημεῖα τὰ Δ , E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔE : καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς $\Gamma\Delta$, ΔE , ΓE , τρίγωνον συνεστάτω τὸ AZH , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $\Gamma\Delta$ τῇ AZ , τὴν δὲ ΓE τῇ AH , καὶ ἔτι τὴν ΔE τῇ ZH .

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ $\Delta\Gamma$, ΓE δύο ταῖς ZA , AH ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔE βάσει τῇ ZH ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$ γωνία τῇ ὑπὸ ZAH ἐστὶν ἴση.

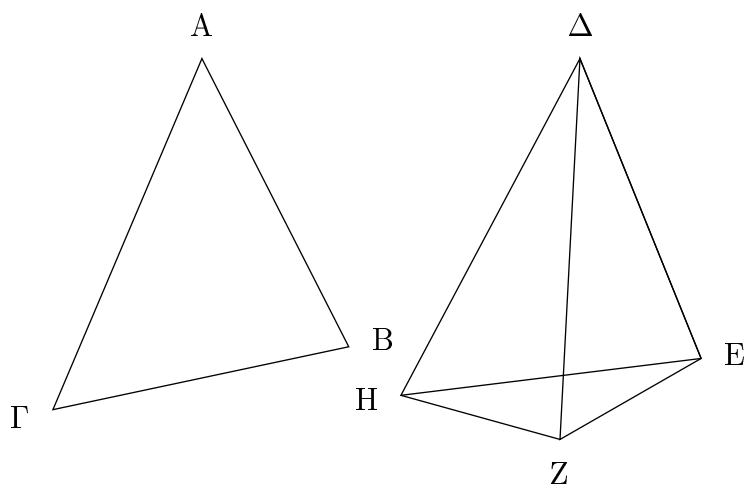
Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμω τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma E$ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ZAH : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.24

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει.

Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , ἡ δὲ πρὸς τῷ A γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ $B\Gamma$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔE εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ BAG γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $E\Delta H$, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν $A\Gamma$, ΔZ ἴση ἡ ΔH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EH , ZH .

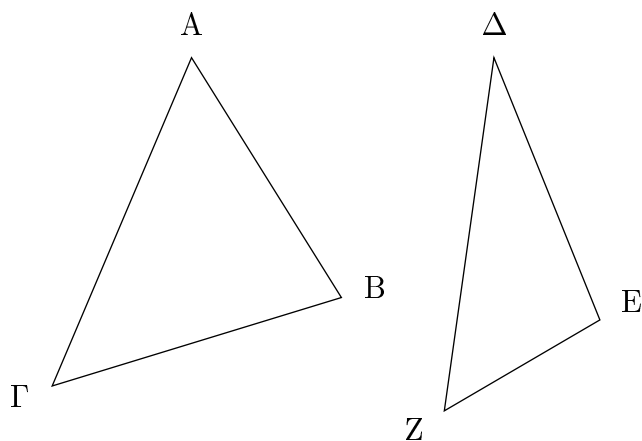


Ἐπει οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ AG τῇ ΔH , δύο δὲ αἱ BA , AG δυοὶ ταῖς $E\Delta$, ΔH ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴση: βάσις ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EH ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπει ἴση ἐστὶν ἡ ΔZ τῇ ΔH , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔHZ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZH : μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔZH τῆς ὑπὸ EZH : πολλῶν ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ EZH τῆς ὑπὸ EHZ . καὶ ἐπει τρίγωνόν ἐστι τὸ EZH μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ EZH γωνίαν τῆς ὑπὸ EHZ , ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ EH τῆς EZ . ἴση δὲ ἡ EH τῇ $B\Gamma$: μείζων ἄρα καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς EZ .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρωθεν, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔξει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.25

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυοὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρωθεν, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



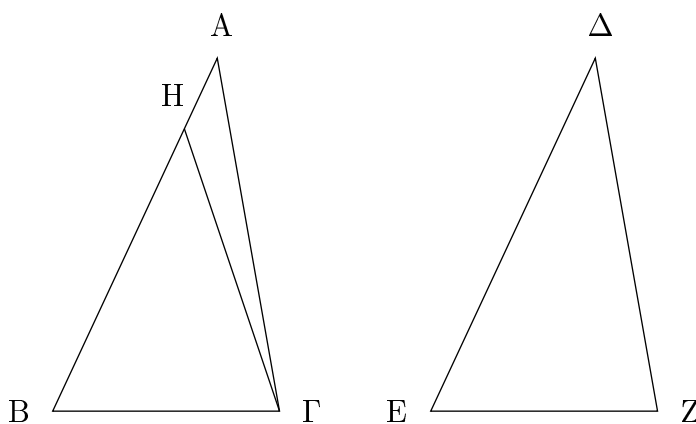
Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο πλευρὰς τὰς AB , $A\Gamma$ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔE , ΔZ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔE , τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ : βάσις δὲ ἢ $B\Gamma$ βάσεως τῆς EZ μείζων ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίας τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$ μείζων ἐστίν:

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων: ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$: ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἢ $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ : οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$: οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$: ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἢ $B\Gamma$ βάσεως τῆς EZ : οὐκ ἔστι δέ: οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση: μείζων ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῆς ὑπὸ $E\Delta Z$.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυοῖς πλευραῖς ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκάτερα, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχη, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.26

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυοῖς γωνίαις ἴσας ἔχη ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἦτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει [ἑκατέραν ἑκατέρα] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ δυοῖς ταῖς ὑπὸ ΔEZ , $EZ\Delta$ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ , τὴν δὲ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$: ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν $B\Gamma$ τῇ EZ : λέγω, ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρα, τὴν μὲν AB τῇ ΔE τὴν δὲ $A\Gamma$ τῇ ΔZ , καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστὶν ἢ AB τῇ ΔE , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἢ AB , καὶ κείσθω τῇ ΔE ἴση ἢ BH , καὶ ἐπεζεύχθω ἢ $H\Gamma$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ μὲν BH τῇ ΔE , ἢ δὲ $B\Gamma$ τῇ EZ , δύο δὲ αἱ BH , $B\Gamma$ δυοῖς ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $H\Gamma B$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἴση ἐστίν: βάσις ἄρα ἢ $H\Gamma$ βάσει τῇ ΔZ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $H\Gamma B$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἄς αἱ

ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση: δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ: λέγω πάλιν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

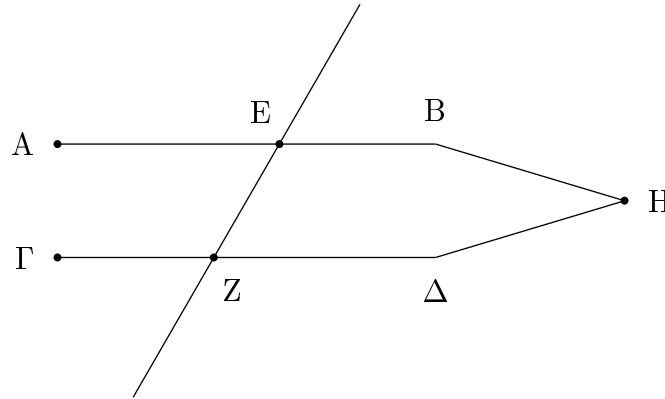
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν: βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση: τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ: ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι: βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.27

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖτω: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.



Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἰ AB , $\Gamma\Delta$ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ A , Γ . ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπέτωσαν ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη κατὰ τὸ H . τριγώνου δὴ τοῦ HEZ ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ AEZ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ EZH : ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα αἰ AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ A , Γ : αἰ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοι εἰσιν: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

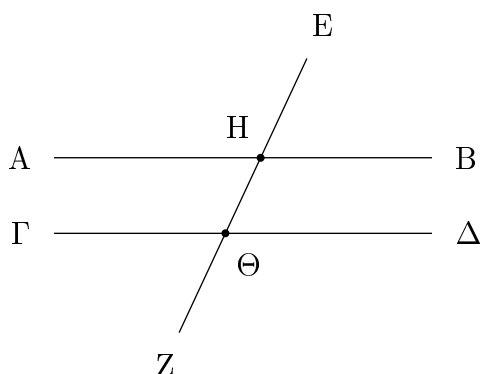
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἰ εὐθεῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.28

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἰ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ EZ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας: λέγω, ὅτι παράλληλος ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ EHB τῇ ὑπὸ $AH\Theta$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ ἄρα τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἐστὶν ἴση: καὶ εἰσιν ἐναλλάξ: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

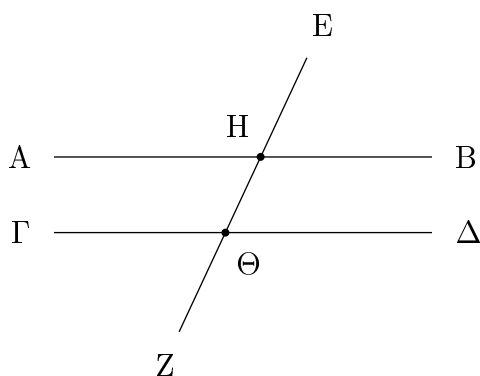


Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ ταῖς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ ἴσαι εἰσὶν: κοινῇ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ $BH\Theta$: λοιπῇ ἄρα ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἐστὶν ἴση: καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθεῖας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσσονται αἱ εὐθεῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.29

Ἡ εἰς τὰς παράλληλους εὐθεῖας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.



Εἰς γὰρ παράλληλους εὐθεῖας τὰς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτέτω ἡ EZ : λέγω, ὅτι τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ $AH\Theta$, $H\Theta\Delta$ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ EHB τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἀνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AH\Theta$ τῇ ὑπὸ $H\Theta\Delta$, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ $AH\Theta$: κοινῇ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $BH\Theta$: αἱ ἄρα ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ τῶν ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $AH\Theta$, $BH\Theta$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. [καὶ] αἱ ἄρα ὑπὸ $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν: αἱ ἄρα AB , $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον

συμπεσοῦνται: οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι: οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ: ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκεῖσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

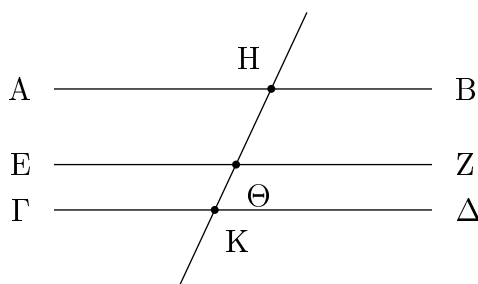
Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς τε ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.30

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἐστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος: λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.

Ἐμπίπττω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

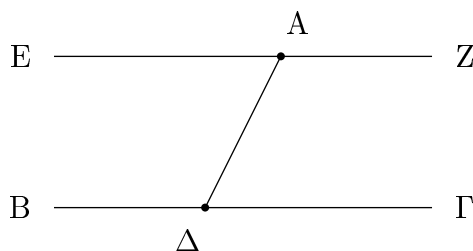


Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση: καὶ εἰσὶν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

[Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι:] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.31

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ: δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῆ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

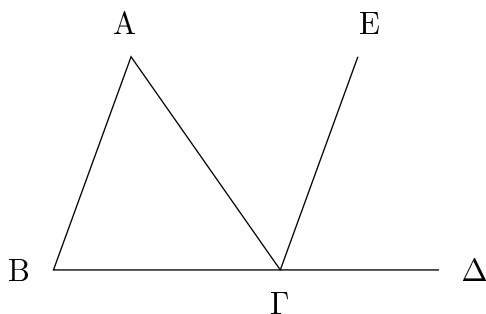
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ: καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ ΔΑ εὐθεῖα καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῆ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΔΑΕ: καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλάξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῆ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῆ δοθείση εὐθεῖα τῆ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦχται ἡ ΕΑΖ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.32

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.



Ἐστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ: λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῆ ΑΒ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΓΕ.

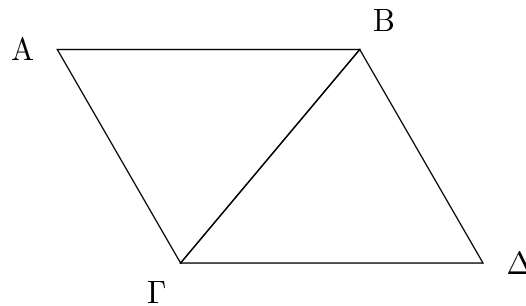
Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῆ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῆ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυοὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.33

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.



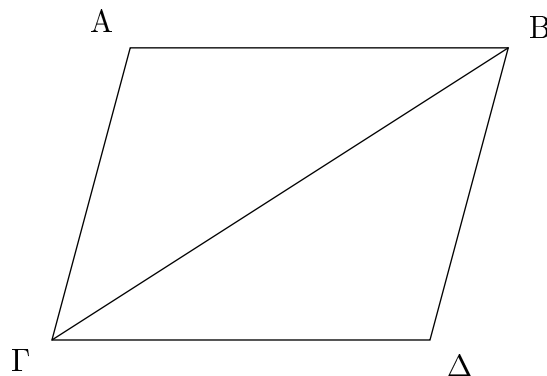
Ἐστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ AB , $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπιζευγνύωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ AG , $B\Delta$: λέγω, ὅτι καὶ αἱ AG , $B\Delta$ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ $B\Gamma$, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$ κοινὴ δὲ ἡ $B\Gamma$, δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δύο ταῖς $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση: βάσις ἄρα ἡ AG βάσει τῇ $B\Delta$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ AGB γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma B\Delta$. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς AG , $B\Delta$ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ $B\Gamma$ τὰς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ $B\Delta$. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.34

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.



Ἐστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ $AG\Delta B$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ $B\Gamma$: λέγω, ὅτι τοῦ $AG\Delta B$ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ $B\Gamma$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ $B\Gamma$, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός

έστιν ἡ ΑΓ τῆ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῆ λοιπῆ γωνία: ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῆ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῆ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῆ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλη τῆ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

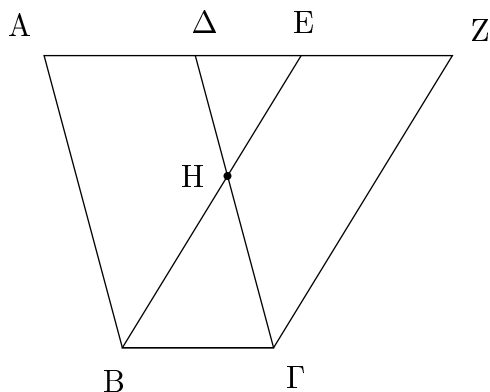
Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὲ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βᾶσις ἄρα ἡ ΑΓ τῆ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ [ἄρα] τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.35

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



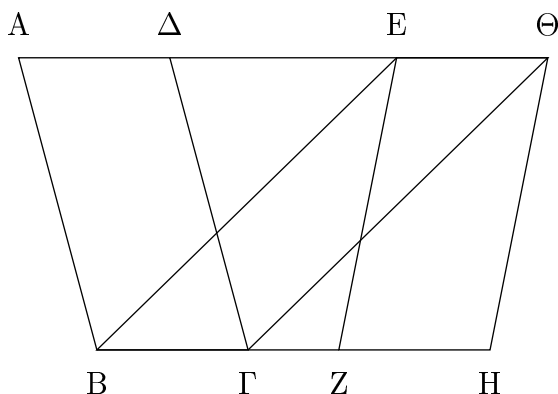
Ἐστω παραλληλόγραμμοι τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῆ ΒΓ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῆ ΕΖ ἐστὶν ἴση: καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ: ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλη τῆ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῆ ΔΓ ἴση: δύο δὲ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνία τῆ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση ἢ ἐκτὸς τῆ ἐντὸς: βᾶσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῆ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἔσται: κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΔΗΕ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον: κοινὸν προσκεῖσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον: ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.36

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



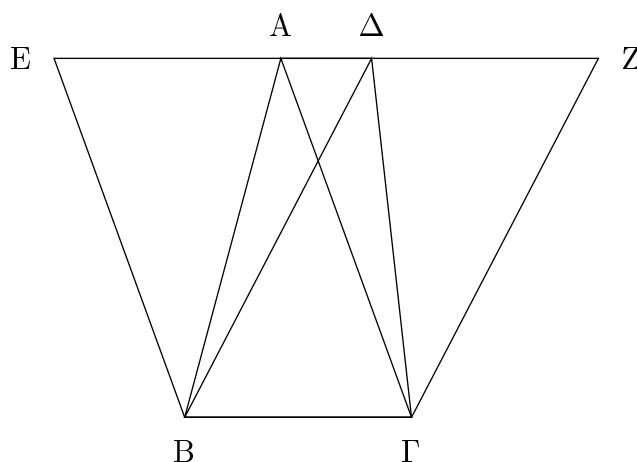
Ἐστω παραλληλόγραμμα τὰ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν $B\Gamma$, $Z\eta$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ταῖς $A\Theta$, BH : λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ $EZH\Theta$.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , $\Gamma\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ $Z\eta$, ἀλλὰ ἡ $Z\eta$ τῇ $E\Theta$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα τῇ $E\Theta$ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτάς αἱ EB , $\Theta\Gamma$: αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλληλοῦς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι: [καὶ αἱ EB , $\Theta\Gamma$ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι]. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $EB\Gamma\Theta$. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $AB\Gamma\Delta$: βάσιν τε γὰρ αὐτῶ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν $B\Gamma$, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ἐστὶν αὐτῶ ταῖς $B\Gamma$, $A\Theta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $EZH\Theta$ τῷ αὐτῶ τῷ $EB\Gamma\Theta$ ἐστὶν ἴσον: ὥστε καὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ $EZH\Theta$ ἐστὶν ἴσον.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.37

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλληλοῖς ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



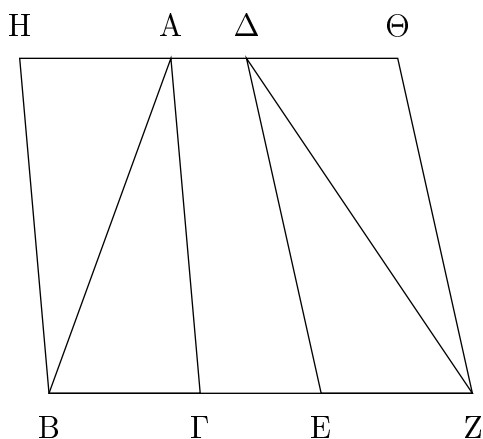
Ἐστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $A\Delta$, $B\Gamma$: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ $A\Delta$ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ E , Z , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῆ ΓA παράλληλος ἤχθω ἡ BE , διὰ δὲ τοῦ Γ τῆ $B\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓZ . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$: καὶ εἰσιν ἴσα: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, EZ : καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $EB\Gamma A$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον: ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει: τοῦ δὲ $\Delta B\Gamma Z$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον: ἡ γὰρ $\Delta\Gamma$ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta B\Gamma$ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.38

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἐστω τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $B\Gamma$, EZ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BZ , $A\Delta$: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $A\Delta$ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ H, Θ , καὶ διὰ μὲν τοῦ B τῆ ΓA παράλληλος ἦχθω ἡ BH , διὰ δὲ τοῦ Z τῆ ΔE παράλληλος ἦχθω ἡ $Z\Theta$. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $HB\Gamma A, \Delta EZ\Theta$: καὶ ἴσον τὸ $HB\Gamma A$ τῷ $\Delta EZ\Theta$: ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $B\Gamma, EZ$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $BZ, H\Theta$: καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν $HB\Gamma A$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. ἡ γὰρ AB διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει: τοῦ δὲ $\Delta EZ\Theta$ παραλληλογράμμου ἡμισυ τὸ ZED τρίγωνον: ἡ γὰρ ΔZ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει: [τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν]. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

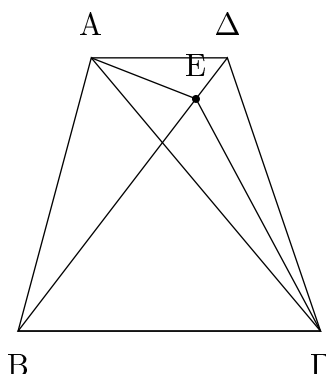
Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.39

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma, \Delta B\Gamma$ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς $B\Gamma$: λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Delta$: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆ $B\Gamma$.

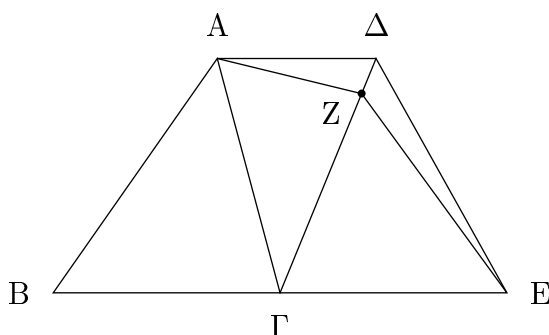


Εἰ γὰρ μή, ἦχθω διὰ τοῦ A σημείου τῆ $B\Gamma$ εὐθεία παράλληλος ἡ AE , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EG . ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $EB\Gamma$ τριγώνῳ: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τῷ $\Delta B\Gamma$ ἐστὶν ἴσον: καὶ τὸ $\Delta B\Gamma$ ἄρα τῷ $EB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστὶν ἡ AE τῆ $B\Gamma$. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $A\Delta$: ἡ $A\Delta$ ἄρα τῆ $B\Gamma$ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.40

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.



Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν $B\Gamma$, ΓE καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. λέγω, ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

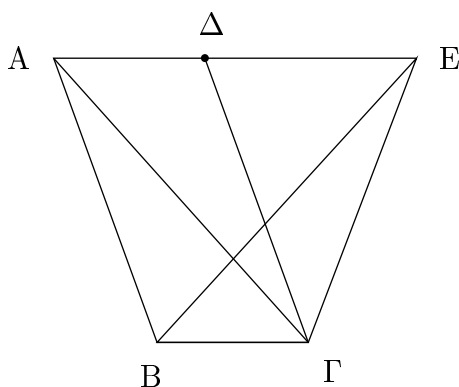
Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Delta$: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $A\Delta$ τῇ BE .

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ A τῇ BE παράλληλος ἡ AZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZE . ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $Z\Gamma E$ τριγώνῳ: ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν $B\Gamma$, ΓE καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς BE , AZ . ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $\Delta\Gamma E$ [τριγώνῳ]: καὶ τὸ $\Delta\Gamma E$ ἄρα [τριγώνον] ἴσον ἐστὶ τῷ $Z\Gamma E$ τριγώνῳ τὸ μείζον τῷ ἐλάσσονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα παράλληλος ἡ AZ τῇ BE . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $A\Delta$: ἡ $A\Delta$ ἄρα τῇ BE ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δείξαι.

I.41

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἦ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.



Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τριγώνῳ τῷ $EB\Gamma$ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς $B\Gamma$, AE : λέγω, ὅτι διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τοῦ $BE\Gamma$ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Gamma$. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $EB\Gamma$ τριγώνῳ: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶν αὐτῷ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς $B\Gamma$, AE . ἀλλὰ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου: ἡ γὰρ

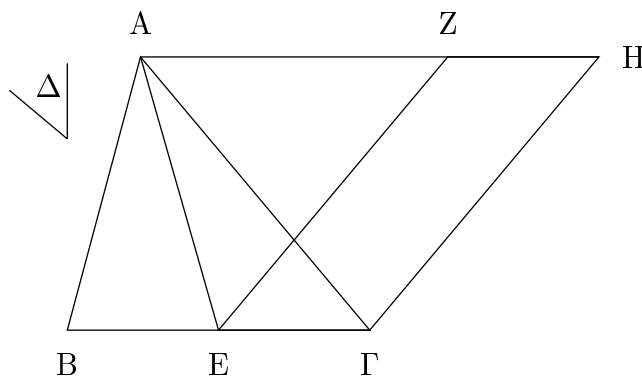
ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει: ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχη τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἤ, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.42

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ: δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

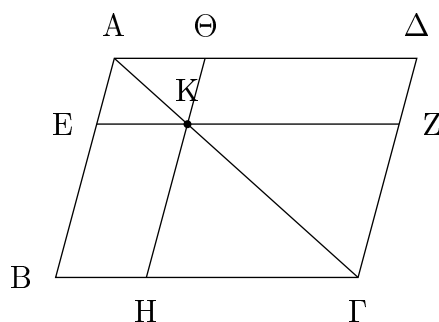


Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ: παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ: ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ: διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου: βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστὶν αὐτῷ παραλλήλοις: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.43

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



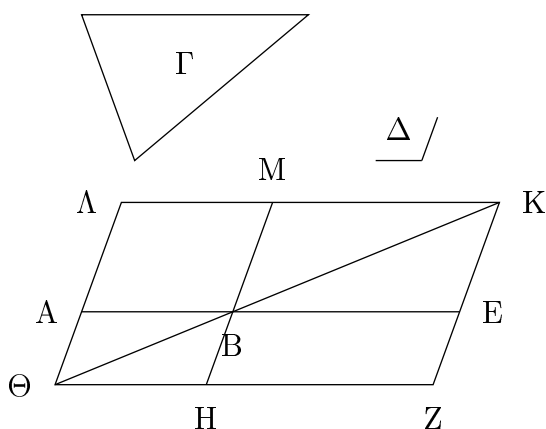
Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ AG , περὶ δὲ τὴν AG παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ $Z\Theta$, ZH , τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ BK , $K\Delta$: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ BK παραπλήρωμα τῷ $K\Delta$ παραπληρώματι.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ AG , ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Gamma\Delta$ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμὸν ἐστὶ τὸ $E\Theta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ AK , ἴσον ἐστὶ τὸ AEK τρίγωνον τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $KZ\Gamma$ τρίγωνον τῷ $K\eta\Gamma$ ἐστὶν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν AEK τρίγωνον τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ $KZ\Gamma$ τῷ $K\eta\Gamma$, τὸ AEK τρίγωνον μετὰ τοῦ $K\eta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ $A\Theta K$ τριγώνῳ μετὰ τοῦ $KZ\Gamma$: ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ὅλῳ τῷ $A\Delta\Gamma$ ἴσον: λοιπὸν ἄρα τὸ BK παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ $K\Delta$ παραπληρώματι ἐστὶν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.44

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.



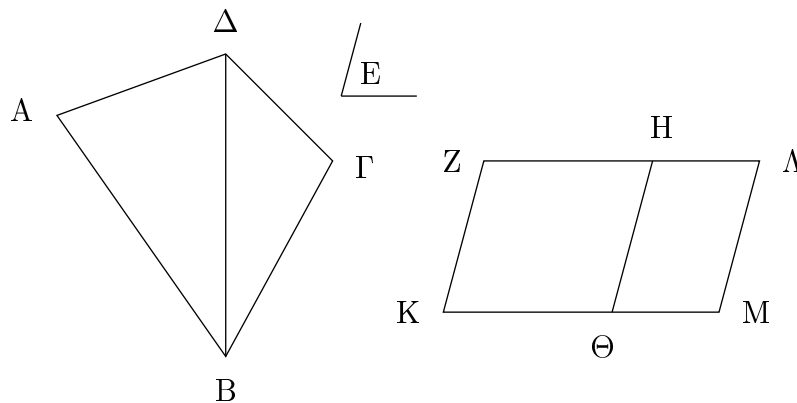
Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ , ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ : δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ BEZH ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ EBH, ἣ ἔστιν ἴση τῇ Δ: καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν BE τῇ AB, καὶ διήχθω ἡ ZH ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν BH, EZ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, EZ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν: αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν: αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτεύωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεία. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμοι μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον: καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνία ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἣ ἔστιν ἴση τῇ Δ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.45

Τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθύγραμμῳ.



Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε: δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἣ ἔστιν ἴση τῇ Ε: καὶ παραβέβλησθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἣ ἔστιν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἐκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ: αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς

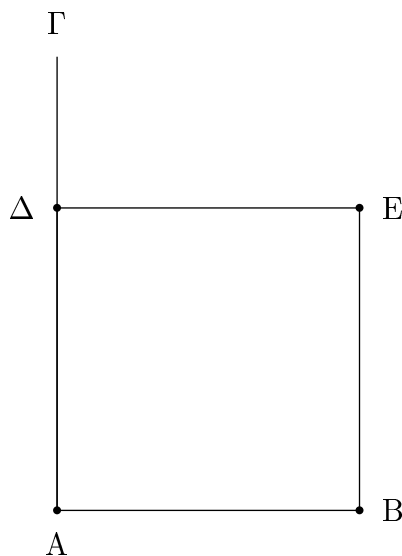
γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιούσιν: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Theta$ τῇ ΘM : καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς KM , ZH εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘH , αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ $M\Theta H$, $\Theta H Z$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $\Theta H \Lambda$: αἱ ἄρα ὑπὸ $M\Theta H$, $\Theta H \Lambda$ ταῖς ὑπὸ $\Theta H Z$, $\Theta H \Lambda$ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ $M\Theta H$, $\Theta H \Lambda$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: καὶ αἱ ὑπὸ $\Theta H Z$, $\Theta H \Lambda$ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $H \Lambda$. καὶ ἐπεὶ ἡ ZK τῇ ΘH ἴση τε καὶ παράλληλος ἐστίν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘH τῇ $M \Lambda$, καὶ ἡ KZ ἄρα τῇ $M \Lambda$ ἴση τε καὶ παράλληλος ἐστίν: καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ KM , $Z \Lambda$: καὶ αἱ KM , $Z \Lambda$ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν: παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $KZ \Lambda M$. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν $AB \Delta$ τρίγωνον τῷ $Z \Theta$ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ $\Delta B \Gamma$ τῷ $H M$, ὅλον ἄρα τὸ $AB \Gamma \Delta$ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ $KZ \Lambda M$ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῷ $AB \Gamma \Delta$ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ $KZ \Lambda M$ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ZKM , ἣ ἐστὶν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ E : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.46

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB : δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.



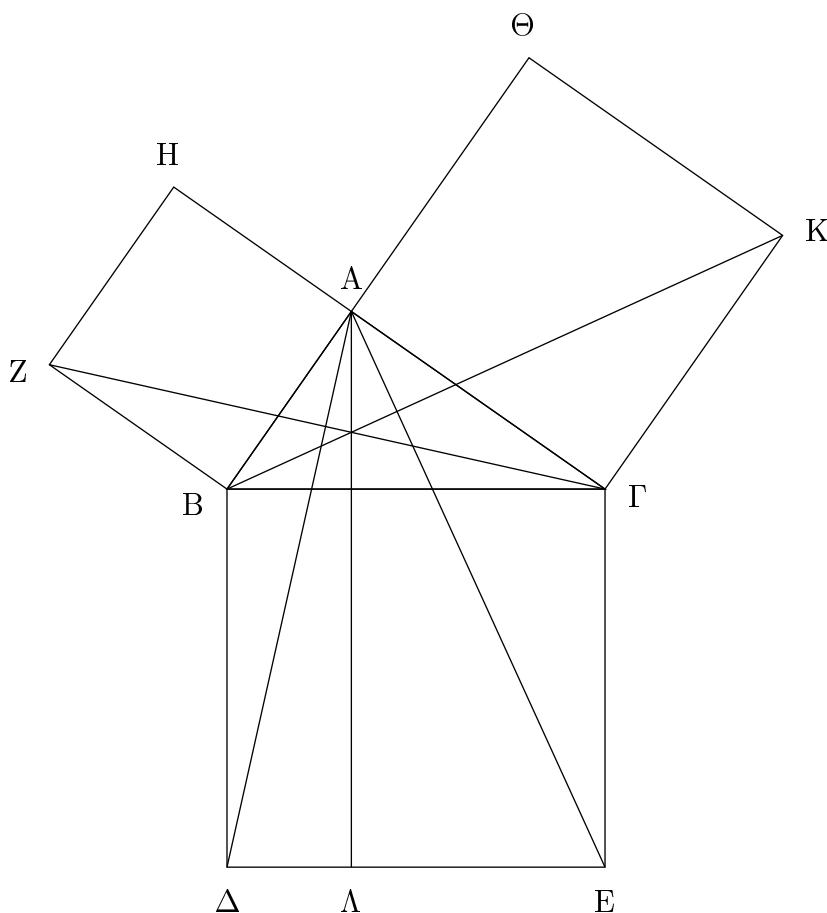
Ἦχθω τῇ AB εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἡ AG , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ $A \Delta$: καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΔE , διὰ δὲ τοῦ B σημείου τῇ $A \Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ BE . Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $A \Delta E B$: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ $A \Delta$ τῇ BE . ἀλλὰ ἡ AB τῇ $A \Delta$ ἐστὶν ἴση: αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ BA , $A \Delta$, ΔE , EB ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $A \Delta E B$ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς AB , ΔE εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ $A \Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ $B A \Delta$, $A \Delta E$ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $B A \Delta$: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $A \Delta E$. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραὶ τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ $A B E$, $B E \Delta$ γωνιῶν: ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A \Delta E B$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστίν: καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AB εὐθείας ἀναγεγραμμένον: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

I.47

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ABΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ BAΓ γωνίαν: λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA, AΓ τετραγώνοις.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς BΓ τετράγωνον τὸ BDEΓ, ἀπὸ δὲ τῶν BA, AΓ τὰ HB, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν BΔ, ΓE παράλληλος ἦχθω ἡ AΛ: καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AΔ, ZΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ BAΓ, BAH γωνιῶν, πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ BA καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A δύο εὐθεῖαι αἱ AΓ, AH μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιούσιν: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AH. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ BA τῇ AΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔBΓ γωνία τῇ ὑπὸ ZBA: ὀρθὴ γὰρ ἑκάτερα: κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ABΓ: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔBA ὅλη τῇ ὑπὸ ZBΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔB τῇ BΓ, ἡ δὲ ZB τῇ BA, δύο δὴ αἱ ΔB, BA δύο ταῖς ZB, BΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔBA γωνία τῇ ὑπὸ ZBΓ ἴση: βάσις ἄρα ἡ AΔ βάσει τῇ ZΓ [ἐστὶν] ἴση, καὶ τὸ ABΔ τρίγωνον τῷ ZBΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον: καὶ [ἐστὶ] τοῦ μὲν

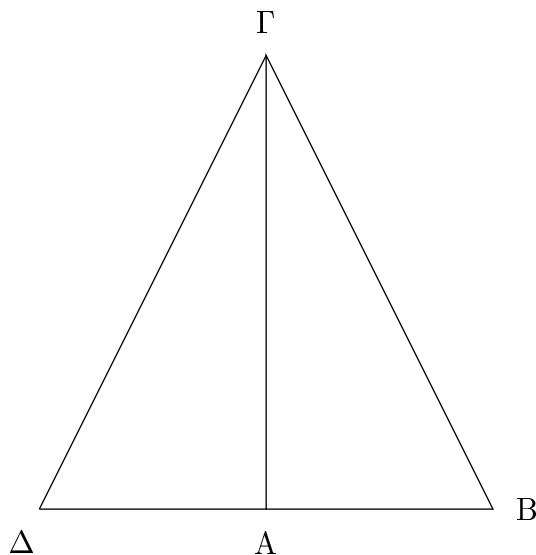
ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον: βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ: τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον: βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. [τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν:] ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ: ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυοῖς τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν [γωνίαν] περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

I.48

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἢ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθὴ ἐστίν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις: λέγω, ὅτι ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῆ ΑΓ εὐθεία πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῆ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῆ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ: ὀρθὴ γάρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία: τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ: ὑπόκειται γὰρ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῆ ΒΓ ἐστὶν ἴση: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῆ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο

δη αὶ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΓ [ἐστίν] ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ἢ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθὴ ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book II

Definitions

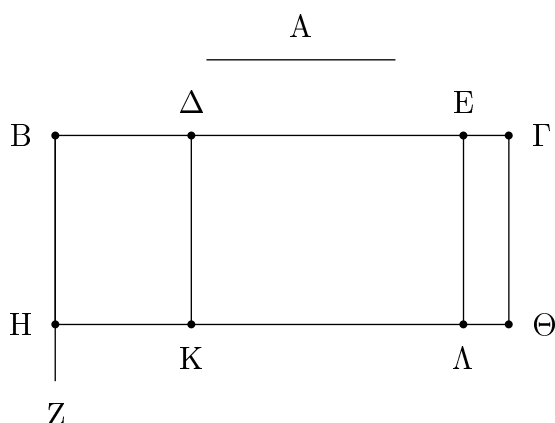
1. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν.
2. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνῶμων καλείσθω.

Propositions

II.1

Ἐὰν ὧσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῆ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτιμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις.

Ἐστῶσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $A, B\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ $B\Gamma$, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα: λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν $A, B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A, \Delta E$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν $A, E\Gamma$.



Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ B τῆ $B\Gamma$ πρὸς ὀρθᾶς ἡ BZ , καὶ κείσθω τῆ A ἴση ἡ BH , καὶ διὰ μὲν τοῦ H τῆ $B\Gamma$ παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, διὰ δὲ τῶν Δ, E, Γ τῆ BH παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $\Delta K, E\Lambda, \Gamma\Theta$.

Ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ $B\Theta$ τοῖς $BK, \Delta\Lambda, E\Theta$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $B\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$: περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $HB, B\Gamma$, ἴση δὲ ἡ BH τῆ A : τὸ δὲ BK τὸ ὑπὸ τῶν $A,$

$B\Delta$: περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $HB, B\Delta$, ἴση δὲ ἡ BH τῇ A . τὸ δὲ $\Delta\Lambda$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, \Delta E$: ἴση γὰρ ἡ ΔK , τουτέστιν ἡ BH , τῇ A . καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ $E\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $A, E\Gamma$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A, B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ $A, B\Delta$ καὶ τῷ ὑπὸ $A, \Delta E$ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ $A, E\Gamma$.

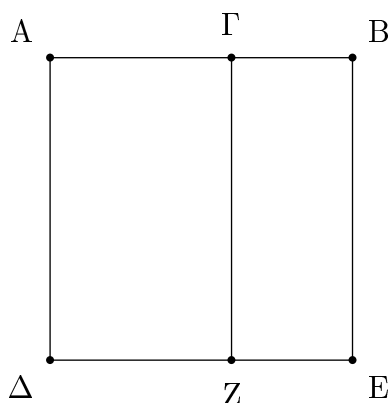
Ἐὰν ἄρα ὄσιν δύο εὐθεῖαι, τμηθῆ δὲ ἡ ἐτέρα αὐτῶν εἰς ὅσαδηποτοῦν τμήματα, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπὸ τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἐκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.2

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετιμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον: λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ $BA, A\Gamma$ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta EB$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὀποτέρᾳ τῶν $A\Delta, BE$ παράλληλος ἡ ΓZ .



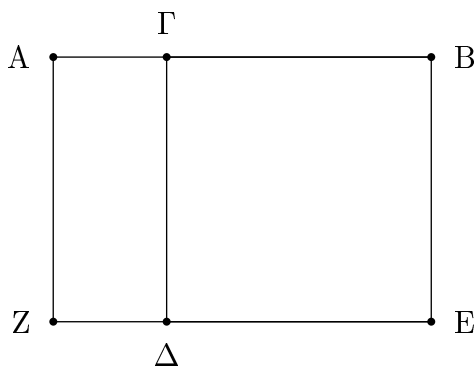
ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ AE τοῖς AZ, GE . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν AE τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον, τὸ δὲ AZ τὸ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον: περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν $\Delta A, A\Gamma$, ἴση δὲ ἡ $A\Delta$ τῇ AB : τὸ δὲ GE τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$: ἴση γὰρ ἡ BE τῇ AB . τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.3

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ AB τετιμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ : λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν $A\Gamma, \Gamma B$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνου.



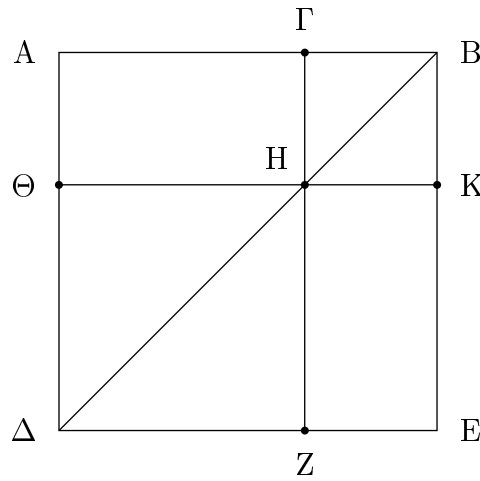
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ, ΓΕ: καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον: περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ: τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ: ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ: τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.4

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετιμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AΔEB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν AΔ, EB παράλληλος ἦχθω ἡ ΓZ, διὰ δὲ τοῦ H ὁποτέρᾳ τῶν AB, ΔE παράλληλος ἦχθω ἡ ΘK. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓZ τῇ AΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ BΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἢ ὑπὸ ΓHB ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ AΔB. ἀλλ' ἡ ὑπὸ AΔB τῇ ὑπὸ ABΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ BA τῇ AΔ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΓHB ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ HBG ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ BG πλευρᾷ τῇ GH ἐστὶν ἴση: ἀλλ' ἡ μὲν GB τῇ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ GH τῇ KB: καὶ ἡ HK ἄρα τῇ KB ἐστὶν ἴση: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓHKB. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ GH τῇ BK [καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ GB], αἱ ἄρα ὑπὸ KBG, HGB γωνίαι δύο ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ KBG: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BGH: ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓHK, HKB ὀρθαὶ εἰσὶν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓHKB: ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον: τετράγωνον ἄρα ἐστίν: καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς GB. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘZ τετράγωνόν ἐστιν: καὶ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΘH, τουτέστιν [ἀπὸ] τῆς AG: τὰ ἄρα ΘZ, KΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν AG, GB εἰσὶν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE, καὶ ἐστὶ τὸ AH τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB: ἴση γὰρ ἡ HG τῇ GB: καὶ τὸ HE ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AG, GB: τὰ ἄρα AH, HE ἴσα ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG, GB. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΘZ, KΓ τετράγωνα ἀπὸ τῶν AG, GB: τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘZ, KΓ, AH, HE ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG, GB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG, GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. ἀλλὰ τὰ ΘZ, KΓ, AH, HE ὅλον ἐστὶ τὸ AΔEB, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν AG, GB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AG, GB περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ: ὅπερ εἶδει δεῖξαι.

[

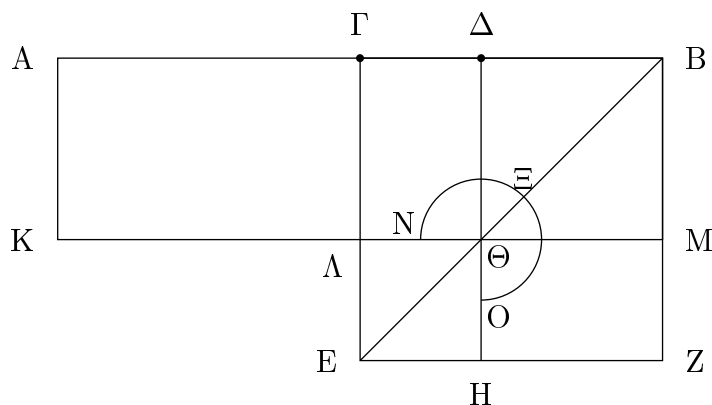
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνα ἐστίν].

II.5

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ : λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

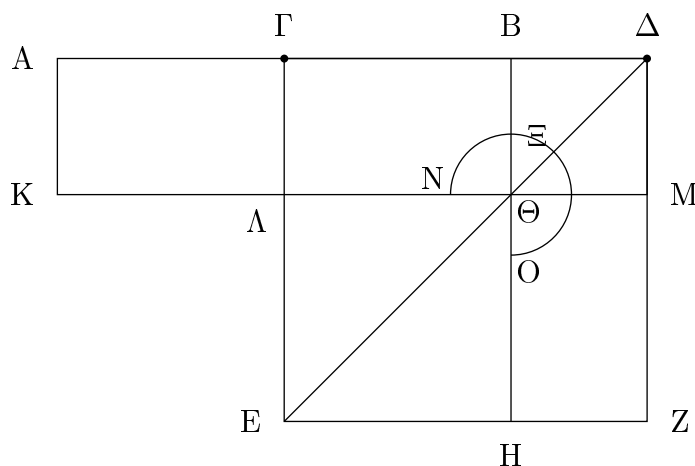


Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον τὸ $\Gamma E Z B$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE , καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ ὁποτέρᾳ τῶν ΓE , BZ παράλληλος ἦχθω ἡ ΔH , διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν AB , EZ παράλληλος πάλιν ἦχθω ἡ KM , καὶ πάλιν διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν $\Gamma\Lambda$, BM παράλληλος ἦχθω ἡ AK . καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Theta$ παραπλήρωμα τῷ ΘZ παραπλήρωματι, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔM : ὅλον ἄρα τὸ ΓM ὅλῳ τῷ ΔZ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΓM τῷ $A\Lambda$ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ $A\Gamma$ τῆς ΓB ἐστὶν ἴση: καὶ τὸ $A\Lambda$ ἄρα τῷ ΔZ ἴσον ἐστίν. κοινὸν προσκείσθω τὸ $\Gamma\Theta$: ὅλον ἄρα τὸ $A\Theta$ τῷ $N\Theta O$ γνώμονι ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ $A\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἐστίν: ἴση γὰρ ἡ $\Delta\Theta$ τῆς ΔB : καὶ ὁ $N\Theta O$ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ $A\Delta$, ΔB . κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛH , ὃ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$: ὃ ἄρα $N\Theta O$ γνώμων καὶ τὸ ΛH ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ $N\Theta O$ γνώμων καὶ τὸ ΛH ὅλον ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z B$ τετράγωνον, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς ΓB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.6

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ δίχα, προστεθῆ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.



Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἢ $B\Delta$: λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετράγωνον τὸ $\Gamma E Z \Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΔE , καὶ διὰ μὲν τοῦ B σημείου ὁποτέρᾳ τῶν $E\Gamma$, ΔZ παράλληλος ἤχθω ἢ BH , διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν AB , EZ παράλληλος ἤχθω ἢ KM , καὶ ἔτι διὰ τοῦ A ὁποτέρᾳ τῶν $\Gamma\Lambda$, ΔM παράλληλος ἤχθω ἢ AK .

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἢ $A\Gamma$ τῇ ΓB , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ $A\Lambda$ τῷ $\Gamma\Theta$. ἀλλὰ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ ΘZ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ $A\Lambda$ ἄρα τῷ ΘZ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓM : ὅλον ἄρα τὸ AM τῷ $N\Theta O$ γνώμονι ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ AM ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB : ἴση γάρ ἐστὶν ἢ ΔM τῇ ΔB : καὶ ὁ $N\Theta O$ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛH , ὅ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετραγώνῳ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ $N\Theta O$ γνώμονι καὶ τῷ ΛH . ἀλλὰ ὁ $N\Theta O$ γνώμων καὶ τὸ ΛH ὅλον ἐστὶ τὸ $\Gamma E Z \Delta$ τετράγωνον, ὅ ἐστὶν ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓB τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνῳ.

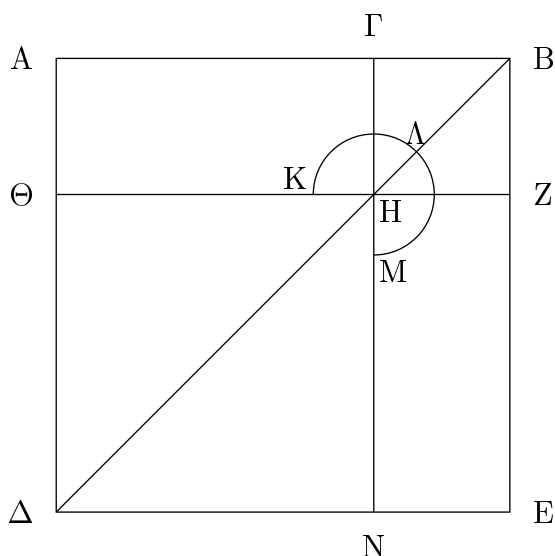
Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκεκριμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.7

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἢ AB τετμήσθω, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον: λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta E B$: καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.



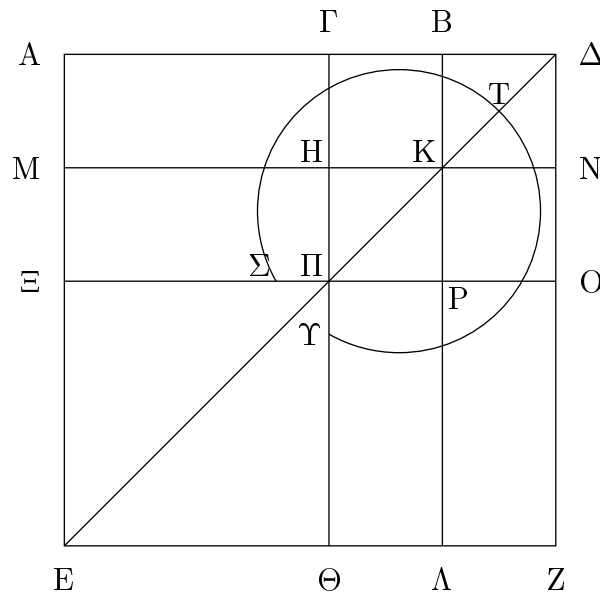
Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ HE, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ: ὅλον ἄρα τὸ AZ ὅλη τῷ GE ἴσον ἐστίν: τὰ ἄρα AZ, GE διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἀλλὰ τὰ AZ, GE ὁ KAM ἐστὶ γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον: ὁ KAM ἄρα γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ AZ. ἐστὶ δὲ τοῦ AZ διπλάσιον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BG: ἴση γὰρ ἡ BZ τῇ BG: ὁ ἄρα KAM γνῶμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BG. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΗ, ὃ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AG τετράγωνον: ὁ ἄρα KAM γνῶμων καὶ τὰ BH, HD τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. ἀλλὰ ὁ KAM γνῶμων καὶ τὰ BH, HD τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ AΔEB καὶ τὸ ΓΖ, ἃ ἐστὶν ἀπὸ τῶν AB, BG τετράγωνα: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB, BG τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ [τε] δις ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ' ἑνὸς τῶν τμημάτων τὰ συναμφοτέρα τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.8

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τεμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Γ σημεῖον: λέγω, ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BG περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB, BG ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.



Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας [τῆ AB εὐθεία] ἡ BΔ, καὶ κείσθω τῆ ΓB ἴση ἡ BΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AΔ τετράγωνον τὸ AEZΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

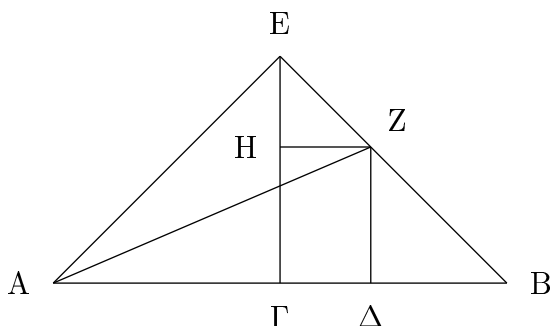
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῆ BΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓB τῆ HK ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ BΔ τῆ KN, καὶ ἡ HK ἄρα τῆ KN ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠP τῆ PO ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BΓ τῆ BΔ, ἡ δὲ HK τῆ KN, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓK τῷ KΔ, τὸ δὲ HP τῷ PN. ἀλλὰ τὸ ΓK τῷ PN ἐστὶν ἴσον: παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓO παραλληλογράμμου: καὶ τὸ KΔ ἄρα τῷ HP ἴσον ἐστίν: τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΔK, ΓK, HP, PN ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ ΓK. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῆ BΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν BΔ τῆ BK, τουτέστι τῆ ΓH ἴση, ἡ δὲ ΓB τῆ HK, τουτέστι τῆ ΗΠ, ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΓH ἄρα τῆ ΗΠ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓH τῆ ΗΠ, ἡ δὲ ΠP τῆ PO, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν AH τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠA τῷ PZ. ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠA ἐστὶν ἴσον: παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜA παραλληλογράμμου: καὶ τὸ AH ἄρα τῷ PZ ἴσον ἐστίν: τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ AH, ΜΠ, ΠA, PZ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ AH ἐστὶ τετραπλάσια. ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓK, KΔ, HP, PN τοῦ ΓK τετραπλάσια: τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνῶμονα, τετραπλάσια ἐστὶ τοῦ AK. καὶ ἐπεὶ τὸ AK τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΔ ἐστίν: ἴση γὰρ ἡ BK τῆ BΔ: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΔ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ AK. ἐδείχθη δὲ τοῦ AK τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνῶμων: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνῶμονι. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AΓ τετραγώνῳ: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΔ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ AΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνῶμονι καὶ τῷ ΞΘ. ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνῶμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ AEZΔ τετράγωνον, ὅ ἐστὶν ἀπὸ τῆς AΔ: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ AΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AΔ τετραγώνῳ: ἴση δὲ ἡ BΔ τῆ BΓ. τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν AB, BΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ AΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AΔ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς AB καὶ BΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ, ὡς ἔτυχεν, τὸ τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἐνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου

ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τε τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.9

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμίσειας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξύ τῶν τομῶν τετραγώνου.



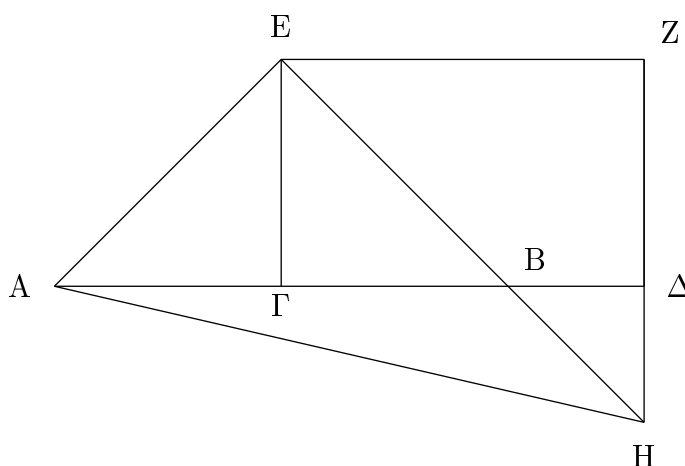
Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ AB τεμηθῆσθαι εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ: λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.
 Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῆς ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκάτερα τῶν ΑΓ, ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ, ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῆς ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῆς ΑΒ ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΕΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ, ΑΕΓ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσὶν: καὶ εἰσὶν ἴσαι: ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ, ΓΑΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ, ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ: ἴση γὰρ ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΕΓΒ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς: ἴση ἄρα [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΖΗ: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΗΖ ἐστὶν ἴση. πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ: ἴση γὰρ πάλιν ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΕΓΒ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΖΔ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς: ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῆς ὑπὸ ΔΖΒ: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῆς ΔΒ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ ΑΓ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῆς ΗΖ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῆς ΓΔ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον: ὀρθὴ γὰρ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΖ: ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν

$A\Delta$, ΔZ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων. ἴση δὲ ἡ ΔZ τῇ ΔB : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.10

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκεκριμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου.



Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τεμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , προσκείσθω δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ $B\Delta$: λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΔ$ τετραγώνων.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΓΕ$, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ, τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΑ$, $ΕΒ$: καὶ διὰ μὲν τοῦ $Ε$ τῇ $A\Delta$ παράλληλος ἦχθω ἡ EZ , διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ $ΓΕ$ παράλληλος ἦχθω ἡ $Z\Delta$. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς $EΓ$, $Z\Delta$ εὐθεῖαί τις ἐνέπεσεν ἡ EZ , αἱ ὑπὸ $ΓΕΖ$, $EZ\Delta$ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: αἱ ἄρα ὑπὸ ZEB , $EZ\Delta$ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν: αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν: αἱ ἄρα $ΕΒ$, $Z\Delta$ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ B , Δ μέρη συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπίπτεωσαν κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΕ$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAG τῇ ὑπὸ $ΑΕΓ$: καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Γ : ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ EAG , $ΑΕΓ$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $ΓΕΒ$, $ΕΒΓ$ ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB . καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΕΒΓ$, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔBH . ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $B\Delta H$ ὀρθή: ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ $\Delta ΓΕ$: ἐναλλάξ γάρ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔHB ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς: ἡ ἄρα ὑπὸ ΔHB τῇ ὑπὸ ΔBH ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $B\Delta$ πλευρᾷ τῇ $H\Delta$ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ EZH ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Z : ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ : λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEH ἡμίσειά ἐστὶν ὀρθῆς: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ EZH γωνία τῇ ὑπὸ ZEH : ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ HZ πλευρᾷ τῇ EZ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ [ἴση ἐστὶν ἡ $EΓ$ τῇ $ΓΑ$,] ἴσον ἐστὶ [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς $EΓ$ τετράγωνον

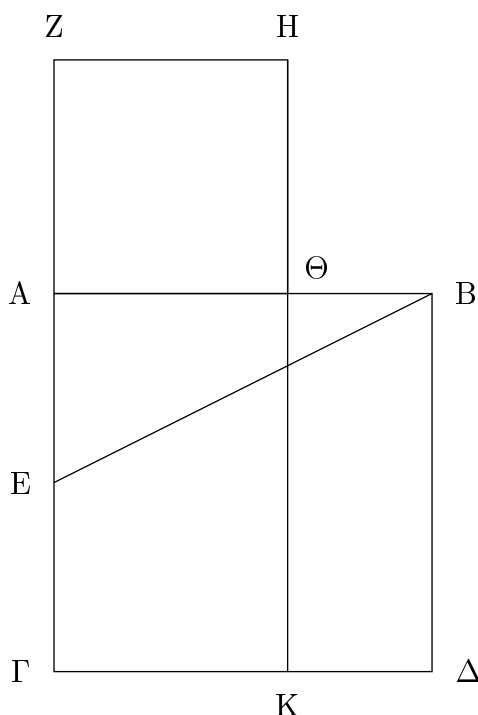
τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ, ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΕΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ, ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετράγωνον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΗ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ [τετραγώνων]. ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [τετράγωνα] διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δὲ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προσκειμένης τὰ συναμφότερα τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκεκριμένης ἕκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντος τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.11

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ: δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν ὥστε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $AB\Delta\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ AG δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE , καὶ διήχθω ἡ GA ἐπὶ τὸ Z , καὶ κείσθω τῇ BE ἴση ἡ EZ , καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον τὸ $Z\Theta$, καὶ διήχθω ἡ $H\Theta$ ἐπὶ τὸ K : λέγω, ὅτι ἡ AB τέμνεται κατὰ τὸ Θ , ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ τετραγώνῳ.

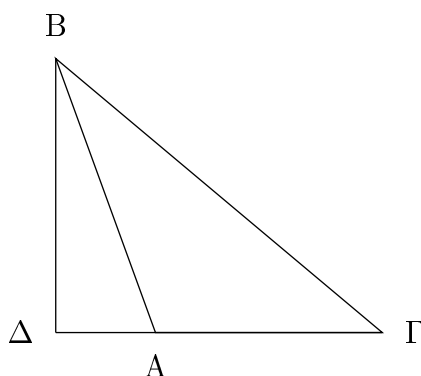
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ AG τέμνεται δίχα κατὰ τὸ E , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ ZA , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ EB . ἀλλὰ τῷ ἀπὸ EB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν BA , AE : ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ A γωνία: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , AE . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς AE : λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓZ , ZA τὸ ZK : ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZH : τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AB τὸ $A\Delta$: τὸ ἄρα ZK ἴσον ἐστὶ τῷ $A\Delta$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ AK : λοιπὸν ἄρα τὸ $Z\Theta$ τῷ $\Theta\Delta$ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν $\Theta\Delta$ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$: ἴση γὰρ ἡ AB τῇ $B\Delta$: τὸ δὲ $Z\Theta$ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘA τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB τέμνεται κατὰ τὸ Θ ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Theta$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ποιεῖν τῷ ἀπὸ τῆς ΘA τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

II.12

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλεῖα γωνία.

Ἐστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου ἐπὶ τὴν GA ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ BD . λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ τετράγωνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν GA , $A\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ.



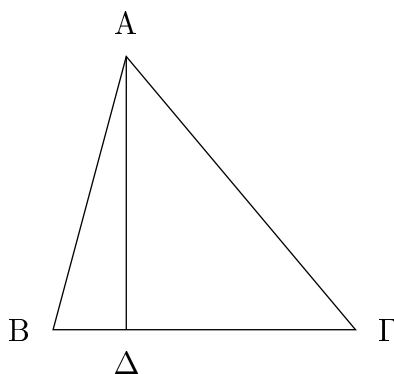
Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ GA τέμνεται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ A σημεῖον, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔB : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, ΔB ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$, ΔB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ [περιεχομένῳ

ὀρθογωνίῳ]. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, ΔB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓB : ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία: τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς AB : τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓA , AB τετραγώνοις καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ: ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓB τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓA , AB τετραγώνων μείζον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓA , $A\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον μείζον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλεῖα γωνία: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.13

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξεῖα γωνία.



Ἐστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ὀξεῖαν ἔχον τῆν πρὸς τῷ B γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετος ἡ $A\Delta$: λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον ἔλαττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΓB , BA τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓB τέμνεται, ὡς ἔτυχεν, κατὰ τὸ Δ , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔA τετράγωνον: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$, ΔA τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δις ὑπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $B\Delta$, ΔA ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς AB : ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία: τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓB , BA ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$: ὥστε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ ἔλαττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΓB , BA τετραγώνων τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓB , $B\Delta$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

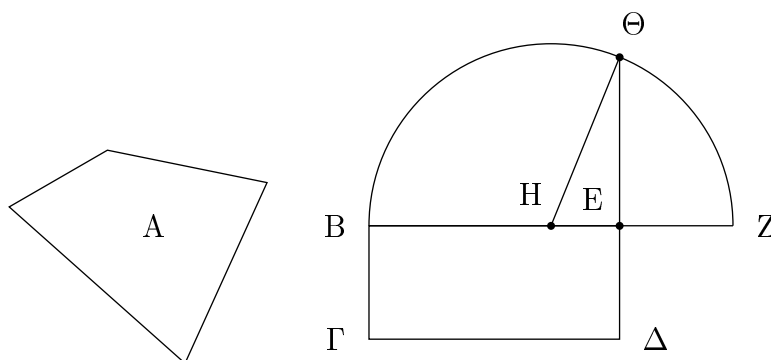
Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τῆν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττον ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν τῆν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δις ὑπὸ τε μιᾶς τῶν περὶ τῆν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ' ἣν ἡ

κάθετος πίπτει, και τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

II.14

Τῶ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ A: δεῖ δὴ τῶ A εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.



Συνεστάτω γὰρ τῶ A εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ BΔ: εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. συνέσταται γὰρ τῶ A εὐθύγραμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ BΔ: εἰ δὲ οὐ, μία τῶν BE, EΔ μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ BE, και ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, και κείσθω τῇ EΔ ἴση ἡ EZ, και τεμήσθω ἡ BZ δίχα κατὰ τὸ H, και κέντρῳ τῶ H, διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν HB, HZ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ BΘZ, και ἐκβεβλήσθω ἡ ΔE ἐπὶ τὸ Θ, και ἐπεζεύχθω ἡ HΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ BZ τέμνεται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ H, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ E, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EH τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς HZ τετραγώνῳ. ἴση δὲ ἡ HZ τῇ HΘ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς HE ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς HΘ. τῶ δὲ ἀπὸ τῆς HΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘE, EH τετράγωνα: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BE, EZ μετὰ τοῦ ἀπὸ HE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘE, EH. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς HE τετράγωνον: λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς EΘ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν BE, EZ τὸ BΔ ἐστίν: ἴση γὰρ ἡ EZ τῇ EΔ: τὸ ἄρα BΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς EΘ τετραγώνῳ. ἴσον δὲ τὸ BΔ τῶ A εὐθύγραμμῳ. και τὸ A ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς EΘ ἀναγραφησομένῳ τετραγώνῳ.

Τῶ ἄρα δοθέντι εὐθύγραμμῳ τῶ A ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς EΘ ἀναγραφησομένον: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Book III

Definitions

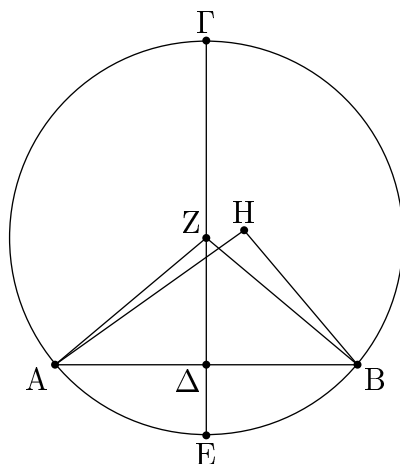
1. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διαμέτροι ἴσαι εἰσὶν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσὶν.
2. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, ἥτις ἀπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμνει τὸν κύκλον.
3. Κύκλοι ἐφάπτεσθαι ἀλλήλων λέγονται οἷτινες ἀπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.
4. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν.
5. Μείζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ' ἣν ἡ μείζων κάθετος πίπτει.
6. Τμήμα κύκλου ἐστὶ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.
7. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.
8. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῆ τι σημεῖον καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἢ ἐστὶ βάσις τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.
9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι ἀπολαμβάνωσιν τινὰ περιφέρειαν, ἐπ' ἐκείνης λέγεται βεβηκέναι ἡ γωνία.
10. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῆ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπὸ τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας.
11. Ὅμοια τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν.

Propositions

III.1

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ: δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὐρεῖν.



Διήχθω τις εις αὐτόν, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖα ἡ AB, καὶ τεμηθῶ διχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῆ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ E, καὶ τεμηθῶ ἡ ΓE διχα κατὰ τὸ Z: λέγω, ὅτι τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ [κύκλου].

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HA, HΔ, HB. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΔ τῆ ΔB, κοινὴ δὲ ἡ ΔH, δύο δὲ αἱ AΔ, ΔH δύο ταῖς HΔ, ΔB ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ: καὶ βάσις ἡ HA βάσει τῆ HB ἐστὶν ἴση: ἐκ κέντρου γάρ: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AΔH γωνία τῆ ὑπὸ HΔB ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῆ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ HΔB. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZΔB ὀρθή: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZΔB τῆ ὑπὸ HΔB, ἢ μείζων τῆ ἐλάττωνι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ H κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν τοῦ Z.

Τὸ Z ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ [κύκλου].

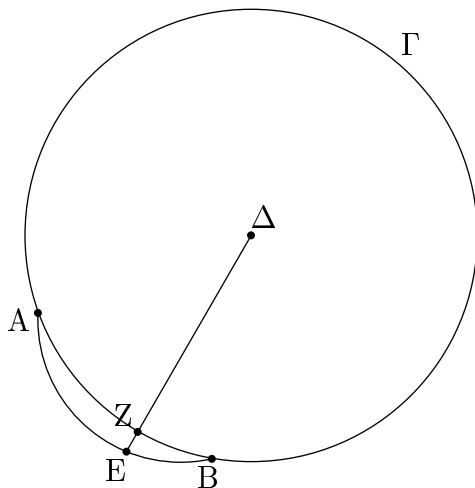
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις εὐθεῖάν τινα διχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

III.2

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῆ δύο τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Ἐστω κύκλος ὁ ABΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A, B: λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.



Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ AEB , καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔA , ΔB , καὶ διήχθω ἡ $\Delta Z E$.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ ΔB , ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta A E$ τῇ ὑπὸ $\Delta B E$: καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\Delta A E$ μία πλευρὰ προσεκβέβληται ἡ $A E B$, μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta E B$ γωνία τῆς ὑπὸ $\Delta A E$. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $\Delta A E$ τῇ ὑπὸ $\Delta B E$: μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta E B$ τῆς ὑπὸ $\Delta B E$. ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει: μείζων ἄρα ἡ ΔB τῆς ΔE . ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ ΔZ . μείζων ἄρα ἡ ΔZ τῆς ΔE ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας: ἐντὸς ἄρα.

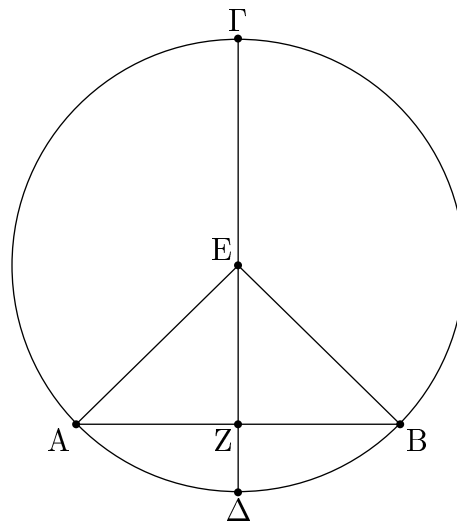
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῆ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.3

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει: καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ $\Gamma\Delta$ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Z σημεῖον: λέγω, ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EA , EB .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB, κοινὴ δὲ ἡ ZE, δύο δυσὶν ἴσαι [εἰσὶν]. καὶ βάσις ἡ EA βάσει τῇ EB ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ BZE ἴση ἐστίν. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν: ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ AZE, BZE ὀρθή ἐστίν. ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὕσα τὴν AB μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαν δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

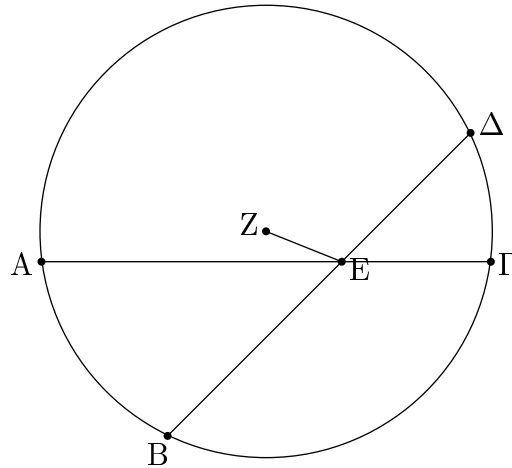
Ἀλλὰ δὴ ἡ ΓΔ τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω: λέγω, ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAZ τῇ ὑπὸ EBZ. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ AZE ὀρθὴ τῇ ὑπὸ BZE ἴση: δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ EAZ, EZB τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινήν αὐτῶν τὴν EZ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει: ἴση ἄρα ἡ AZ τῇ ZB.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖαν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνη, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει: καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνη, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.4

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαι, οὐ τέμνωσιν ἀλλήλας δίχα.



Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ AG , $B\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαι: λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν AE τῇ EG , τὴν δὲ BE τῇ $E\Delta$: καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZE .

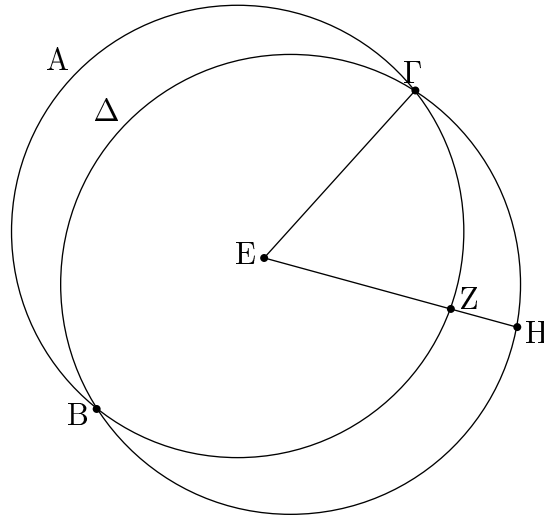
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ZE εὐθειᾶν τινὰ μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AG δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZEA : πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα τις ἡ ZE εὐθειᾶν τινὰ τὴν $B\Delta$ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει: ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ZEB . ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEA ὀρθή: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ZEA τῇ ὑπὸ ZEB ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ AG , $B\Delta$ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὕσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.5

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta\text{H}$ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ B , Γ σημεῖα. λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ, καὶ διήχθω ἡ EZH, ὡς ἔτυχεν. καὶ ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ABΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ EΓ τῇ EZ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ

κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ EΓ τῇ EH: ἐδείχθη δὲ ἡ EΓ καὶ τῇ EZ ἴση: καὶ ἡ EZ ἄρα τῇ EH ἐστὶν ἴση ἢ ἐλάσσων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ E σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ABΓ, ΓΔΗ κύκλων.

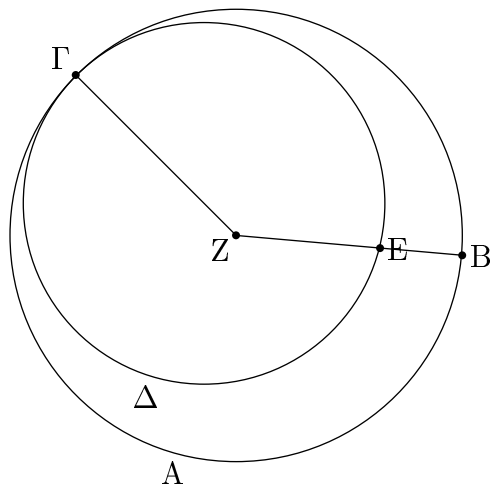
Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔστιν αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.6

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ABΓ, ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον: λέγω, ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZΓ, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, ἡ ZEB.

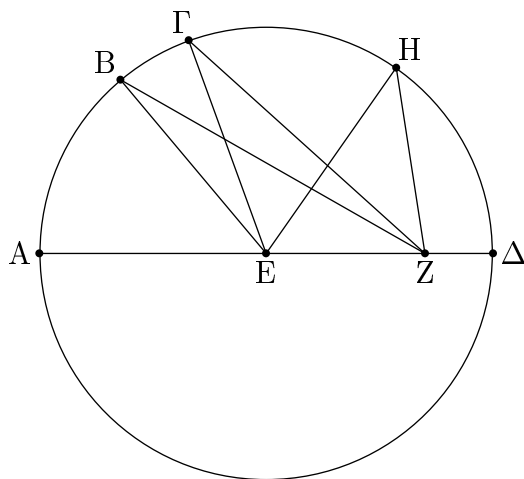


Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Gamma$ τῆ ZB . πάλιν, ἐπεὶ τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $\Gamma\Delta E$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $Z\Gamma$ τῆ ZE . ἐδείχθη δὲ ἡ $Z\Gamma$ τῆ ZB ἴση: καὶ ἡ ZE ἄρα τῆ ZB ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῆ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν $AB\Gamma$, $\Gamma\Delta E$ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.7

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῆ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαί τινες, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλάχιστη δὲ ἡ λοιπή, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλάχιστης.



Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προσπιπέτωσαν εὐθεῖαι τιναὶ αἱ ΖΒ, ΖΓ, ΖΗ: λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονες εἰσιν, αἱ ἄρα ΕΒ, ΕΖ τῆς ΒΖ μείζονες εἰσιν. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῆ ΒΕ [αἱ ἄρα ΒΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῆ ΑΖ]: μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῆ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὲ αἱ ΒΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνία τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων. βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονες εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῆ ΕΔ, αἱ ἄρα ΗΖ, ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονες εἰσιν. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ΕΖ: λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

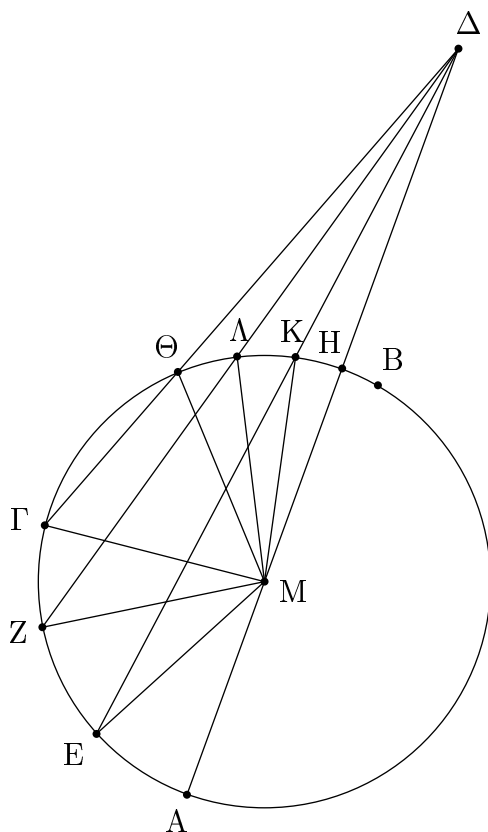
Λέγω, ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι προσπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. συνεστάτω γὰρ πρὸς τῆ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῆ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΖΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῆ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὲ αἱ ΗΕ, ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῆ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῆ ΖΘ ἴση ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι τῆ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπέτω ἡ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῆ ΖΗ ἴση ἐστίν, ἀλλὰ ἡ ΖΘ τῆ ΖΗ [ἴση ἐστίν], καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῆ ΖΘ ἐστὶν ἴση, ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆ ἀπώτερον ἴση: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῆ ΗΖ: μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῆ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστὶ κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τιναὶ, μεγίστη μὲν ἔσται, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπὴ, τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου

προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.8

Ἐὰν κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.



Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτός τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ, ΔΕ, ΔΖ, ΔΓ, ἔστω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἢ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ ἢ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΑΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ ΔΗ ἢ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ, αἰεὶ δὲ ἢ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἢ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἢ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου καὶ ἔστω τὸ Μ: καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ, ΜΖ, ΜΓ, ΜΚ, ΜΛ, ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AM τῇ EM , κοινὴ προσκείσθω ἡ $MΔ$: ἡ ἄρα $ΑΔ$ ἴση ἐστὶ ταῖς EM , $MΔ$. ἀλλ' αἱ EM , $MΔ$ τῆς $EΔ$ μείζονές εἰσιν: καὶ ἡ $ΑΔ$ ἄρα τῆς $EΔ$ μείζων ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ME τῇ MZ , κοινὴ δὲ ἡ $MΔ$, αἱ EM , $MΔ$ ἄρα ταῖς ZM , $MΔ$ ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $EMΔ$ γωνίας τῆς ὑπὸ $ZMΔ$ μείζων ἐστίν. βάσις ἄρα ἡ $EΔ$ βάσεως τῆς $ZΔ$ μείζων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $ZΔ$ τῆς $ΓΔ$ μείζων ἐστίν: μεγίστη μὲν ἄρα ἡ $ΔΑ$, μείζων δὲ ἡ μὲν $ΔE$ τῆς $ΔZ$, ἡ δὲ $ΔZ$ τῆς $ΔΓ$.

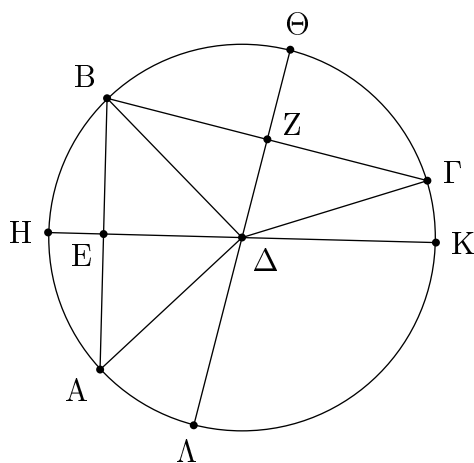
Καὶ ἐπεὶ αἱ MK , $KΔ$ τῆς $MΔ$ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ MH τῇ MK , λοιπὴ ἄρα ἡ $KΔ$ λοιπῆς τῆς $HΔ$ μείζων ἐστίν: ὥστε ἡ $HΔ$ τῆς $KΔ$ ἐλάττων ἐστίν: καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $MΛΔ$ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς $MΔ$ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν αἱ MK , $KΔ$, αἱ ἄρα MK , $KΔ$ τῶν $MΛ$, $ΛΔ$ ἐλάττονές εἰσιν: ἴση δὲ ἡ MK τῇ $MΛ$: λοιπὴ ἄρα ἡ $ΔK$ λοιπῆς τῆς $ΔΛ$ ἐλάττων ἐστίν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ $ΔΛ$ τῆς $ΔΘ$ ἐλάττων ἐστίν: ἐλαχίστη μὲν ἄρα ἡ $ΔH$, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν $ΔK$ τῆς $ΔΛ$ ἡ δὲ $ΔΛ$ τῆς $ΔΘ$.

Λέγω, ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς $ΔH$ ἐλαχίστης: συνεστάτω πρὸς τῇ $MΔ$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ M τῇ ὑπὸ $KMΔ$ γωνία ἴση γωνία ἡ ὑπὸ $ΔMB$ καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΔB$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ MK τῇ MB , κοινὴ δὲ ἡ $MΔ$, δύο δὲ αἱ KM , $MΔ$ δύο ταῖς BM , $MΔ$ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκατέρω: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $KMΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $BMΔ$ ἴση: βάσις ἄρα ἡ $ΔK$ βάσει τῇ $ΔB$ ἴση ἐστίν. λέγω [δὴ], ὅτι τῇ $ΔK$ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προσπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου. εἰ γὰρ δυνατόν, προσπιπέτω καὶ ἔστω ἡ $ΔN$. ἐπεὶ οὖν ἡ $ΔK$ τῇ $ΔN$ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ $ΔK$ τῇ $ΔB$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ $ΔB$ ἄρα τῇ $ΔN$ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς $ΔH$ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον [ἐστὶν] ἴση: ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς $ΔH$ ἐλαχίστης προσπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου αἱ δὲ λοιπαί, ὡς ἔτυχεν, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν, τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μὲν ἐστὶν ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερον ἐστὶν ἐλάττων, δύο δὲ μόνον ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προσπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.9

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.



Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον τὸ Δ , καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον προσπιπέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΔA , ΔB , $\Delta \Gamma$: λέγω, ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

Ἐπεζευχθῶσαν γὰρ αἱ AB , $B\Gamma$ καὶ τεμηθῶσαν δίχα κατὰ τὰ E , Z σημεία, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $E\Delta$, $Z\Delta$ διήχθῶσαν ἐπὶ τὰ H , K , Θ , Λ σημεία.

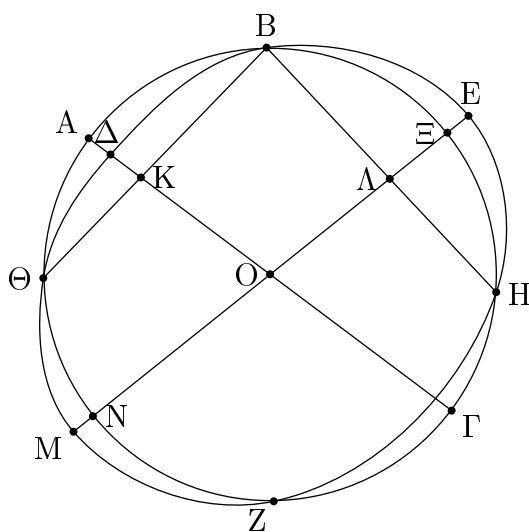
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ EB , κοινὴ δὲ ἡ $E\Delta$, δύο δὲ αἱ AE , $E\Delta$ δύο ταῖς BE , $E\Delta$ ἴσαι εἰσὶν: καὶ βάσις ἡ ΔA βάσει τῇ ΔB ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AE\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $BE\Delta$ ἴση ἐστίν: ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $AE\Delta$, $BE\Delta$ γωνιῶν: ἡ HK ἄρα τὴν AB τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεϊάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθάς τέμνη, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἐπὶ τῆς HK ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐπὶ τῆς $\Theta\Lambda$ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ HK , $\Theta\Lambda$ εὐθεῖαι ἢ τὸ Δ σημεῖον: τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.10

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $AB\Gamma$ κύκλον τὸν ΔEZ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο τὰ B , H , Z , Θ , καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $B\Theta$, BH δίχα τεμνέσθῶσαν κατὰ τὰ K , Λ σημεία: καὶ ἀπὸ τῶν K , Λ ταῖς $B\Theta$, BH πρὸς ὀρθάς ἀχθεῖσαι αἱ $K\Gamma$, ΛM διήχθῶσαν ἐπὶ τὰ A , E σημεία.



Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ $AB\Gamma$ εὐθείᾳ τις ἢ $A\Gamma$ εὐθείαν τινα τὴν $B\Theta$ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ $AB\Gamma$ εὐθείᾳ τις ἢ $N\Xi$ εὐθείαν τινα τὴν BH δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς $N\Xi$ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς $A\Gamma$, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ $A\Gamma$, $N\Xi$ εὐθεῖαι ἢ κατὰ τὸ O : τὸ O ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔEZ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ O : δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τῶν $AB\Gamma$, ΔEZ τὸ αὐτὸ ἐστὶ κέντρον τὸ O : ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

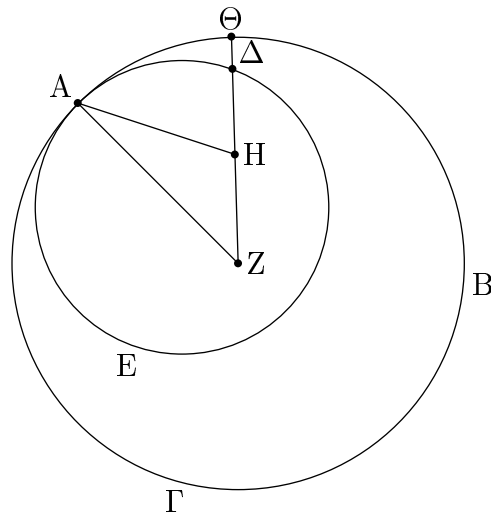
Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.11

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα καὶ ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ἐφάπτεσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $AB\Gamma$ κύκλου κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $A\Delta E$ τὸ H : λέγω, ὅτι ἢ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ A πεσεῖται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατὸν, πιπέτω ὡς ἡ $ZH\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ , AH .



Ἐπεὶ οὖν αἱ AH , HZ τῆς ZA , τουτέστι τῆς $ZΘ$, μείζονές εἰσιν, κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ZH : λοιπὴ ἄρα ἡ AH λοιπῆς τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ AH τῇ $HΔ$: καὶ ἡ $HΔ$ ἄρα τῆς $HΘ$ μείζων ἐστίν ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται: κατὰ τὸ A ἄρα ἐπὶ τῆς συναφῆς πεσεῖται.

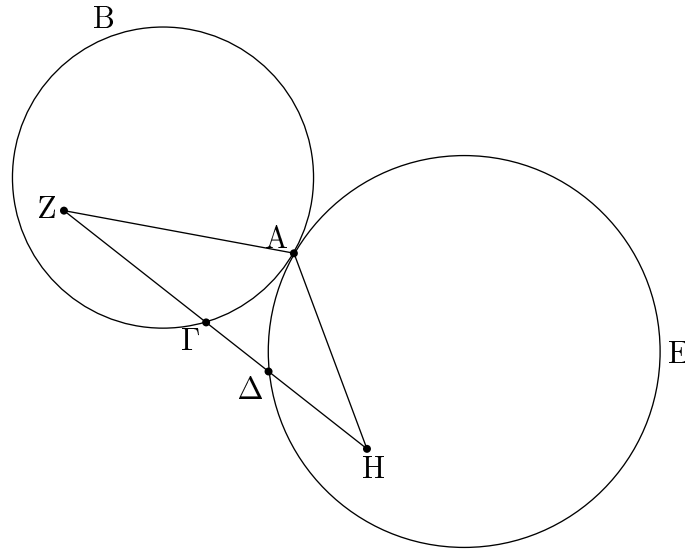
Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, [καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα], ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα [καὶ ἐκβαλλομένη] ἐπὶ τὴν συναφήν πεσεῖται τῶν κύκλων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.12

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ $ABΓ$, $AΔΕ$ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $ABΓ$ κέντρον τὸ Z , τοῦ δὲ $AΔΕ$ τὸ H : λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς ἐλεύσεται.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ $ZΓΔΗ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ , AH .



Ἐπεὶ οὖν τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ $Z\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $A\Delta E$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ HA τῇ $H\Delta$. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ZA τῇ $Z\Gamma$ ἴση: αἱ ἄρα ZA , AH ταῖς $Z\Gamma$, $H\Delta$ ἴσαι εἰσὶν: ὥστε ὅλη ἡ ZH τῶν ZA , AH μείζων ἐστίν: ἀλλὰ καὶ ἐλάττων: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ H ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται: δι' αὐτῆς ἄρα.

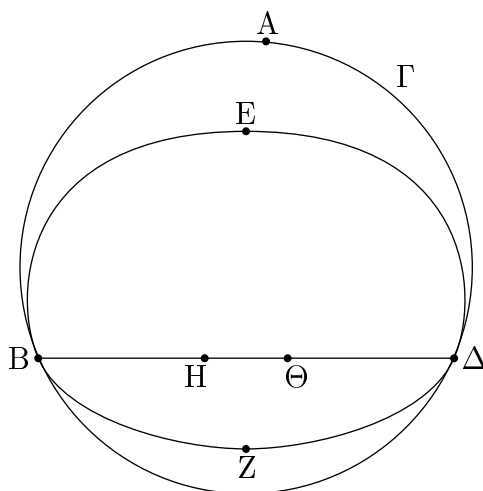
Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός, ἢ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη [εὐθεῖα] διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.13

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεία ἢ καθ' ἓν, εἴαν τε ἐντὸς εἴαν τε ἐκτός ἐφάπτηται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου τοῦ $EBZ\Delta$ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεία ἢ ἐν τὰ Δ , B .

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν $AB\Gamma\Delta$ κύκλου κέντρον τὸ H , τοῦ δὲ $EBZ\Delta$ τὸ Θ .



Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ τὰ B, Δ πεσεῖται. πιπτέτω ὡς ἡ $BH\Theta\Delta$. καὶ ἐπεὶ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ BH τῆς $H\Delta$: μείζων ἄρα ἡ BH τῆς $\Theta\Delta$: πολλῶν ἄρα μείζων ἡ $B\Theta$ τῆς $\Theta\Delta$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $EBZ\Delta$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $B\Theta$ τῆς $\Theta\Delta$: ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῶν μείζων: ὅπερ ἀδύνατον: οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ $ΑΓΚ$ κύκλου τοῦ $ΑΒΓΔ$ ἐφαπτέσθω ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν τὰ A, Γ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΑΓ$.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν $ΑΒΓΔ, ΑΓΚ$ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ A, Γ , ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται: ἀλλὰ τοῦ μὲν $ΑΒΓΔ$ ἐντὸς ἔπεσεν, τοῦ δὲ $ΑΓΚ$ ἐκτός: ὅπερ ἄτοπον: οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτός κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἓν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

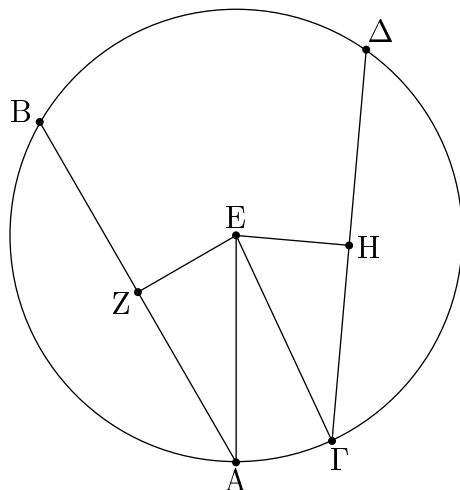
Κύκλος ἄρα κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ [καθ'] ἓν, ἐάν τε ἐντός ἐάν τε ἐκτός ἐφάπτηται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.14

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔ$, καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ $ΑΒ, ΓΔ$: λέγω, ὅτι αἱ $ΑΒ, ΓΔ$ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $ΑΒΓΔ$ κύκλου καὶ ἔστω τὸ E , καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὰς $ΑΒ, ΓΔ$ κάθετοι ἦχθωσαν αἱ EZ, EH , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΕ, ΕΓ$.



Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ EZ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν AB πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. ἴση ἄρα ἢ AZ τῆ ZB: διπλῆ ἄρα ἢ AB τῆς AZ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ ΓΔ τῆς ΓH ἐστὶ διπλῆ: καὶ ἐστὶν ἴση ἢ AB τῆ ΓΔ: ἴση ἄρα καὶ ἢ AZ τῆ ΓH. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ AE τῆ EG, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῶ ἀπὸ τῆς EG. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν AZ, EZ: ὀρθὴ γὰρ ἢ πρὸς τῶ Z γωνία: τῶ δὲ ἀπὸ τῆς EG ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, HG: ὀρθὴ γὰρ ἢ πρὸς τῶ H γωνία: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AZ, ZE ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν GH, HE, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς GH: ἴση γὰρ ἐστὶν ἢ AZ τῆ ΓH: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZE τῶ ἀπὸ τῆς EH ἴσον ἐστὶν: ἴση ἄρα ἢ EZ τῆ EH. ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ' αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ᾧσιν: αἱ ἄρα AB, ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ AB, ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχετῶσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τουτέστιν ἴση ἔστω ἢ EZ τῆ EH. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἢ AB τῆ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστὶν ἢ μὲν AB τῆς AZ, ἢ δὲ ΓΔ τῆς ΓH: καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ AE τῆ GE, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῶ ἀπὸ τῆς GE: ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AE ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EZ, ZA, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς GE ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν EH, HG. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν EZ, ZA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EH, HG: ὧν τὸ ἀπὸ τῆς EZ τῶ ἀπὸ τῆς EH ἐστὶν ἴσον: ἴση γὰρ ἢ EZ τῆ EH: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AZ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς GH: ἴση ἄρα ἢ AZ τῆ ΓH: καὶ ἐστὶ τῆς μὲν AZ διπλῆ ἢ AB, τῆς δὲ ΓH διπλῆ ἢ ΓΔ: ἴση ἄρα ἢ AB τῆ ΓΔ.

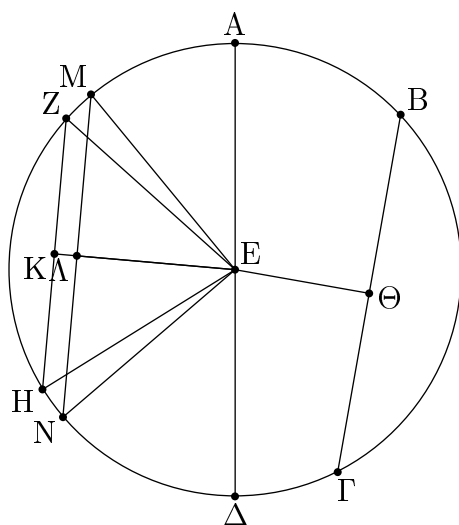
Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.15

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μὲν ἢ διάμετρος τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἢ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν.

Ἐστω κύκλος ὁ ABΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἢ AΔ, κέντρον δὲ τὸ E, καὶ ἔγγιον μὲν τῆς AΔ διαμέτρου ἔστω ἢ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἢ ΖH: λέγω, ὅτι μεγίστη μὲν ἐστὶν ἢ AΔ, μείζων δὲ ἢ ΒΓ τῆς ΖH.

Ἦχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ E κέντρου ἐπὶ τὰς $B\Gamma$, ZH κάθετοι αἱ $E\Theta$, $E\Lambda$. καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ $B\Gamma$, ἀπώτερον δὲ ἡ ZH , μείζων ἄρα ἡ $E\Lambda$ τῆς $E\Theta$. κείσθω τῇ $E\Theta$ ἴση ἡ $E\Lambda$, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ $E\Lambda$ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛM διήχθω ἐπὶ τὸ N , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ME , EN , ZE , EH .

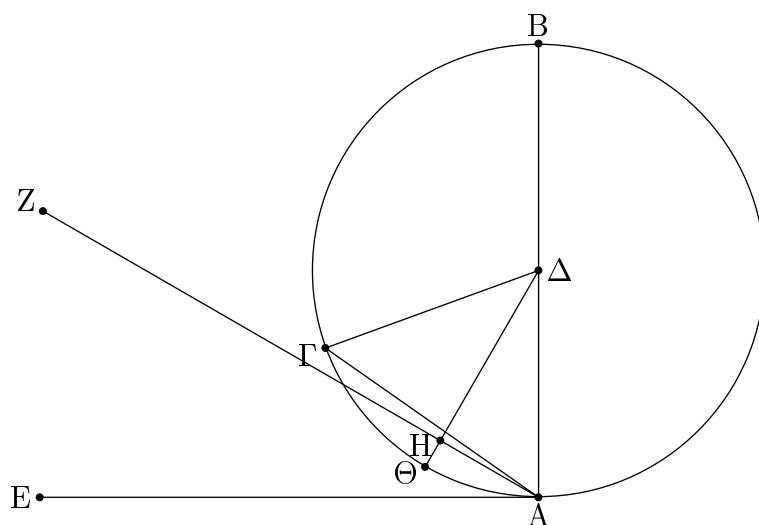


Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ $E\Lambda$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῇ MN . πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EM , ἡ δὲ $E\Delta$ τῇ EN , ἡ ἄρα $A\Delta$ ταῖς ME , EN ἴση ἐστίν. ἀλλ' αἱ μὲν ME , EN τῆς MN μείζονές εἰσιν [καὶ ἡ $A\Delta$ τῆς MN μείζων ἐστίν, ἴση δὲ ἡ MN τῇ $B\Gamma$: ἡ $A\Delta$ ἄρα τῆς $B\Gamma$ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ME , EN δύο ταῖς ZE , EH ἴσαι εἰσίν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ MEN γωνίας τῆς ὑπὸ ZEH μείζων [ἐστίν], βάσις ἄρα ἡ MN βάσεως τῆς ZH μείζων ἐστίν. ἀλλὰ ἡ MN τῇ $B\Gamma$ ἐδείχθη ἴση [καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς ZH μείζων ἐστίν]. μεγίστη μὲν ἄρα ἡ $A\Delta$ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ $B\Gamma$ τῆς ZH .

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη μὲν ἐστὶν ἡ διάμετρος, τῶν δὲ ἄλλων αἰεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.16

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.



Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$ περί κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν AB : λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ A τῆ AB πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓA , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Delta\Gamma$.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῆ $\Delta\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ γωνία τῆ ὑπὸ $A\Gamma\Delta$. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $A\Gamma\Delta$: τριγώνου δὴ τοῦ $A\Gamma\Delta$ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῆ BA πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας: ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ AE : λέγω δὴ, ὅτι εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε AE εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ZA , καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ZA κάθετος ἡ ΔH . καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AH\Delta$, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ $\Delta A H$, μείζων ἄρα ἡ $A\Delta$ τῆς ΔH . ἴση δὲ ἡ ΔA τῆ $\Delta\Theta$: μείζων ἄρα ἡ $\Delta\Theta$ τῆς ΔH , ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω, ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἢ δὲ λοιπὴ ἢ περιεχομένη ὑπὸ τε τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας ἀπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἐστὶ τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας, εἰς τὸν μεταξύ τόπον τῆς τε $\Gamma\Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας. οὐ παρεμπίπτει δέ: οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπὸ τε τῆς BA εὐθείας καὶ τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη, οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς $\Gamma\Theta A$ περιφερείας καὶ τῆς AE εὐθείας.

Corollary

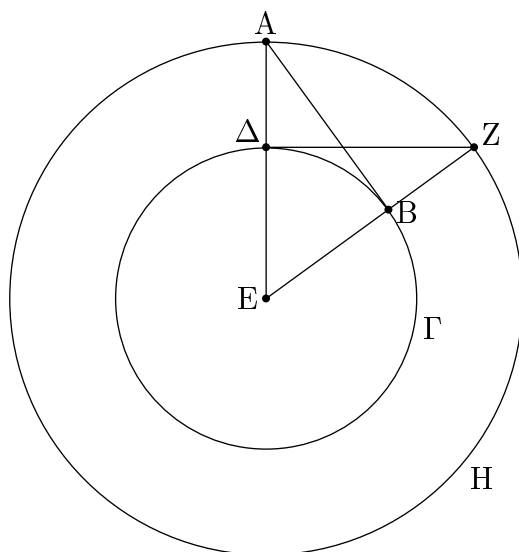
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου [καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον, ἐπειδήπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῶν συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη]. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.17

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέντος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ: δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῆς ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΖ, ΑΒ: λέγω, ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ, ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῆς ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῆς ΕΒ: δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δύο ταῖς ΖΕ, ΕΔ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν πρὸς τῷ Ε: βάσεις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῆς ΑΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῆς ὑπὸ ΕΒΑ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. καὶ ἐστὶν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου: ἡ δὲ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου: ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ κύκλου.

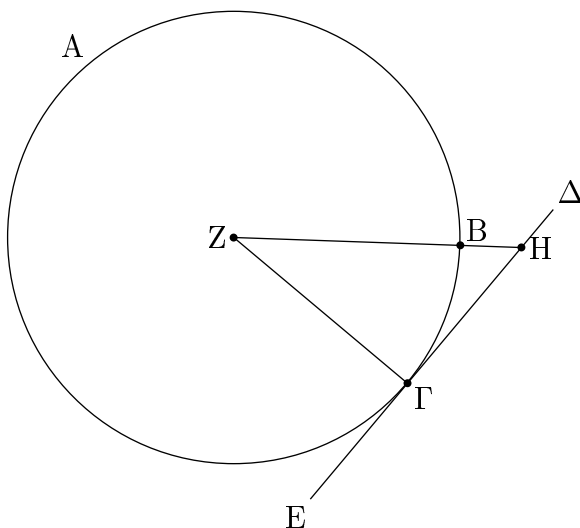
Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

III.18

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῆ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην.

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ Γ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Gamma$: λέγω, ὅτι ἡ $Z\Gamma$ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE .

Εἰ γὰρ μή, ἦχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν ΔE κάθετος ἡ ZH .



Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ZHG γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ZGH : ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἢ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει: μείζων ἄρα ἡ $Z\Gamma$ τῆς ZH : ἴση δὲ ἡ $Z\Gamma$ τῆ ZB : μείζων ἄρα καὶ ἡ ZB τῆς ZH ἢ ἐλάττων τῆς μείζονος: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ZH κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς $Z\Gamma$: ἡ $Z\Gamma$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE .

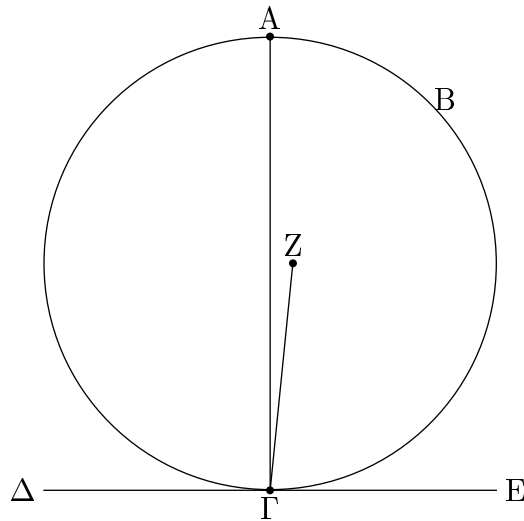
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀφὴν ἐπιζευχθῆ τις εὐθεΐα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.19

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς τῆ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς [γωνίας] εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ ἐφαπτέσθω τις εὐθεΐα ἡ ΔE κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῆ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ ΓA : λέγω, ὅτι ἐπὶ τῆς AG ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ .



Ἐπεὶ [οὖν] κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἡ ΔE , ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἀψὴν ἐπέζευκται ἡ $Z\Gamma$, ἡ $Z\Gamma$ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔE : ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Z\Gamma E$. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AG E$ ὀρθή: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $Z\Gamma E$ τῇ ὑπὸ $AG E$ ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὸ Z κέντρον ἐστὶ τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς AG .

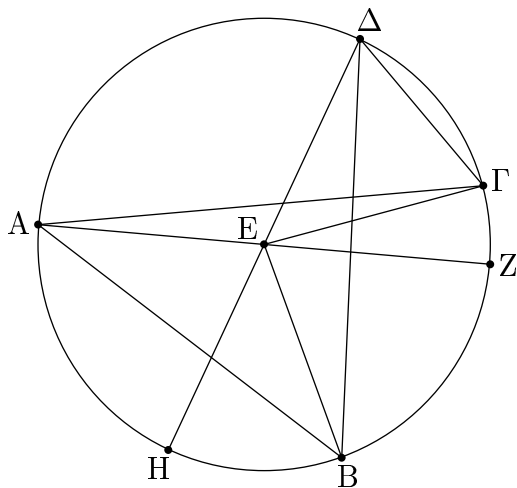
Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀψῆς τῇ ἐφαπτομένη πρὸς ὀρθὰς εὐθεΐα γραμμὴ ἀχθῆ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.20

Ἐν κύκλῳ ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma$, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ BEG , πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ BAG , ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν $B\Gamma$: λέγω, ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ BEG γωνία τῆς ὑπὸ BAG .

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ AE διήχθω ἐπὶ τὸ Z .



Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ EB , ἴση καὶ γωνία ἡ ὑπὸ EAB τῇ ὑπὸ EBA : αἱ ἄρα ὑπὸ EAB , EBA γωνίαι τῆς ὑπὸ EAB διπλασίους εἰσίν. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ BEZ ταῖς ὑπὸ EAB , EBA : καὶ ἡ ὑπὸ BEZ ἄρα τῆς ὑπὸ EAB ἐστὶ διπλῆ. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZEG τῆς ὑπὸ EAG ἐστὶ διπλῆ. ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ BEG ὅλης τῆς ὑπὸ BAG ἐστὶ διπλῆ.

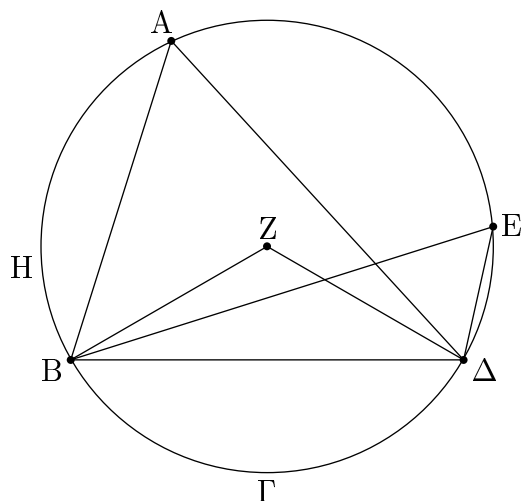
Κεκλάσθω δὲ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ $B\Delta\Gamma$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔE ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ H . ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $HE\Gamma$ γωνία τῆς ὑπὸ $E\Delta\Gamma$, ὧν ἡ ὑπὸ HEB διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ $E\Delta B$: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BEG διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ $B\Delta\Gamma$.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίον ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν [αἱ γωνίαι]: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.21

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ $BAE\Delta$ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ $BA\Delta$, $BE\Delta$: λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ $BA\Delta$, $BE\Delta$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BZ , $Z\Delta$.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ $BZ\Delta$ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ $BA\Delta$ πρὸς τῇ περιφερείᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν $B\Gamma\Delta$, ἡ ἄρα ὑπὸ $BZ\Delta$ γωνία διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ὑπὸ $BA\Delta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ $BZ\Delta$ καὶ τῆς ὑπὸ $BE\Delta$ ἐστὶ διπλασίῳ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $BA\Delta$ τῇ ὑπὸ $BE\Delta$.

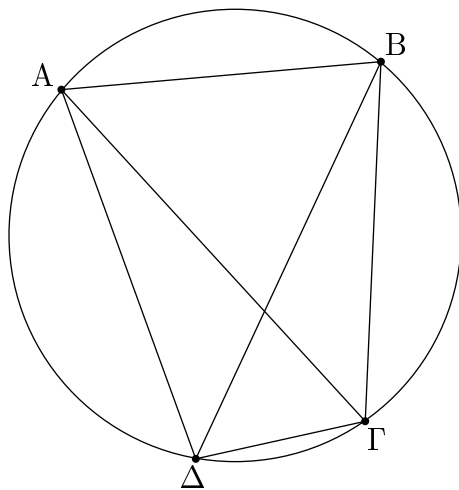
Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.22

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ $AB\Gamma\Delta$: λέγω, ὅτι αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Gamma$, $B\Delta$.

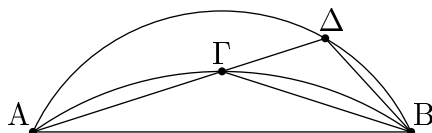


Ἐπεὶ οὖν παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ABΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓAB, ABΓ, BΓA δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓAB τῇ ὑπὸ BΔΓ: ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ BΑΔΓ: ἡ δὲ ὑπὸ AΓB τῇ ὑπὸ AΔB: ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι εἰσι τῷ AΔΓB: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ AΔΓ ταῖς ὑπὸ BΑΓ, AΓB ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ABΓ: αἱ ἄρα ὑπὸ ABΓ, BΑΓ, AΓB ταῖς ὑπὸ ABΓ, AΔΓ ἴσαι εἰσὶν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ABΓ, BΑΓ, AΓB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. καὶ αἱ ὑπὸ ABΓ, AΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ BΑΔ, ΔΓB γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν.

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.23

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς AB δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ AΓB, AΔB, καὶ διήχθω ἡ AΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓB, ΔB.

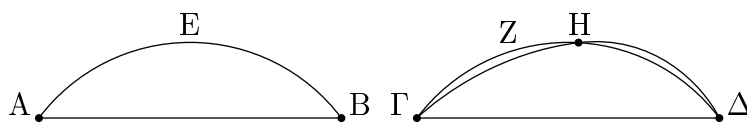
Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστὶ τὸ AΓB τμήμα τῷ AΔB τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AΓB γωνία τῇ ὑπὸ AΔB ἢ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.24

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ AEB , $\Gamma Z\Delta$: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AEB τμήμα τῷ $\Gamma Z\Delta$ τμήματι.



Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ AEB τμήματος ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$ καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν A σημείου ἐπὶ τὸ Γ τῆς δὲ AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, ἐφαρμόσει καὶ τὸ B σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν AB τῇ $\Gamma\Delta$: τῆς δὲ AB ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμοσάσης ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$. εἰ γὰρ ἡ AB εὐθεῖα ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται ἢ ἐκτὸς ἢ παραλλάξει ὡς τὸ $\Gamma H\Delta$, καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σημεία ἢ δύο: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς AB εὐθείας ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ AEB τμήμα ἐπὶ τὸ $\Gamma Z\Delta$: ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

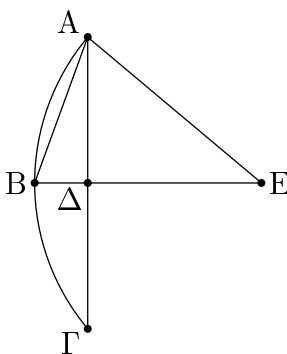
Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.25

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμήμα.

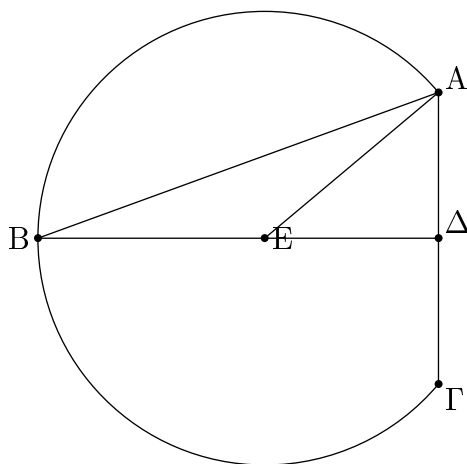
Ἐστω τὸ δοθὲν τμήμα κύκλου τὸ $AB\Gamma$: δεῖ δὴ τοῦ $AB\Gamma$ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμήμα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ AG δίχα κατὰ τὸ Δ , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ AG πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB : ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ $BA\Delta$ ἤτοι μείζων ἐστὶν ἢ ἴση ἢ ἐλάττων.



Ἐστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ABΔ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ BAE, καὶ διήχθω ἡ ΔB ἐπὶ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EΓ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ BAE, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ EB εὐθεῖα τῇ EA. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔE, δύο δὴ αἱ AΔ, ΔE δύο ταῖς ΓΔ, ΔE ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ AΔE γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔE ἐστὶν ἴση: ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρωθεν: βάσις ἄρα ἡ AE βάσει τῇ ΓE ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ AE τῇ BE ἐδείχθη ἴση: καὶ ἡ BE ἄρα τῇ ΓE ἐστὶν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ AE, EB, EΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ὁ ἄρα κέντρον τῷ E διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν AE, EB, EΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγράφεται ὁ κύκλος. καὶ δῆλον, ὡς τὸ ABΓ τμήμα ἐλάττων ἐστὶν ἡμικυκλίου διὰ τὸ τὸ E κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

Ὅμοίως [δὲ] κὰν ἢ ἡ ὑπὸ ABΔ γωνία ἴση τῇ ὑπὸ BAΔ, τῆς AΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρωθεν τῶν BΔ, ΔΓ αἱ τρεῖς αἱ ΔA, ΔB, ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προσαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ABΓ ἡμικύκλιον.



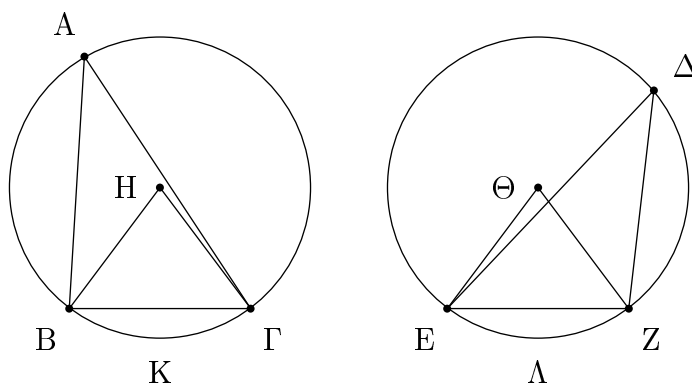
Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ABΔ ἐλάττων ἢ τῆς ὑπὸ BAΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ BA εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ABΔ γωνίᾳ ἴσην, ἐντὸς τοῦ ABΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔB, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ABΓ τμήμα μείζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος προσαναγράφεται ὁ κύκλος: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

III.26

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐὰν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐὰν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι.

Ἐστῶσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ABΓ, ΔEZ καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστῶσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ BHΓ, EΘZ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ BAΓ, EΔZ: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ BKΓ περιφέρεια τῇ EZ περιφέρεια.



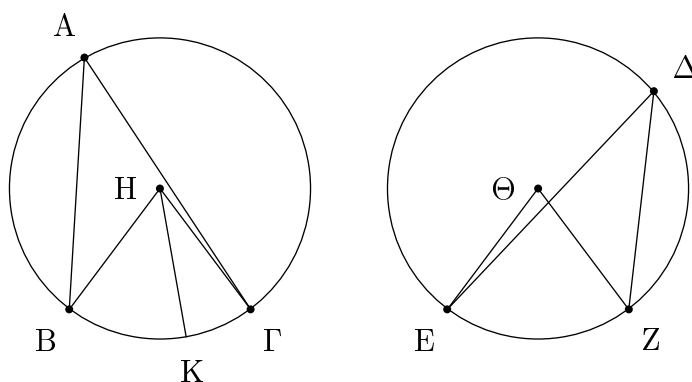
Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἰ ΒΓ, ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἰ ἐκ τῶν κέντρων: δύο δὴ αἰ ΒΗ, ΗΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΖ ἴσαι: καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνία τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμήμα τῷ ΕΔΖ τμήματι: καὶ εἰσὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν [τῶν ΒΓ, ΕΖ]: τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμήμα τῷ ΕΔΖ. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλω τῷ ΔΕΖ κύκλω ἴσος: λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφέρεια ἐστὶν ἴση.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἰ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡσι βεβηκυῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.27

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἰ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡσι βεβηκυῖαι.



Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ, ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Η, Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἰ ὑπὸ ΒΗΓ, ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἰ ὑπὸ ΒΑΓ, ΕΔΖ: λέγω, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ

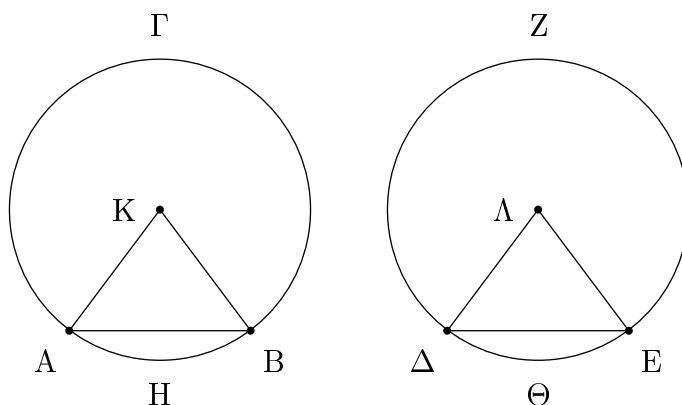
ὕπὸ ΕΘΖ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΒΗΚ: αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾧσιν: ἴση ἄρα ἢ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἢ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση: καὶ ἢ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἀνισός ἐστιν ἢ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ: ἴση ἄρα. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἢ πρὸς τῷ Δ: ἴση ἄρα καὶ ἢ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ᾧσι βεβηκυῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.28

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, καὶ ἐν τοῖς κύκλοις ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ, ΔΕ τὰς μὲν ΑΓΒ, ΔΖΕ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ ΑΗΒ, ΔΘΕ ἐλάττονας: λέγω, ὅτι ἢ μὲν ΑΓΒ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΔΖΕ μείζονι περιφερείᾳ, ἢ δὲ ΑΗΒ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΔΘΕ.



Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ, Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΚΒ, ΔΛ, ΛΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων: δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΒ δυσὶ ταῖς ΔΛ, ΛΕ ἴσαι εἰσὶν: καὶ βάσις ἢ ΑΒ βάσει τῇ ΔΕ ἴση: γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΑΚΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΛΕ ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ᾧσιν: ἴση ἄρα ἢ ΑΗΒ περιφέρεια τῇ ΔΘΕ. ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλω τῷ ΔΕΖ κύκλω ἴσος: καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ ΑΓΒ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΖΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

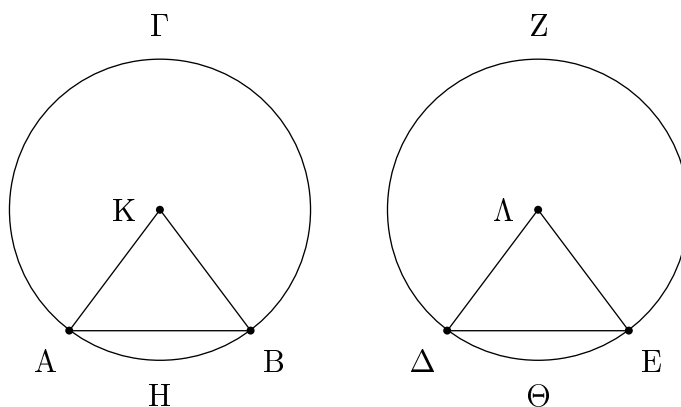
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.29

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν.

Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ , καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ $B\eta\Gamma$, $E\theta Z$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $B\Gamma$, EZ εὐθεῖαι: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ EZ .

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἔστω τὰ K , Λ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BK , $K\Gamma$, $E\Lambda$, ΛZ .



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $B\eta\Gamma$ περιφέρεια τῇ $E\theta Z$ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BK\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Lambda Z$. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ $AB\Gamma$, ΔEZ κύκλοι, ἴσοι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων: δύο δὴ αἱ BK , $K\Gamma$ δυσὶ ταῖς $E\Lambda$, ΛZ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν: βάσις ἄρα ἡ $B\Gamma$ βάσει τῇ EZ ἴση ἐστίν.

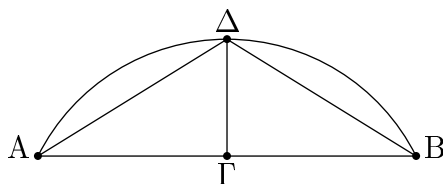
Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.30

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ $A\Delta B$: δεῖ δὴ τὴν $A\Delta B$ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ AB , καὶ τεμηθῆσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἦχθω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, ΔB .

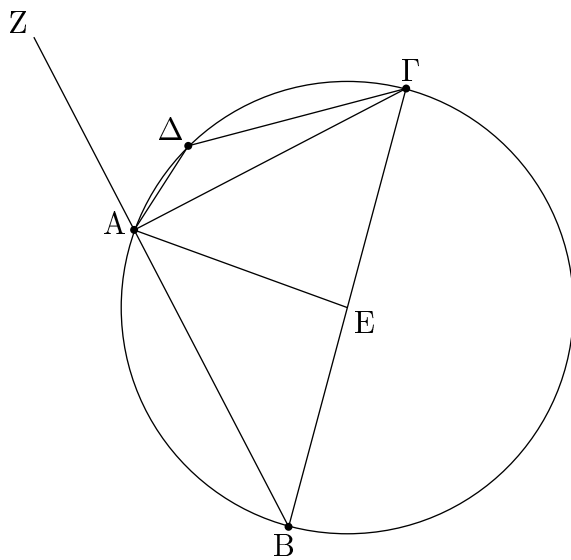


Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ τῇ ΓB , κοινὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, δύο δὴ αἱ $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ δυσὶ ταῖς $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $A\Gamma\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἴση: ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα: βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ ΔB ἴση ἐστίν. αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι: καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν $A\Delta$, ΔB περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου: ἴση ἄρα ἡ $A\Delta$ περιφέρεια τῇ ΔB περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Δ σημεῖον: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

III.31

Ἐν κύκλῳ ἢ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἢ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἢ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς: καὶ ἔτι ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ὀρθῆς.



Ἐστω κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta$, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ $B\Gamma$, κέντρον δὲ τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BA , AG , $A\Delta$, $\Delta\Gamma$: λέγω, ὅτι ἢ μὲν ἐν τῷ BAG ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ BAG ὀρθή ἐστιν, ἢ δὲ ἐν τῷ $AB\Gamma$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς, ἢ δὲ ἐν τῷ $A\Delta\Gamma$ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἢ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐπεζεύχθω ἡ AE , καὶ διήχθω ἡ BA ἐπὶ τὸ Z .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ BAE . πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ GE τῇ EA , ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ AGE τῇ ὑπὸ GAE : ὅλη ἄρα ἢ ὑπὸ BAG δυοὶ ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, AGB ἴση ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ZAG ἐκτὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου δυοὶ ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, AGB γωνίαις ἴση: ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ BAG γωνία τῇ ὑπὸ ZAG : ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα: ἢ ἄρα ἐν τῷ BAG ἡμικυκλίῳ γωνία ἢ ὑπὸ BAG ὀρθή ἐστιν.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, BAG δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἢ ὑπὸ BAG , ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστὶν ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία: καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $AB\Gamma$ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma\Delta$, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν [αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ γωνίαι δυοῖν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν], καὶ ἐστὶν ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἐλάττων ὀρθῆς: λοιπὴ ἄρα ἢ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστὶν: καὶ ἐστὶν ἐν τῷ $A\Delta\Gamma$ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω, ὅτι καὶ ἢ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ [τε] τῆς $AB\Gamma$ περιφερείας καὶ τῆς AG εὐθείας μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἢ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ [τε] τῆς $A\Delta[\Gamma]$ περιφερείας καὶ τῆς AG εὐθείας ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἢ ὑπὸ τῶν BA , AG εὐθειῶν ὀρθὴ ἐστὶν, ἢ ἄρα ὑπὸ τῆς $AB\Gamma$ περιφερείας καὶ τῆς AG εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν

ὀρθῆς. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστίν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔ[Γ] περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστίν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι [τμήματι] μείζων ὀρθῆς, καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος [γωνία] μείζων [ἐστὶν] ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος [γωνία] ἐλάττων ὀρθῆς: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

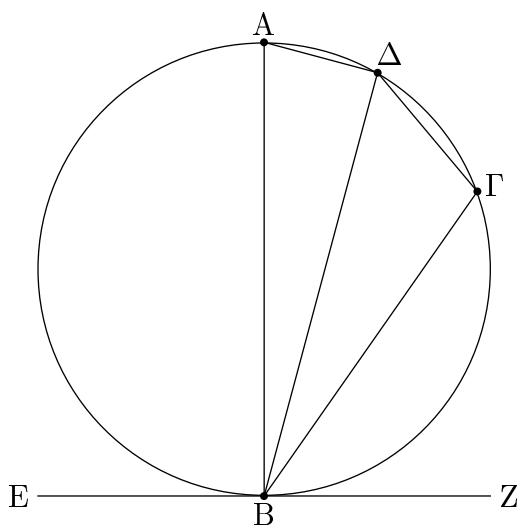
[

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν [ἡ] μία γωνία τριγώνου ταῖς δυσὶν ἴση ἢ, ὀρθή ἐστὶν ἡ γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐκτὸς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι: ἐὰν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ᾦσιν, ὀρθαί εἰσιν.]

III.32

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῆ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις.



Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα αὐτὸν ἡ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τουτέστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΔ τμήματι συνισταμένη γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένη γωνία.

Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΔΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β, καὶ ἀπὸ τῆς ἀφῆς ἤχεται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ

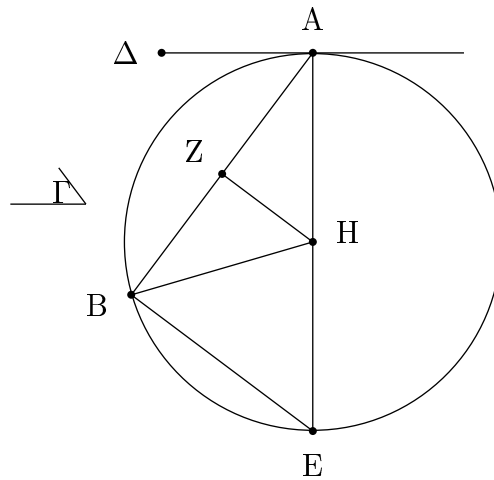
ΑΒΓΔ κύκλου. ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου: ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὕσα ὀρθή ἐστίν. λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ μιᾶ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή: ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΒΔ. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ, ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ, ΒΓΔ ἴσαι εἰσίν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηται τις εὐθεΐα, ἀπὸ δὲ τῆς ἀφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῆ τις εὐθεΐα τέμνουσα τὸν κύκλον, ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.33

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεΐα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ: δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

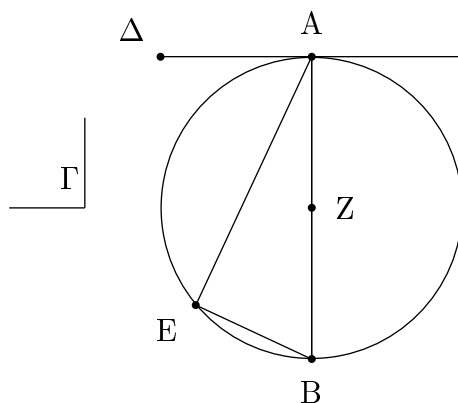


Ἡ δὴ πρὸς τῷ Γ [γωνία] ἤτοι ὀξεῖα ἐστὶν ἢ ὀρθή ἢ ἀμβλεῖα: ἔστω πρότερον ὀξεῖα, καὶ ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ: ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. ἤχθω τῇ ΔΑ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τεμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

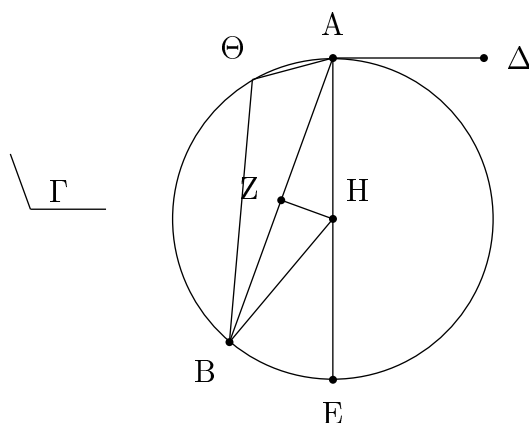
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὲ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ [γωνία] τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ Β. γεγράφθω καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΒ. ἐπεὶ οὖν ἀπ' ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΕ κύκλου: ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεται τις εὐθεΐα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ

τῆς κατὰ τὸ Α ἀφῆς εἰς τὸν ΑΒΕ κύκλον διῆχται τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τμήμα κύκλου γέγραπται τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΕΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ Γ.



Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ Γ: καὶ δεόν πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς ΑΒ γράψαι τμήμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ [γωνία]. συνεστάτω [πάλιν] τῇ πρὸς τῷ Γ ὀρθῇ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τεμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ κέντρῳ τῷ Ζ, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν ΖΑ, ΖΒ, κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΕΒ.



Ἐφάπτεται ἄρα ἡ ΑΔ εὐθεῖα τοῦ ΑΒΕ κύκλου διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ Α γωνίαν. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ ἐν τῷ ΑΕΒ τμήματι: ὀρθὴ γὰρ καὶ αὐτὴ ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστὶν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΕΒ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ τμήμα κύκλου τὸ ΑΕΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ Γ ἀμβλεία ἔστω: καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ ΑΔ πρὸς

ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῆ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

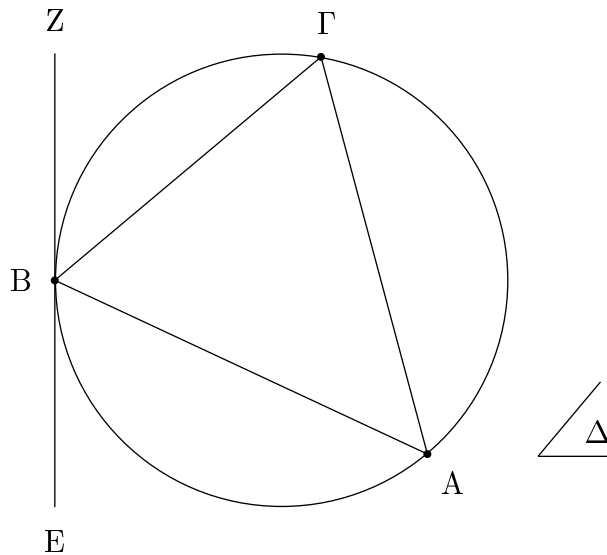
Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῆ ΖΒ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ, ΖΗ δύο ταῖς ΒΖ, ΖΗ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνία τῆ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῆ ΒΗ ἴση ἐστίν: ὁ ἄρα κέντρω μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τοῦ Β. ἐρχέσθω ὡς ὁ ΑΕΒ. καὶ ἐπεὶ τῆ ΑΕ διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΕΒ κύκλου. καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆχται ἡ ΑΒ: ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῆ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένη γωνία. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῆ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστίν. καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῆ πρὸς τῷ Γ.

Ἐπὶ τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμήμα κύκλου τὸ ΑΘΒ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῆ πρὸς τῷ Γ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

III.34

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῆ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ: δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμήμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῆ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ τῆ πρὸς τῷ Δ.



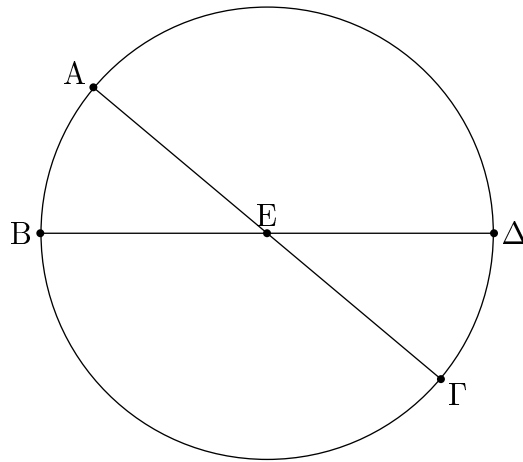
Ἦχθω τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ ΖΒ εὐθεία καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῆ πρὸς τῷ Δ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆχται ἡ ΒΓ, ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῆ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλάξ τμήματι συνισταμένη γωνία. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῆ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι ἴση ἐστὶ τῆ πρὸς τῷ Δ [γωνία].

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμήμα ἀφήρηται τὸ ΒΑΓ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῆ δοθείσῃ γωνία εὐθυγράμμῳ τῆ πρὸς τῷ Δ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

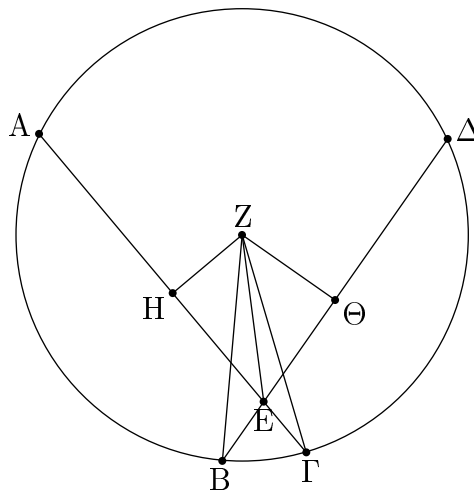
III.35

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Ἐν γὰρ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον: λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ, ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν ὥστε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, φανερόν, ὅτι ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ, ΕΓ, ΔΕ, ΕΒ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.



Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ, ΔΒ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ, ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἦχθωσαν αἱ ΖΗ, ΖΘ,

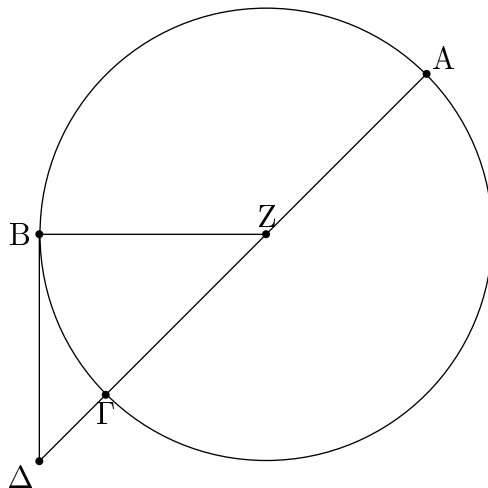
καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ ZB , $ZΓ$, ZE .

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἢ HZ εὐθεῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει: ἴση ἄρα ἢ AH τῇ $HΓ$. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἢ $ΑΓ$ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ H , εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ E , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΗ$ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $HΓ$: [κοινὸν] προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς HZ : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν HE , HZ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΓH$, HZ . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν EH , HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZE , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΓH$, HZ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ZΓ$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΓ$. ἴση δὲ ἢ $ZΓ$ τῇ ZB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$, $ΕΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ZB . ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ZB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$, $ΕΒ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZE . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE : λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΕ$, $ΕΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $ΔΕ$, $ΕΒ$ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ εὐθεῖαι δύο τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἐτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

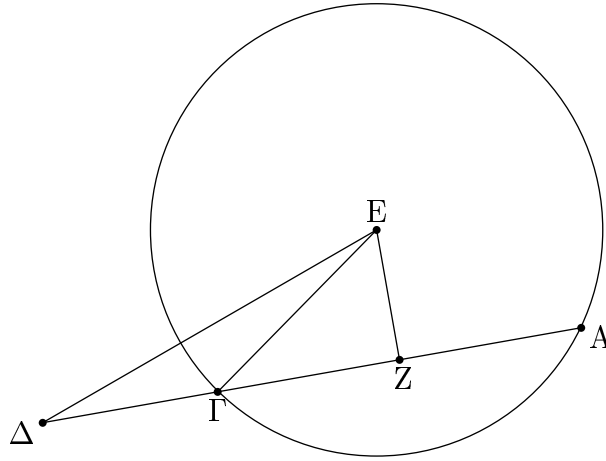
III.36

Ἐὰν κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτὸς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἢ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἢ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.



Κύκλου γὰρ τοῦ $ΑΒΓ$ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ $Δ$, καὶ ἀπὸ τοῦ $Δ$ πρὸς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον προσπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ $ΔΓ[Α]$, $ΔΒ$: καὶ ἢ μὲν $ΔΓΑ$ τεμνέτω τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον, ἢ δὲ $ΒΔ$ ἐφαπτέσθω: λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔΒ$ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα $[\Delta]ΓΑ$ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Z κέντρον τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB : ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ZBΔ$. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Z , πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ $ΓΔ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ZΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. ἴση δὲ ἡ $ZΓ$ τῇ ZB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $ZΔ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ZB , $BΔ$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ZB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ZB , $BΔ$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZB : λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$ ἐφαπτομένης.

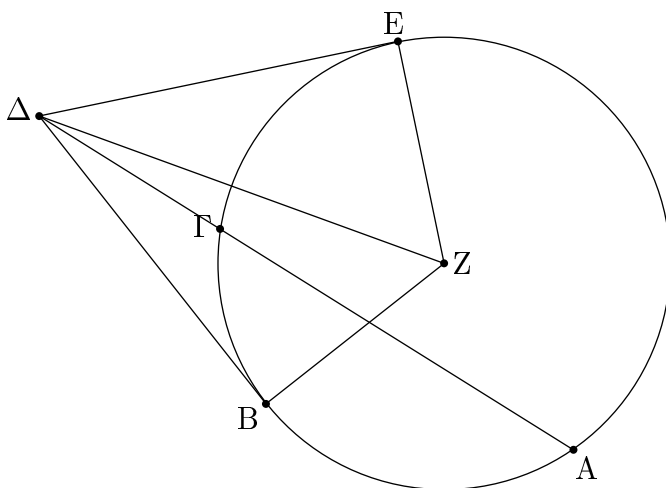


ἀλλὰ δὴ ἡ $ΔΓΑ$ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ $ΑΒΓ$ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ E , καὶ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν $ΑΓ$ κάθετος ἔχθω ἡ EZ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EB , $ΕΓ$, $EΔ$: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $EBΔ$. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ EZ εὐθειῖαν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν $ΑΓ$ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει: ἡ AZ ἄρα τῇ $ZΓ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ $ΑΓ$ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Z σημεῖον, πρόσκειται δὲ αὐτῇ ἡ $ΓΔ$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ZΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ZΔ$. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ZE : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν $ΓZ$, ZE ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $ZΔ$, ZE . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΓZ$, ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$: ὀρθὴ γὰρ [ἐστὶν] ἡ ὑπὸ $EZΓ$ [γωνία]: τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $ΔZ$, ZE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $EΔ$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $ΕΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $EΔ$. ἴση δὲ ἡ $ΕΓ$ τῇ EB : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $EΔ$. τῷ δὲ ἀπὸ τῆς $EΔ$ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν EB , $BΔ$: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $EBΔ$ γωνία: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν EB , $BΔ$. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς EB : λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΓ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

III.37

Ἐὰν κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἧ δὲ τὸ ὑπὸ [τῆς] ὅλης τῆς τεμονούσης καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτώσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπεται τοῦ κύκλου.



κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτός τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προσπιπέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ, ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμένετω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προσπιπέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ. λέγω, ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἦχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ, ΖΒ, ΖΔ. ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. ἦν δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ: ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση: δύο δὲ αἱ ΔΕ, ΕΖ δύο ταῖς ΔΒ, ΒΖ ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσεις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. καὶ ἐστὶν ἡ ΖΒ ἐκβαλλομένη διάμετρος: ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου: ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κὰν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῆ τι σημεῖον ἐκτός, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνη τὸν κύκλον, ἡ δὲ προσπίπτῃ, ἧ δὲ τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμονούσης καὶ τῆς ἐκτός ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προσπιπτώσης, ἡ προσπίπτουσα ἐφάπεται τοῦ κύκλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book IV

Definitions

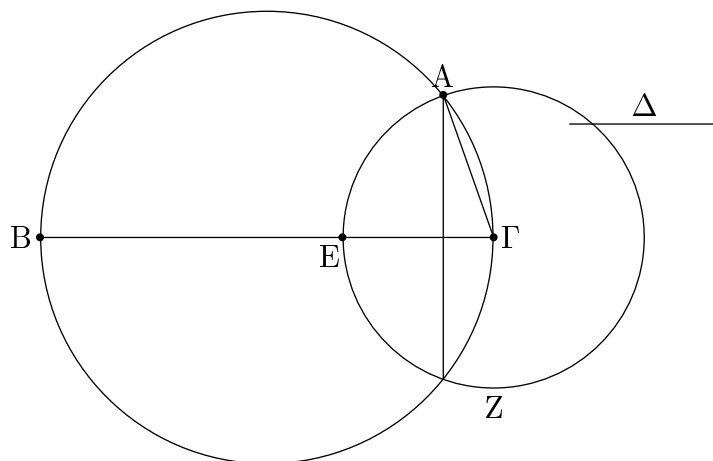
1. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύγραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἄπτηται.
2. Σχήμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἄπτηται.
3. Σχήμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφομένου ἄπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.
4. Σχήμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἐκάστη πλευρὰ τοῦ περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.
5. Κύκλος δὲ εἰς σχῆμα ὁμοίως ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης πλευρᾶς τοῦ, εἰς ὃ ἐγγράφεται, ἄπτηται.
6. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἐκάστης γωνίας τοῦ, περὶ ὃ περιγράφεται, ἄπτηται.
7. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ τοῦ κύκλου.

Propositions

IV.1

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $AB\Gamma$, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ . δεῖ δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι.



Ἦχθω τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου διάμετρος ἡ $B\Gamma$. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ Δ , γεγονὸς ἂν εἶη τὸ ἐπιταχθέν: ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ $B\Gamma$. εἰ δὲ μείζων ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῆς Δ , κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓE , καὶ κέντρῳ τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓE κύκλος γεγράφθω ὁ EAZ , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ GA .

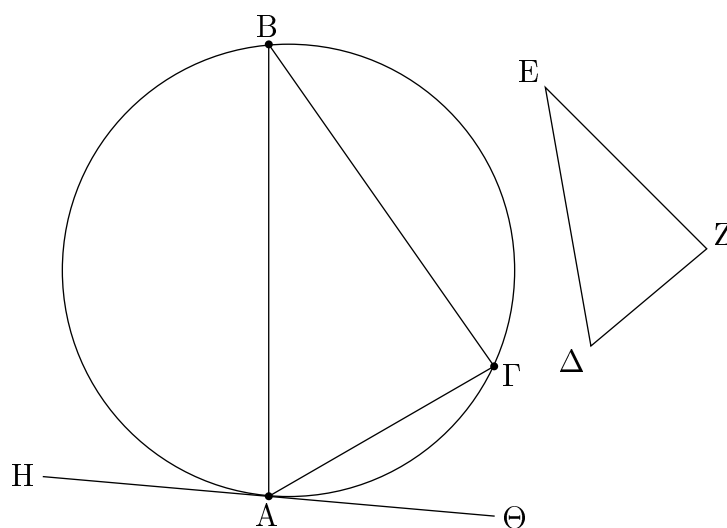
Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ EAZ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ GA τῇ ΓE . ἀλλὰ τῇ Δ ἡ ΓE ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ Δ ἄρα τῇ GA ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τὸν $AB\Gamma$ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Δ ἴση ἐνήρμοσται ἡ GA : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.2

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $AB\Gamma$, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔEZ : δεῖ δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι.



Ἦχθω τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ $H\Theta$ κατὰ τὸ A , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ $A\Theta$ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$, πρὸς δὲ τῇ AH εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ ὑπὸ ΔZE [γωνία] ἴση ἢ ὑπὸ HAB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$.

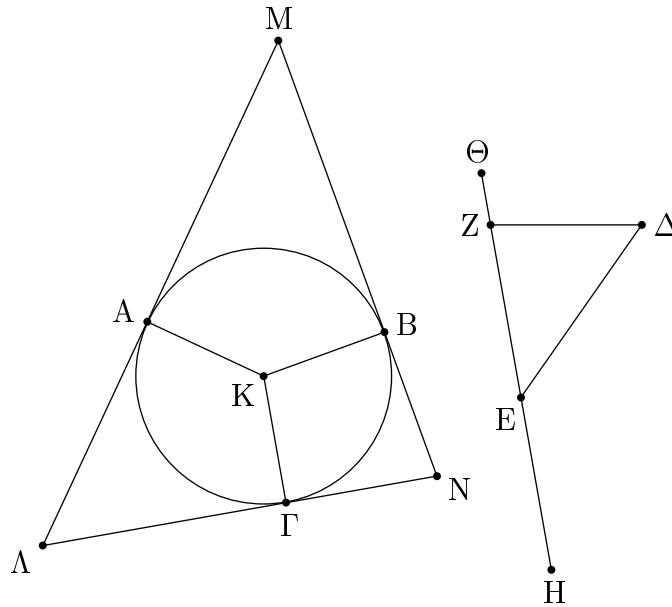
Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ $AB\Gamma$ ἐφάπτεται τις εὐθεῖα ἡ $A\Theta$, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ A ἐπαφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκται εὐθεῖα ἡ $A\Gamma$, ἡ ἄρα ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $B A \Gamma$ λοιπῇ τῇ ὑπὸ $E \Delta Z$ ἐστὶν ἴση: [ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν $AB\Gamma$ κύκλον].

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.3

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $AB\Gamma$, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔEZ : δεῖ δὴ περὶ τὸν $AB\Gamma$ κύκλον τῷ ΔEZ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι.



Ἐκβεβλήσθω ἡ EZ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη κατὰ τὰ H, Θ σημεία, καὶ εἰλήφθω τοῦ ABΓ κύκλου κέντρον τὸ K, καὶ διήχθω, ὡς ἔτυχεν, εὐθεΐα ἡ KB, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ KB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ K τῇ μὲν ὑπὸ ΔEH γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ BKA, τῇ δὲ ὑπὸ ΔZΘ ἴση ἢ ὑπὸ BKT, καὶ διὰ τῶν A, B, Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ABΓ κύκλου αἱ ΛAM, MBN, NΓA.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ABΓ κύκλου αἱ ΛM, MN, NΛ κατὰ τὰ A, B, Γ σημεία, ἀπὸ δὲ τοῦ K κέντρον ἐπὶ τὰ A, B, Γ σημεία ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ KA, KB, KΓ, ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς A, B, Γ σημείοις γωνίαι. καὶ ἐπεὶ τοῦ AMBK τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ AMBK, καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ KAM, KBM γωνίαι, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ AKB, AMB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔEH, ΔEZ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: αἱ ἄρα ὑπὸ AKB, AMB ταῖς ὑπὸ ΔEH, ΔEZ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ AKB τῇ ὑπὸ ΔEH ἐστὶν ἴση: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AMB λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ANB τῇ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ MAN [λοιπῇ] τῇ ὑπὸ EΔZ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AMN τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ: καὶ περιέγραπται περὶ τὸν ABΓ κύκλον.

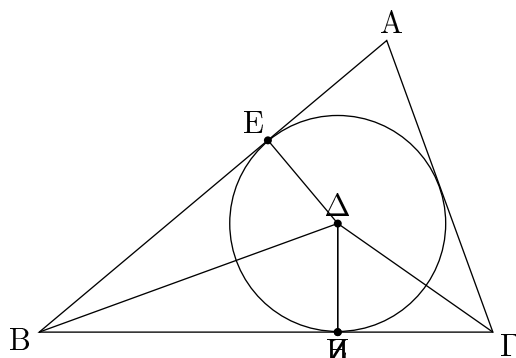
Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.4

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ABΓ: δεῖ δὴ εἰς τὸ ABΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ABΓ, AΓB γωνίαι δίχα ταῖς BΔ, ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς AB, BΓ, ΓA εὐθείας κάθετοι αἱ ΔE, ΔZ, ΔH.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma B\Delta$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $BE\Delta$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $BZ\Delta$ ἴση, δύο δὲ τρίγωνά ἐστι τὰ $EB\Delta$, $ZB\Delta$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν κοινὴν αὐτῶν τὴν $B\Delta$: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν: ἴση ἄρα ἡ ΔE τῇ ΔZ . διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΔH τῇ ΔZ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔE , ΔZ , ΔH ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν E , Z , H κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάπεται τῶν AB , $B\Gamma$, ΓA εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , H σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτάς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου: ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη: οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν E , Z , H γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς AB , $B\Gamma$, ΓA εὐθείας: ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν, καὶ ἔσται ὁ κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. ἐγγεγράφθω ὡς ὁ ZHE .

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ EZH : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

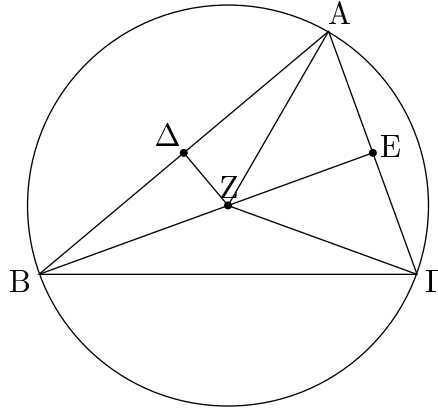
IV.5

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι.

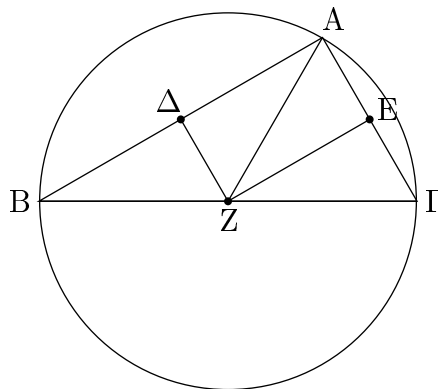
Ἐστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$: δεῖ [δὴ] περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθωσαν αἱ AB , $A\Gamma$ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ , E σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Δ , E σημείων ταῖς AB , $A\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔZ , EZ : συμπεσοῦνται δὲ ἦτοι ἐντὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἢ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας ἢ ἐκτὸς τῆς $B\Gamma$.

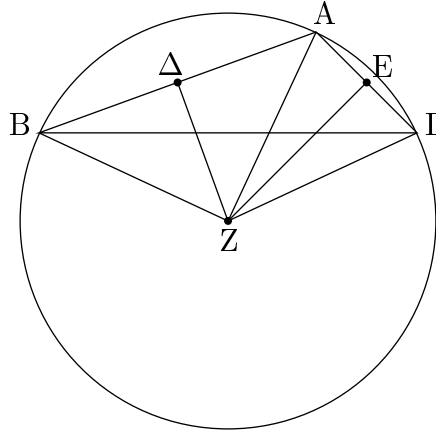
Συμπιπέτωσαν πρότερον ἐντὸς κατὰ τὸ Z , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB , $Z\Gamma$, ZA . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ ΔB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ , βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ ZB ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓZ τῇ AZ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ ἡ ZB τῇ $Z\Gamma$ ἐστὶν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ZA , ZB , $Z\Gamma$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν A , B , Γ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ $AB\Gamma$.



Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ , EZ συμπιπέτωσαν ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ εὐθείας κατὰ τὸ Z , ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ Z σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου.



Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔZ , EZ συμπιπέτωσαν ἐκτὸς τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου κατὰ τὸ Z πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ , BZ , ΓZ . καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ ΔB , κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ , βάσις ἄρα ἡ AZ βάσει τῇ BZ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΓZ τῇ AZ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ ἡ BZ τῇ $Z\Gamma$ ἐστὶν ἴση: ὁ ἄρα [πάλιν] κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν ZA , ZB , $Z\Gamma$ κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον.



Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

[

Corollary

]

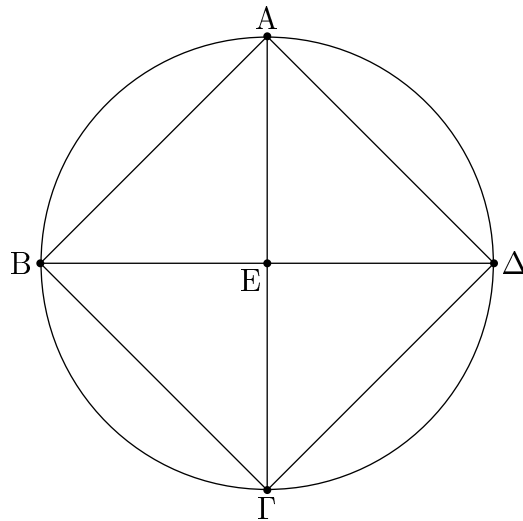
Καὶ φανερόν, ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς: ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστίν: ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἢ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. [ὥστε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ δεδομένη γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου πεσοῦνται αἱ ΔΖ, ΕΖ, ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.]

IV.6

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ: δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ, ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.



Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BE τῇ EΔ: κέντρον γὰρ τὸ E: κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ EA, βάσις ἄρα ἡ AB βάσει τῇ AΔ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν BΓ, ΓΔ ἑκατέρω τῶν AB, AΔ ἴση ἐστίν: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ τετράπλευρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ BΔ εὐθεῖα διάμετρος ἐστὶ τοῦ ABΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ BΔ: ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ BΔ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ABΓ, BΓΔ, ΓΔA ὀρθὴ ἐστίν: ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔ τετράπλευρον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον: τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον.

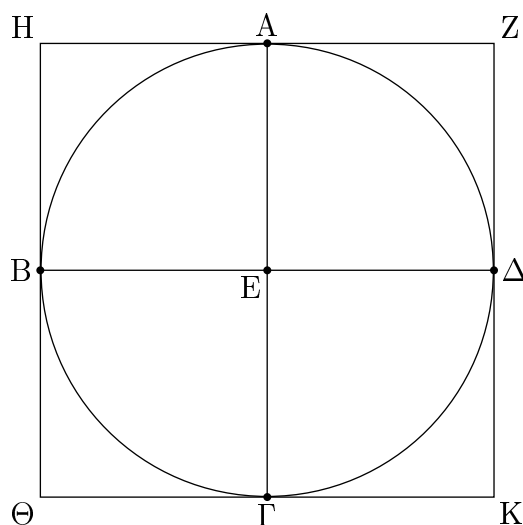
Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ABΓΔ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.7

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓΔ: δεῖ δὴ περὶ τὸν ABΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι.

Ἦχθωσαν τοῦ ABΓΔ κύκλου δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἰ AG, BΔ, καὶ διὰ τῶν A, B, Γ, Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ABΓΔ κύκλου αἰ ZH, HΘ, ΘK, KZ.



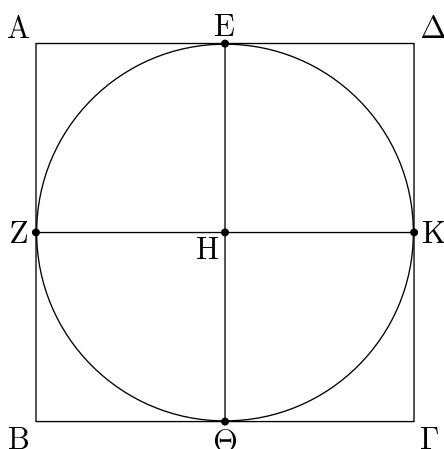
Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ, αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Γ, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἐστὶ δὲ ὀρθή καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ τῇ ΒΕΔ ἐστὶ παράλληλος. παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ, ΗΓ, ΑΚ, ΖΒ, ΒΚ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρω τῶν ΗΘ, ΖΚ, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση [καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΗΘ, ΖΚ ἑκατέρω τῶν ΗΖ, ΘΚ ἐστὶν ἴση], ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστὶ τὸ ΗΒΕΑ, καὶ ἐστὶν ὀρθή ἡ ὑπὸ ΑΕΒ, ὀρθή ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ, Κ, Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον: τετράγωνον ἄρα ἐστίν. καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.8

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ: δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Τεμήσθω ἑκατέρα τῶν $A\Delta$, AB δίχα κατὰ τὰ E , Z σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ E ὀποτέρᾳ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἦχθω ἡ $E\Theta$, διὰ δὲ τοῦ Z ὀποτέρᾳ τῶν $A\Delta$, $B\Gamma$ παράλληλος ἦχθω ἡ ZK : παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν AK , KB , $A\Theta$, $\Theta\Delta$, AH , $H\Gamma$, BH , $H\Delta$, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι [εἰσὶν]. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ AB , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν $A\Delta$ ἡμίσεια ἡ AE , τῆς δὲ AB ἡμίσεια ἡ AZ , ἴση ἄρα καὶ ἡ AE τῇ AZ : ὥστε καὶ αἱ ἀπεναντίον: ἴση ἄρα καὶ ἡ ZH τῇ HE . ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν $H\Theta$, HK ἑκατέρᾳ τῶν ZH , HE ἐστὶν ἴση: αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ HE , HZ , $H\Theta$, HK ἴσαι ἀλλήλαις [εἰσὶν]. ὁ ἄρα κέντρον μὲν τῷ H διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν E , Z , Θ , K κύκλος γραφόμενος ἦξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων: καὶ ἐφάπεται τῶν AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς E , Z , Θ , K γωνίας: εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA , ἢ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου: ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρον τῷ H διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν E , Z , Θ , K κύκλος γραφόμενος τεμεῖ τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA εὐθείας. ἐφάπεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον.

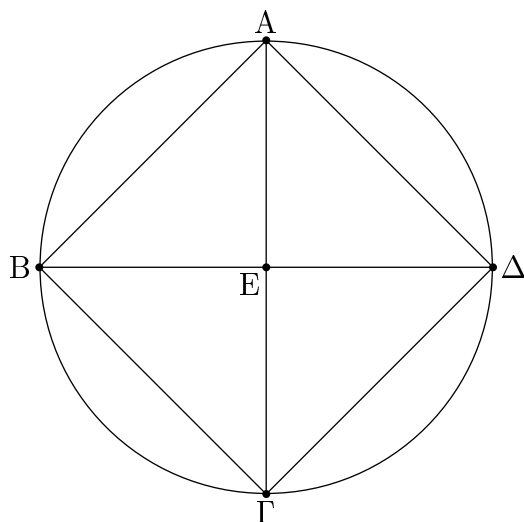
Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.9

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ $AB\Gamma\Delta$: δεῖ δὴ περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ $A\Gamma$, $B\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E .



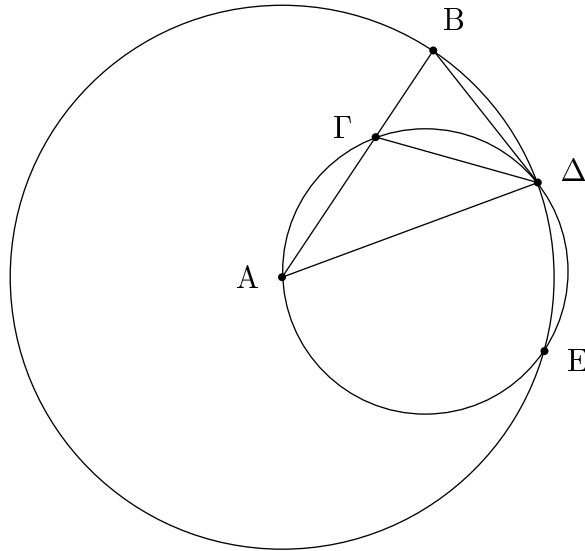
Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔA τῇ AB , κοινὴ δὲ ἡ AG , δύο δὲ αἱ ΔA , AG δυσὶ ταῖς BA , AG ἴσαι εἰσὶν: καὶ βάσις ἡ ΔG βάσει τῇ BG ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔAG γωνία τῇ ὑπὸ BAG ἴση ἐστίν: ἡ ἄρα ὑπὸ ΔAB γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς AG . ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ ABG , $BG\Delta$, $G\Delta A$ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν AG , ΔB εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔAB γωνία τῇ ὑπὸ ABG , καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ ΔAB ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EAB , τῆς δὲ ὑπὸ ABG ἡμίσεια ἡ ὑπὸ EBA , καὶ ἡ ὑπὸ EAB ἄρα τῇ ὑπὸ EBA ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ EA τῇ EB ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὲ δείζομεν, ὅτι καὶ ἐκατέρω τῶν EA , EB [εὐθειῶν] ἐκατέρω τῶν EG , $E\Delta$ ἴση ἐστίν. αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ EA , EB , EG , $E\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ E καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν A , B , G , Δ κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ $ABG\Delta$ τετράγωνον. περιγεγράφθω ὡς ὁ $ABG\Delta$.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.10

Ἴσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον ἐκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τεμηθῆσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓA τετραγώνῳ: καὶ κέντρῳ τῷ A καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλος γεγράφθω ὁ $B\Delta E$, καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν $B\Delta E$ κύκλον τῇ AG εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕσῃ τῆς τοῦ $B\Delta E$ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ $B\Delta$: καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ $A\Gamma\Delta$ τρίγωνον κύκλος ὁ $A\Gamma\Delta$.



Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς AG , ἴση δὲ ἡ AG τῇ BD , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς BD . καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ $AG\Delta$ εἴληπται τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ B , καὶ ἀπὸ τοῦ B πρὸς τὸν $AG\Delta$ κύκλον προσπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ BA, BD , καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προσπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BG ἴσον τῶ ἀπὸ τῆς BD , ἡ BD ἄρα ἐφάπτεται τοῦ $AG\Delta$ κύκλου. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται μὲν ἡ BD , ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆχται ἡ ΔG , ἡ ἄρα ὑπὸ $B\Delta G$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῶ ἐναλλάξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνία τῇ ὑπὸ ΔAG . ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $B\Delta G$ τῇ ὑπὸ ΔAG , κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ $G\Delta A$: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $B\Delta A$ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ $G\Delta A, \Delta AG$. ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ $G\Delta A, \Delta AG$ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$: καὶ ἡ ὑπὸ $B\Delta A$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $B\Delta A$ τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AD τῇ AB ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔBA τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἐστὶν ἴση. αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $B\Delta A, \Delta BA, B\Gamma\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta B\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ BD πλευρᾷ τῇ ΔG . ἀλλὰ ἡ BD τῇ GA ὑπόκειται ἴση: καὶ ἡ GA ἄρα τῇ $G\Delta$ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $G\Delta A$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔAG ἐστὶν ἴση: αἱ ἄρα ὑπὸ $G\Delta A, \Delta AG$ τῆς ὑπὸ ΔAG εἰσι διπλασίους. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ταῖς ὑπὸ $G\Delta A, \Delta AG$: καὶ ἡ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἄρα τῆς ὑπὸ $G\Delta A$ ἐστὶ διπλῆ. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ $B\Delta A, \Delta BA$: καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ὑπὸ $B\Delta A, \Delta BA$ τῆς ὑπὸ ΔAB ἐστὶ διπλῆ.

Ἴσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ $AB\Delta$ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔB βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

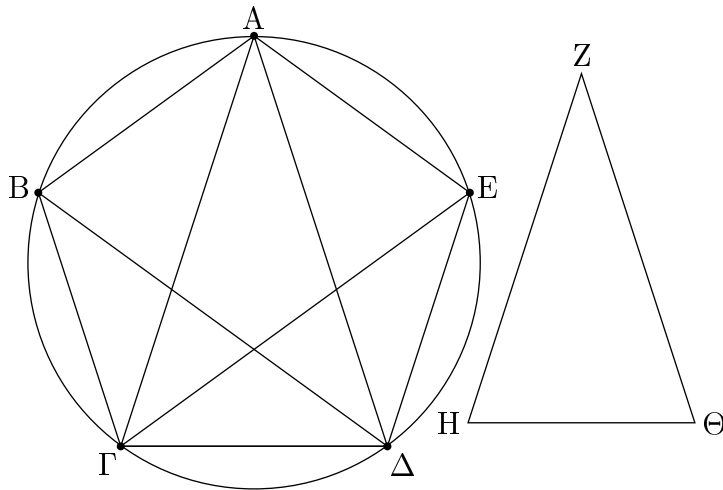
IV.11

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta E$: δεῖ δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta E$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἐκκεῖσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ $ZH\Theta$ διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς H ,

Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Z, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ABΓΔΕ κύκλον τῷ ZHΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥστε τῇ μὲν πρὸς τῷ Z γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η, Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ: καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, [ΓΔ], ΔΕ, ΕΑ.



Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ, ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ, ΔΒ εὐθειῶν, αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ, ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΓΔΒ, ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασι: αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειάς ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν: αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΒΓΔ: ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒ περιφέρειᾳ ἐστὶν ἴση. καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερειᾶς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερειᾶς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ, ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ, ΑΕΔ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

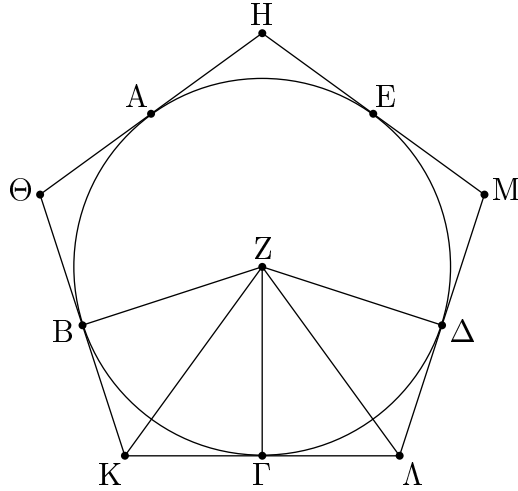
IV.12

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ: δεῖ [2δῆ]2 περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὥστε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ περιφερειάς: καὶ διὰ τῶν Α, Β, Γ, Δ,

Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ, ΖΚ, ΖΓ, ΖΛ, ΖΔ.



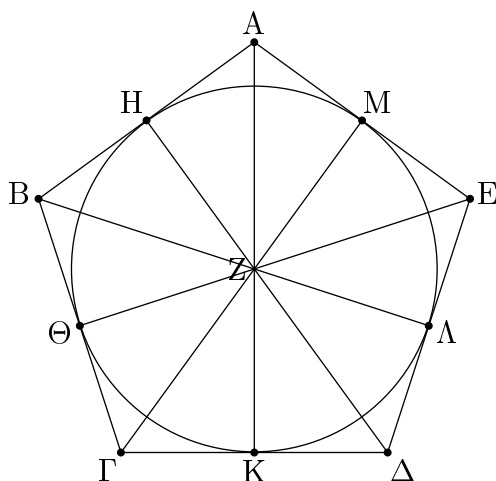
Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφήν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ: ὀρθή ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β, Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ: ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ, ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ, ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἐστὶν ἴσον. ἴση ἄρα ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ, δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΚ δυοὶ ταῖς ΓΖ, ΖΚ ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ [ἐστὶν] ἴση: γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ [γωνία] τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση: ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ: διπλῆ ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΛΓ τῆς ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ: ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ: ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΚΓ, ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾶ πλευρᾷ ἴσην κοινήν αὐτῶν τὴν ΖΓ: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ: ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση: καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ, ΗΜ, ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ, ΚΛ ἴση: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ, ΘΗΜ, ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ, ΚΛΜ ἴση: αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΘΚΛ, ΚΛΜ, ΛΜΗ, ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

[Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιέγραπται]: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.13

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι.

Ἐστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ $ABΓΔE$: δεῖ δὴ εἰς τὸ $ABΓΔE$ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι.



Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $BΓΔ$, $ΓΔE$ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν $ΓZ$, $ΔZ$ εὐθειῶν: καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ $ΓZ$, $ΔZ$ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZB , ZA , ZE εὐθεῖαι. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῇ $ΓΔ$, κοινὴ δὲ ἡ $ΓZ$, δύο δὴ αἱ $BΓ$, $ΓZ$ δυοὶ ταῖς $ΔΓ$, $ΓZ$ ἴσαι εἰσὶν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $BΓZ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΔΓZ$ [ἐστὶν] ἴση: βάσις ἄρα ἡ BZ βάσει τῇ $ΔZ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $BΓZ$ τρίγωνον τῷ $ΔΓZ$ τριγῶνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓBZ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔZ$. καὶ ἐπεὶ διπλὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΔE$ τῆς ὑπὸ $ΓΔZ$, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ $ΓΔE$ τῇ ὑπὸ $ABΓ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΔZ$ τῇ ὑπὸ $ΓBZ$, καὶ ἡ ὑπὸ $ΓBA$ ἄρα τῆς ὑπὸ $ΓBZ$ ἐστὶ διπλὴ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γωνία τῇ ὑπὸ $ZBΓ$: ἡ ἄρα ὑπὸ $ABΓ$ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς BZ εὐθείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ BAE , $AEΔ$ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ZA , ZE εὐθειῶν. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Z σημείου ἐπὶ τὰς AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔE$, EA εὐθείας κάθετοι αἱ ZH , $ZΘ$, ZK , $ZΛ$, ZM . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΘΓZ$ γωνία τῇ ὑπὸ $KΓZ$, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ZΘΓ$ [ὀρθὴ] τῇ ὑπὸ $ZKΓ$ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $ZΘΓ$, $ZKΓ$ τὰς δύο γωνίας δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην κοινὴν αὐτῶν τὴν $ZΓ$ ὑποτείνουσιν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει: ἴση ἄρα ἡ $ZΘ$ κάθετος τῇ ZK καθέτῳ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν $ZΛ$, ZM , ZH ἑκατέρα τῶν $ZΘ$, ZK ἴση ἐστίν: αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ZH , $ZΘ$, ZK , $ZΛ$, ZM ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν H , $Θ$, K , $Λ$, M κύκλος γραφόμενος ἤξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἐφάπεται τῶν AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔE$, EA εὐθειῶν διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς H , $Θ$, K , $Λ$, M σημείοις γωνίας. εἰ γὰρ οὐκ ἐφάπεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτάς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου: ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ κέντρον

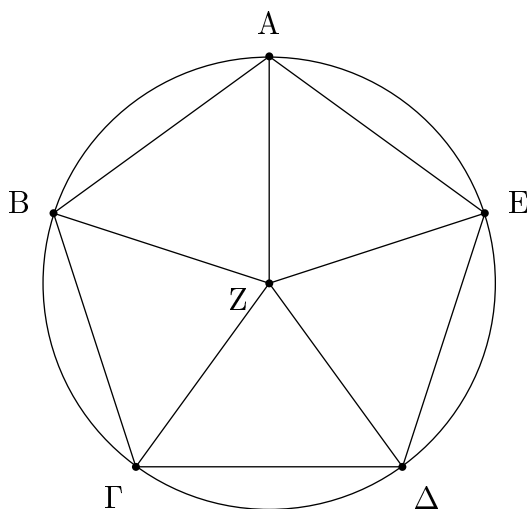
τῷ Z διαστήματι δὲ ἐνὶ τῶν H, Θ, K, Λ, M σημείων γραφόμενος κύκλος τεμεί τὰς $AB, BG, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$ εὐθείας: ἐφάπτεται ἄρα αὐτῶν. γεγράφθω ὡς ὁ $H\Theta K\Lambda M$.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.14

Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ $AB\Gamma\Delta E$: δεῖ δὴ περὶ τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.



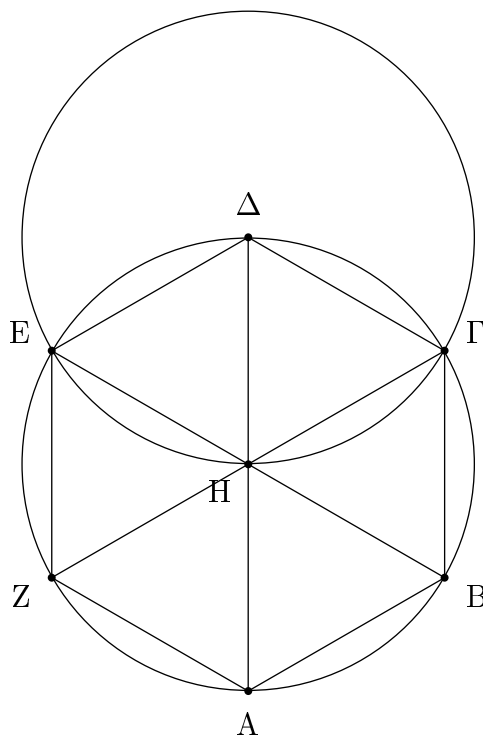
Τετμήσθω δὴ ἐκάτερα τῶν ὑπὸ $B\Gamma\Delta, \Gamma\Delta E$ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἐκατέρας τῶν $\Gamma Z, \Delta Z$, καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ B, A, E σημεία ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ZB, ZA, ZE . ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὑπὸ $\Gamma B A, B A E, A E \Delta$ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἐκάστης τῶν ZB, ZA, ZE εὐθειῶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ὑπὸ $B\Gamma\Delta$ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ $Z\Gamma\Delta$, τῆς δὲ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἡμίσεια ἢ ὑπὸ $\Gamma\Delta Z$, καὶ ἡ ὑπὸ $Z\Gamma\Delta$ ἄρα τῇ ὑπὸ $Z\Delta\Gamma$ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ πλευρὰ ἢ $Z\Gamma$ πλευρᾶ τῇ $Z\Delta$ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ZB, ZA, ZE ἐκάτερα τῶν $Z\Gamma, Z\Delta$ ἐστὶν ἴση: αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν. ὁ ἄρα κέντρον τῷ Z καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν $ZA, ZB, Z\Gamma, Z\Delta, ZE$ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. περιγεγράφθω καὶ ἔστω ὁ $AB\Gamma\Delta E$.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὃ ἐστὶν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.15

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθείς κύκλος ὁ $AB\Gamma\Delta E Z$: δεῖ δὴ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta E Z$ κύκλον ἐξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἦχθω τοῦ $ABΓΔEZ$ κύκλου διάμετρος ἡ $AΔ$, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ H , καὶ κέντρῳ μὲν τῷ $Δ$ διαστήματι δὲ τῷ $ΔH$ κύκλος γεγράφθω ὁ $EHΓΘ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ EH , $ΓH$ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ B , Z σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔE$, EZ , ZA : λέγω, ὅτι τὸ $ABΓΔEZ$ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $ABΓΔEZ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ HE τῇ $HΔ$. πάλιν, ἐπεὶ τὸ $Δ$ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ $EHΓΘ$ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ $ΔE$ τῇ $ΔH$. ἀλλ' ἡ HE τῇ $HΔ$ ἐδείχθη ἴση: καὶ ἡ HE ἄρα τῇ $EΔ$ ἴση ἐστίν: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $EHΔ$ τρίγωνον: καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ $EHΔ$, $HΔE$, $ΔEH$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν: καὶ εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι: ἡ ἄρα ὑπὸ $EHΔ$ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ $ΔHΓ$ τρίτον δύο ὀρθῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ $ΓH$ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν EB σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ $EHΓ$, $ΓHB$ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΓHB$ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν: αἱ ἄρα ὑπὸ $EHΔ$, $ΔHΓ$, $ΓHB$ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν: ὥστε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ BHA , AHZ , ZHE ἴσαι εἰσίν [ταῖς ὑπὸ $EHΔ$, $ΔHΓ$, $ΓHB$]. αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ $EHΔ$, $ΔHΓ$, $ΓHB$, BHA , AHZ , ZHE ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν: αἱ ἔξ ἄρα περιφέρειαι αἱ AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔE$, EZ , ZA ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφέρειας αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν: αἱ ἔξ ἄρα εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ABΓΔEZ$ ἑξάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ZA περιφέρεια τῇ $EΔ$ περιφέρειᾳ, κοινὴ προσκείσθω ἡ $ABΓΔ$ περιφέρεια: ὅλη ἄρα ἡ $ZABΓΔ$ ὅλη τῇ $EΔΓBA$ ἐστὶν ἴση: καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς $ZABΓΔ$ περιφερείας ἡ ὑπὸ ZED γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς $EΔΓBA$

περιφερείας ἢ ὑπὸ AZE γωνία: ἴση ἄρα ἢ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ABΓΔEZ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν τῶν ὑπὸ AZE, ZED γωνιῶν: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABΓΔEZ ἑξάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον: καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ABΓΔEZ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Corollary

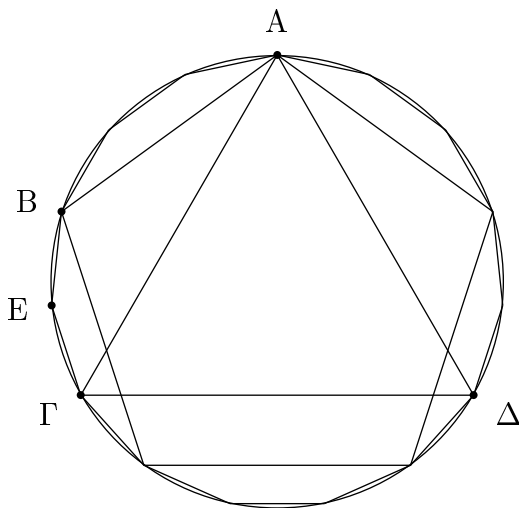
Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Ὅμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφθήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἀκολουθῶς τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράφομεν τε καὶ περιγράφομεν: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

IV.16

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ABΓΔ: δεῖ δὴ εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον πεντεκαδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι.



Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ABΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἢ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἢ AB: οἷων ἄρα ἐστὶν ὁ ABΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἢ μὲν ABΓ περιφέρεια τρίτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται πέντε, ἢ δὲ AB περιφέρεια πέμπτον οὔσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν: λοιπὴ ἄρα ἢ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. τετμήσθω ἢ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ E: ἑκατέρωθεν ἄρα τῶν BE, ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαδέκατόν ἐστι τοῦ ABΓΔ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξαντες τὰς BE , EF ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta[E]$ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ὅμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ τὸν κύκλον διαίρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφῆσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαίδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου δείξεων καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαίδεκάγωνον κύκλον ἐγγράφομέν τε καὶ περιγράφομεν: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Book V

Definitions

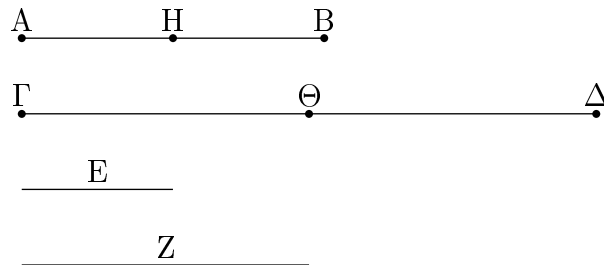
1. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῆ τὸ μείζον.
2. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μείζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.
3. Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις.
4. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.
5. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκεις πολλαπλασίων καθ' ὁποιοῦν πολλαπλασιασμὸν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.
6. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνάλογον καλεῖσθω.
7. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκεις πολλαπλασίων τὸ μὲν τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχη τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχη τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου, τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἢ περ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.
8. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν.
9. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ περ πρὸς τὸ δεύτερον.
10. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ἦ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται ἢ περ πρὸς τὸ δεύτερον, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχη.
11. Ὅμόλογα μεγέθη λέγεται τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἐπόμενα τοῖς ἐπομένοις.
12. Ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἐπομένου πρὸς τὸ ἐπόμενον.
13. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λήψις τοῦ ἐπομένου ὡς ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον ὡς ἐπόμενον.
14. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἐπομένου ὡς ἑνὸς πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.

15. Διαίρεσις λόγου ἐστὶ λήψις τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἐπόμενον.
16. Ἀναστροφή λόγου ἐστὶ λήψις τοῦ ἡγούμενου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ἣ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἐπομένου.
17. Δί ἴσου λόγος ἐστὶ πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ἦ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον: ἢ ἄλλως: Λήψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.
18. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστίν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἐπόμενον, ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἐπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον.

Propositions

V.1

Ἐὰν ἦ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.



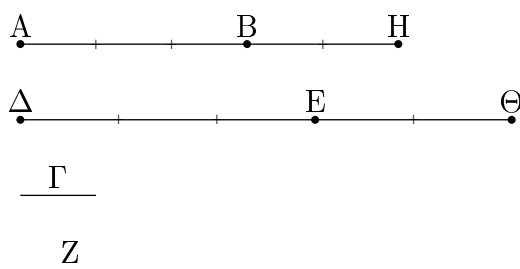
Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ AB, ΓΔ ὅποσωνοῦν μεγεθῶν τῶν E, Z ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον: λέγω, ὅτι ὅσαπλάσιόν ἐστι τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ E καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Z, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μεγέθη ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Z. διηρήσθω τὸ μὲν AB εἰς τὰ τῷ E μεγέθη ἴσα τὰ AH, HB, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Z ἴσα τὰ ΓΘ, ΘΔ: ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH, HB τῷ πλῆθει τῶν ΓΘ, ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z, ἴσον ἄρα τὸ AH τῷ E, καὶ τὰ AH, ΓΘ τοῖς E, Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τῷ E, καὶ τὰ HB, ΘΔ τοῖς E, Z: ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ E, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς AB, ΓΔ ἴσα τοῖς E, Z: ὅσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τοῦ E, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ AB, ΓΔ τῶν E, Z.

Ἐὰν ἄρα ἦ ὅποσαοῦν μεγέθη ὅποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.2

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου.



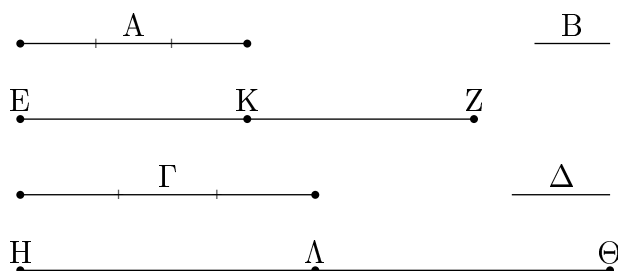
Πρῶτον γὰρ τὸ AB δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Z, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Z: λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ AB τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Z, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ BH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΕΘ ἴσα τῷ Z: ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ AH ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Z: ὅσα πλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ AH τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Z. καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Z.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ἢ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.3

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῆ δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἐκάτερον ἐκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.



Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ, ΗΘ: λέγω, ὅτι ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ.

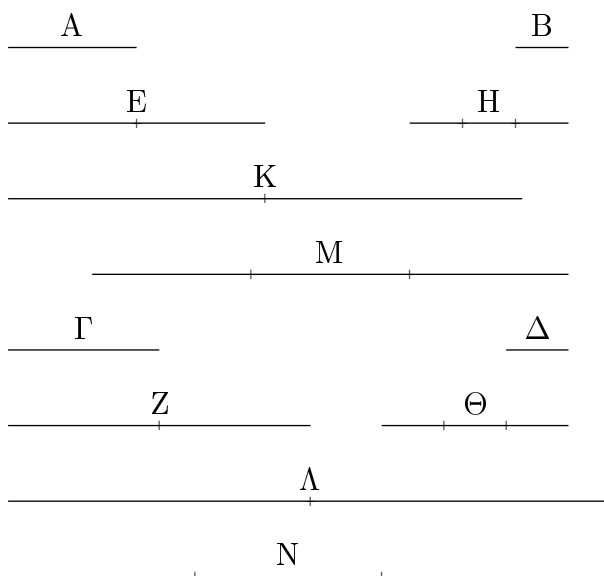
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. διηρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ, ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ, ΛΘ: ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ, ΚΖ τῷ πλῆθει τῶν ΗΛ, ΛΘ. καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ, ἔστι δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῆ δὲ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκεις πολλαπλάσια, καὶ δι' ἴσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον τὸ μὲν τοῦ δευτέρου τὸ δὲ τοῦ τετάρτου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.4

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου καθ' ὅποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.



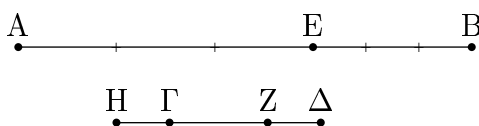
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν E, Z ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, τῶν δὲ H, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ M, N.

[Καί] ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν E τοῦ A, τὸ δὲ Z τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν E, Z ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ K τοῦ A καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ M τοῦ B καὶ τὸ N τοῦ Λ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ M, N, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ K τοῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ N, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν K, Λ τῶν E, Z ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν H, Θ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ E πρὸς τὸ H, οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, καὶ τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρίτου πρὸς τὰ ἰσάκεις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καθ' ὅποιον οὖν πολλαπλασιασμὸν ληφθέντα κατάλληλα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.5

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.



Μέγεθος γὰρ τὸ AB μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ: λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

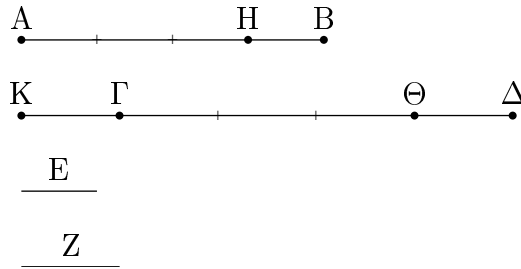
Ὅσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ. κεῖται δὲ ἰσάκεις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ, ΓΔ: ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΖ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τὸ ΗΓ τῷ ΔΖ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ: ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος, καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκεις ἔσται πολλαπλάσιον, ὅσαπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ὅλον τοῦ ὅλου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.6

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.



Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ, ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ, ΓΘ τῶν αὐτῶν τῶν Ε, Ζ ἰσάκεις ἔστω πολλαπλάσια: λέγω, ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ, ΘΔ τοῖς Ε, Ζ ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια.

Ἐστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.

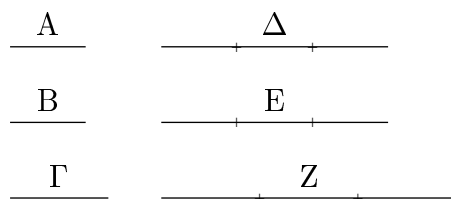
Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΚΓ. ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. ἰσάκεις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ: ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ, ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ΓΘ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ Ζ τῷ ΚΓ ἐστὶν ἴσον: καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. ὥστε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστίν, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ὅμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι, κὰν πολλαπλάσιον ἢ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκεις ἢ πολλαπλάσια, καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἦτοι ἴσα ἐστὶν ἢ ἰσάκεις αὐτῶν πολλαπλάσια: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.7

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.



Ἐστω ἴσα μεγέθη τὰ Α, Β, ἄλλο δέ τι, ὃ ἔτυχεν, μέγεθος τὸ Γ: λέγω, ὅτι ἐκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Δ, Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β, ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Ζ. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Δ, Ε τῶν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον: ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω [δὴ], ὅτι καὶ τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε: ἄλλο δέ τι τὸ Ζ: εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ, Ε τῶν Α, Β ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια: ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα.

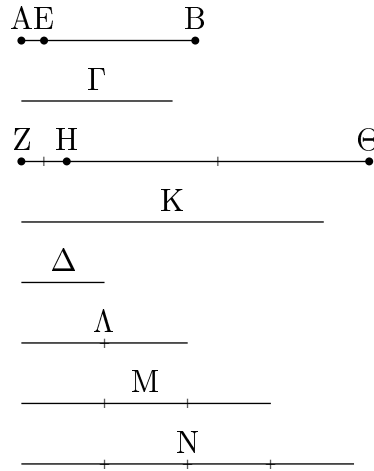
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ἦ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.8

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ἔλαττον. καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ μείζον.

Ἐστω ἀνίσσα μεγέθη τὰ ΑΒ, Γ, καὶ ἔστω μείζον τὸ ΑΒ, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, τὸ Δ: λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ΑΒ.

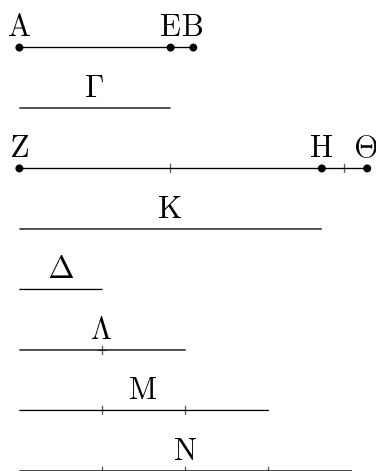


Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ BE: τὸ δὴ ἔλαττον τῶν AE, EB πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μείζον. ἔστω πρότερον τὸ AE ἔλαττον τοῦ EB, καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ AE, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ZH μείζον ὄν τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστὶ τὸ ZH τοῦ AE, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν HΘ τοῦ EB τὸ δὲ K τοῦ Γ: καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ M, καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείον, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μείζον τοῦ K. εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ N τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μείζον τοῦ K.

Ἐπεὶ οὖν τὸ K τοῦ N πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ K ἄρα τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἔλαττον. καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ HΘ τοῦ EB, ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ ZΘ τοῦ AB. ἰσάκεις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZH τοῦ AE καὶ τὸ K τοῦ Γ: ἰσάκεις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ZΘ τοῦ AB καὶ τὸ K τοῦ Γ. τὰ ZΘ, K ἄρα τῶν AB, Γ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ HΘ τοῦ EB καὶ τὸ K τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ EB τῷ Γ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ HΘ τῷ K: τὸ δὲ K τοῦ M οὐκ ἐστὶν ἔλαττον: οὐδ' ἄρα τὸ HΘ τοῦ M ἔλαττόν ἐστιν. μείζον δὲ τὸ ZH τοῦ Δ: ὅλον ἄρα τὸ ZΘ συναμφοτέρων τῶν Δ, M μείζον ἐστὶν. ἀλλὰ συναμφοτέρα τὰ Δ, M τῷ N ἐστὶν ἴσα, ἐπειδήπερ τὸ M τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστιν, συναμφοτέρα δὲ τὰ M, Δ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἔστι δὲ καὶ τὸ N τοῦ Δ τετραπλάσιον: συναμφοτέρα ἄρα τὰ M, Δ τῷ N ἴσα ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ZΘ τῶν M, Δ μείζον ἐστὶν: τὸ ZΘ ἄρα τοῦ N ὑπερέχει: τὸ δὲ K τοῦ N οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν ZΘ, K τῶν AB, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὸ δὲ N τοῦ Δ ἄλλο, ὃ ἔτυχεν, πολλαπλάσιον: τὸ AB ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν N τοῦ K ὑπερέχει, τὸ δὲ N τοῦ ZΘ οὐχ ὑπερέχει. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν N τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ZΘ, K τῶν AB, Γ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια: τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ Δ πρὸς τὸ AB.



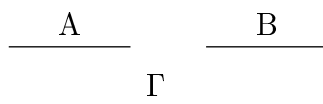
Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μείζον ἔστω. τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μείζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μείζον δὲ τοῦ Δ: καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι τὰ ΖΘ, Κ τῶν ΑΒ, Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια: καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μείζον τοῦ ΖΗ: ὥστε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὐκ ἐστὶν ἔλασσον. μείζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ: ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ, Μ, τουτέστι τοῦ Ν, ὑπερέχει. τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδὴ περ καὶ τὸ ΖΗ μείζον ὂν τοῦ ΗΘ, τουτέστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. καὶ ὡσαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ ἔλαττον: καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ πρὸς τὸ μείζον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.9

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.



Εἰ γὰρ μὴ, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον: ἔχει δέ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν λόγον: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον: ἔχει δέ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.10

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον ἐκεῖνο μείζον ἐστίν: πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐστίν.

$$\frac{\frac{A}{\quad}}{\quad} \quad \frac{B}{\quad}$$

$$\frac{\quad}{\quad \Gamma \quad}$$

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἢπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ: λέγω, ὅτι μείζον ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β ἢ ἔλασσον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ Α τῷ Β: ἐκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α, Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ: οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β: τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. οὐκ ἔχει δέ: οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. ἐδείχθη δὲ οὐδὲ ἴσον: μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἢπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α: λέγω, ὅτι ἔλασσόν ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴσον ἐστὶν ἢ μείζον. ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστὶ τὸ Β τῷ Α: τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἐκάτερον τῶν Α, Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. οὐκ ἔχει δέ: οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Β τῷ Α. οὐδὲ μὴν μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α: τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν ἢπερ πρὸς τὸ Α. οὐκ ἔχει δέ: οὐκ ἄρα μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴσον: ἔλαττον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μείζον ἐστίν: καὶ πρὸς ὃ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττον ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.11

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

$$\frac{\frac{A}{\quad}}{\frac{B}{\quad}} \quad \frac{\frac{\Gamma}{\quad}}{\frac{\Delta}{\quad}} \quad \frac{\frac{E}{\quad}}{\frac{Z}{\quad}}$$

$$\frac{\quad}{\quad H \quad} \quad \frac{\quad}{\quad \Theta \quad} \quad \frac{\quad}{\quad K \quad}$$

$$\frac{\quad}{\quad \Lambda \quad} \quad \frac{\quad}{\quad M \quad} \quad \frac{\quad}{\quad N \quad}$$

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

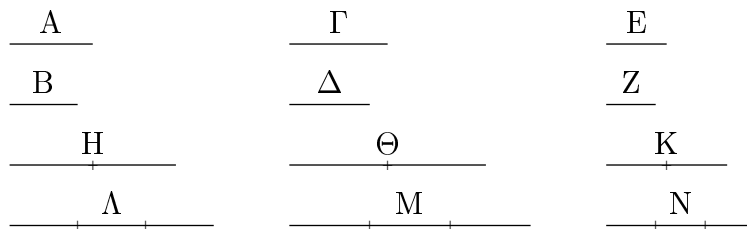
Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, τῶν δὲ Β, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ εἰ ἴσον ἐστίν, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ, Κ, τῶν δὲ Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερεῖχε καὶ τὸ Η τοῦ Α, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον: ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Η, Κ τῶν Α, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, Ν τῶν Β, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῶ αὐτῶ λόγῳ οἱ αὐτοὶ καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.12

Ἐὰν ᾗ ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα.

Ἐστωσαν ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.



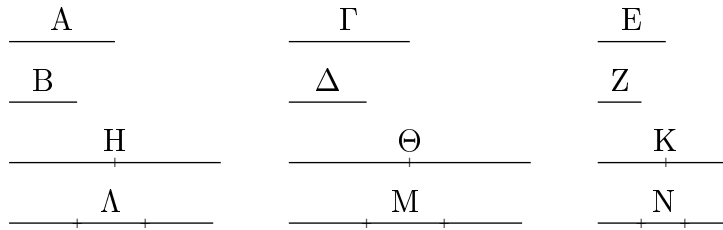
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ, τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ, Κ τῶν δὲ Β, Δ, Ζ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, Μ, Ν, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὥστε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Α, ὑπερέχει καὶ τὰ Η, Θ, Κ τῶν Α, Μ, Ν, καὶ εἰ ἴσον, ἴσα, καὶ εἰ ἔλαττον, ἐλάττονα. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η, Θ, Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α, Γ, Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, ἐπειδὴ περ ἐὰν ᾗ ὅποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος ἕκαστον ἐκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστὶν ἐν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Α καὶ τὰ Α, Μ, Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β, Δ, Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α, Γ, Ε πρὸς τὰ Β, Δ, Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾗ ὅποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον, ἔσται ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.13

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ πέμπτου πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ πέμπτου πρὸς ἕκτον.



Πρῶτον γὰρ τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω ἢ πέμπτου τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z. λέγω, ὅτι καὶ πρῶτον τὸ A πρὸς δεύτερον τὸ B μείζονα λόγον ἔξει ἢ περ πέμπτου τὸ E πρὸς ἕκτον τὸ Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ, E ἰσάκεις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια, καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ E πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Z πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει, εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ, E ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ Δ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, ὥστε τὸ μὲν H τοῦ K ὑπερέχει, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν: καὶ ὁσαπλάσιον μὲν ἔστι τὸ H τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ M τοῦ A, ὁσαπλάσιον δὲ τὸ K τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ N τοῦ B.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Γ ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ M, H, τῶν δὲ B, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ N, K, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ M τοῦ N, ὑπερέχει καὶ τὸ H τοῦ K, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερέχει δὲ τὸ H τοῦ K: ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ M τοῦ N. τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει: καὶ ἔστι τὰ μὲν M, Θ τῶν A, E ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ N, Λ τῶν B, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια: τὸ ἄρα A πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ τὸ E πρὸς τὸ Z.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχη ἢ πέμπτου πρὸς ἕκτον, καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἔξει ἢ πέμπτου πρὸς ἕκτον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.14

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται, κὰν ἴσον, ἴσον, κὰν ἔλαττον, ἔλαττον.

$$\frac{A}{\Gamma} \quad \frac{B}{\Delta}$$

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μείζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ: λέγω, ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μείζον ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Α τοῦ Γ μείζον ἐστίν, ἄλλο δέ, ὃ ἔτυχεν, [μέγεθος] τὸ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ: καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκείνο ἔλασσόν ἐστίν: ἔλασσον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β: ὥστε μείζον ἐστὶ τὸ Β τοῦ Δ.

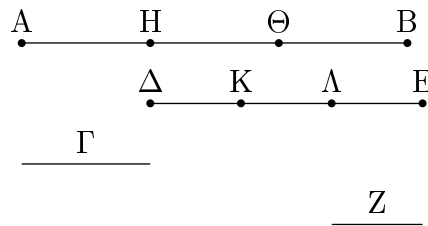
Ὅμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ, καὶ ἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾖ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.15

Τὰ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα.

Ἐστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.



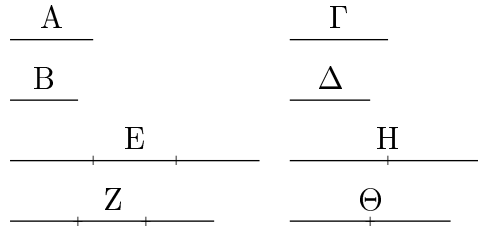
Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ, ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. διηρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ: ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ τῷ πλῆθει τῶν ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ, ΚΛ, ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον ληφθέντα κατάλληλα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.16

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α, Β, Γ, Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ: λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ [ἀνάλογον] ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Ε, Ζ, τῶν δὲ Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια τὰ Η, Θ.

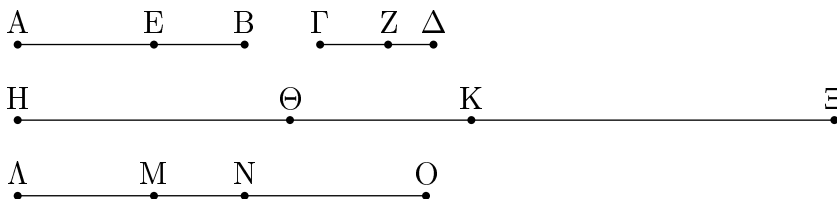
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ: καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἰσάκεις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, [οὕτως] τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ: καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾗ, καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν Ε, Ζ τῶν Α, Β ἰσάκεις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η, Θ τῶν Γ, Δ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.17

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ, ΒΕ, ΓΔ, ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ: λέγω, ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΔΖ.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $H\Theta, \Theta K, \Lambda M, MN$, τῶν δὲ $EB, Z\Delta$ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $KΞ, N\Pi$.

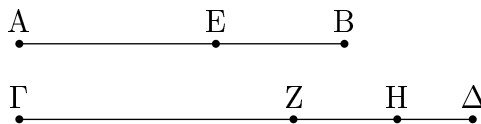
Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΘK τοῦ EB , ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ HK τοῦ AB . ἰσάκις δὲ ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ $H\Theta$ τοῦ AE καὶ τὸ ΛM τοῦ ΓZ : ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ HK τοῦ AB καὶ τὸ ΛM τοῦ ΓZ . πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛM τοῦ ΓZ καὶ τὸ MN τοῦ $Z\Delta$, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛM τοῦ ΓZ καὶ τὸ ΛN τοῦ $\Gamma\Delta$. ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛM τοῦ ΓZ καὶ τὸ HK τοῦ AB : ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ HK τοῦ AB καὶ τὸ ΛN τοῦ $\Gamma\Delta$. τὰ $HK, \Lambda N$ ἄρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΘK τοῦ EB καὶ τὸ MN τοῦ $Z\Delta$, ἔστι δὲ καὶ τὸ $KΞ$ τοῦ EB ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ $N\Pi$ τοῦ $Z\Delta$, καὶ συντεθὲν τὸ $\ThetaΞ$ τοῦ EB ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ $M\Pi$ τοῦ $Z\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ΔZ , καὶ εἴληπται τῶν μὲν $AB, \Gamma\Delta$ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $HK, \Lambda N$, τῶν δὲ $EB, Z\Delta$ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ $\ThetaΞ, M\Pi$, εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ HK τοῦ $\ThetaΞ$, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛN τοῦ $M\Pi$, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. ὑπερεχέτω δὴ τὸ HK τοῦ $\ThetaΞ$, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘK ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ $H\Theta$ τοῦ $KΞ$. ἀλλὰ εἰ ὑπερεῖχε τὸ HK τοῦ $\ThetaΞ$, ὑπερεῖχε καὶ τὸ ΛN τοῦ $M\Pi$: ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΛN τοῦ $M\Pi$, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ MN ὑπερέχει καὶ τὸ ΛM τοῦ $N\Pi$: ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ $H\Theta$ τοῦ $KΞ$, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛM τοῦ $N\Pi$, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν $H\Theta, \Lambda M$ τῶν $AE, \Gamma Z$ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ $KΞ, N\Pi$ τῶν $EB, Z\Delta$ ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB , οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.18

Ἐὰν διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἐστω διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον τὰ $AE, EB, \Gamma Z, Z\Delta$, ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB , οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$: λέγω, ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ $Z\Delta$.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ΔZ , ἔσται ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔZ ἢ πρὸς μείζον.

Ἐστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔH . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ΔH , συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ἐστὶν: ὥστε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB , οὕτως τὸ ΓH πρὸς τὸ $H\Delta$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ AE πρὸς τὸ EB , οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓH πρὸς τὸ $H\Delta$, οὕτως τὸ ΓZ πρὸς τὸ $Z\Delta$. μείζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓH τοῦ τρίτου τοῦ ΓZ : μείζον

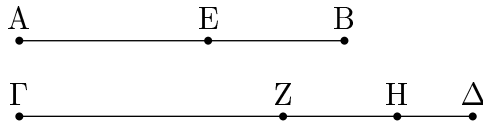
ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ $H\Delta$ τοῦ τετάρτου τοῦ $Z\Delta$. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς ἔλασσον τοῦ $Z\Delta$. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μείζον: πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διηρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.19

Ἐὰν ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον.

Ἐστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AE πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓZ : λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ EB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ , καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ BA πρὸς τὸ AE , οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸ ΓZ . καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ BE πρὸς τὸ EA , οὕτως τὸ ΔZ πρὸς τὸ ΓZ : καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ BE πρὸς τὸ ΔZ , οὕτως τὸ EA πρὸς τὸ $Z\Gamma$. ὡς δὲ τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ , οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ EB πρὸς λοιπὸν τὸ $Z\Delta$ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν ἄρα ᾗ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται ὡς ὅλον πρὸς ὅλον [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

[Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ $Z\Delta$, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ $Z\Delta$, συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν: ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ BA πρὸς τὸ AE , οὕτως τὸ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὸ ΓZ : καὶ ἐστὶν ἀναστρέφαντι].

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, καὶ ἀναστρέφαντι ἀνάλογον ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.20

Ἐὰν ᾗ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δὲ ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ᾗ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἔκτου μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.



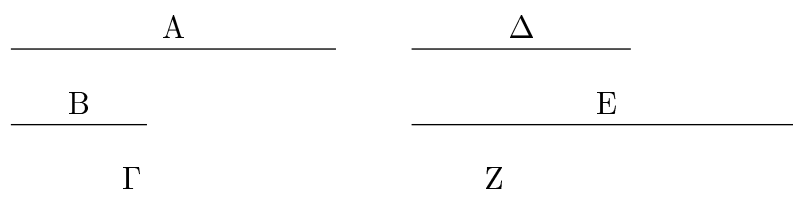
Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, δι' ἴσου δὲ μείζον ἔστω τὸ A τοῦ Γ: λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ B, τὸ δὲ μείζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ἔλαττον, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ B. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, [οὕτως] τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ E: καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ E μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Z πρὸς τὸ E. τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μείζον ἐστὶν. μείζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Z. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἴσον ἢ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ἢ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἔκτου μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.21

Ἐὰν ἢ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἔκτου μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.



Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἢ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, δι' ἴσου δὲ τὸ A τοῦ Γ μείζον ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Z μείζον ἔσται, καὶ ἴσον, ἴσον, καὶ ἔλαττον, ἔλαττον.

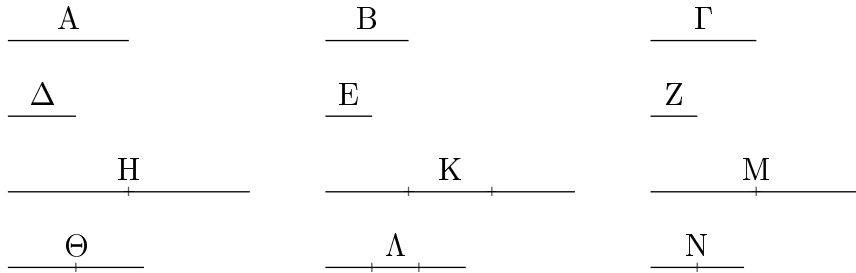
Ἐπεὶ γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ A τοῦ Γ, ἄλλο δὲ τι τὸ B, τὸ A ἄρα πρὸς τὸ B μείζονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ Γ πρὸς τὸ B. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ B, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Δ. καὶ τὸ E ἄρα πρὸς τὸ

Z μείζονα λόγον ἔχει ἢπερ τὸ E πρὸς τὸ Δ. πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν: ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Z τοῦ Δ: μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ Δ τοῦ Z. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι κὰν ἴσον ἦ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z, κὰν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ἦ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μείζον ἢ, καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μείζον ἔσται, κὰν ἴσον, ἴσον, κὰν ἔλαττον, ἔλαττον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.22

Ἐὰν ἦ ὅποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.



Ἐστω ὅποσαοῦν μεγέθη τὰ A, B, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ, E, Z, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z: λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

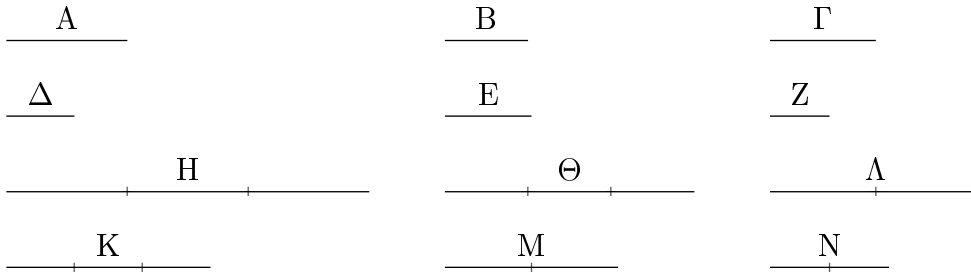
Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, καὶ εἰληπται τῶν μὲν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, τῶν δὲ B, E ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ K, Λ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ H πρὸς τὸ K, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ K πρὸς τὸ M, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ N. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, K, M, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ, Λ, N, σύνδυο λαμβανόμενα καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ M, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ N, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν H, Θ τῶν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ M, N τῶν Γ, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Ἐὰν ἄρα ἦ ὅποσαοῦν μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.23

Ἐὰν ἦ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἢ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.



Ἐστω τρία μεγέθη τὰ A, B, Γ καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ, E, Z, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ B πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

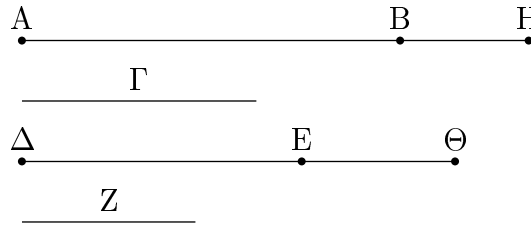
Εἰλήφθω τῶν μὲν A, B, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ H, Θ, K, τῶν δὲ Γ, E, Z ἄλλα, ἃ ἔτυχεν, ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ, M, N.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ H, Θ τῶν A, B, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ H πρὸς τὸ Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ E πρὸς τὸ Z, οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N: καὶ ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z: καὶ ὡς ἄρα τὸ H πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ B πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ E, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E. καὶ ἐπεὶ τὰ Θ, K τῶν B, Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίους τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ K. ἀλλ' ὡς τὸ B πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E: καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ K, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ E. πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ, M τῶν Γ, E ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ E, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ M. ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ E, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ K: καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ K, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ M, καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, τὸ K πρὸς τὸ M. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ H πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ M πρὸς τὸ N. ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ H, Θ, Λ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ K, M, N σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἐστὶν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία, δι' ἴσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ H τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ K τοῦ N, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. καὶ ἐστὶ τὰ μὲν H, K τῶν A, Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ, N τῶν Γ, Z. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ A πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Z.

Ἐὰν ἄρα ἦ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἦ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.24

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον.



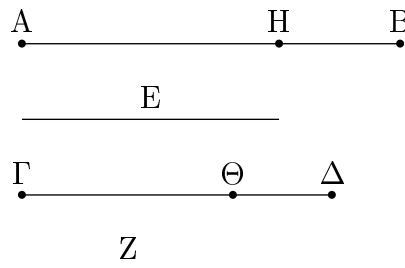
Πρῶτον γὰρ τὸ AB πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Z, ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ BH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Z: λέγω, ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ AH πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Z, ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ BH, οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ ΕΘ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Z, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ BH, οὕτως τὸ Z πρὸς τὸ ΕΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BH, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. καὶ ἐπεὶ διηρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AH πρὸς τὸ HB, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΕΕ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ BH πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Z: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ AH πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Z.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχη δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον, καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

V.25

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον [αὐτῶν] καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν.



Ἐστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ AB, ΓΔ, E, Z, ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ AB, ἐλάχιστον δὲ τὸ Z: λέγω, ὅτι τὰ AB, Z τῶν ΓΔ, E μείζονά ἐστιν.

Κείσθω γὰρ τῶ μὲν E ἴσον τὸ AH, τῶ δὲ Z ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ [οὖν] ἔστιν ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ E πρὸς τὸ Z, ἴσον δὲ τὸ μὲν E τῷ AH, τὸ δὲ Z τῷ ΓΘ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ AH πρὸς τὸ ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ AH πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ HB πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ AB πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. μείζον δὲ τὸ AB τοῦ ΓΔ: μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ ΘΔ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν AH τῷ E, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Z, τὰ ἄρα AH, Z ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ, E. Καὶ [ἐπεὶ] ἐὰν [ἀνίστοις ἴσα προστεθῆ, τὰ ὅλα ἀνιστά ἐστίν, ἐὰν ἄρα] τῶν HB, ΘΔ ἀνίστων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ HB τῷ μὲν HB προστεθῆ τὰ AH, Z, τῷ δὲ ΘΔ προστεθῆ τὰ ΓΘ, E, συνάγεται τὰ AB, Z μείζονα τῶν ΓΔ, E.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ μέγιστον αὐτῶν καὶ τὸ ἐλάχιστον δύο τῶν λοιπῶν μείζονά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book VI

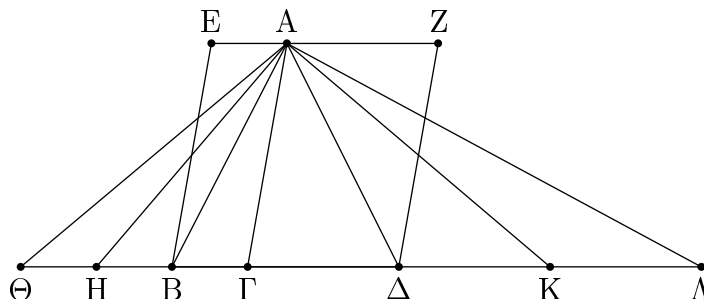
Definitions

1. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τὰς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.
2. [Ἀντιπεπονητότα δὲ σχήματά ἐστιν, ὅταν ἐν ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἐπόμενοι λόγοι ᾧσιν.]
3. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τετιμηῆσθαι λέγεται, ὅταν ἦ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, οὕτως τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλαττον.
4. Ὑψος ἐστὶ παντὸς σχήματος ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.
5. [Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσιν τινά.]

Propositions

VI.1

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις.



Ἐστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, παραλληλόγραμμα δὲ τὰ ΕΓ, ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τὸ ΑΓ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ, Λ σημεία, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι [ὁσαϊδηποτοῦν] αἱ ΒΗ, ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαϊδηποτοῦν αἱ ΔΚ, ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ, ΑΘ, ΑΚ, ΑΛ.

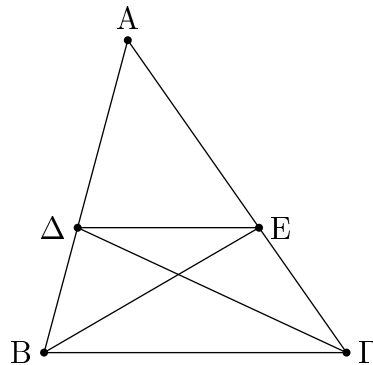
Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ, ΒΗ, ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ, ΑΗΒ, ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις. ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΛΓ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου: καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΛ τριγώνῳ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΛ τριγώνου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ, ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἢ τε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα, ἂ ἔτυχεν, ἰσάκεις πολλαπλάσια ἢ τε ΛΓ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον: καὶ δέδεικται, ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου, καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστὶ τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἀλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.2

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῆ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς: καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.



Τριγώνου γὰρ τοῦ $AB\Gamma$ παράλληλος μιᾶ τῶν πλευρῶν τῆ $B\Gamma$ ἤχθω ἡ ΔE : λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ ΓE πρὸς τὴν EA .

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , $\Gamma\Delta$.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ $B\Delta E$ τρίγωνον τῷ $\Gamma\Delta E$ τριγώνῳ: ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως ἐστὶ τῆς ΔE καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔE , $B\Gamma$: ἄλλο δέ τι τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον. τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ [τρίγωνον], οὕτως τὸ $\Gamma\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$, οὕτως ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA : ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὴν ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν AB κάθετον ἀγομένην πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ $\Gamma\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$, οὕτως ἡ ΓE πρὸς τὴν EA : καὶ ὡς ἄρα ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ ΓE πρὸς τὴν EA .

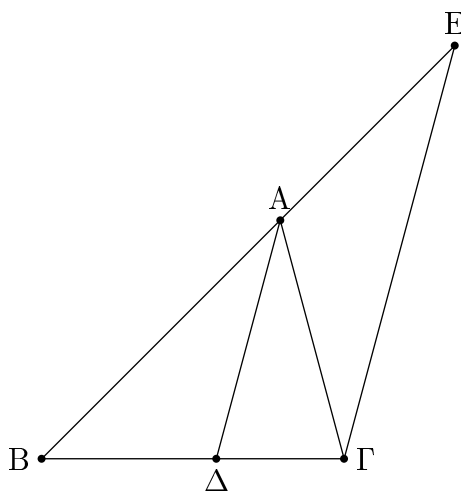
Ἄλλα δὴ αἱ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου πλευραὶ αἱ AB , $A\Gamma$ ἀνάλογον τετμήσθωσαν, ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ ΓE πρὸς τὴν EA , καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΔE : λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔE τῆ $B\Gamma$.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ ΓE πρὸς τὴν EA , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΓE πρὸς τὴν EA , οὕτως τὸ $\Gamma\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον, καὶ ὡς ἄρα τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $\Gamma\Delta E$ τρίγωνον πρὸς τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον. ἐκάτερον ἄρα τῶν $B\Delta E$, $\Gamma\Delta E$ τριγώνων πρὸς τὸ $A\Delta E$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Delta E$ τρίγωνον τῷ $\Gamma\Delta E$ τριγώνῳ: καὶ εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔE . τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔE τῆ $B\Gamma$.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν ἀχθῆ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς τοῦ τριγώνου πλευράς: καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου πλευραὶ ἀνάλογον τεμηθῶσιν, ἢ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.3

Ἐὰν τριγώνου ἡ γωνία δίχα τεμηθῆ, ἢ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς: καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἢ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν.



Ἐστω τρίγωνον τὸ ABΓ, καὶ τεμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῆ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ, ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾶ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἤχεται ἡ ΑΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ: ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

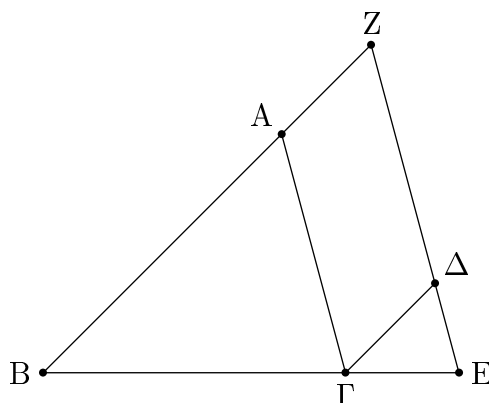
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ: λέγω, ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ: τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τὴν ΕΓ ἤχεται ἡ ΑΔ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ: ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ [ἐστὶν] ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλάξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἡ γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνη καὶ τὴν βάσιν, τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς: καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχη λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τέμνει τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.4

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.



Ἐστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ $ABΓ$, $ΔΓΕ$ ἴσην ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ $ABΓ$ γωνίαν τῇ ὑπὸ $ΔΓΕ$, τὴν δὲ ὑπὸ $BAΓ$ τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΓΕΔ$: λέγω, ὅτι τῶν $ABΓ$, $ΔΓΕ$ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

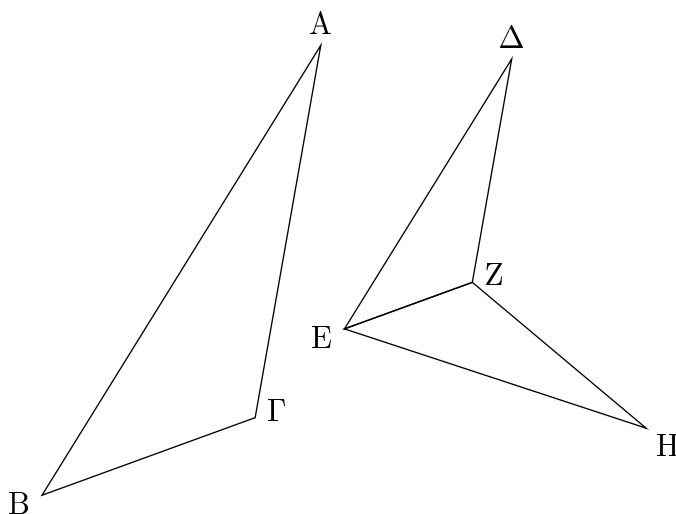
Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ $BΓ$ τῇ $ΓΕ$. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ $ABΓ$, $ΑΓΒ$ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, αἱ ἄρα ὑπὸ $ABΓ$, $ΔΕΓ$ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν: αἱ BA , $EΔ$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέωσαν κατὰ τὸ Z .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΔΓΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ABΓ$, παράλληλός ἐστὶν ἡ BZ τῇ $ΓΔ$. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΓΒ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΓ$, παράλληλός ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ ZE . παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZΑΓΔ$: ἴση ἄρα ἡ μὲν ZA τῇ $ΔΓ$, ἡ δὲ $ΑΓ$ τῇ $ZΔ$. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ZBE παρὰ μίαν τὴν ZE ἤκται ἡ $ΑΓ$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AZ , οὕτως ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$. ἴση δὲ ἡ AZ τῇ $ΓΔ$: ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς τὴν $ΓΔ$, οὕτως ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $ΓΔ$ τῇ BZ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, οὕτως ἡ $ZΔ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$. ἴση δὲ ἡ $ZΔ$ τῇ $ΑΓ$: ὡς ἄρα ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, οὕτως ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $EΔ$. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΕ$, ὡς δὲ ἡ $BΓ$ πρὸς τὴν $ΓΑ$, οὕτως ἡ $ΓΕ$ πρὸς τὴν $EΔ$, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $ΑΓ$, οὕτως ἡ $ΓΔ$ πρὸς τὴν $ΔΕ$.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.5

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχη, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἂς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὴν ΔE πρὸς τὴν EZ , ὡς δὲ τὴν $B\Gamma$ πρὸς τὴν ΓA , οὕτως τὴν EZ πρὸς τὴν $Z\Delta$, καὶ ἔτι ὡς τὴν BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως τὴν $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ . λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ καὶ ἴσας ἔξουσι τὰς γωνίας, ὅφ' ἄς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, τὴν μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΔEZ , τὴν δὲ ὑπὸ $B\Gamma A$ τῇ ὑπὸ $EZ\Delta$ καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$.

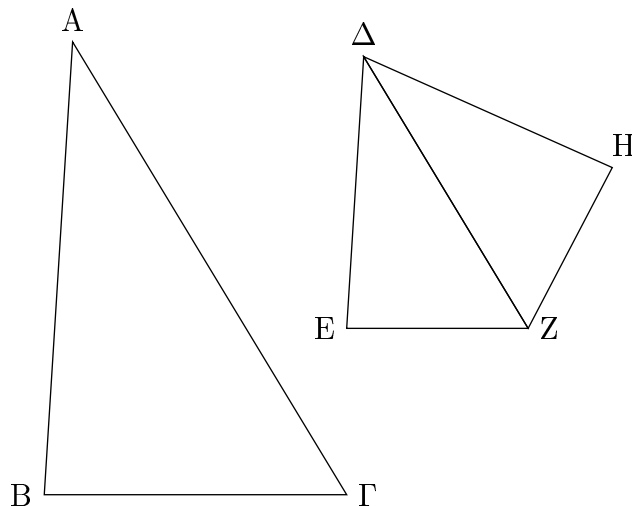
Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ EZ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς E , Z τῇ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ZEH , τῇ δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἴση ἢ ὑπὸ EZH : λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ A λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ H ἔστιν ἴση.

ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ EZH [τριγώνῳ]. τῶν ἄρα $AB\Gamma$, EZH τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, [οὕτως] ἢ HE πρὸς τὴν EZ . ἀλλ' ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως ὑπόκειται ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ : ὡς ἄρα ἢ ΔE πρὸς τὴν EZ , οὕτως ἢ HE πρὸς τὴν EZ . ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔE , HE πρὸς τὴν EZ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἴση ἄρα ἔστιν ἢ ΔE τῇ HE . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ ΔZ τῇ HZ ἔστιν ἴση. ἐπεὶ οὖν ἴση ἔστιν ἢ ΔE τῇ EH , κοινὴ δὲ ἢ EZ , δύο δὴ αἱ ΔE , EZ δυοὶ ταῖς HE , EZ ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις ἢ ΔZ βάσει τῇ ZH [ἔστιν] ἴση: γωνία ἄρα ἢ ὑπὸ ΔEZ γωνία τῇ ὑπὸ HEZ ἔστιν ἴση, καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ HEZ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἔστι καὶ ἢ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία τῇ ὑπὸ HZE , ἢ δὲ ὑπὸ $E\Delta Z$ τῇ ὑπὸ EHZ . καὶ ἐπεὶ ἢ μὲν ὑπὸ $Z\Delta E$ τῇ ὑπὸ HEZ ἔστιν ἴση, ἀλλ' ἢ ὑπὸ HEZ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$, καὶ ἢ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἔστιν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἢ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ ΔZE ἔστιν ἴση, καὶ ἔτι ἢ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ : ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἄς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.6

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχη, περι δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἄς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ μιᾶ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴσην ἔχοντα, περι δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως τὴν $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ : λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ καὶ ἴσην ἔξει τὴν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔEZ , τὴν δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ τῇ ὑπὸ $\Delta Z E$.

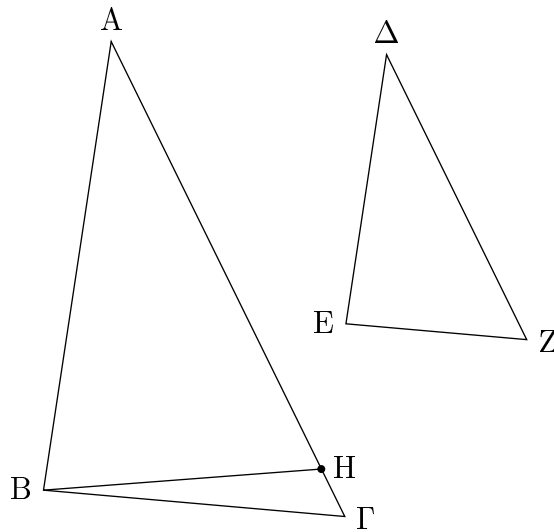
Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΔZ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ , Z ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ $BA\Gamma$, $E\Delta Z$ ἴση ἢ ὑπὸ $Z\Delta H$, τῇ δὲ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἴση ἢ ὑπὸ $\Delta Z H$: λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ B γωνία λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ H ἴση ἔστί.

Ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta H Z$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἢ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἢ $H\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ . ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἢ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἢ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ : καὶ ὡς ἄρα ἢ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ , οὕτως ἢ $H\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ . ἴση ἄρα ἢ $E\Delta$ τῇ ΔH : καὶ κοινὴ ἢ ΔZ : δύο δὴ αἱ $E\Delta$, ΔZ δυοῖς ταῖς $H\Delta$, ΔZ ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $E\Delta Z$ γωνία τῇ ὑπὸ $H\Delta Z$ [ἔστιν] ἴση: βάσις ἄρα ἢ EZ βάσει τῇ HZ ἔστιν ἴση, καὶ τὸ ΔEZ τρίγωνον τῷ $H\Delta Z$ τριγώνῳ ἴσον ἔστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἔστί ἢ μὲν ὑπὸ $\Delta Z H$ τῇ ὑπὸ $\Delta Z E$, ἢ δὲ ὑπὸ $\Delta H Z$ τῇ ὑπὸ $\Delta Z E$. ἀλλ' ἢ ὑπὸ $\Delta Z H$ τῇ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἔστιν ἴση: καὶ ἢ ὑπὸ $A\Gamma B$ ἄρα τῇ ὑπὸ $\Delta Z E$ ἔστιν ἴση. ὑπόκειται δὲ καὶ ἢ ὑπὸ $BA\Gamma$ τῇ ὑπὸ $E\Delta Z$ ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἢ πρὸς τῷ B λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ E ἴση ἔστί: ἰσογώνιον ἄρα ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχη, περι δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, ὅφ' ἄς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.7

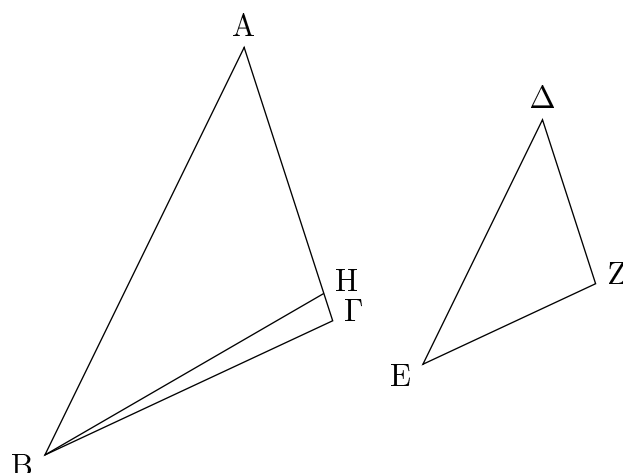
Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί.



Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ τῆ ὑπὸ $E\Delta Z$, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὴν ΔE πρὸς τὴν EZ , τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ , Z πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς: λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἔστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῆ ὑπὸ ΔEZ , καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῆ τῆ πρὸς τῷ Z ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῆ ὑπὸ ΔEZ , μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$. καὶ συνεστάτω πρὸς τῆ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῆ σημείῳ τῷ B τῆ ὑπὸ ΔEZ γωνία ἴση ἡ ὑπὸ ABH .

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν A γωνία τῆ Δ , ἡ δὲ ὑπὸ ABH τῆ ὑπὸ ΔEZ , λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AHB λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΔZE ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABH τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν BH , οὕτως ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ . ὡς δὲ ἡ ΔE πρὸς τὴν EZ , [οὕτως] ὑπόκειται ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$: ἡ AB ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Gamma$, BH τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἴση ἄρα ἡ $B\Gamma$ τῆ BH . ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνία τῆ ὑπὸ BHG ἐστὶν ἴση. ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ πρὸς τῷ Γ : ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ BHG : ὥστε ἡ ἐφεξῆς αὐτῆ γωνία ἡ ὑπὸ AHB μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. καὶ ἐδείχθη ἴση οὖσα τῆ πρὸς τῷ Z : καὶ ἡ πρὸς τῷ Z ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. ὑπόκειται δὲ ἐλάττων ὀρθῆς: ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῆ ὑπὸ ΔEZ : ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A ἴση τῆ πρὸς τῷ Δ : καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῆ τῆ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.



Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ , Z μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς: λέγω πάλιν, ὅτι καὶ οὕτως ἐστὶν ἰσογώνιον τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

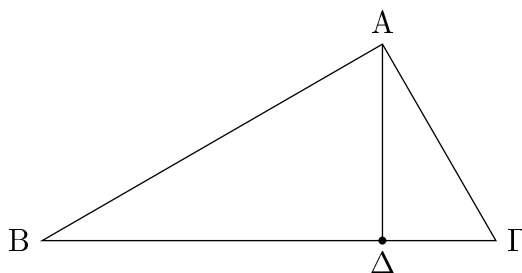
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $B\Gamma$ τῇ BH : ὥστε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ BHG ἴση ἐστίν. οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ : οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ BHG . τριγώνου δὲ τοῦ BHG αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσιν ἐλάττονες: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα πάλιν ἀνισός ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ : ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση: λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπὴ τῇ πρὸς τῷ Z ἴση ἐστίν. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ ΔEZ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἐλάττονα ἢ μὴ ἐλάττονα ὀρθῆς, ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα καὶ ἴσας ἔξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.8

Ἐὰν ἐν ὀρθογώνιῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ BAG γωνίαν, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετος ἡ $A\Delta$: λέγω, ὅτι ὁμοίον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ τριγώνων ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἔτι ἀλλήλοις.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆ ὑπὸ ΑΔΒ: ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα: καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἢ πρὸς τῷ Β, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν κοινὴν τῶν δύο τριγώνων. τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιον τέ ἐστὶ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ὅμοιον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ, ΑΔΓ [τριγώνων] ὅμοιον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ, ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῆ τῆ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῆ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ ἴσην τῆ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου ἴσην τῆ πρὸς τῷ Β, καὶ ἔτι ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς: ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, τὰ πρὸς τῆ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

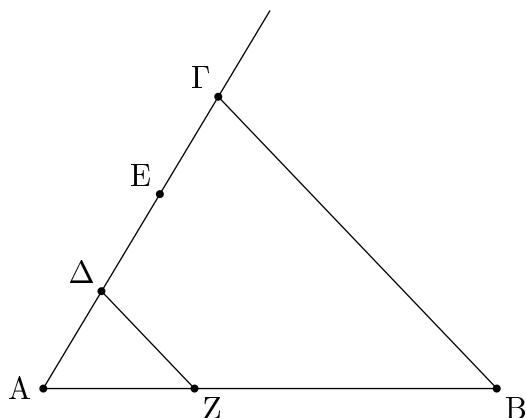
Corollary

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι [καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἐνὸς ὁποιοῦν τῶν τμημάτων ἢ πρὸς τῷ τμηματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστὶν].

VI.9

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.

Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ: δεῖ δὲ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν.



Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον. [καί] διήχθω τις ἀπὸ τοῦ A εὐθεῖα ἡ AΓ γωνίαν περιέχουσα μετὰ τῆς AB τυχοῦσαν: καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς AΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ AΔ ἴσαι αἱ ΔE, EΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔZ.

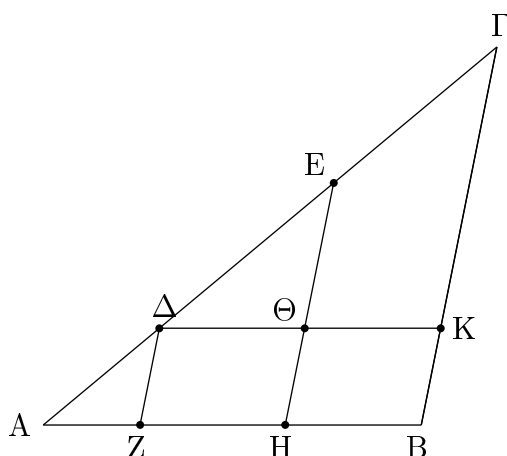
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ABΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν BΓ ἤκται ἡ ZΔ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔA, οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ZA. διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔA: διπλῆ ἄρα καὶ ἡ BZ τῆς ZA: τριπλῆ ἄρα ἡ BA τῆς AZ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς AB τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφῆρηται τὸ AZ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.10

Τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ τετμημένη ὁμοίως τεμεῖν.

Ἐστω ἡ μὲν δοθείσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ AB, ἡ δὲ τετμημένη ἡ AΓ κατὰ τὰ Δ, E σημεῖα, καὶ κείσθωσαν



ὥστε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓB, καὶ διὰ τῶν Δ, E τῇ BΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔZ, EH, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘK.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἐκάτερον τῶν $Z\Theta$, ΘB : ἴση ἄρα ἡ μὲν $\Delta\Theta$ τῇ ZH , ἡ δὲ ΘK τῇ HB . καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $\Delta K\Gamma$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $K\Gamma$ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΘE , ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$, οὕτως ἡ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\Delta$. ἴση δὲ ἡ μὲν $K\Theta$ τῇ BH , ἡ δὲ $\Theta\Delta$ τῇ HZ . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$, οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ . πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ AHE παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν HE ἤκται ἡ $Z\Delta$, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$, οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ : ἐστὶν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓE πρὸς τὴν $E\Delta$, οὕτως ἡ BH πρὸς τὴν HZ , ὡς δὲ ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA .

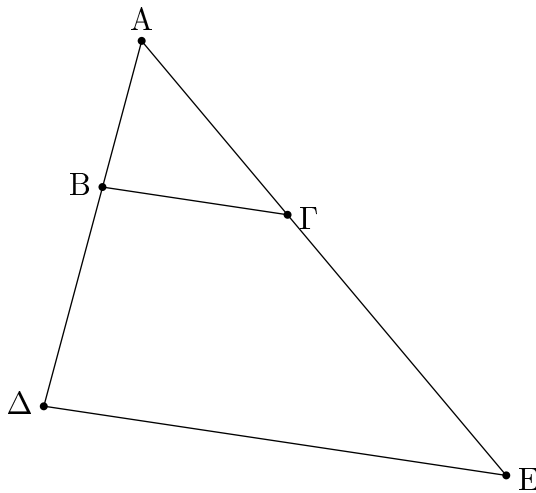
Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἀτμητος ἡ AB τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένη τῇ AG ὁμοίως τέτμηται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.11

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι [δύο εὐθεῖαι] αἱ BA , AG καὶ κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν. δεῖ δὴ τῶν BA , AG τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. ἐκβεβλήσθωσαν

γὰρ ἐπὶ τὰ Δ , E σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ AG ἴση ἡ $B\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔE .



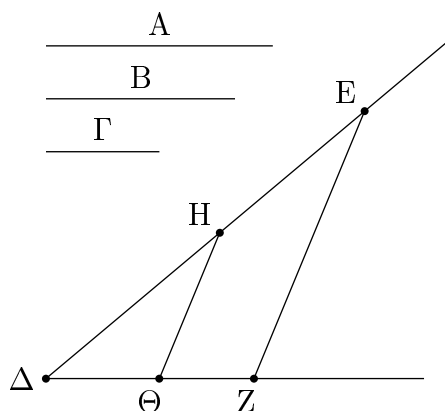
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ $A\Delta E$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔE ἤκται ἡ $B\Gamma$, ἀνάλογόν ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν ΓE . ἴση δὲ ἡ $B\Delta$ τῇ AG . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ AG πρὸς τὴν ΓE .

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB , AG τρίτη ἀνάλογον αὐταῖς προσεύρηται ἡ ΓE : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.12

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ A , B , Γ : δεῖ δὴ τῶν A , B , Γ τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔE , ΔZ γωνίαν περιέχουσαι [τυχοῦσαν] τὴν ὑπὸ $E\Delta Z$: καὶ κείσθω τῇ μὲν A ἴση ἡ ΔH , τῇ δὲ B ἴση ἡ HE , καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ $\Delta\Theta$: καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς $H\Theta$ παράλληλος αὐτῇ ἦχθω διὰ τοῦ E ἡ EZ .

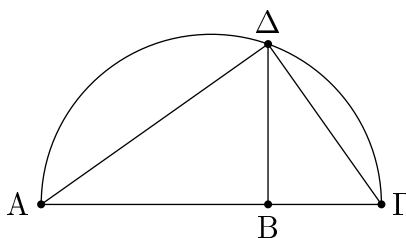
Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔEZ παρὰ μίαν τὴν EZ ἦχται ἡ $H\Theta$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔH πρὸς τὴν HE , οὕτως ἡ $\Delta\Theta$ πρὸς τὴν ΘZ . ἴση δὲ ἡ μὲν ΔH τῇ A , ἡ δὲ HE τῇ B , ἡ δὲ $\Delta\Theta$ τῇ Γ : ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘZ .

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν A , B , Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘZ : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.13

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AB , $B\Gamma$: δεῖ δὴ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσην ἀνάλογον προσευρεῖν.



Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AG ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta\Gamma$, καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ B σημείου τῇ AG εὐθείᾳ πρὸς ὀρθᾶς ἡ $B\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, $\Delta\Gamma$.

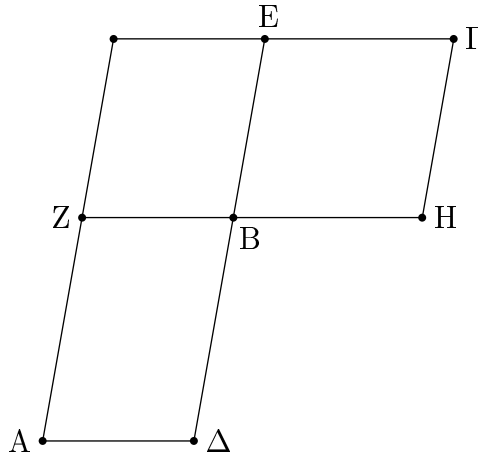
Ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$, ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογώνιῳ τριγώνῳ τῷ $A\Delta\Gamma$ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦχται ἡ ΔB , ἡ ΔB ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν AB , $B\Gamma$ μέση ἀνάλογόν ἐστίν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν AB , $B\Gamma$ μέση ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΔB : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.14

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ AB , $BΓ$ ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ B γωνίας, καὶ κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας αἱ $ΔB$, BE : ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ZB , BH . λέγω, ὅτι τῶν AB , $BΓ$ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς



ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ .

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ ZE παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ZE , ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ZE , οὕτως τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE . ἀλλ' ὡς μὲν τὸ AB πρὸς τὸ ZE , οὕτως ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , ὡς δὲ τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE , οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ : καὶ ὡς ἄρα ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ . τῶν ἄρα AB , $BΓ$ παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ : λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , οὕτως ἢ HB πρὸς τὴν BZ , ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν BE , οὕτως τὸ AB παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἢ HB πρὸς τὴν BZ , οὕτως τὸ $BΓ$ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZE παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ AB πρὸς τὸ ZE , οὕτως τὸ $BΓ$ πρὸς τὸ ZE : ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AB παραλληλόγραμμον τῷ $BΓ$ παραλληλόγραμμῳ.

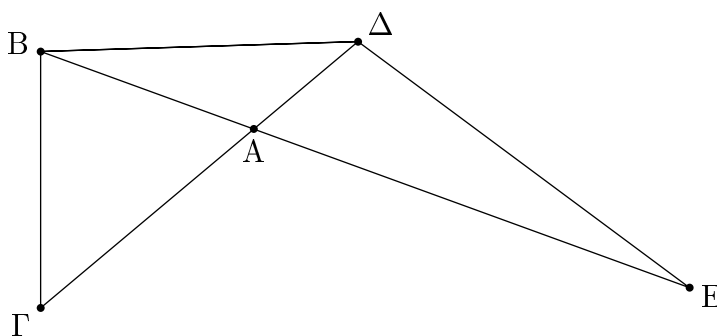
Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.15

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, $A\Delta E$ μίαν μιᾶ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ τῆς ὑπὸ ΔAE : λέγω, ὅτι τῶν $AB\Gamma$, $A\Delta E$ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τουτέστιν, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB .

Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓA τῆς $A\Delta$: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ EA τῆς AB . καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$.



Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Delta E$ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ $BA\Delta$, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓAB τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $EA\Delta$ τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓAB πρὸς τὸ $BA\Delta$, οὕτως ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, ὡς δὲ τὸ $EA\Delta$ πρὸς τὸ $BA\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB . καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB . τῶν $AB\Gamma$, $A\Delta E$ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

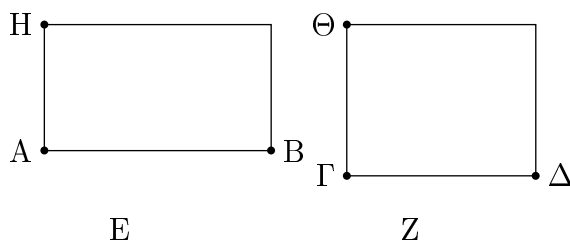
Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονήθασαν αἱ πλευραὶ τῶν $AB\Gamma$, $A\Delta E$ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB : λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $A\Delta E$ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς $B\Delta$, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AB , ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ EA πρὸς τὴν AB , οὕτως τὸ $EA\Delta$ τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον, ὡς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $EA\Delta$ τρίγωνον πρὸς τὸ $BA\Delta$ τρίγωνον. ἐκάτερον ἄρα τῶν $AB\Gamma$, $EA\Delta$ πρὸς τὸ $BA\Delta$ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ [τρίγωνον] τῷ $EA\Delta$ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾶ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: καὶ ὧν μίαν μιᾶ ἴσην ἔχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἐκεῖνα ἴσα ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.16

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ: καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογώνιῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ AB , $\Gamma\Delta$, E , Z , ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z : λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἦχθωσαν [γὰρ] ἀπὸ τῶν A , Γ σημείων ταῖς AB , $\Gamma\Delta$ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ AH , $\Gamma\Theta$, καὶ κείσθω τῇ μὲν Z ἴση ἡ $A\Gamma$, τῇ δὲ E ἴση ἡ $\Gamma\Theta$. καὶ συμπληρώσθω τὰ BH , $\Delta\Theta$ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z , ἴση δὲ ἡ μὲν E τῇ $\Gamma\Theta$, ἡ δὲ Z τῇ AH , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὴν AH . τῶν BH , $\Delta\Theta$ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὦν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ BH παραλληλόγραμμον τῷ $\Delta\Theta$ παραλληλόγραμμῳ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν BH τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z : ἴση γὰρ ἡ AH τῇ Z : τὸ δὲ $\Delta\Theta$ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E : ἴση γὰρ ἡ E τῇ $\Gamma\Theta$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AB , Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

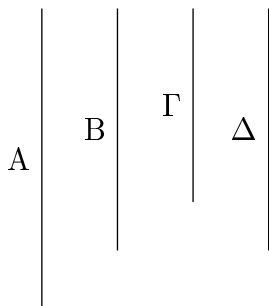
Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ: λέγω, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσσονται, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , Z ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν AB , Z τὸ BH : ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ AH τῇ Z : τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, E τὸ $\Delta\Theta$: ἴση γὰρ ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ E : τὸ ἄρα BH ἴσον ἐστὶ τῷ $\Delta\Theta$. καὶ ἐστὶν ἰσογώνια. τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὴν AH . ἴση δὲ ἡ μὲν $\Gamma\Theta$ τῇ E , ἡ δὲ AH τῇ Z : ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ E πρὸς τὴν Z .

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ: καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.17

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ: καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἢ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσσονται.



Ἐστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἰ A, B, Γ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ : λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B τετραγώνῳ.

Κείσθω τῆ B ἴση ἡ Δ .

Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ , ἴση δὲ ἡ B τῆ Δ , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , ἡ Δ πρὸς τὴν Γ . ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ . ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ τὸ ἀπὸ τῆς B ἐστὶν: ἴση γὰρ ἡ B τῆ Δ : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς B : λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ .

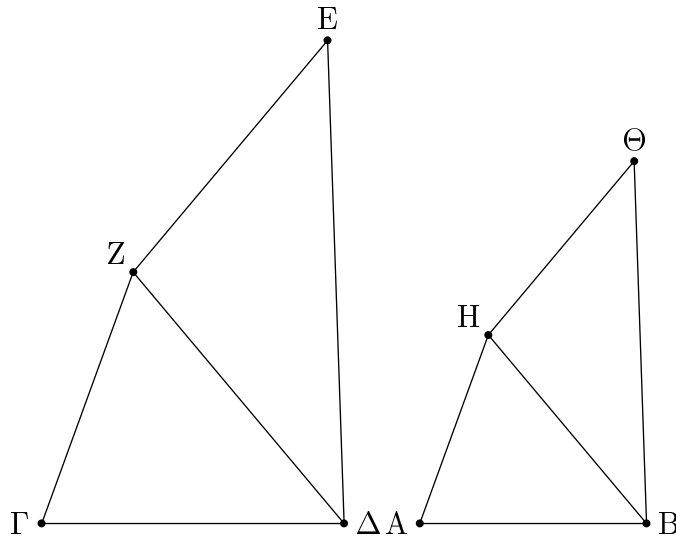
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς B τὸ ὑπὸ τῶν B, Δ ἐστὶν: ἴση γὰρ ἡ B τῆ Δ : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν B, Δ . ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾗ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ . ἴση δὲ ἡ B τῆ Δ : ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Γ .

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ: καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾗ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.18

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓE : δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς AB εὐθείας τῷ ΓE εὐθυγράμμῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι.



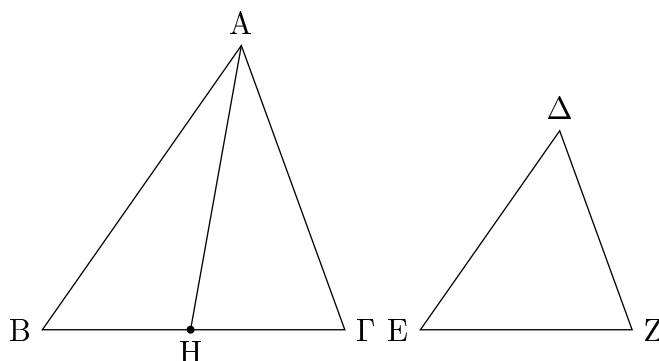
Ἐπεζεύχθω ἡ ΔZ , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς A, B τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ HAB , τῇ δὲ ὑπὸ $\Gamma\Delta Z$ ἴση ἢ ὑπὸ ABH . λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $\Gamma Z\Delta$ τῇ ὑπὸ AHB ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $Z\Gamma\Delta$ τρίγωνον τῷ HAB τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $Z\Delta$ πρὸς τὴν HB , οὕτως ἡ $Z\Gamma$ πρὸς τὴν HA , καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν AB . πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ BH εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς B, H τῇ μὲν ὑπὸ ΔZE γωνία ἴση ἢ ὑπὸ $BH\Theta$, τῇ δὲ ὑπὸ $Z\Delta E$ ἴση ἢ ὑπὸ $HB\Theta$. λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ E λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $Z\Delta E$ τρίγωνον τῷ $H\Theta B$ τριγώνῳ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $Z\Delta$ πρὸς τὴν HB , οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$ καὶ ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΘB . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ $Z\Delta$ πρὸς τὴν HB , οὕτως ἡ $Z\Gamma$ πρὸς τὴν HA καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν AB : καὶ ὡς ἄρα ἡ $Z\Gamma$ πρὸς τὴν HA , οὕτως ἢ τε $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ZE πρὸς τὴν $H\Theta$ καὶ ἔτι ἡ $E\Delta$ πρὸς τὴν ΘB . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $\Gamma Z\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ AHB , ἡ δὲ ὑπὸ ΔZE τῇ ὑπὸ $BH\Theta$, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓZE ὅλη τῇ ὑπὸ $AH\Theta$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ τῇ ὑπὸ $AB\Theta$ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ A ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ E τῇ πρὸς τῷ Θ . ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ τῷ ΓE : καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας αὐτῶν πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει: ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta$ εὐθύγραμμον τῷ ΓE εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓE ὅμοιον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ $A\Theta$: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.19

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἐστω ὅμοια τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἴσην ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ B γωνίαν τῇ πρὸς τῷ E , ὡς δὲ τὴν AB πρὸς τὴν



ΒΓ, ούτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥστε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ: λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ, ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἢ ΒΗ, ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ούτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ: καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, ούτως ἢ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, ούτως ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἀλλ' ὡς ἢ ΒΓ πρὸς ΕΖ, ούτως ἐστὶν ἢ ΕΖ πρὸς ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἢ ΑΒ πρὸς ΔΕ, ούτως ἢ ΕΖ πρὸς ΒΗ: τῶν ΑΒΗ, ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ὦν δὲ μίαν μιᾶ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ούτως ἢ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἢ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ πρὸς τὴν δευτέραν, ἢ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΕΖ. ὡς δὲ ἢ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ούτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον: καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ: καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἀλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

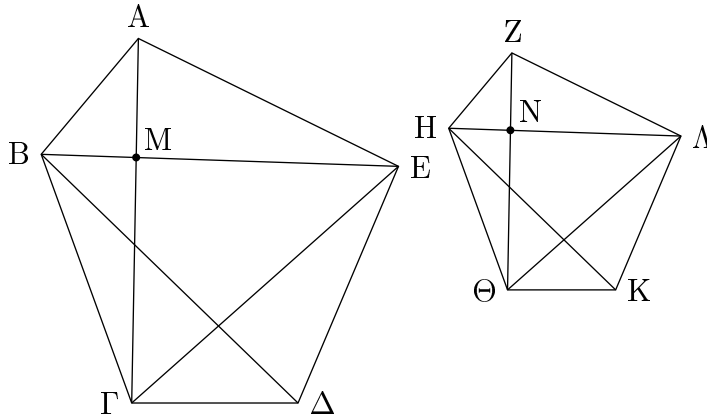
Corollary

Ἐκ δὲ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἐστὶν ὡς ἢ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, ούτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον [ἐπειπερ ἐδείχθη, ὡς ἢ ΓΒ πρὸς ΒΗ, ούτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τουτέστι τὸ ΔΕΖ]: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.20

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαφεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περὶ ἢ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν.

Ἐστω ὅμοια πολύγωνα τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ $ΑΒ$ τῇ $ΖΗ$: λέγω, ὅτι τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΖΗ$.



Ἐπεξεύχθωσαν αἱ $ΒΕ$, $ΕΓ$, $ΗΑ$, $ΑΘ$.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον τῷ $ΖΗΘΚΛ$ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΛ$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΕ$, οὕτως ἡ $ΗΖ$ πρὸς $ΖΛ$. ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνα ἐστὶ τὰ $ΑΒΕ$, $ΖΗΛ$ μίαν γωνίαν μιᾶ γωνία ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΛ$ τριγώνῳ: ὥστε καὶ ὅμοιον: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΕ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΗΛ$. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ὅλη τῇ ὑπὸ $ΖΗΘ$ ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΕΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΛΗΘ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΒΕ$, $ΖΗΛ$ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ $ΕΒ$ πρὸς $ΒΑ$, οὕτως ἡ $ΛΗ$ πρὸς $ΗΖ$, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς $ΒΓ$, οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΗΘ$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΕΒ$ πρὸς $ΒΓ$, οὕτως ἡ $ΛΗ$ πρὸς $ΗΘ$, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ $ΕΒΓ$, $ΛΗΘ$ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΛΗΘ$ τριγώνῳ: ὥστε καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ $ΕΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΛΗΘ$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον ὅμοιον ἐστὶ τῷ $ΛΘΚ$ τριγώνῳ. τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ $ΑΒΓΔΕ$, $ΖΗΘΚΛ$ εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διήρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τουτέστιν ὥστε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἠγούμενα μὲν εἶναι τὰ $ΑΒΕ$, $ΕΒΓ$, $ΕΓΔ$, ἐπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ $ΖΗΛ$, $ΛΗΘ$, $ΛΘΚ$, καὶ ὅτι τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ΖΗΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ $ΑΒ$ πρὸς τὴν $ΖΗ$.

Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΖΘ$. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΖΗΘ$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $ΑΒ$ πρὸς $ΒΓ$, οὕτως ἡ $ΖΗ$ πρὸς $ΗΘ$, ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῷ $ΖΗΘ$ τριγώνῳ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $ΒΑΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΘ$, ἡ δὲ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῇ ὑπὸ $ΗΘΖ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΒΑΜ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΗΖΝ$, ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΜ$ τῇ ὑπὸ $ΖΗΝ$ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΜΒ$ λοιπὴ τῇ ὑπὸ $ΖΝΗ$ ἴση ἐστὶν: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΜΒ$ τρίγωνον τῷ $ΖΝΗ$ τριγώνῳ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὸ $ΒΜΓ$ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ $ΗΝΘ$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ $ΑΜ$ πρὸς $ΜΒ$, οὕτως ἡ $ΖΝ$ πρὸς $ΝΗ$, ὡς

δὲ ἡ BM πρὸς MG , οὕτως ἡ HN πρὸς $NΘ$: ὥστε καὶ δι' ἴσου, ὡς ἡ AM πρὸς MG , οὕτως ἡ ZN πρὸς $NΘ$. ἀλλ' ὡς ἡ AM πρὸς MG , οὕτως τὸ ABM [τρίγωνον] πρὸς τὸ MBG , καὶ τὸ AME πρὸς τὸ EMG : πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ὡς ἄρα τὸ AMB τρίγωνον πρὸς τὸ BMG , οὕτως τὸ ABE πρὸς τὸ GBE . ἀλλ' ὡς τὸ AMB πρὸς τὸ BMG , οὕτως ἡ AM πρὸς MG : καὶ ὡς ἄρα ἡ AM πρὸς MG , οὕτως τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ EBG τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ZN πρὸς $NΘ$, οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AM πρὸς MG , οὕτως ἡ ZN πρὸς $NΘ$: καὶ ὡς ἄρα τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ BEG τρίγωνον, οὕτως τὸ ZHA τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον, καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον, οὕτως τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $HAΘ$ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν ἐπιζευχθεισῶν τῶν $BΔ$, HK , ὅτι καὶ ὡς τὸ BEG τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΗΘ$ τρίγωνον, οὕτως τὸ $ΕΓΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $ΛΘΚ$ τρίγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον, οὕτως τὸ EBG πρὸς τὸ $ΛΗΘ$, καὶ ἔτι τὸ $ΕΓΔ$ πρὸς τὸ $ΛΘΚ$, καὶ ὡς ἄρα ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον, οὕτως τὸ $ABΓΔΕ$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον. ἀλλὰ τὸ ABE τρίγωνον πρὸς τὸ ZHA τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν: τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. καὶ τὸ $ABΓΔΕ$ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ $ZHΘΚΛ$ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ AB ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ZH ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἰς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν: [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Corollary

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν [ὁμοίων] τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων: ὥστε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[

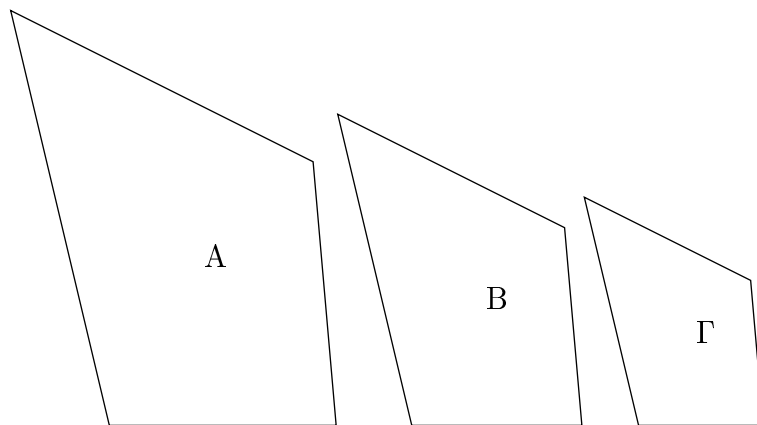
Corollary

Καὶ ἐὰν τῶν AB , ZH τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ , ἡ BA πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ AB πρὸς τὴν ZH . ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον ἢ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἡ AB πρὸς τὴν ZH : ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων: ὥστε καὶ καθόλου φανερόν, ὅτι, ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.]

VI.21

Τὰ τῶ αὐτῶ εὐθυγράμμω ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια.

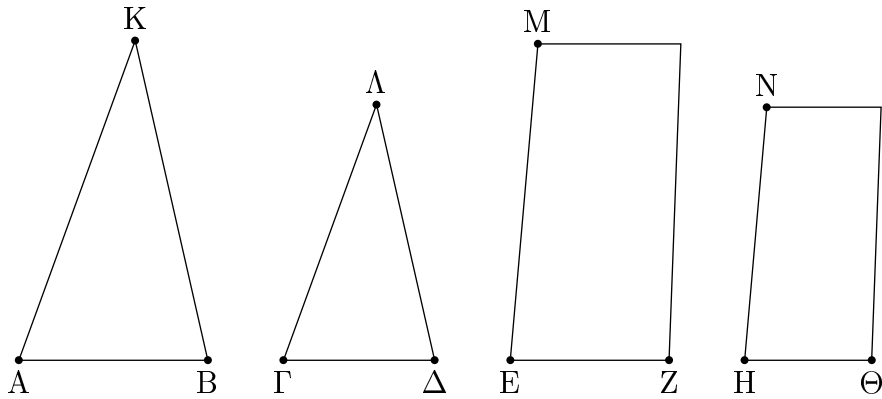
Ἐστω γὰρ ἑκάτερον τῶν A, B εὐθύγραμμων τῷ Γ ὁμοιον: λέγω, ὅτι καὶ τὸ A τῷ B ἔστιν ὁμοιον.



Ἐπεὶ γὰρ ὁμοιον ἔστι τὸ A τῷ Γ, ἰσογώνιον τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. πάλιν, ἐπεὶ ὁμοιον ἔστι τὸ B τῷ Γ, ἰσογώνιον τέ ἐστιν αὐτῷ καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. ἑκάτερον ἄρα τῶν A, B τῷ Γ ἰσογώνιον τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει [ὥστε καὶ τὸ A τῷ B ἰσογώνιον τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει]. ὁμοιον ἄρα ἔστι τὸ A τῷ B: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

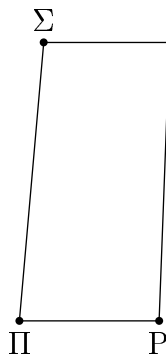
VI.22

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾤσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται: καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἦ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.



$\underline{\Xi}$ \underline{O}

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ $AB, \Gamma\Delta, EZ, H\Theta$, ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ μὲν τῶν $AB, \Gamma\Delta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ $KAB, \Lambda\Gamma\Delta$, ἀπὸ δὲ τῶν $EZ, H\Theta$ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ $MZ, N\Theta$: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ KAB πρὸς τὸ $\Lambda\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ MZ πρὸς τὸ $N\Theta$.



Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν $AB, \Gamma\Delta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ , τῶν δὲ $EZ, H\Theta$ τρίτη ἀνάλογον ἡ O . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ἡ AB πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως ἡ EZ πρὸς τὴν $H\Theta$, ὡς δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν Ξ , οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν O , δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν Ξ , οὕτως ἡ EZ

πρὸς τὴν Ο. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως [καί] τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ: λέγω, ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. εἰ γὰρ μὴ ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ἔστω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ, ΝΘ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ, ΓΔ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ, ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΠΡ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ, ΣΡ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν ΝΘ, ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ὁμοίον καὶ ὁμοίως κείμενον: ἴση ἄρα ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται: κὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐταὶ αἰ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[

Lemma

]

[Ἦτι δέ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾧ καὶ ὁμοία, αἰ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, δεῖξομεν οὕτως.

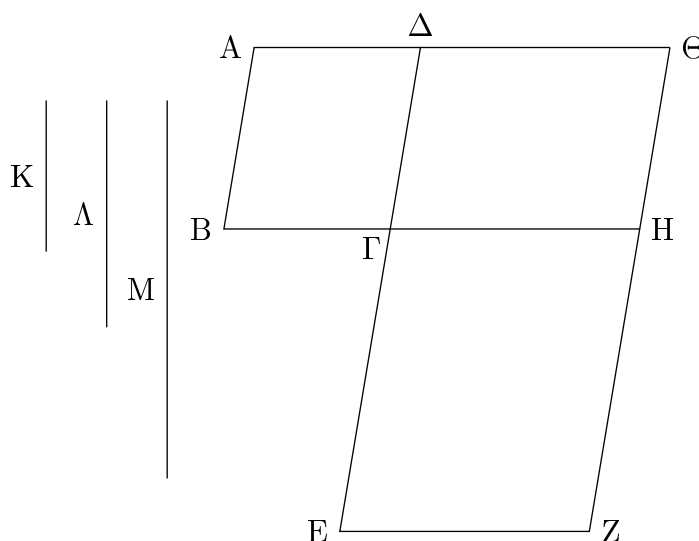
Ἔστω ἴσα καὶ ὁμοία εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ, ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσιν, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ, μείζων δὲ ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ, μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ: ὥστε καὶ τὸ ΡΣ μείζον ἐστὶ τοῦ ΘΝ. ἀλλὰ καὶ ἴσον: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ: ἴση ἄρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

VI.23

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ, ΓΖ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ: λέγω, ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.



Κείσθω γὰρ ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῆ ΓΗ: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῆ ΓΕ. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεΐα ἡ Κ, καὶ γερονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Α, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Μ.

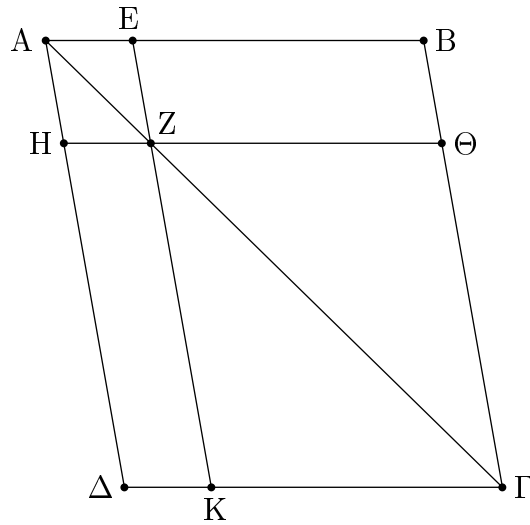
Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Α καὶ τῆς Α πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς Α λόγου καὶ τοῦ τῆς Α πρὸς Μ: ὥστε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Α, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Μ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Α, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Α πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν: καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.24

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περι τὴν διάμετρον παραλληλόγραμνα ὁμοιά ἐστι τῶ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις.

Ἐστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περι δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμνα ἔστω τὰ ΕΗ, ΘΚ: λέγω, ὅτι ἐκάτερον τῶν ΕΗ, ΘΚ παραλληλογράμμων ὁμοίον ἐστὶ ὅλῳ τῶ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις.



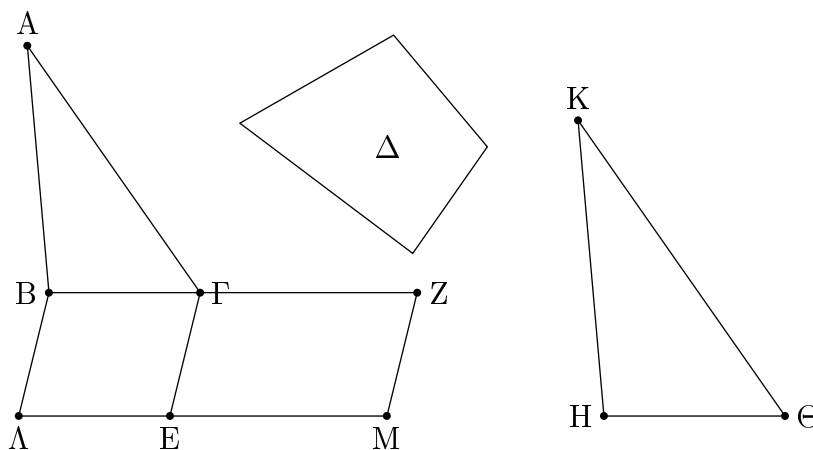
Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ $AB\Gamma$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν $B\Gamma$ ἤκται ἡ EZ , ἀνάλογόν ἐστίν ὡς ἡ BE πρὸς τὴν EA , οὕτως, ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZA . πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $A\Gamma\Delta$ παρὰ μίαν τὴν $\Gamma\Delta$ ἤκται ἡ ZH , ἀνάλογόν ἐστίν ὡς ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZA , οὕτως ἡ ΔH πρὸς τὴν HA . ἀλλ' ὡς ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZA , οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ BE πρὸς τὴν EA : καὶ ὡς ἄρα ἡ BE πρὸς τὴν EA , οὕτως ἡ ΔH πρὸς τὴν HA , καὶ συνθέντι ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς AE , οὕτως ἡ ΔA πρὸς AH , καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ EA πρὸς τὴν AH . τῶν ἄρα $AB\Gamma\Delta$, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ $BA\Delta$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστίν ἡ HZ τῆ $\Delta\Gamma$, ἴση ἐστίν ἡ μὲν ὑπὸ AZH γωνία τῆ ὑπὸ $\Delta\Gamma A$: καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν $A\Delta\Gamma$, AHZ ἡ ὑπὸ $\Delta A\Gamma$ γωνία: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta\Gamma$ τρίγωνον τῷ AHZ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $A\Gamma B$ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ AZE τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιον ἐστίν. ἀνάλογον ἄρα ἐστίν ὡς ἡ $A\Delta$ πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$, οὕτως ἡ AH πρὸς τὴν HZ , ὡς δὲ ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓA , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA , ὡς δὲ ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB , οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE , καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ ZE πρὸς τὴν EA . καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓA , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZA , ὡς δὲ ἡ $A\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB , οὕτως ἡ AZ πρὸς τὴν ZE , δι' ἴσου ἄρα ἐστίν ὡς ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς τὴν ΓB , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν ZE . τῶν ἄρα $AB\Gamma\Delta$, EH παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ EH παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ $K\Theta$ παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστίν: ἐκάτερον ἄρα τῶν EH , ΘK παραλληλογράμμων τῷ $AB\Gamma\Delta$ [παραλληλογράμμῳ] ὅμοιον ἐστίν. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστίν ὅμοια: καὶ τὸ EH ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘK παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστίν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.25

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.

Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, $\tilde{\omega}$ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ $AB\Gamma$, $\tilde{\omega}$ δὲ δεῖ ἴσον, τὸ Δ : δεῖ δὴ τῷ μὲν $AB\Gamma$ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι.



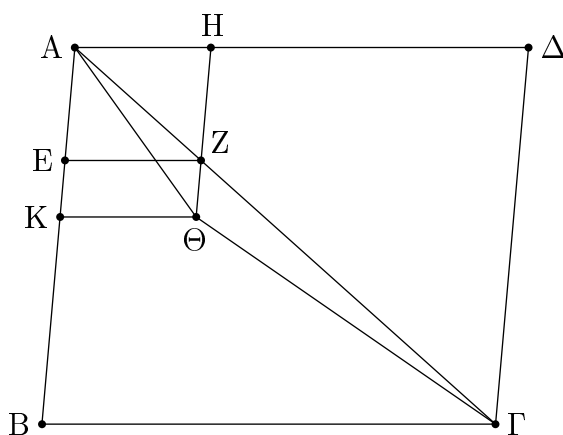
Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ μὲν τὴν $B\Gamma$ τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ BE , παρὰ δὲ τὴν ΓE τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓM ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $Z\Gamma E$, ἣ ἔστιν ἴση τῇ ὑπὸ $\Gamma B A$. ἐπ' εὐθείας ἄρα ἔστιν ἡ μὲν $B\Gamma$ τῇ ΓZ , ἡ δὲ AE τῇ EM . καὶ εἰλήφθω τῶν $B\Gamma$, ΓZ μέση ἀνάλογον ἡ $H\Theta$, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς $H\Theta$ τῷ $AB\Gamma$ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ $KH\Theta$.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $H\Theta$, οὕτως ἡ $H\Theta$ πρὸς τὴν ΓZ , ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ΓZ , οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον. καὶ ὡς ἄρα τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον, οὕτως τὸ BE παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον: ἐναλλάξ ἄρα ὡς τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ BE παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον πρὸς τὸ EZ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ BE παραλληλογράμμῳ: ἴσον ἄρα καὶ τὸ $KH\Theta$ τρίγωνον τῷ EZ παραλληλογράμμῳ. ἀλλὰ τὸ EZ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἔστιν ἴσον: καὶ τὸ $KH\Theta$ ἄρα τῷ Δ ἔστιν ἴσον. ἔστι δὲ τὸ $KH\Theta$ καὶ τῷ $AB\Gamma$ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ $AB\Gamma$ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ $KH\Theta$: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.26

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινήν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἔστι τῷ ὅλῳ.



Ἄπο γὰρ παραλληλογράμμου

τοῦ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον ἀφηρήσθω τὸ AZ ὅμοιον τῷ $AB\Gamma\Delta$ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΔAB : λέγω, ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τῷ AZ .

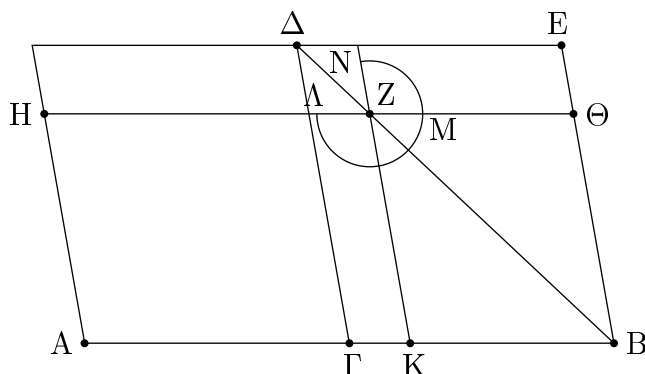
Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω [αὐτῶν] διάμετρος ἡ $A\Theta\Gamma$, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ HZ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ , καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν $A\Delta$, $B\Gamma$ παράλληλος ἡ ΘK .

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma\Delta$ τῷ KH , ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔA πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ HA πρὸς τὴν AK . ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $AB\Gamma\Delta$, EH καὶ ὡς ἡ ΔA πρὸς τὴν AB , οὕτως ἡ HA πρὸς τὴν AE : καὶ ὡς ἄρα ἡ HA πρὸς τὴν AK , οὕτως ἡ HA πρὸς τὴν AE . ἡ HA ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν AK , AE τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ AK ἢ ἐλάττων τῇ μείζονι: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐκ ἐστὶ περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ $AB\Gamma\Delta$ τῷ AZ : περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμον τῷ AZ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὁμοίον τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ἐστὶ τῷ ὅλῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.27

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἵδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κείμενοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφόμενῳ μέγιστόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον [παραλληλόγραμμον] ὅμοιον ὃν τῷ ἐλλείμματι.



Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ παραβελθήσθω παρὰ τὴν AB εὐθεῖαν τὸ $A\Delta$ παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΔB ἀναγραφέντι ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB , τουτέστι τῆς ΓB : λέγω, ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν AB παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἑλλειπόντων εἶδεσι [παραλληλογράμμοις] ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΔB μέγιστόν ἐστι τὸ $A\Delta$. παραβελθήσθω γὰρ παρὰ

τὴν AB εὐθεῖαν τὸ AZ παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ZB ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΔB : λέγω, ὅτι μείζον ἐστι τὸ $A\Delta$ τοῦ AZ .

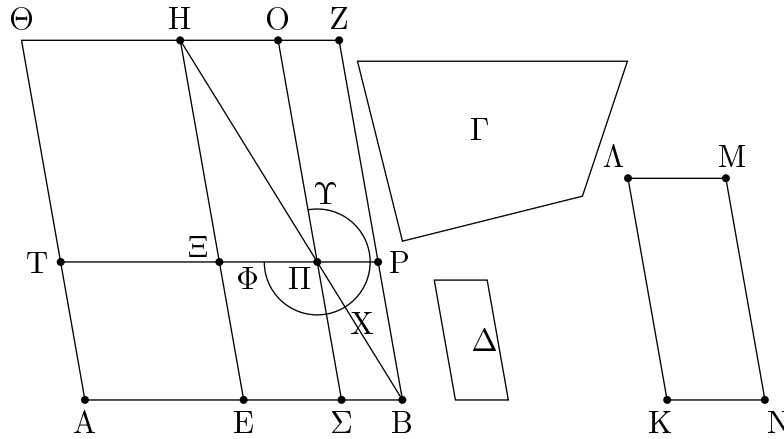
Ἐπεὶ γὰρ ὁμοῖον ἐστι τὸ ΔB παραλληλόγραμμον τῷ ZB παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτὴν εἰσι διάμετρον. ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔB , καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓZ τῷ ZE , κοινὸν δὲ τὸ ZB , ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Theta$ ὅλῳ τῷ KE ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ ΓH ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ $A\Gamma$ τῇ ΓB . καὶ τὸ $H\Gamma$ ἄρα τῷ EK ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓZ : ὅλον ἄρα τὸ AZ τῷ ΛMN γνώμονι ἐστὶν ἴσον: ὥστε τὸ ΔB παραλληλόγραμμον, τουτέστι τὸ $A\Delta$, τοῦ AZ παραλληλογράμμου μείζον ἐστὶν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἑλλειπόντων εἶδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθέν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.28

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθύγραμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἑλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι: δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον [ὃ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν] μὴ μείζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένου ὁμοίου τῷ ἑλλείμματι [τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ὃ δεῖ ὅμοιον ἑλλείπειν].



Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβαλεῖν, τὸ Γ μὴ μείζον [ὄν] τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς AB ἀναγεγραμμένου ὁμοίου τῷ ἐλλείμματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ: δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ.

Τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ ἀναγεγράψθω ἀπὸ τῆς EB τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ EBZH, καὶ συμπληρώσθω τὸ AH παραλληλόγραμμον.

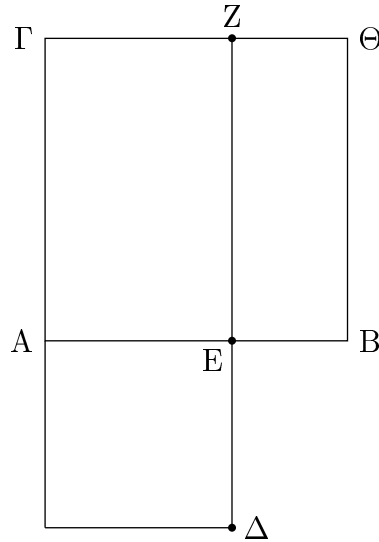
Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ AH τῷ Γ, γεγονότος ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν: παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ AH ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ HB ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. εἰ δὲ οὐ, μείζον ἔστω τὸ ΘΕ τοῦ Γ. ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ HB: μείζον ἄρα καὶ τὸ HB τοῦ Γ. ᾧ δὴ μείζον ἐστὶ τὸ HB τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ KLMN. ἀλλὰ τὸ Δ τῷ HB [ἐστίν] ὅμοιον: καὶ τὸ KM ἄρα τῷ HB ἐστίν ὅμοιον. ἔστω οὖν ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΑ τῇ HE, ἡ δὲ ΑΜ τῇ HZ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ HB τοῖς Γ, KM, μείζον ἄρα ἐστὶ τὸ HB τοῦ KM: μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν HE τῆς ΚΑ, ἡ δὲ HZ τῆς ΑΜ. κείσθω τῇ μὲν ΚΑ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΑΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον: ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ [τὸ ΗΠ] τῷ KM [ἀλλὰ τὸ KM τῷ HB ὁμοίον ἐστίν]. καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ HB ὁμοίον ἐστίν: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὸ ΗΠ τῷ HB. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράψθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ BH τοῖς Γ, KM, ὣν τὸ ΗΠ τῷ KM ἐστίν ἴσον, λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΧΦ γνῶμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ OP τῷ ΞΣ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΠΒ: ὅλον ἄρα τὸ OB ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ TE ἐστίν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ AE πλευρᾶ τῇ EB ἐστίν ἴση: καὶ τὸ TE ἄρα τῷ OB ἐστίν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΞΣ: ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΦΧΥ γνῶμονί ἐστίν ἴσον. ἀλλ' ὁ ΦΧΥ γνῶμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος: καὶ τὸ ΤΣ ἄρα τῷ Γ ἐστίν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν AB τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλείπον εἶδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ [ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὁμοίον ἐστίν]: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.30

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.



Ἐστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ AB : δεῖ δὴ τὴν AB εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

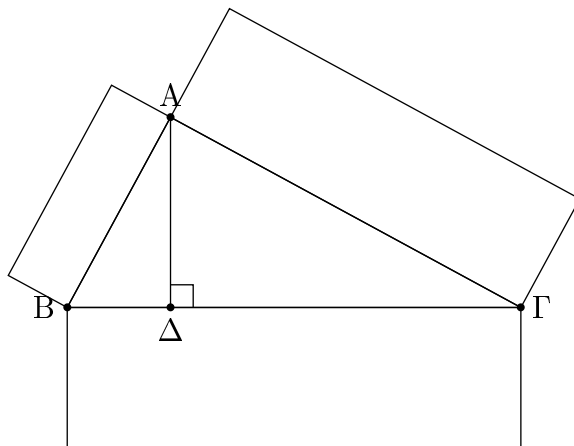
Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $BΓ$, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν $ΑΓ$ τῇ $BΓ$ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ $ΓΔ$ ὑπερβάλλον εἶδει τῷ $ΑΔ$ ὁμοίῳ τῷ $BΓ$.

Τετράγωνον δέ ἐστι τὸ $BΓ$: τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $ΑΔ$. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ $BΓ$ τῷ $ΓΔ$, κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ $ΓΕ$: λοιπὸν ἄρα τὸ BZ λοιπῷ τῷ $ΑΔ$ ἐστὶν ἴσον. ἐστὶ δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον: τῶν BZ , $ΑΔ$ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν $EΔ$, οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB . ἴση δὲ ἡ μὲν ZE τῇ AB , ἡ δὲ $EΔ$ τῇ AE . ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE , οὕτως ἡ AE πρὸς τὴν EB . μείζων δὲ ἡ AB τῆς AE : μείζων ἄρα καὶ ἡ AE τῆς EB .

Ἡ ἄρα AB εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ E , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημά ἐστι τὸ AE : ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

VI.31

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτενούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.



Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ $BA\Gamma$ γωνίαν: λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

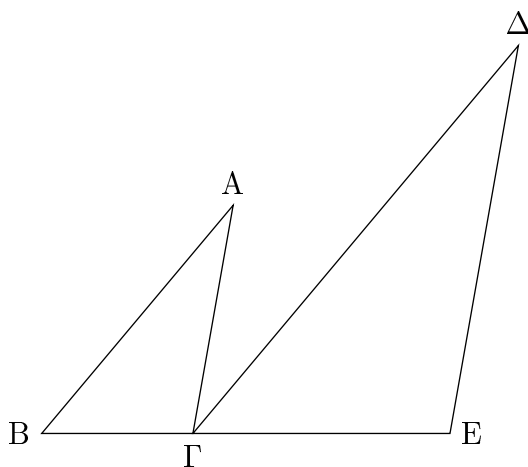
Ἦχθω κάθετος ἡ $A\Delta$.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ $AB\Gamma$ ἀπὸ τῆς πρὸς τῷ A ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ βάσιν κάθετος ἤχεται ἡ $A\Delta$, τὰ $AB\Delta$, $A\Delta\Gamma$ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὁμοία ἐστὶ τῷ τε ὅλῳ τῷ $AB\Gamma$ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τῷ $AB\Delta$, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ὡς ἄρα ἡ ΓB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓB εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BA τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓA . ὥστε καὶ ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὰς $B\Delta$, $\Delta\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ τὰ ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. ἴση δὲ ἡ $B\Gamma$ ταῖς $B\Delta$, $\Delta\Gamma$: ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν BA , $A\Gamma$ εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσας πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιχοῦσῶν πλευρῶν εἶδεσι τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.32

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῆ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυοῖς πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγῶνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσσονται.



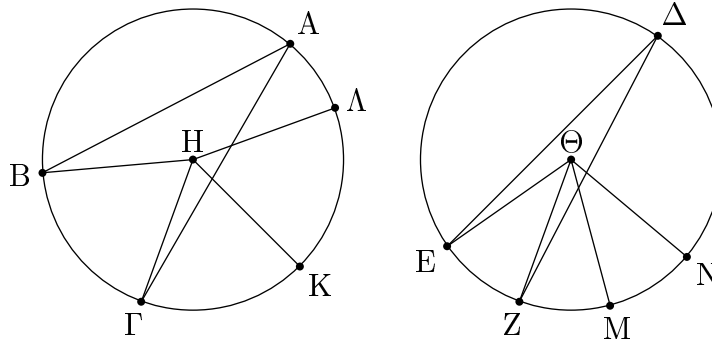
Ἐστω δύο τρίγωνα τὰ ABG , ΔGE τὰς δύο πλευρὰς τὰς BA , AG ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔG , ΔE ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν AB πρὸς τὴν AG , οὕτως τὴν ΔG πρὸς τὴν ΔE , παράλληλον δὲ τὴν μὲν AB τῇ ΔG , τὴν δὲ AG τῇ ΔE : λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ BG τῇ GE .

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΔG , καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ AG , αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ BAG , $AG\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ τῇ ὑπὸ $AG\Delta$ ἴση ἐστίν. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ BAG τῇ ὑπὸ $\Gamma\Delta E$ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ABG , ΔGE μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ A μιᾶ γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν BA πρὸς τὴν AG , οὕτως τὴν $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν ΔE , ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABG τρίγωνον τῷ ΔGE τριγώνῳ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABG γωνία τῇ ὑπὸ ΔGE . ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AG\Delta$ τῇ ὑπὸ BAG ἴση: ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ AGE δυσὶ ταῖς ὑπὸ ABG , BAG ἴση ἐστίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ AGB : αἱ ἄρα ὑπὸ AGE , AGB ταῖς ὑπὸ BAG , AGB , GBA ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ BAG , ABG , AGB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: καὶ αἱ ὑπὸ AGE , AGB ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δὴ τινὶ εὐθείᾳ τῇ AG καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ G δύο εὐθεῖαι αἱ BG , GE μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ AGE , AGB δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ BG τῇ GE .

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα ὥστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ' εὐθείας ἔσσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VI.33

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐὰν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐὰν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὡς βεβηκυῖαι.



Ἐστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ $ABΓ$, $ΔEZ$, καὶ πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς H , $Θ$ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ BHG , $EΘZ$, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ $BAΓ$, $EΔZ$: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν, οὕτως ἢ τε ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $EΘZ$ καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $EΔZ$.

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν $BΓ$ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἐξῆς ὁσαυδηποτοῦν αἱ $ΓK$, $KΛ$, τῇ δὲ EZ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσαυδηποτοῦν αἱ ZM , MN , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ HK , HL , $ΘM$, $ΘN$.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ $BΓ$, $ΓK$, $KΛ$ περιφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ BHG , $ΓHK$, KHL γωνίαι ἀλλήλαις: ὁσαυταπλασίῳν ἄρα ἐστὶν ἡ BL περιφέρεια τῆς $BΓ$, τοσαυταπλασίῳν ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BHL γωνία τῆς ὑπὸ BHG . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαυταπλασίῳν ἐστὶν ἡ NE περιφέρεια τῆς EZ , τοσαυταπλασίῳν ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $NΘE$ γωνία τῆς ὑπὸ $EΘZ$. εἰ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ BL περιφέρεια τῇ EN περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ BHL τῇ ὑπὸ $EΘN$, καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ BL περιφέρεια τῆς EN περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BHL γωνία τῆς ὑπὸ $EΘN$, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν $BΓ$, EZ , δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ BHG , $EΘZ$, εἴληπται τῆς μὲν $BΓ$ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ BHG γωνίας ἰσάκεις πολλαπλασίῳν ἢ τε BL περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ BHL γωνία, τῆς δὲ EZ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ $EΘZ$ γωνίας ἢ τε EN περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ $EΘN$ γωνία. καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ BL περιφέρεια τῆς EN περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ BHL γωνία τῆς ὑπὸ $EΘN$ γωνίας, καὶ εἰ ἴση, ἴση, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $BΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ , οὕτως ἡ ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $EΘZ$. ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $EΘZ$, οὕτως ἡ ὑπὸ $BAΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $EΔZ$: διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας. καὶ ὡς ἄρα ἡ $BΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν EZ περιφέρειαν, οὕτως ἢ τε ὑπὸ BHG γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $EΘZ$ καὶ ἡ ὑπὸ $BAΓ$ πρὸς τὴν ὑπὸ $EΔZ$.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὧσι βεβηκυῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book VII

Definitions

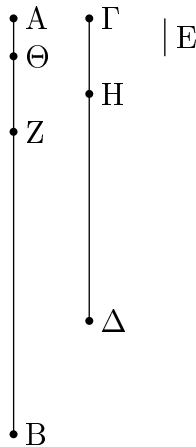
1. Μονάς ἐστίν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.
2. Ἄριθμός δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος.
3. Μέρος ἐστίν ἀριθμός ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρή τὸν μείζονα.
4. Μέρη δέ, ὅταν μὴ καταμετρή.
5. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάσσονος, ὅταν καταμετρηῖται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.
6. Ἄρτιος ἀριθμός ἐστίν ὁ δίχα διαιρούμενος.
7. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ [ὁ] μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.
8. Ἄρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστίν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.
9. Ἄρτιάκις δὲ περισσὸς ἐστίν ὁ ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν. [Περισσάκις ἀρτιός ἐστίν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν].
10. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός ἐστίν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.
11. Πρῶτος ἀριθμός ἐστίν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.
12. Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
13. Σύνθετος ἀριθμός ἐστίν ὁ ἀριθμῷ τινι μετρούμενος.
14. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.
15. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν λέγεται, ὅταν, ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες, τοσαυτάκις συντεθῆ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.
16. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.
17. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεός ἐστίν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.
18. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστίν ὁ ἰσάκις ἴσος ἢ [ὁ] ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

19. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις ἢ [ὁ] ὑπὸ τριῶν ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.
20. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ἢ πολλαπλάσιος ἢ τὸ αὐτὸ μέρος ἢ τὰ αὐτὰ μέρη ᾖσιν.
21. Ὅμοιοι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.
22. Τέλεια ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν.

Propositions

VII.1

Δύο ἀριθμῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρηῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσσονται.



Δύο γὰρ [ἀνίσων] ἀριθμῶν τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς: λέγω, ὅτι οἱ AB , $\Gamma\Delta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τουτέστιν ὅτι τοὺς AB , $\Gamma\Delta$ μονὰς μόνη μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ AB , $\Gamma\Delta$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ E : καὶ ὁ μὲν $\Gamma\Delta$ τὸν BZ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ZA , ὁ δὲ AZ τὸν ΔH μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $H\Gamma$, ὁ δὲ $H\Gamma$ τὸν $Z\Theta$ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘA .

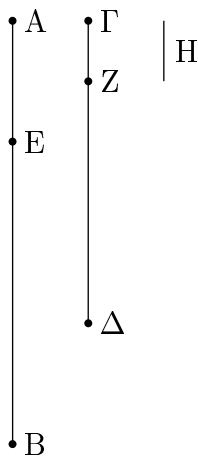
Ἐπεὶ οὖν ὁ E τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ, ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BZ μετρεῖ καὶ ὁ E ἄρα τὸν BZ μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν BA : καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AZ μετρήσει. ὁ δὲ AZ τὸν ΔH μετρεῖ: καὶ ὁ E ἄρα τὸν ΔH μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν $\Delta\Gamma$: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓH μετρήσει. ὁ δὲ ΓH τὸν $Z\Theta$ μετρεῖ: καὶ ὁ E ἄρα τὸν $Z\Theta$ μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ZA : καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν $A\Theta$ μονάδα μετρήσει ἀριθμὸς ὢν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς AB , $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμὸς: οἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.2

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ AB , $\Gamma\Delta$. δεῖ δὴ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῶν $\Gamma\Delta$, AB κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον: οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ $\Gamma\Delta$ τὸν $\Gamma\Delta$ μετρήσει.



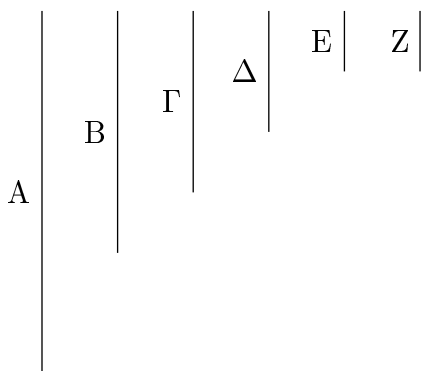
Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB , τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειψθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειψθήσεται: εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ AB , $\Gamma\Delta$ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειψθήσεται τις ἄρα ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν $\Gamma\Delta$ τὸν BE μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν EA , ὁ δὲ EA τὸν ΔZ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν $Z\Gamma$, ὁ δὲ ΓZ τὸν AE μετρεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓZ τὸν AE μετρεῖ, ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν: καὶ ὅλον ἄρα τὸν $\Gamma\Delta$ μετρήσει. ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BE μετρεῖ: καὶ ὁ ΓZ ἄρα τὸν BE μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EA : καὶ ὅλον ἄρα τὸν BA μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν $\Gamma\Delta$: ὁ ΓZ ἄρα τοὺς AB , $\Gamma\Delta$ μετρεῖ. ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὁ ΓZ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς AB , $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓZ . μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ H . καὶ ἐπεὶ ὁ H τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ, ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BE μετρεῖ, καὶ ὁ H ἄρα τὸν BE μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν BA : καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει. ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ: καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν $\Delta\Gamma$: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα τοὺς AB , $\Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓZ : ὁ ΓZ ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον: [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.3

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.



Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, Γ: δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν A, B τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ: ὁ δὲ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρεῖτω πρότερον: μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς A, B: ὁ Δ ἄρα τοὺς A, B, Γ μετρεῖ: ὁ Δ ἄρα τῶν A, B, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δὲ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ Δ τῶν A, B, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς A, B, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ E. ἐπεὶ οὖν ὁ E τοὺς A, B, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς A, B ἄρα μετρήσει: καὶ τὸ τῶν A, B ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ: ὁ E ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς A, B, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ: ὁ Δ ἄρα τῶν A, B, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

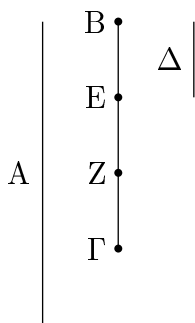
Μὴ μετρεῖτω δὲ ὁ Δ τὸν Γ: λέγω πρώτον, ὅτι οἱ Γ, Δ οὐκ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B, Γ οὐκ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. ὁ δὲ τοὺς A, B, Γ μετρῶν καὶ τοὺς A, B μετρήσει, καὶ τὸ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸν Δ μετρήσει: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ: τοὺς Δ, Γ ἄρα ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει: οἱ Δ, Γ ἄρα οὐκ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους. εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ E. καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς A, B μετρεῖ, καὶ ὁ E ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ: ὁ E ἄρα τοὺς A, B, Γ μετρεῖ: ὁ E ἄρα τῶν A, B, Γ κοινὸν ἐστὶ μέτρον. λέγω δὲ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ E τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς A, B, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ E. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Z. καὶ ἐπεὶ ὁ Z τοὺς A, B, Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς A, B μετρεῖ: καὶ τὸ τῶν A, B ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ: ὁ Z ἄρα τὸν Δ μετρεῖ: μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ: ὁ

Z ἄρα τοὺς Δ, Γ μετρεῖ: καὶ τὸ τῶν Δ, Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν Δ, Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ E : ὁ Z ἄρα τὸν E μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς A, B, Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ E : ὁ E ἄρα τῶν A, B, Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.4

Ἄπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἦτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $A, B\Gamma$, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ $B\Gamma$: λέγω, ὅτι ὁ $B\Gamma$ τοῦ A ἦτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη.



Οἱ $A, B\Gamma$ γὰρ ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὐ. ἔστωσαν πρότερον οἱ $A, B\Gamma$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. διαιρεθέντος δὴ τοῦ $B\Gamma$ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας ἔσται ἐκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ $B\Gamma$ μέρος τι τοῦ A : ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ τοῦ A .

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ $A, B\Gamma$ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους: ὁ δὴ $B\Gamma$ τὸν A ἦτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. εἰ μὲν οὖν ὁ $B\Gamma$ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ τοῦ A . εἰ δὲ οὐ, εἰλήφθω τῶν $A, B\Gamma$ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ , καὶ διηρήσθω ὁ $B\Gamma$ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς $BE, EZ, Z\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ A : ἴσος δὲ ὁ Δ ἐκάστῳ τῶν $BE, EZ, Z\Gamma$: καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν $BE, EZ, Z\Gamma$ τοῦ A μέρος ἐστίν: ὥστε μέρη ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ τοῦ A .

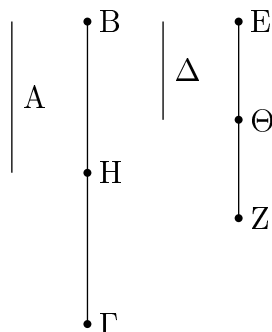
Ἄπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἦτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.5

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾗ, καὶ ἕτερος ἐτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ᾗ, καὶ συναμφοτέρος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἐνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A [ἀριθμοῦ] τοῦ $B\Gamma$

μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἐτέρου τοῦ EZ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ A τοῦ $B\Gamma$: λέγω, ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ A, Δ συναμφοτέρου τοῦ $B\Gamma, EZ$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ A τοῦ $B\Gamma$.

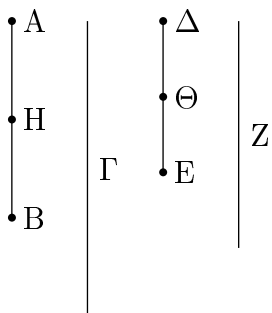


Ἐπεὶ γάρ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ $B\Gamma$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ EZ , ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ $B\Gamma$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοὶ εἰσὶ καὶ ἐν τῷ EZ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ . διηγήσθω ὁ μὲν $B\Gamma$ εἰς τοὺς τῷ A ἴσους τοὺς BH , $H\Gamma$, ὁ δὲ EZ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς $E\Theta$, ΘZ : ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH , $H\Gamma$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$, ΘZ . καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν BH τῷ A , ὁ δὲ $E\Theta$ τῷ Δ , καὶ οἱ BH , $E\Theta$ ἄρα τοῖς A , Δ ἴσοι. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ $H\Gamma$, ΘZ τοῖς A , Δ . ὅσοι ἄρα [εἰσὶν] ἐν τῷ $B\Gamma$ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ A , τοσοῦτοὶ εἰσὶ καὶ ἐν τοῖς $B\Gamma$, EZ ἴσοι τοῖς A , Δ . ὅσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ τοῦ A , τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ $B\Gamma$, EZ συναμφοτέρου τοῦ A , Δ . ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ $B\Gamma$, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ A , Δ συναμφοτέρου τοῦ $B\Gamma$, EZ : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.6

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ῆ, καὶ ἕτερος ἐτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ῆ, καὶ συναμφοτέρος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ὅπερ ὁ εἰς τοῦ ἐνός.

Ἀριθμὸς γάρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔE ἐτέρου τοῦ Z τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ : λέγω, ὅτι καὶ συναμφοτέρος ὁ AB , ΔE συναμφοτέρου τοῦ Γ , Z τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ AB τοῦ Γ .



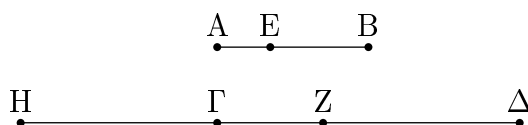
Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ , τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ ΔE τοῦ Z , ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ , τοσαυτὰ ἐστὶ καὶ ἐν τῷ ΔE μέρη τοῦ Z . διηγήσθω ὁ μὲν AB εἰς

τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH , HB , ὁ δὲ ΔE εἰς τὰ τοῦ Z μέρη τὰ $\Delta\Theta$, ΘE : ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , HB τῷ πλῆθει τῶν $\Delta\Theta$, ΘE . καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $\Delta\Theta$ τοῦ Z , ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ AH , $\Delta\Theta$ συναμφοτέρου τοῦ Γ , Z . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ HB τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ HB , ΘE συναμφοτέρου τοῦ Γ , Z . ἄ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ , τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ AB , ΔE συναμφοτέρου τοῦ Γ , Z : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.7

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ $\Gamma\Delta$ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓZ : λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$.



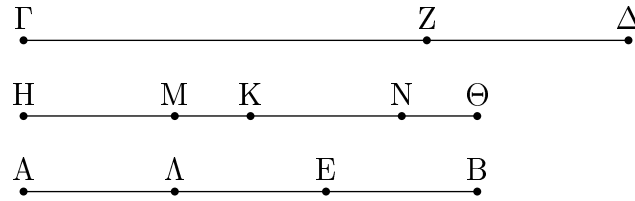
Ὅ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ EB τοῦ ΓH . καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ EB τοῦ ΓH , ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ HZ . ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$: ὃ ἄρα μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ HZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τοῦ $\Gamma\Delta$: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ HZ τῷ $\Gamma\Delta$. κοινὸς ἀφηγήσθω ὁ ΓZ : λοιπὸς ἄρα ὁ $H\Gamma$ λοιπῶ τῷ $Z\Delta$ ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος [ἐστὶ] καὶ ὁ EB τοῦ $H\Gamma$, ἴσος δὲ ὁ $H\Gamma$ τῷ $Z\Delta$, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ EB τοῦ $Z\Delta$. ἀλλὰ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ AE τοῦ ΓZ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ $\Gamma\Delta$: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.8

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος, καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ $\Gamma\Delta$ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ AE ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓZ : λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB λοιποῦ τοῦ $Z\Delta$ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ AB ὅλου τοῦ $\Gamma\Delta$.

Κείσθω γὰρ τῷ AB ἴσος ὁ $H\Theta$. ἄ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ $H\Theta$ τοῦ $\Gamma\Delta$, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓZ .



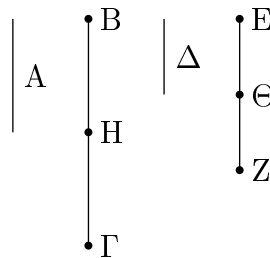
διηρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ, ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ, ΛΕ: ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ, ΚΘ τῶ πλῆθει τῶν ΑΛ, ΛΕ. καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. κείσθω τῶ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. πάλιν ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΛ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ, μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΕΛ. κείσθω τῶ ΕΛ ἴσος ὁ ΚΝ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ: καὶ συναμφοτέρος ἄρα ὁ ΜΚ, ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἄπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΓΔ. ἴσος δὲ συναμφοτέρος μὲν ὁ ΜΚ, ΝΘ τῶ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῶ ΒΑ: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἄπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.9

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ἦ, καὶ ἕτερος ἐτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἦ, καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται ἢ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἐτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ: λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ ἢ μέρη.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ



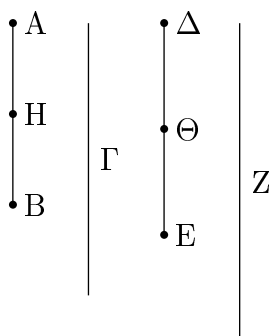
καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ, ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῶ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῶ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῶ ΕΖ ἴσοι τῶ Δ. διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῶ Α ἴσους τοὺς ΒΗ, ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς

τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς $E\Theta$, ΘZ : ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH , $H\Gamma$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$, ΘZ .

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ BH , $H\Gamma$ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ $E\Theta$, ΘZ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν BH , $H\Gamma$ τῷ πλῆθει τῶν $E\Theta$, ΘZ , ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ BH τοῦ $E\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $H\Gamma$ τοῦ ΘZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη: ὥστε καὶ ὁ μέρος ἐστὶν ὁ BH τοῦ $E\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφοτέρος ὁ $B\Gamma$ συναμφοτέρου τοῦ EZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἴσος δὲ ὁ μὲν BH τῷ A , ὁ δὲ $E\Theta$ τῷ Δ : ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $B\Gamma$ τοῦ EZ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.10

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ἦ, καὶ ἕτερος ἐτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἦ, καὶ ἐναλλάξ, ἅ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

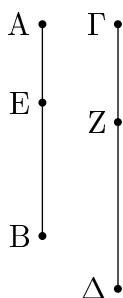


Ἀριθμὸς γὰρ ὁ AB ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ ΔE ἐτέρου τοῦ Z τὰ αὐτὰ μέρη: λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ, ἅ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΔE ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Z ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἐπεὶ γάρ, ἅ μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ Γ , τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔE τοῦ Z , ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ AB μέρη τοῦ Γ , τσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔE μέρη τοῦ Z . διηρήσθω ὁ μὲν AB εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ AH , HB , ὁ δὲ ΔE εἰς τὰ τοῦ Z μέρη τὰ $\Delta\Theta$, ΘE : ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν AH , HB τῷ πλῆθει τῶν $\Delta\Theta$, ΘE . καὶ ἐπεὶ, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ Γ , τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ $\Delta\Theta$ τοῦ Z , καὶ ἐναλλάξ, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ $\Delta\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Z ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ, ὁ μέρος ἐστὶν ὁ HB τοῦ ΘE ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Z ἢ τὰ αὐτὰ μέρη: ὥστε καὶ [ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ $\Delta\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ HB τοῦ ΘE ἢ τὰ αὐτὰ μέρη: καὶ ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ $\Delta\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AB τοῦ ΔE ἢ τὰ αὐτὰ μέρη: ἀλλ' ὁ μέρος ἐστὶν ὁ AH τοῦ $\Delta\Theta$ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Z ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ] ἅ [ἄρα] μέρη ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΔE ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Z ἢ τὸ αὐτὸ μέρος: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.11

Ἐὰν ἦ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα, καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον.



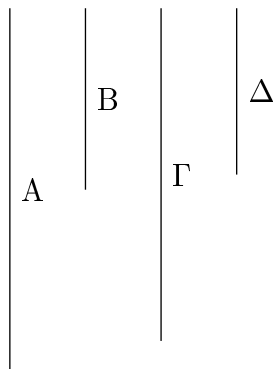
Ἐστω ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθεὶς ὁ AE πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ: λέγω, ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ EB πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἔστιν, ὡς ὅλος ὁ AB πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ AE πρὸς τὸν ΓΖ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ AB τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ AE τοῦ ΓΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ EB λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ AB τοῦ ΓΔ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EB πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ AB πρὸς τὸν ΓΔ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.12

Ἐὰν ὧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον, ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ.



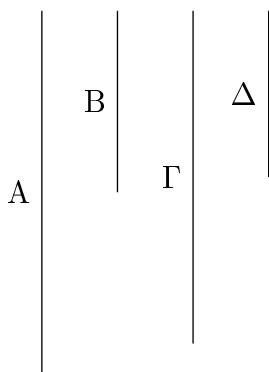
Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ B ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ μέρη. καὶ συναμφοτέρως ἄρα ὁ

A, Γ συναμφοτέρου τοῦ B, Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ A τοῦ B. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως οἱ A, Γ πρὸς τοὺς B, Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.13

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται.

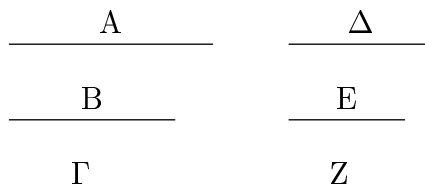
Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ B ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἐναλλάξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ A τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ B τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.14

Ἐὰν ᾧσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

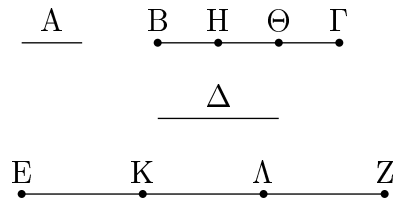


Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ Δ, E, Z, ὡς μὲν ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E, ὡς δὲ ὁ B πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z: λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Z.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ: ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.15

Ἐὰν μονὰς ἀριθμὸν τινα μετρῆ, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῆ, καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει καὶ ὁ δεύτερος τὸν τέταρτον.



Μονὰς γὰρ ἢ Α ἀριθμὸν τινα τὸν ΒΓ μετρεῖτω, ἰσάκεις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλάξ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκεις ἢ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ, ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰς ἐν ἑαυτῷ μονάδας τὰς ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ, ΗΘ, ΘΓ μονάδων τῷ πλῆθει τῶν ΕΚ, ΚΛ, ΛΖ ἀριθμῶν, ἔσται ἄρα ὡς ἢ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν, οὕτως ἢ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν καὶ ἢ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμὸν. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους: ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἴση δὲ ἢ ΒΗ μονὰς τῇ Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ. ἔστιν ἄρα ὡς ἢ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. ἰσάκεις ἄρα ἢ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.16

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσσονται.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 A \\
 \hline
 B \\
 \hline
 \hline
 \Gamma \\
 \hline
 \Delta \\
 \hline
 E \\
 \hline
 \end{array}$$

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ B τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω: λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν A ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἰσάκις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν Γ. ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν Γ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ B τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ A ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ B μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν B κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἰσάκις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν Δ. ἰσάκις δὲ ἡ E μονὰς τὸν B ἀριθμὸν ἐμέτρει καὶ ὁ A τὸν Γ: ἰσάκις ἄρα ὁ A ἐκάτερον τῶν Γ, Δ μετρεῖ. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.17

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινὰς, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ A δύο ἀριθμοὺς τοὺς B, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, E ποιείτω: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 A \\
 \hline
 B \\
 \hline
 \Gamma \\
 \hline
 Z \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \hline
 \Delta \\
 \hline
 E \\
 \hline
 \end{array}$$

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ B ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Z μονὰς τὸν A ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἰσάκις ἄρα ἡ Z μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ B τὸν Δ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ Z μονὰς πρὸς τὸν A ἀριθμὸν, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Δ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Z μονὰς πρὸς τὸν A ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E: καὶ ὡς ἄρα ὁ B πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.18

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινὰς, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἔξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A , B ἀριθμὸν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ , E ποιείτωσαν: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E .

$$\begin{array}{cc} \frac{\Gamma}{\quad} & \frac{A}{\quad} \\ & \frac{B}{\quad} \\ \frac{\Delta}{\quad} & \\ \frac{E}{\quad} & \end{array}$$

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὲ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς A , B πολλαπλασιάσας τοὺς Δ , E πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.19

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ: καὶ ἐὰν ὁ ἐκ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ἢ τῷ ἐκ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

$$\begin{array}{cccc|c} A & B & \Gamma & \Delta & \\ & & & & H \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ E & Z & & & \end{array}$$

Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ , ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , καὶ ὁ μὲν A τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, ὁ δὲ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω: λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ E τῷ Z .

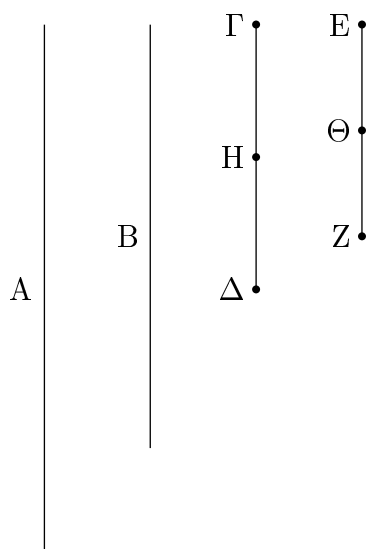
Ὅ γὰρ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ A δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς H, E πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E . ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B : καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E . πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Z πεποίηκεν, δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ A, B ἀριθμὸν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς H, Z πεποίηκασιν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν E : καὶ ὡς ἄρα ὁ H πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . ὁ H ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν E, Z τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ E τῷ Z .

Ἐστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ E τῷ Z : λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ .

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ E τῷ Z , ἔστιν ἄρα ὡς ὁ H πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Z . ἀλλ' ὡς μὲν ὁ H πρὸς τὸν E , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , ὡς δὲ ὁ H πρὸς τὸν Z , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B . καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.20

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα.

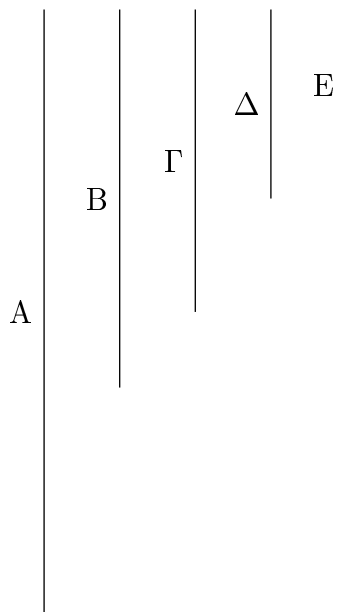


Ἐστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B οἱ $\Gamma\Delta, EZ$: λέγω, ὅτι ἰσάκεις ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ EZ τὸν B .

Ὁ ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἐστὶ μέρος. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω: καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστίν, ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α. ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. διηρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ, ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ, ΘΖ: ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΓΗ, ΗΔ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ, ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ, ΗΔ τῷ πλῆθει τῶν ΕΘ, ΘΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ. ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ: οἱ ΓΗ, ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ, ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάχιστονες ὄντες αὐτῶν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ, ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α: μέρος ἄρα. καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν, ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α: ἰσάκεις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.21

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.



Ἐστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α, Β: λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Α, Β ἐλάχιστονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α, Β. ἔστωσαν οἱ Γ, Δ.

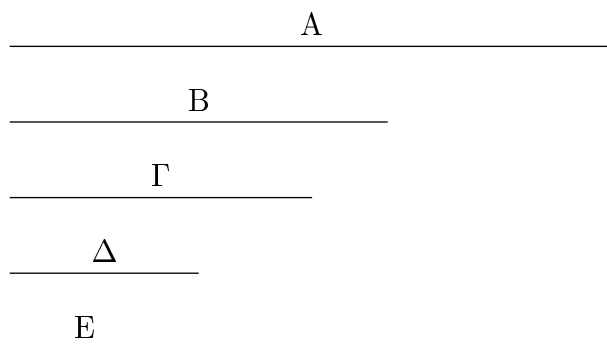
Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων [2αὐτοῖς]2 μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὃ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτέστιν ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, ἰσάκεις ἄρα ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. ὁσάκεις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται

μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E. καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας, καὶ ὁ E ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ E καὶ τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. ὁ E ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσσονται τινες τῶν A, B ἐλάχιστες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B. οἱ A, B ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.22

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ A, B: λέγω, ὅτι οἱ A, B πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

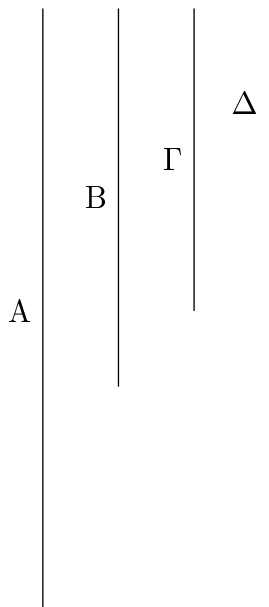


Εἰ γὰρ μὴ εἰσι πρώτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. καὶ ὅσάκις μὲν ὁ Γ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὅσάκις δὲ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E.

Ἐπεὶ ὁ Γ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς A, B πεποίηκεν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B: οἱ Δ, E ἄρα τοῖς A, B ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν ἐλάχιστες ὄντες αὐτῶν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς A, B ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. οἱ A, B ἄρα πρώτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.23

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρώτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ τὸν ἓνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρώτος ἔσται.

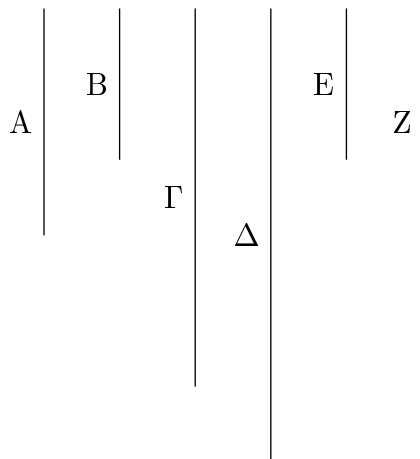


Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, τὸν δὲ A μετρεῖτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ: λέγω, ὅτι καὶ οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, B ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν A μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν B: ὁ Δ ἄρα τοὺς A, B μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, B ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.24

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ᾧσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

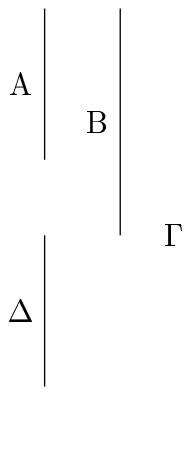


Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς τινὰ ἀριθμὸν τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω: λέγω, ὅτι οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Γ, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει [τις] τοὺς Γ, Δ ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ E . καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ E , οἱ A, E ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ὁσάκις δὴ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z : καὶ ὁ Z ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας. ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E, Z τῷ ἐκ τῶν A, B . ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Z . οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ : ὁ E ἄρα τοὺς B, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Γ, Δ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. οἱ Γ, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.25

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἐνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.



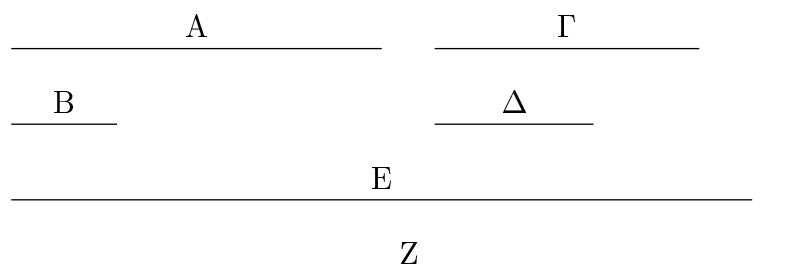
Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A, B, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: λέγω, ὅτι οἱ B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Κείσθω γὰρ τῷ A ἴσος ὁ Δ. ἐπεὶ οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἴσος δὲ ὁ A τῷ Δ, καὶ οἱ Δ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ, A πρὸς τὸν B πρῶτός ἐστιν: καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ, A ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν B πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Δ, A γενόμενος ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ Γ. οἱ Γ, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.26

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς ἀμφοτέρω πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ᾖσιν, καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ, Δ ἀμφοτέρω πρὸς ἑκάτερον πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω: λέγω, ὅτι οἱ E, Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

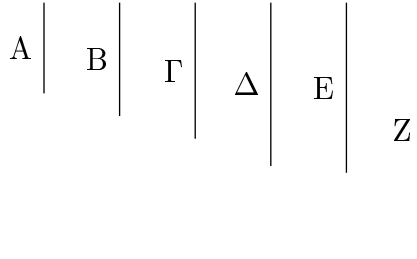


Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν A, B πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν A, B ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν A, B γενόμενος ἐστὶν ὁ E: οἱ E, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Δ, E πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ, Δ πρὸς τὸν E πρῶτός ἐστιν. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ, Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν E πρῶτος ἔσται. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ γενόμενος ἐστὶν ὁ Z. οἱ E, Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.27

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται, κὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσιν τινας, κάκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται [καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἐστώσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ A , B , καὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, ὁ δὲ B ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιείτω, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιείτω: λέγω, ὅτι οἱ τε Γ , E καὶ οἱ Δ , Z πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.



Ἐπεὶ γὰρ οἱ A , B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, οἱ Γ , B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν οἱ Γ , B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, οἱ Γ , E ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ A , B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, καὶ ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, οἱ A , E ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ A , Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς B , E ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσιν, καὶ ὁ ἐκ τῶν A , Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν B , E πρῶτός ἐστιν. καὶ ἐστὶν ὁ μὲν ἐκ τῶν A , Γ ὁ Δ , ὁ δὲ ἐκ τῶν B , E ὁ Z . οἱ Δ , Z ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.28

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται: καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἓνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾗ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ AB , $B\Gamma$: λέγω, ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ $A\Gamma$ πρὸς ἑκάτερον τῶν AB , $B\Gamma$ πρῶτός ἐστιν.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ: ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει: οἱ ΓΑ, ΑΒ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ, ΒΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν. ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

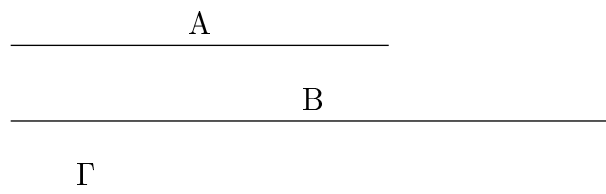
Ἐστῶσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ, ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους: λέγω, ὅτι καὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

Εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ ΑΒ, ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ: ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει. οἱ ΑΒ, ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.29

Ἄπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμόν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν.

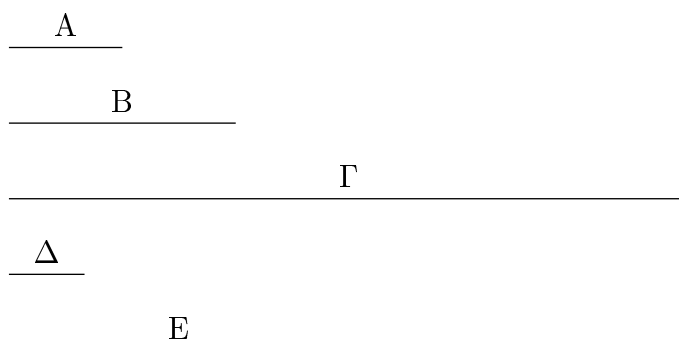
Ἐστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α καὶ τὸν Β μὴ μετρεῖτω: λέγω, ὅτι οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.



εἰ γὰρ μὴ εἰσὶν οἱ Β, Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. μετρεῖτω ὁ Γ. ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ, ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β, Α μετρεῖ, καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῷ ὁ αὐτός: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς Β, Α μετρήσει τις ἀριθμὸς. οἱ Α, Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.30

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρή τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει.



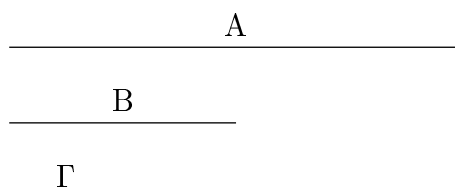
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρεῖτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ : λέγω, ὅτι ὁ Δ ἓνα τῶν A, B μετρεῖ.

Τὸν γὰρ A μὴ μετρεῖτω: καὶ ἐστὶ πρῶτος ὁ Δ : οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E . ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, E τῷ ἐκ τῶν A, B . ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ B πρὸς τὸν E . οἱ δὲ Δ, A πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: ὁ Δ ἄρα τὸν B μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἐὰν τὸν B μὴ μετρήῃ, τὸν A μετρήσει. ὁ Δ ἄρα ἓνα τῶν A, B μετρεῖ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.31

Ἄπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ A : λέγω, ὅτι ὁ A ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.



Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστὶν ὁ A , μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ B . καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ B , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Γ . καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ B τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμὸς. τοιαύτης δὲ γνωμένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται,

μετρήσουσι τὸν A ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει.

Ἄπας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.32

Ἄπας ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐστω ἀριθμὸς ὁ A : λέγω, ὅτι ὁ A ἢτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

A

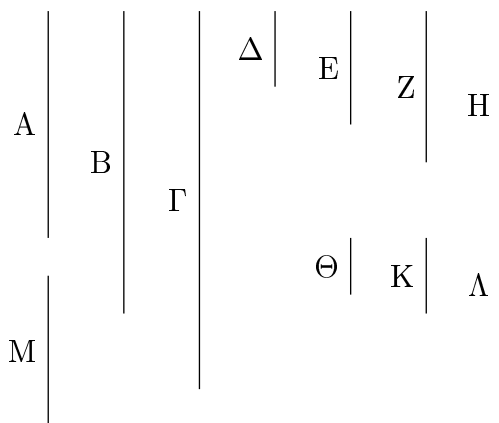
Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ A , γεγονὸς ἂν εἶη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμὸς.

Ἄπας ἄρα ἀριθμὸς ἢτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρῶτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.33

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὔρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσαιοῦν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ : δεῖ δὴ εὔρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B, Γ .



Οἱ A, B, Γ γὰρ ἢτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὐ. εἰ μὲν οὖν οἱ A, B, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

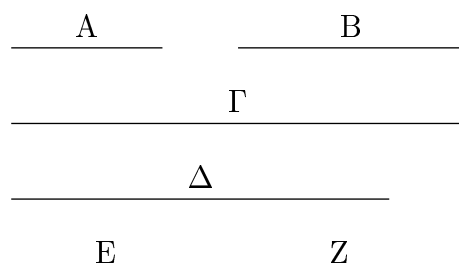
Εἰ δὲ οὐ, εἰλήφθω τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ , καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν A, B, Γ μετρεῖ, τσαῦται μονάδες ἕστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν E, Z, H . καὶ

ἕκαστος ἄρα τῶν E, Z, H ἕκαστον τῶν A, B, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας. οἱ E, Z, H ἄρα τοὺς A, B, Γ ἰσάκις μετροῦσιν: οἱ E, Z, H ἄρα τοῖς A, B, Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ εἰσίν οἱ E, Z, H ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ, ἔσονται [τινες] τῶν E, Z, H ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ. ἔστωσαν οἱ Θ, Κ, Λ: ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν A μετρεῖ καὶ ἕκαστος τῶν Κ, Λ ἕκαστερον τῶν B, Γ. ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ M: καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Κ, Λ ἕκαστερον τῶν B, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας, καὶ ὁ M ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁ M καὶ ἕκαστερον τῶν B, Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ, Λ μονάδας: ὁ M ἄρα τοὺς A, B, Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ M μονάδας, ὁ Θ ἄρα τὸν M πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν E, Δ τῷ ἐκ τῶν Θ, M. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ M πρὸς τὸν Δ. μείζων δὲ ὁ E τοῦ Θ: μείζων ἄρα καὶ ὁ M τοῦ Δ. καὶ μετρεῖ τοὺς A, B, Γ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον. οὐκ ἄρα ἔσονται τινες τῶν E, Z, H ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ. οἱ E, Z, H ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς A, B, Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.34

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B: δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.



Οἱ A, B γὰρ ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν ἢ οὐ. ἔστωσαν πρότερον οἱ A, B πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: καὶ ὁ B ἄρα τὸν A πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. οἱ A, B ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ,

μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ A, B ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρείτωσαν τὸν Δ. καὶ ὁσάκις ὁ A τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E, ὁσάκις δὲ ὁ B τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z: ὁ μὲν A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν A, E τῷ ἐκ τῶν B, Z. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν E. οἱ δὲ A, B πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα: ὁ B ἄρα

τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἐπόμενος ἐπόμενον. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β, Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετροῦσιν τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται.

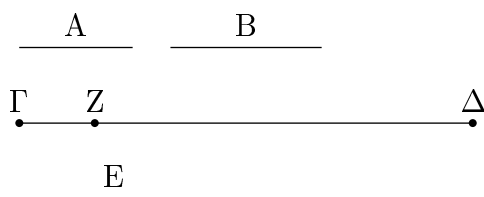
$$\begin{array}{c}
 \frac{A}{\zeta} \quad \frac{B}{E} \\
 \hline
 \Gamma \\
 \hline
 \Delta \\
 \hline
 \frac{H}{\Theta}
 \end{array}$$

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β οἱ Ζ, Ε: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Ε τῶ ἐκ τῶν Β, Ζ. καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν: οἱ Α, Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσιν τινὰ ἀριθμὸν οἱ Α, Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. μετρεῖτωσαν τὸν Δ. καὶ ὡσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῶ Η, ὡσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῶ Θ. ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α, Η τῶ ἐκ τῶν Β, Θ: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε: καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. οἱ δὲ Ζ, Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσιν τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα: ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε, Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ: καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β μετρήσουσιν τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β μετρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.35

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμὸν τινὰ μετρώσιν, καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμὸν τινὰ τὸν ΓΔ μετρεῖτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ.

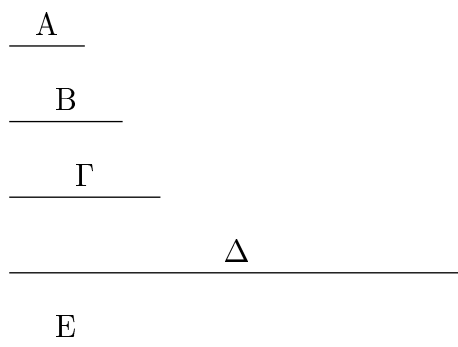


Εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσουσιν. μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ: μετρεῖ ἄρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

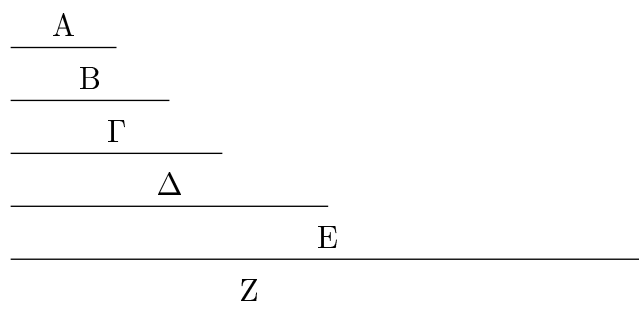
VII.36

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ: δεῖ δὴ εὑρεῖν, ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμὸν.



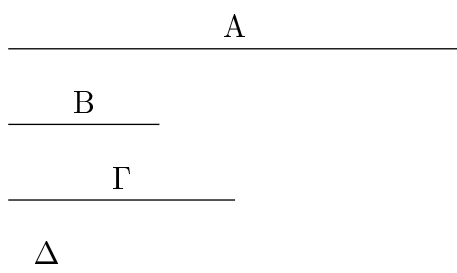
Εἰλήφθω γὰρ ὑπὸ δύο τῶν Α, Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρεῖτω πρότερον. μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α, Β τὸν Δ: οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Δ μετροῦσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσιν [τινα] ἀριθμὸν οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. μετρεῖτωσαν τὸν Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ε μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος [τὸν Ε] μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ: ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσιν [τινα] ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ: οἱ Α, Β, Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσιν.



Μὴ μετρεῖτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Ε. ἐπεὶ οἱ Α, Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ [τὸν Ε: καὶ] οἱ Α, Β, Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστον. εἰ γὰρ μή, μετρήσουσιν τινὰ οἱ Α, Β, Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. μετρεῖτωσαν τὸν Ζ. ἐπεὶ οἱ Α, Β, Γ τὸν Ζ μετροῦσιν, καὶ οἱ Α, Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν: καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α, Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ: ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ: οἱ Δ, Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν: ὥστε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ, Γ μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Γ, Δ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε: ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ Α, Β, Γ μετρήσουσιν τινὰ ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α, Β, Γ μετρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.37

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ μετρηται, ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἔξει τῷ μετροῦντι.



Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπὸ τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω: λέγω, ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β.

Ὅσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ. ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α: ὁ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ

μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. ἢ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῶ: καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῶ Β. ὥστε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῶ Β: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.38

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχη ὅτιοῦν, ὑπὸ ὁμώνυμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῶ μέρει.

$$\frac{\frac{\frac{A}{\quad}}{\quad}}{\frac{B}{\quad}} = \frac{\Gamma}{\quad} = \frac{\Delta}{\quad}$$

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὅτιοῦν τὸν Β, καὶ τῶ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω [ἀριθμὸς] ὁ Γ: λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῶ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῶ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α: ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Α. ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α. ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VII.39

Ἀριθμὸν εὔρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἔξει τὰ δοθέντα μέρη.

Ἐστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α, Β, Γ: δεῖ δὴ ἀριθμὸν εὔρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη.

$$\frac{\frac{A}{\quad} \quad \frac{B}{\quad} \quad \frac{\Gamma}{\quad}}{\frac{\Delta}{\quad}} = \frac{E}{\quad} = \frac{Z}{\quad} = \frac{H}{\quad} = \frac{\Theta}{\quad}$$

Ἐστωσαν γὰρ τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ οἱ Δ, Ε, Ζ, καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η.

Ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ, Ε, Ζ. τοῖς δὲ Δ, Ε, Ζ ὁμώνυμα μέρη ἐστὶ τὰ Α, Β, Γ: ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστος ὢν. εἰ γὰρ μή, ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη. ἔστω ὁ Θ. ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α, Β, Γ μέρη, ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α, Β, Γ μέρεσιν. τοῖς δὲ Α, Β, Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοὶ εἰσιν οἱ Δ, Ε, Ζ: ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ, Ε, Ζ μετρεῖται. καὶ ἐστὶν ἐλάσσων τοῦ Η: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμός, ὃς ἔξει τὰ Α, Β, Γ μέρη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book VIII

Propositions

VIII.1

Ἐὰν ὄσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὄσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Ἐστωσαν ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν: λέγω, ὅτι οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

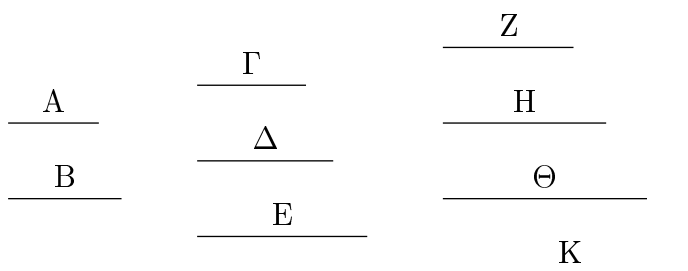
<u>A</u>	<u>E</u>
<u>B</u>	<u>Z</u>
<u>Γ</u>	<u>H</u>
<u>Δ</u>	<u>Θ</u>

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστωσαν ἐλάττωτες τῶν A, B, Γ, Δ οἱ E, Z, H, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσι τοῖς E, Z, H, Θ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος [τῶν A, B, Γ, Δ] τῷ πλῆθει [τῶν E, Z, H, Θ], δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ, ὁ E πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ A, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν E ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ E, Z, H, Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν A, B, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς. οἱ A, B, Γ, Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.2

Ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστους, ὅσους ἂν ἐπιτάξῃ τις, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ.

Ἐστω ὁ δοθείς λόγος ἐν ἐλάχιστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ A πρὸς τὸν B: δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ.



Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ A τοὺς Γ, Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς Z, H, Θ ποιεῖτω, ὁ δὲ B τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν K ποιεῖτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, [οὕτως] ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ μὲν A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, ἐκάτερος ἄρα τῶν A, B τὸν B πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Δ, E πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E. ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ Δ πρὸς τὸν E. καὶ ἐπεὶ ὁ A τοὺς Γ, Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Z, H πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, [οὕτως] ὁ Z πρὸς τὸν H. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἦν ὁ A πρὸς τὸν B: καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B, ὁ Z πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τοὺς Δ, E πολλαπλασιάσας τοὺς H, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, ὁ H πρὸς τὸν Θ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, ὁ A πρὸς τὸν B. καὶ ὡς ἄρα ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B τὸν E πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ, K πεποίηκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. ἀλλ' ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ τε Z πρὸς τὸν H καὶ ὁ H πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Z πρὸς τὸν H, οὕτως ὁ τε H πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K: οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, οἱ A, B ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐκάτερος μὲν τῶν A, B ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Γ, E πεποίηκεν, ἐκάτερον δὲ τῶν Γ, E πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Z, K πεποίηκεν: οἱ Γ, E ἄρα καὶ οἱ Z, K πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ ὦσιν ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οἱ Γ, Δ, E ἄρα καὶ οἱ Z, H, Θ, K ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, B: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν, ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

VIII.3

Ἐὰν ὄσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ A, B, Γ, Δ: λέγω, ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

A		H	Λ
B	E	Θ	M
Γ	Z	K	N
Δ			Ξ

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν A, B, Γ, Δ λόγῳ οἱ E, Z, τρεῖς δὲ οἱ H, Θ, K, καὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ἕως τὸ λαμβανόμενον πλήθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν A, B, Γ, Δ. εἰλήφθωσαν καὶ ἕστωσαν οἱ Λ, M, N, Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ E, Z ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν E, Z ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν H, K πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν H, K πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ, Ξ πεποίηκεν, καὶ οἱ H, K ἄρα καὶ οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἐλάχιστοι εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ, M, N, Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς A, B, Γ, Δ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλήθος τῶν A, B, Γ, Δ τῷ πλήθει τῶν Λ, M, N, Ξ, ἕκαστος ἄρα τῶν A, B, Γ, Δ ἐκάστῳ τῶν Λ, M, N, Ξ ἴσος ἐστίν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν A τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. καὶ εἰσὶν οἱ Λ, Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ οἱ A, Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.4

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὅ τε τοῦ A πρὸς τὸν B καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ὁ τοῦ E πρὸς τὸν Z: δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὐρεῖν ἐξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τε τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ E πρὸς τὸν Z.

Α	Β
Γ	Δ
Ε	Ζ
Ν	Η
Ξ	Θ
Μ	Κ
Ο	Λ

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Η. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Α τὸν Θ μετρεῖται, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρεῖται. ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρεῖται πρότερον. καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρεῖται. καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Η, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ: οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἕν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. εἰ γὰρ μὴ εἰσιν οἱ Θ, Η, Κ, Λ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ἕν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις, ἔστωσαν οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ: οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσιν: καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρεῖται ὁ Η: ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσσονται τινες τῶν Θ, Η, Κ, Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἕν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρεῖται δὴ ὁ Ε τὸν Κ. καὶ εἰλήφθω ὑπὸ τῶν Ε, Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς ὁ Μ. καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἐκάτερος τῶν Θ, Η ἐκάτερον

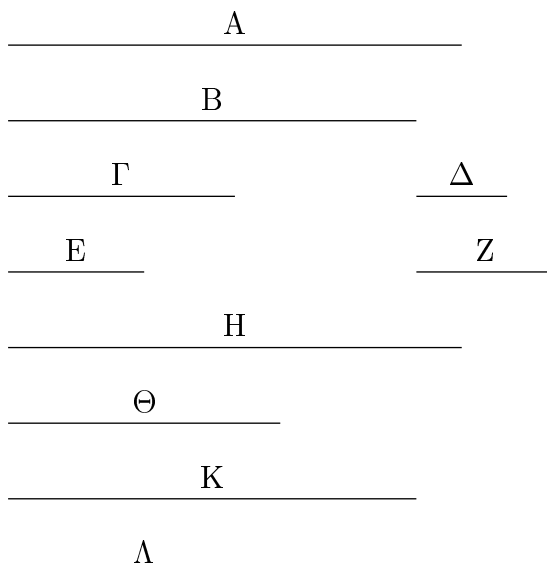
τῶν Ν, Ξ μετρεῖται, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρεῖται. ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς

τὸν Ζ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο: οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις. ἔστωσαν οἱ Π, Ρ, Σ, Τ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α, Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον, ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ: οἱ Β, Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β, Γ μετρούμενός ἐστὶν ὁ Η: ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ: καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ: οἱ Ε, Κ ἄρα τὸν Σ μετροῦσιν. καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε, Κ μετρούμενός ἐστὶν ὁ Μ: ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν, Ξ, Μ, Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις: οἱ Ν, Ξ, Μ, Ο ἄρα ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι εἰσιν ἐν τοῖς ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ λόγοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.5

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Ἐστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ Β οἱ Ε, Ζ: λέγω,



ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Λόγων γὰρ δοθέντων τοῦ τε ὄν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς ΓΕ, ΔΖ λόγοις, οἱ Η, Θ, Κ, ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Α: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, [οὕτως] ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν: καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγχείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.6

Ἐὰν ὄσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεῦτερον μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Α	Ζ
Β	Η
Γ	Θ
Δ	
Ε	

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρεῖτω: λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει.

Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε ἐξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσιν, φανερόν: οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖτω ὁ Α τὸν Γ. καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α, Β, Γ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ, Η, Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α, Β, Γ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Β, Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ, Η, Θ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η: οὐκ ἄρα μονὰς ἐστὶν ὁ Ζ: ἢ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ. καὶ εἰσὶν οἱ Ζ, Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους [οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ]. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ: οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.7

Ἐὰν ὄσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἐξῆς] ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρήῃ, καὶ τὸν δεῦτερον μετρήσει.

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}$$

εἰ γὰρ οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει: μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.8

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπτώσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπτώσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας [αὐτοῖς] μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta} \quad \frac{E}{M} = \frac{N}{Z}$$

$$\frac{H}{\Theta} = \frac{K}{\Lambda}$$

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ: λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ὅσοι γὰρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α, Β, Γ, Δ, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, Β οἱ Η, Θ, Κ, Λ: οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν

οί Η, Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β τοῖς Η, Θ, Κ, Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α, Γ, Δ, Β τῷ πλήθει τῶν Η, Θ, Κ, Λ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. οἱ δὲ Η, Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ καὶ ὁ Λ τὸν Ζ. ὁσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἐκάτερος τῶν Θ, Κ ἐκάτερον τῶν Μ, Ν μετρεῖτω: οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοὺς Ε, Μ, Ν, Ζ ἰσάκις μετροῦσιν. οἱ Η, Θ, Κ, Λ ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. ἀλλὰ οἱ Η, Θ, Κ, Λ τοῖς Α, Γ, Δ, Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν: καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἄρα τοῖς Ε, Μ, Ν, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. οἱ δὲ Α, Γ, Δ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν: καὶ οἱ Ε, Μ, Ν, Ζ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε, Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.9

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἐκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ἐστῶσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α, Β καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς: λέγω, ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α, Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἐκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Α				Μ
Γ			Θ	Ν
Δ	Ε	Ζ	Κ	Ξ
Β		Η	Λ	Ο

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α, Γ, Δ, Β λόγῳ ὄντες οἱ Ζ, Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ, Κ, Λ, καὶ αἰεὶ ἐξῆς ἐνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β. εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο. φανερόν δὴ, ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ Μ, Ν, Ξ, Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α, Γ, Δ, Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἔχόντων τοῖς Ζ, Η, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο τῷ πλήθει τῶν Α, Γ, Δ, Β, ἕκαστος ἄρα τῶν Μ, Ν, Ξ, Ο ἐκάστῳ τῶν Α, Γ, Δ, Β ἴσος ἐστίν: ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονάς

τὸν Z κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἰσάκεις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Z τὸν Θ . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ . πάλιν, ἐπεὶ ὁ Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν M πεποίηκεν, ὁ Θ ἄρα τὸν M μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Z μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἰσάκεις ἄρα ἡ E μονὰς τὸν Z ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Θ τὸν M . ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν M . ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ : καὶ ὡς ἄρα ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν M . ἴσος δὲ ὁ M τῷ A : ἔστιν ἄρα ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν Z ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν A . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ E μονὰς πρὸς τὸν H ἀριθμὸν, οὕτως ὁ H πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν B . ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς E μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.10

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν ἑκατέρου καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & A \\
 & & & & & & \hline
 & & & & E & & \\
 & & & & \hline
 & & & & \Theta & & \\
 & & & & \hline
 & & & & H & & \\
 & & & & \hline
 \Gamma & & \Delta & & & & \\
 \hline
 & & Z & & & & K \\
 & & \hline
 & & & & & & \Lambda \\
 & & & & & & \hline
 & & & & & & B \\
 & & & & & & \hline
 \end{array}$$

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώσαν ἀριθμοί οἱ τε Δ, E καὶ οἱ Z, H : λέγω, ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν A, B καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς A, B μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

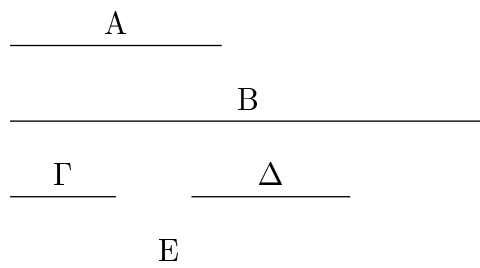
Ὁ Δ γὰρ τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιεῖτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ, Z τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν K, Λ ποιεῖτω.

Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E , ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν E . ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας: καὶ ὁ Δ ἄρα ἀριθμὸς τὸν E μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας: ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Γ [μονὰς] πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ E πρὸς τὸν A , ἰσάκεις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν A . ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας: καὶ ὁ E ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας: ὁ Δ ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Z ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, τὸν δὲ H πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, τὸν δὲ Z πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν, ἔστιν

ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν Ε, Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Α, Κ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν Δ, Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Κ, Λ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἐκάτερον τῶν Θ, Η πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Α, Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Κ, Λ, Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχές ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον. ὅσοι ἄρα ἐκατέρου τῶν Α, Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξύ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α, Β μεταξύ κατὰ τὸ συνεχές ἐμπεσοῦνται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.11

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.



Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ: λέγω, ὅτι τῶν Α, Β εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιεῖτω. καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἐστιν ὁ Γ, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἐκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Α, Ε πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. τῶν Α, Β ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Ε, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε. ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.12

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

$$\frac{\frac{\Gamma}{\Delta}}{\frac{\frac{E}{Z}}{H}} = \frac{\frac{A}{\Theta}}{K} = B$$

Ἐστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ A, B καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ B ὁ Δ: λέγω, ὅτι τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω, ἐκάτερος δὲ τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Θ, K ποιεῖτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ A, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν E πεποίηκεν, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν H πεποίηκεν, τὸν δὲ H πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἐκάτερον τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν E, Z πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἐκάτερον τῶν E, Z πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν A, Θ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν Z, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ E πρὸς τὸν Z, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ. πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν Γ, Δ τὸν Z πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Θ, K πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν K. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἐκάτερον τῶν Z, H πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν K, B πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H, οὕτως ὁ K πρὸς τὸν B. ὡς δὲ ὁ Z πρὸς τὸν H, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Θ καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν K καὶ ὁ K πρὸς τὸν B. τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Θ, K.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ A πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν οἱ A, Θ, K, B, ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ A πρὸς τὸν Θ. ὡς δὲ ὁ A πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: καὶ ὁ A [ἄρα] πρὸς τὸν B τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.13

Ἐὰν ὄσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσσονται: καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσσονται [καὶ αἰεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει].

Ἐστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ A, B, Γ, ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ A, B, Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε, Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ, Ε, Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η, Θ, Κ ποιείτωσαν: λέγω, ὅτι οἱ τε Δ, Ε, Ζ καὶ οἱ Η, Θ, Κ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

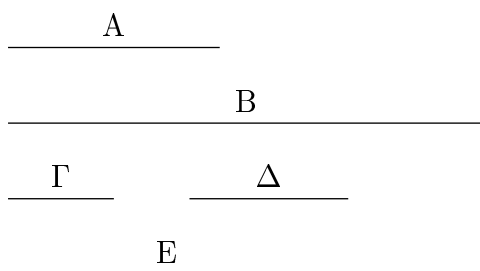
		<u> </u> H
	<u> </u> Δ	<u> </u> M
<u> </u> A	<u> </u> Λ	<u> </u> N
<u> </u> B	<u> </u> Ε	<u> </u> Θ
<u> </u> Γ	<u> </u> Ξ	<u> </u> Ο
	<u> </u> Ζ	<u> </u> Π
		<u> </u> Κ

Ὁ μὲν γὰρ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν A, B τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν M, N ποιείτω. καὶ πάλιν ὁ μὲν B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν B, Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν O, Π ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι οἱ Δ, Λ, Ε καὶ οἱ Η, M, N, Θ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ A πρὸς τὸν B λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε, Ξ, Ζ καὶ οἱ Θ, O, Π, Κ ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ B πρὸς τὸν Γ λόγῳ. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ B πρὸς τὸν Γ: καὶ οἱ Δ, Λ, Ε ἄρα τοῖς Ε, Ξ, Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ καὶ ἔτι οἱ Η, M, N, Θ τοῖς Θ, O, Π, Κ. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ, Λ, Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε, Ξ, Ζ πλῆθει, τὸ δὲ τῶν Η, M, N, Θ τῷ τῶν Θ, O, Π, Κ: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.14

Ἐὰν τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει: καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.



Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ

A, B, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, ὁ δὲ A τὸν B μετρεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω: οἱ A, E, B ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ A τὸν B, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ A τὸν B μετρεῖ.

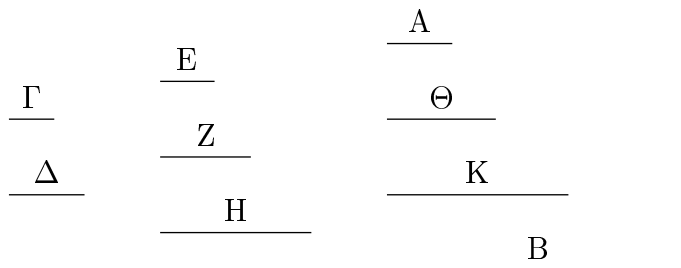
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν E, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν E. καὶ εἰσιν οἱ A, E, B ἐξῆς ἀνάλογον: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ A τὸν B.

Ἐὰν ἄρα τετράγωνος τετράγωνον μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει: καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.15

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει: καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήῃ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον τὸν B μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ B ὁ Δ: λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.



Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν E ποιεῖτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν H ποιεῖτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Z [ποιεῖτω], ἑκάτερος δὲ τῶν

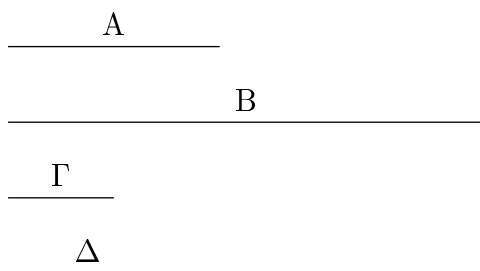
Γ, Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ, Κ ποιεῖτω. φανερόν δὴ, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η καὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οἱ Α, Θ, Κ, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ, καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ: ὥστε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.16

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει: καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει.



Ἐστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ μὴ μετρεῖτω ὁ Α τὸν Β: λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

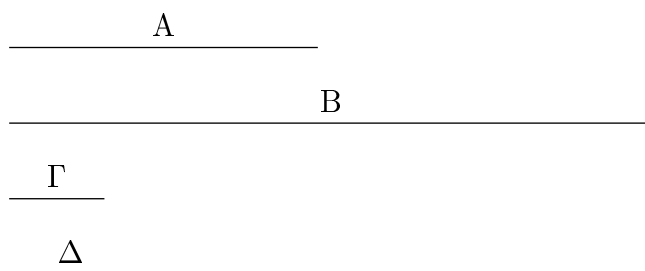
Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β: οὐδὲ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖτω [δὴ] πάλιν ὁ Γ τὸν Δ: λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ: οὐδὲ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.17

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει: καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρήῃ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει.



Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον ἀριθμὸν τὸν B μὴ μετρεῖτω, καὶ τοῦ μὲν A πλευρὰ ἔστω ὁ Γ , τοῦ δὲ B ὁ Δ : λέγω, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ , καὶ ὁ A τὸν B μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν B : οὐδ' ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ.

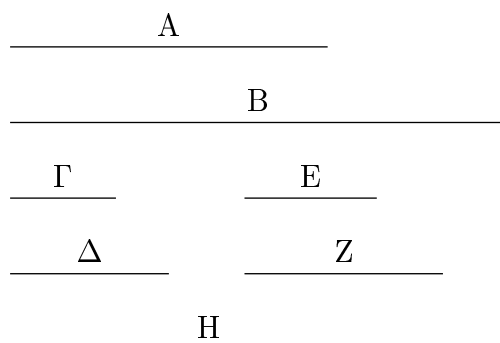
Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ Γ τὸν Δ : λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ A τὸν B μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ A τὸν B μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ : οὐδ' ἄρα ὁ A τὸν B μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.18

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς: καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B , καὶ τοῦ μὲν A πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ ἀριθμοί, τοῦ δὲ B οἱ E, Z . καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z . λέγω οὖν, ὅτι τῶν A, B εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ A πρὸς τὸν B διπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Γ πρὸς τὸν E ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Z , τουτέστιν ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον [πλευράν].



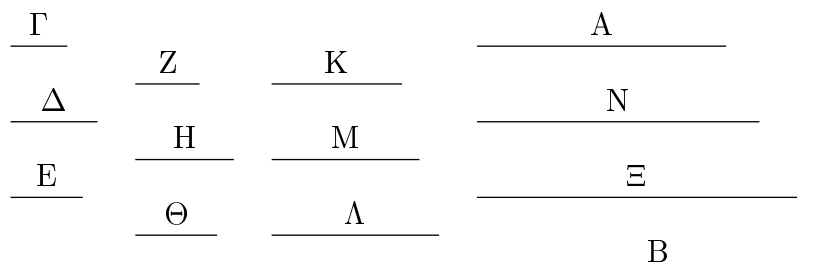
Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ , οὕτως ὁ E πρὸς τὸν Z , ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν E , ὁ Δ πρὸς τὸν Z . καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ A , πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ, Δ , ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E τὸν

Z πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, [οὕτως] ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. οἱ Α, Η, Β ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν. τῶν Α, Β ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Η, Β ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ πρὸς τὸν Η. καὶ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.19

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί: καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.



Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α, Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ, Δ, Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ, Η, Θ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. λέγω, ὅτι τῶν Α, Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ τοῖς Ζ, Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ, Δ ἐστιν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ, Η ὁ Λ, οἱ Κ, Λ [ἄρα] ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν ἀριθμοί: τῶν Κ, Λ ἄρα εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. ἔστω ὁ Μ. ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, Ζ, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποίηκεν, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς

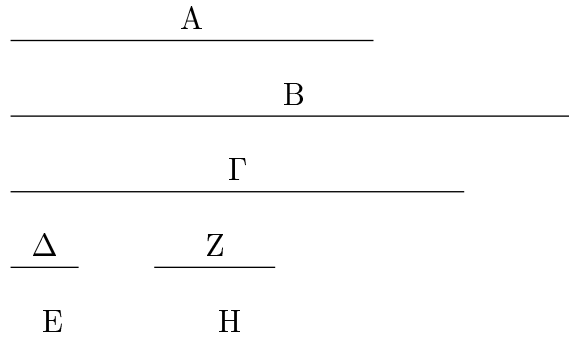
τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. οἱ Κ, Μ, Λ ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐκάτερος δὴ τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ν, Ξ ποιείτω. καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ Γ, Δ, Ε, ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ, Δ ἐστὶν ὁ Κ: ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. πάλιν, ἐπεὶ ἐκάτερος τῶν Ε, Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἐκάτερον τῶν Ν, Ξ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η: καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. οἱ Α, Ν, Ξ, Β ἄρα ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον ἔν τοις εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

Λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον εἰσὶν οἱ Α, Ν, Ξ, Β, ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.20

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπύπτη ἀριθμός, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α, Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπύπτεω ἀριθμὸς ὁ Γ: λέγω, ὅτι οἱ Α, Β ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσὶν ἀριθμοί.

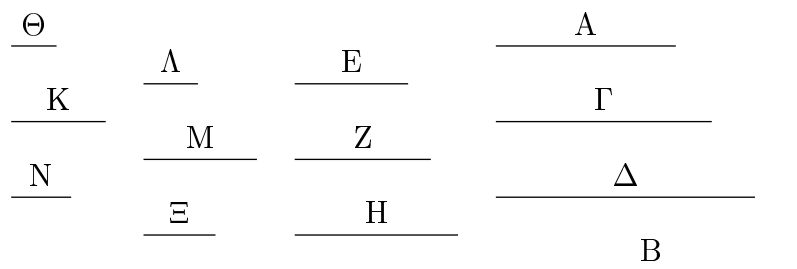


Εἰλήφθωσαν [γὰρ] ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ οἱ Δ, E: ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν A μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν Γ. ὁσάκεις δὴ ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Z: ὁ Z ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. ὥστε ὁ A ἐπίπεδός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ, Z. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ, E ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, B, ἰσάκεις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ E τὸν B. ὁσάκεις δὴ ὁ E τὸν B μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ H. ὁ E ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ H μονάδας: ὁ H ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. ὁ B ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσι οἱ E, H. οἱ A, B ἄρα ἐπίπεδοί εἰσι ἀριθμοί. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ ὁ Z τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν, τὸν δὲ E πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Γ πρὸς τὸν B. πάλιν, ἐπεὶ ὁ E ἐκάτερον τῶν Z, H πολλαπλασιάσας τοὺς Γ, B πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Z πρὸς τὸν H, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν B. ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E: καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν H. καὶ ἐναλλάξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z, οὕτως ὁ E πρὸς τὸν H. οἱ A, B ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι ἀριθμοί: αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.21

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐπιπτώσιν ἀριθμοί, ὅμοιοι στερεοί εἰσι οἱ ἀριθμοί.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐπιπέτωσαν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ: λέγω, ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι στερεοί εἰσι.



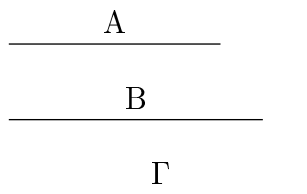
Εὐλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ τρεῖς οἱ Ε, Ζ, Η: οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε, Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ τῶν Ε, Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς

ὁ Ζ, οἱ Ε, Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ, Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ, Μ. φανερόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου, ὅτι οἱ Ε, Ζ, Η ἐξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. καὶ ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Γ, Δ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε, Ζ, Η τῷ πλῆθει τῶν Α, Γ, Δ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. οἱ δὲ Ε, Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτέστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Δ. ὁσάκεις δὴ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν. ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. ὁ δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ, Κ: ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ, Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ, Κ, Ν. πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε, Ζ, Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ, Δ, Β, ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Β. ὁσάκεις δὴ ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ. ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας: ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Λ, Μ: ὁ Ξ ἄρα τὸν ἐκ τῶν Λ, Μ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ, Μ, Ξ: οἱ Α, Β ἄρα στερεοὶ εἰσιν.

Λέγω [δὴ], ὅτι καὶ ὅμοιοι. ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν, Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α, Γ πεποίηκασιν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τουτέστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὁ Θ πρὸς τὸν Λ καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ: καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. καὶ εἰσιν οἱ μὲν Θ, Κ, Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ, Λ, Μ πλευραὶ τοῦ Β. οἱ Α, Β ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.22

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ἦ, καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται.

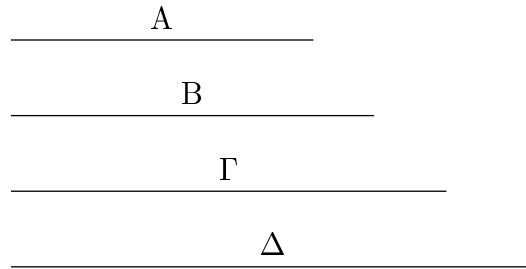


Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, ὁ δὲ πρῶτος ὁ Α τετράγωνος ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ τρίτος ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α, Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμὸς ὁ Β, οἱ Α, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τετράγωνος δὲ ὁ Α: τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.23

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ῆ, καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται.



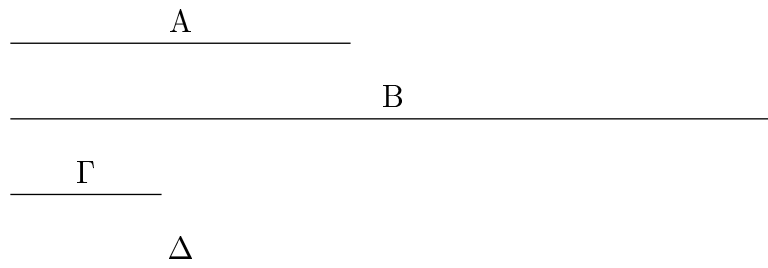
Ἐστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ A κύβος ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἔστί.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν A, Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ οἱ B, Γ, οἱ A, Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. κύβος δὲ ὁ A: κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.24

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ῆ, καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ A τετράγωνος ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ B τετράγωνός ἐστι.



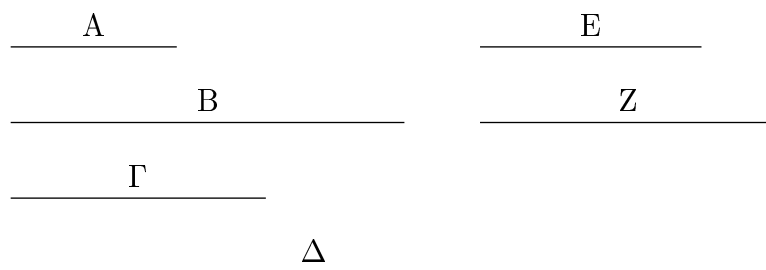
Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ τετράγωνοί εἰσιν, οἱ Γ, Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι εἰσιν. τῶν Γ, Δ ἄρα εἷς μέσος

ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ A πρὸς τὸν B: καὶ τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. καὶ ἐστὶν ὁ A τετράγωνος: καὶ ὁ B ἄρα τετράγωνός ἐστι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.25

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ A, B πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ A: λέγω [δή], ὅτι καὶ ὁ B κύβος ἐστίν.

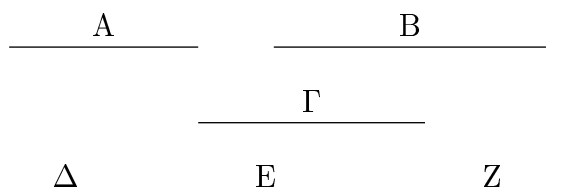


Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ, Δ κύβοι εἰσίν, οἱ Γ, Δ ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν: τῶν Γ, Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ, Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς: ὥστε καὶ τῶν A, B δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐμπίπτέτωσαν οἱ E, Z. ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, E, Z, B ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ ἐστὶ κύβος ὁ A, κύβος ἄρα καὶ ὁ B: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.26

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B: λέγω, ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

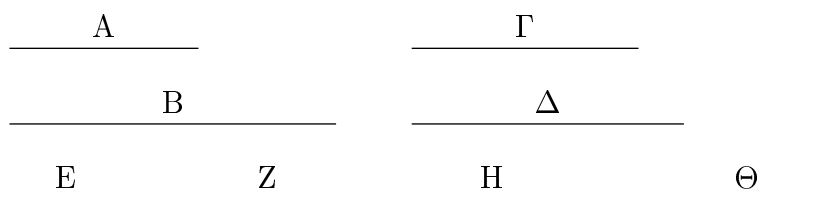


Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν, τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. ἐμπίπτέτω καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, B οἱ Δ, E, Z: οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ, Z τετράγωνοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Z, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B, καὶ εἰσιν οἱ Δ, Z τετράγωνοι, ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

VIII.27

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.

Ἐστώσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ οἱ A, B: λέγω, ὅτι ὁ A πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν.



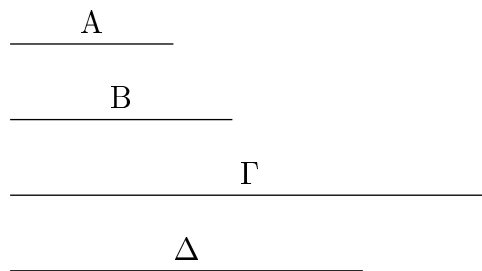
Ἐπεὶ γὰρ οἱ A, B ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν, τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. ἐπιπέτωσαν οἱ Γ, Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς A, Γ, Δ, B ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος οἱ E, Z, H, Θ: οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ E, Θ κύβοι εἰσίν. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B: καὶ ὁ A ἄρα πρὸς τὸν B λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book IX

Propositions

IX.1

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται.



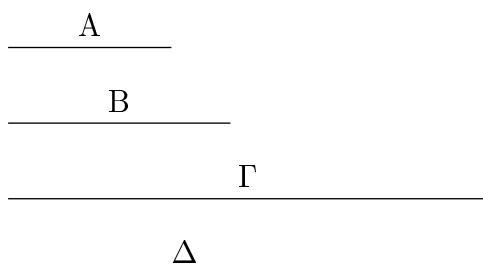
Ἐστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: λέγω, ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν.

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. ἐπεὶ οὖν ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί, τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχές ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας: ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ Δ: τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.2

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ἐστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω: λέγω, ὅτι οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

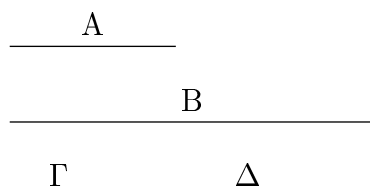


Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω: ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ, οἱ Δ, Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. καὶ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B: καὶ τῶν A, B ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν [οἱ] ἀριθμοί: οἱ ἄρα A, B ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.3

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B ποιεῖτω: λέγω, ὅτι ὁ B κύβος ἐστίν.



Εἰλήφθω γὰρ τοῦ A πλευρὰ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω. φανερόν δὴ ἐστίν, ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν, ὁ Δ ἄρα τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν A. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ: καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν A. τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ A ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχές ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ οἱ Γ, Δ. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν, ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν A κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A, ὁ A πρὸς τὸν B. τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ A δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν

ἀριθμοί: καὶ τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ἦ, καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. καὶ ἔστιν ὁ A κύβος: καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.4

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A κύβον ἀριθμὸν τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω: λέγω, ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν.

$$\begin{array}{r} \underline{A} \\ B \\ \underline{\quad} \\ \Gamma \\ \underline{\quad} \\ \Delta \end{array}$$

Ὁ γὰρ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω: ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ A ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ . καὶ ἐπεὶ οἱ A, B κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσὶν οἱ A, B . τῶν A, B ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί: ὥστε καὶ τῶν Δ, Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ : κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.5

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ A ἀριθμὸν τινα τὸν B πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιεῖτω: λέγω, ὅτι ὁ B κύβος ἐστίν.

$$\begin{array}{r} \underline{A} \\ B \\ \underline{\quad} \\ \Gamma \\ \underline{\quad} \\ \Delta \end{array}$$

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω: κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Δ, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. τῶν Δ, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β: καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. καὶ ἐστὶ κύβος ὁ Α: κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.6

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν.

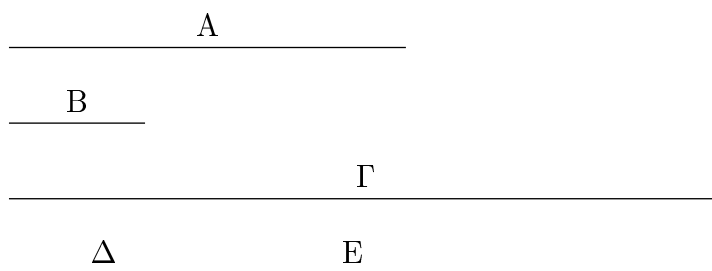
$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \hline \text{B} \\ \hline \text{Γ} \\ \hline \end{array}$$

(Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β: καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Β, Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοὶ εἰσιν. τῶν Β, Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ τῶν Α, Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον εἰσιν ἀριθμοί. καὶ ἐστὶ κύβος ὁ Β: κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.7

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμὸν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται.

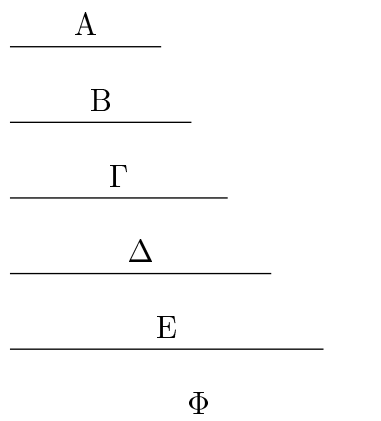
Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμὸν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω: λέγω, ὅτι ὁ Γ στερεὸς ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ A σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. μετρεῖσθω ὑπὸ τοῦ Δ , καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν A μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ E . ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ E μονάδας, ὁ E ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν A πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ A ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ, E , ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ, E τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστιν, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσὶν οἱ Δ, E, B : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.8

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἐστὶ καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες.



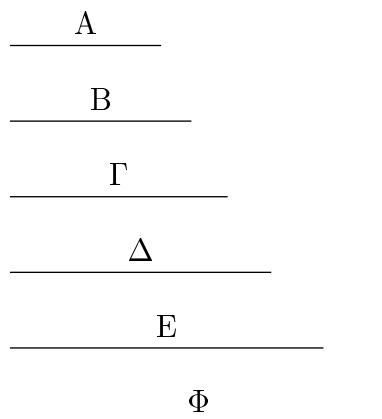
Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$: λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ B τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Z κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A , οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B , ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν B . ἡ δὲ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν: τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ B . καὶ ἐπεὶ οἱ B, Γ, Δ

ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστιν, καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας: καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας: ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστίν, καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος: ὁ ἄρα ἑβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.9

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾗ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾗ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.



Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α τετράγωνος ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται: λέγω [δὴ], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ ἐστὶν ὁ Α τετράγωνος, καὶ ὁ Γ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ [καὶ] οἱ Β, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ ἐστὶν ὁ Β τετράγωνος, καὶ ὁ Δ [ἄρα] τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

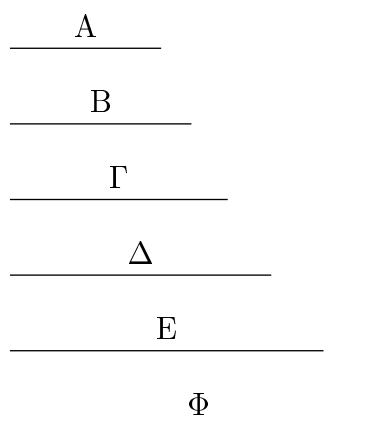
Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος: λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται: λέγω [δὴ], ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ

καὶ ὁ A τὸν B. ἢ δὲ μονὰς τὸν A μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. καὶ ἐστὶν ὁ A κύβος. ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστίν: καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, καὶ ἐστὶν ὁ A κύβος, καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ E κύβος ἐστίν, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.10

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἐξῆς] ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ἦ τετράγωνος, οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων πάντων. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ἦ, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων.



Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A μὴ ἔστω τετράγωνος: λέγω, ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος [καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων].

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. ἔστι δὲ καὶ ὁ B τετράγωνος: οἱ B, Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ, ὁ A πρὸς τὸν B: οἱ A, B ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν: ὥστε οἱ A, B ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν. καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ B: τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ A: ὅπερ οὐχ ὑπέκειτο. οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἑνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ A κύβος. λέγω, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

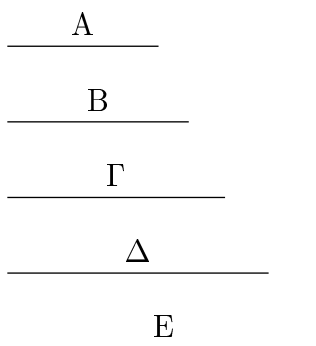
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. ἔστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος: τέταρτος γὰρ ἐστὶν ἀπὸ τῆς μονάδος. καὶ ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὁ B πρὸς τὸν Γ: καὶ ὁ B ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον. καὶ ἐστὶν ὁ Γ κύβος: καὶ ὁ B ἄρα κύβος ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A, ὁ A πρὸς τὸν B, ἢ δὲ μονὰς τὸν A μετρεῖ

κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. κύβος ἄρα καὶ ὁ Α: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.11

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ Β, Γ, Δ, Ε: λέγω, ὅτι τῶν Β, Γ, Δ, Ε ὁ ἐλάχιστος ὁ Β τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν Γ, Δ.



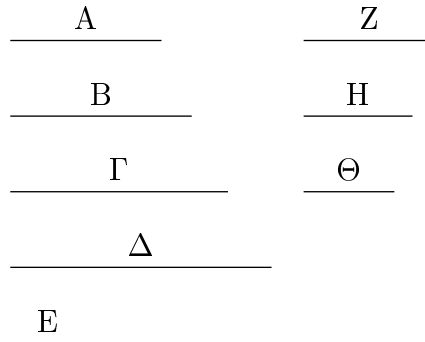
Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε: ἐναλλάξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας: καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας: ὥστε ὁ ἐλάττων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τινὰ ἀριθμὸν τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Corollary

Καὶ φανερόν, ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ' ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρομένου ἐπὶ τὸ πρὸ αὐτοῦ. Ἐπεὶ ἔδει δεῖξαι.

IX.12

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὑφ' ὧν ἂν ὁ ἔσχατος πρῶτων ἀριθμῶν μετρηθῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.



Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ: λέγω, ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρηῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ A μετρηθήσεται.

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπὸ τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ E: λέγω, ὅτι ὁ E τὸν A μετρεῖ. μὴ γάρ: καὶ ἐστὶν ὁ E πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὄν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν: οἱ E, A ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Z: ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. πάλιν, ἐπεὶ ὁ A τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, ὁ A ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ E τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν E, Z. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E, ὁ Z πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν Γ. μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν H: ὁ E ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, B ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν E, H. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν E, ὁ H πρὸς τὸν B. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκεις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν B. μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ: ὁ E ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν E, Θ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ A. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ E πρὸς τὸν A, ὁ A πρὸς τὸν Θ. οἱ δὲ A, E πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: μετρεῖ ἄρα ὁ E τὸν A ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα οἱ E, A πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. σύνθετοι ἄρα. οἱ δὲ σύνθετοι ὑπὸ [πρώτου] ἀριθμοῦ τινος μετροῦνται. καὶ ἐπεὶ ὁ E πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑπὸ ἐτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ' ἑαυτοῦ, ὁ E ἄρα τοὺς A, E μετρεῖ: ὥστε ὁ E τὸν A μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ: ὁ E ἄρα τοὺς A, Δ μετρεῖ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι ὑφ' ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρηῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ A μετρηθήσεται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.13

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα πρῶτος ᾗ, ὁ μέγιστος ὑπ' οὐδενὸς [ἄλλου] μετρηθήσεται παρὲξ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

A	E
B	Z
Γ	H
Δ	Θ

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A πρῶτος ἔστω: λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν A, B, Γ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ E, καὶ ὁ E μηδενὶ τῶν A, B, Γ ἔστω ὁ αὐτός. φανερόν δὴ, ὅτι ὁ E πρῶτος οὐκ ἔστιν. εἰ γὰρ ὁ E πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῶ ὁ αὐτός: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ E πρῶτός ἐστιν. σύνθετος ἄρα. πᾶς δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται: ὁ E ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ, ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου μετρηθήσεται πλὴν τοῦ A. εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ E, ὁ δὲ E τὸν Δ μετρεῖ, κάκεινος ἄρα τὸν Δ μετρήσει: ὥστε καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῶ ὁ αὐτός: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ A ἄρα τὸν E μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Z. λέγω, ὅτι ὁ Z οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ ὁ Z ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν E, καὶ εἷς ἄρα τῶν A, B, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν E. ἀλλὰ εἷς τῶν A, B, Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τινὰ τῶν A, B, Γ: καὶ ὁ E ἄρα ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ὁ Z ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι μετρεῖται ὁ Z ὑπὸ τοῦ A, δεικνύντες πάλιν, ὅτι ὁ Z οὐκ ἐστὶ πρῶτος. εἰ γὰρ, καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῶ ὁ αὐτός: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Z: σύνθετος ἄρα. ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται: ὁ Z ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. λέγω δὴ, ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται πλὴν τοῦ A. εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Z μετρεῖ, ὁ δὲ Z τὸν Δ μετρεῖ, κάκεινος ἄρα τὸν Δ μετρήσει: ὥστε καὶ τὸν A μετρήσει πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῶ ὁ αὐτός: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ὁ A ἄρα τὸν Z μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ὁ E τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Z, ὁ E ἄρα τὸν Z πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, Γ ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν E, Z. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ A πρὸς τὸν E, οὕτως ὁ Z πρὸς τὸν Γ. ὁ δὲ A τὸν E μετρεῖ: καὶ ὁ Z ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν H. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B ἐστὶν ὁ αὐτός, καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ A. καὶ ἐπεὶ ὁ Z τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν H, ὁ Z ἄρα τὸν H πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, B ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν Z, H. ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ A πρὸς τὸν Z, ὁ H πρὸς τὸν B. μετρεῖ δὲ ὁ A τὸν Z: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ H τὸν B. μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ὁ Θ τῶ A οὐκ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ H τὸν B μετρεῖ κατὰ τὸν Θ, ὁ H ἄρα τὸν

Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α εἰς αὐτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν: ὁ ἄρα ὑπὸ Θ, Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Η. μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η: μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α πρῶτον ὄντα μὴ ὦν αὐτῶ ὁ αὐτός: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος ὁ Δ ὑπὸ ἐτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρῆξ τῶν Α, Β, Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.14

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρηῖται, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρῆξ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ μετρεῖσθω: λέγω, ὅτι ὁ Α ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρῆξ τῶν Β, Γ, Δ.

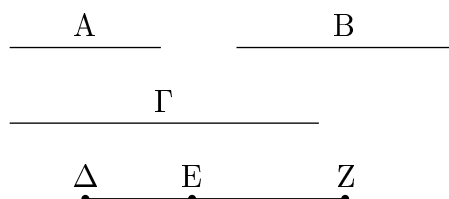


Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ: ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β, Γ, Δ. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρή τις πρῶτος ἀριθμὸς, καὶ ἓνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει: οἱ Β, Γ, Δ ἄρα ἓνα τῶν Ε, Ζ μετρήσουσιν. τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν: ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι καὶ οὐδενὶ τῶν Β, Γ, Δ ὁ αὐτός. τὸν Ζ ἄρα μετροῦσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α: ὅπερ ἀδύνατον. ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β, Γ, Δ μετρούμενος. οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς παρῆξ τῶν Β, Γ, Δ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.15

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ὦσιν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν.

Ἐστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α, Β, Γ: λέγω, ὅτι τῶν Α, Β, Γ δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α, Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β, Γ πρὸς τὸν Α καὶ ἔτι οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β.

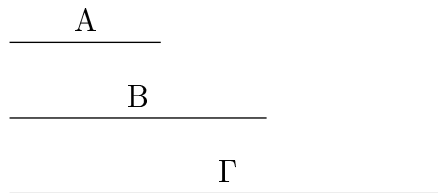


Εὐλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α, Β, Γ δύο οἱ ΔΕ, ΕΖ. φανερόν δὴ, ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσιν, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, καὶ συναμφοτέρος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστιν: καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν: οἱ ΔΖ, ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτοι ᾧσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν: ὥστε ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν: ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. [ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν]. ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν ΖΔ, ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ: ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. καὶ ἐστὶν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ: οἱ Α, Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ οἱ Β, Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσιν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ οἱ Α, Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτός ἐστιν. ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσὶν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ δις ἐκ τῶν ΔΕ, ΕΖ: καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί [εἰσιν]. διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ὑπὸ ΔΕ, ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. καὶ ἐστὶν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ. οἱ Α, Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.16

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ᾧσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά.

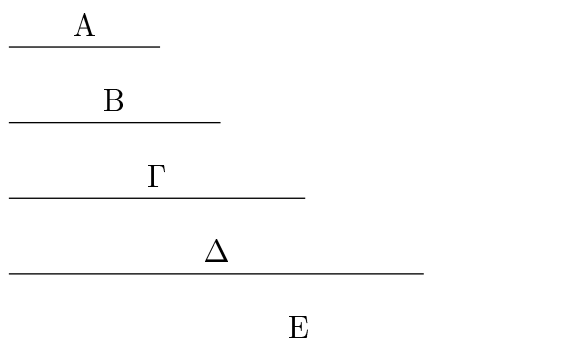
Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν: λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. οἱ δὲ Α, Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὃ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν: ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.17

Ἐὰν ὧσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὧσιν, οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά.



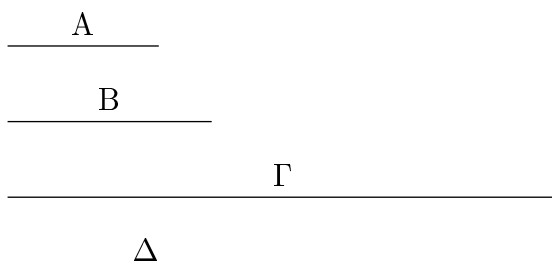
Ἐστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ A, Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν: λέγω, ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν E: ἐναλλάξ ἄρα ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Δ, ὁ B πρὸς τὸν E. οἱ δὲ A, Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν B, καὶ ἔστιν ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, ὁ B πρὸς τὸν Γ. καὶ ὁ B ἄρα τὸν Γ μετρεῖ: ὥστε καὶ ὁ A τὸν Γ μετρεῖ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, μετρεῖ δὲ ὁ B τὸν Γ, μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. ἀλλ' ὁ A τὸν Γ ἐμέτρει: ὥστε ὁ A καὶ τὸν Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν. ὁ A ἄρα τοὺς A, Δ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ A πρὸς τὸν B, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.18

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ A, B, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.



Οί δὴ Α, Β ἦτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ οὐ. καὶ εἰ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α, Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιεῖτω: ὁ Α δὴ τὸν Γ ἦτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρεῖτω πρότερον κατὰ τὸν Δ: ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ: τοῖς Α, Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσηύρηται ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ Α τὸν Γ: λέγω, ὅτι τοῖς Α, Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσηυρήσθω ὁ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β. ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ: ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν: ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α, Β τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.19

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ, καὶ δεόν ἐστὼ ἐπισκέψασθαι, πότε δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἦτοι οὖν οὐκ εἰσὶν ἐξῆς ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ οὔτε ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ καὶ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν.

$$\begin{array}{c} \text{A} \\ \hline \text{B} \\ \hline \text{Γ} \\ \hline \end{array}$$

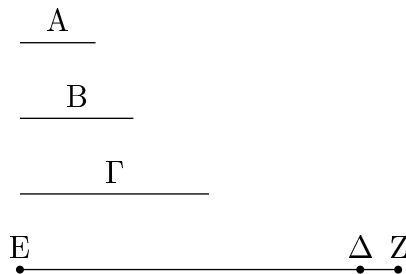
Εἰ μὲν οὖν οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς εἰσὶν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, δέδεικται, ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α, Β, Γ ἐξῆς ἀνάλογον τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρῶτων πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε εἶναι ὡς τὸν Α πρὸς τὸν Β, τὸν Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ γερονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, δι' ἴσου ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. οἱ δὲ Α, Γ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ὁ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον. μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Γ ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν: ὁ Α ἄρα τοὺς Α, Γ μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοῖς Α, Β, Γ δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἕστωσαν οἱ A, B, Γ ἐξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ A, Γ μὴ ἕστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω: ὁ A ἄρα τὸν Δ ἦτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. μετρεῖτω αὐτὸν πρότερον κατὰ τὸν E : ὁ A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Γ . ἀνάλογον ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ A πρὸς τὸν B , ὁ Γ πρὸς τὸν E : τοῖς A, B, Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προσηύρηται ὁ E .

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρεῖτω ὁ A τὸν Δ : λέγω, ὅτι ἀδύνατον ἐστὶ τοῖς A, B, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ E : ὁ ἄρα ἐκ τῶν A, E ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν B, Γ . ἀλλὰ ὁ ἐκ τῶν B, Γ ἐστὶν ὁ Δ : καὶ ὁ ἐκ τῶν A, E ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ . ὁ A ἄρα τὸν E πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν: ὁ A ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν E : ὥστε μετρεῖ ὁ A τὸν Δ . ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστὶ τοῖς A, B, Γ τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν, ὅταν ὁ A τὸν Δ μὴ μετρή. ἀλλὰ δὴ οἱ A, B, Γ μήτε ἐξῆς ἕστωσαν ἀνάλογον μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιεῖτω. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ A τὸν Δ , δυνατόν ἐστὶν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.20

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρῶτων ἀριθμῶν.



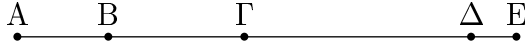
Ἐστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ : λέγω, ὅτι τῶν A, B, Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν A, B, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ὁ ΔE , καὶ προσκείσθω τῷ ΔE μονὰς ἢ ΔZ . ὁ δὴ EZ ἦτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον πρῶτος: εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, EZ πλείους τῶν A, B, Γ .

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρῶτος: ὑπὸ πρῶτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρέισθω ὑπὸ πρῶτου τοῦ H : λέγω, ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσιν: καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ : καὶ λοιπὴν τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὧν: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ H ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ οἱ A, B, Γ, H : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.21

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν.



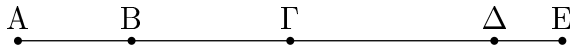
Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν οἱ AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ: λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ: ὥστε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. ἄρτιος δὲ ἀριθμὸς ἐστὶν ὁ δίχα διαιρούμενος: ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.22

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾗ, ὁ ὅλος ἄρτιος ἐστὶν.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος οἱ AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ: λέγω, ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν AB, BΓ, ΓΔ, ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἐστὶν: ὥστε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἐστὶν. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον. καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.23

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὅποσοιοῦν συντεθῶσιν, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾗ, καὶ ὁ ὅλος περισσὸς ἐστὶν.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὅποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοί, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ AB, BΓ, ΓΔ: λέγω, ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν.



Ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ: λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. ἐστὶ δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος: καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. καὶ ἐστὶ μονὰς ἡ ΔΕ. περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.24

Ἐὰν ἀπὸ ἄρτιου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῆ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἄρτιου τοῦ AB ἄρτιος ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ: λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ AB ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ: ὥστε καὶ λοιπὸς [ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ] ἄρτιος [ἄρα] ἐστὶν ὁ ΑΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.25

Ἐὰν ἀπὸ ἄρτιου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῆ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ ἄρτιου τοῦ AB περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ: λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσὸς ἐστὶν.



Ἀφηρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἢ ΓΔ: ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ AB ἄρτιος: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. καὶ ἐστὶ μονὰς ἢ ΓΔ: ὁ ΓΑ ἄρα περισσὸς ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.26

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῆ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ AB περισσὸς ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ: λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν.

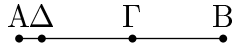


Ἐπεὶ γὰρ ὁ AB περισσὸς ἐστὶν, ἀφηρήσθω μονὰς ἢ ΒΔ: λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστὶν: ὥστε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.27

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῆ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ AB ἄρτιος ἀφηρήσθω ὁ ΒΓ: λέγω, ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσὸς ἐστὶν.

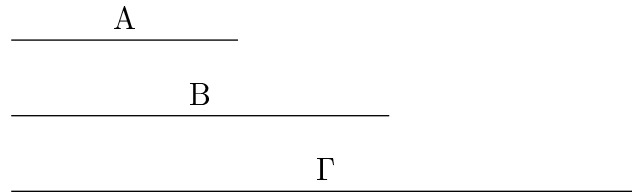


Ἀφηρήσθω [γὰρ] μονὰς ἡ $A\Delta$: ὁ ΔB ἄρα ἄρτιός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ὁ $B\Gamma$ ἄρτιος: καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ $\Gamma\Delta$ ἄρτιός ἐστιν. περισσὸς ἄρα ὁ ΓA : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.28

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται.

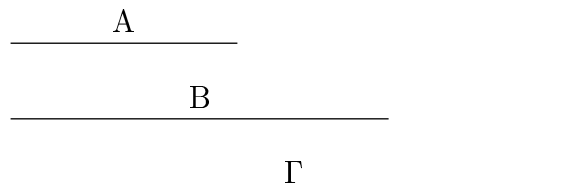
Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ A ἄρτιον τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: λέγω, ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν.



Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ B , ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ A μονάδες. καὶ ἔστιν ὁ B ἄρτιος: ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἄρτιων. ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν. ἄρτιος ἄρα ἔστιν ὁ Γ : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.29

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται.



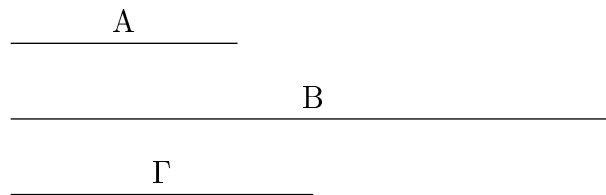
Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ A περισσὸν τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω: λέγω, ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ A τὸν B πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ B , ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ A μονάδες. καὶ ἔστιν ἐκάτερος τῶν A , B περισσός: ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν. ὥστε ὁ Γ περισσός ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.30

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρήῃ, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρεῖτω: λέγω, ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει.

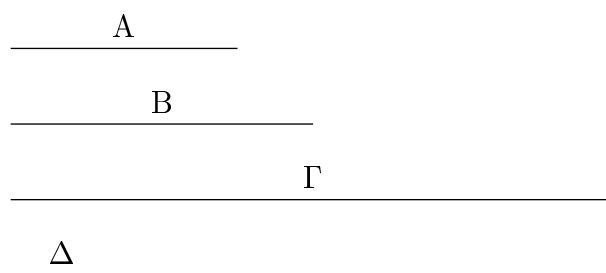


Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρεῖτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ: λέγω, ὅτι ὁ Γ οὐκ ἔστι περισσός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ, ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστίν. ὁ Β ἄρα περισσός ἐστίν: ὅπερ ἄτοπον: ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος. οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστίν: ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὥστε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.31

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρὸς τινὰ ἀριθμὸν πρῶτος ᾗ, καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρὸς τινὰ ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίον ἔστω ὁ Γ: λέγω, ὅτι ὁ Α [καὶ] πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἐστίν.



Εἰ γὰρ μὴ εἰσιν [οἱ Α, Γ] πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. καὶ ἐστὶν ὁ Α περισσός: περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὦν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἐστὶν ὁ Γ ἄρτιος, καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει [ὁ Δ]. τοῦ δὲ Γ ἥμισύ ἐστὶν ὁ Β: ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α. ὁ Δ ἄρα τοὺς Α, Β μετρεῖ πρῶτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἐστίν. οἱ Α, Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.32

Τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον.

Ἀπὸ γὰρ δυάδος τῆς Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ Β, Γ, Δ: λέγω, ὅτι οἱ Β, Γ, Δ ἀρτιάκις ἄρτιοὶ εἰσι μόνον.



Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος [τῶν Β, Γ, Δ] ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστιν, φανερόν: ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθεὶς. λέγω, ὅτι καὶ μόνον. ἐκκείσθω γὰρ μονάς. ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α, Β, Γ, Δ ὁ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρ᾽ ἑξ τῶν Α, Β, Γ. καὶ ἐστὶν ἕκαστος τῶν Α, Β, Γ ἄρτιος: ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι [καὶ] ἑκάτερος τῶν Β, Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.33

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχη περισσόν, ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν: λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον.



Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστιν, φανερόν: ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μόνον. εἰ γὰρ ἔσται ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν: ὥστε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ὢν: ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.34

Ἐὰν ἀριθμὸς μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἢ μῆτε τὸν ἥμισυν ἔχη περισσόν, ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός.

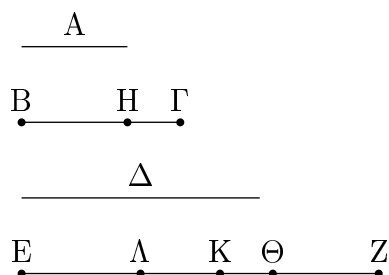
Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μῆτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων ἔστω μῆτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν: λέγω, ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τέ ἐστιν ἄρτιος καὶ ἀρτιάκις περισσός.

A

Ὅτι μὲν οὖν ὁ A ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν: τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. εἰ γὰρ τὸν A τέμνωμεν δίχα καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταστήσομεν εἰς τινα ἀριθμὸν περισσόν, ὅς μετρήσει τὸν A κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν. εἰ γὰρ οὐ, καταστήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ A τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. ὥστε ὁ A ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος. ὁ A ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι καὶ ἀρτιάκις περισσός: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.35

Ἐὰν ὣσιν ὁσοῖδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπὸ τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ, ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.



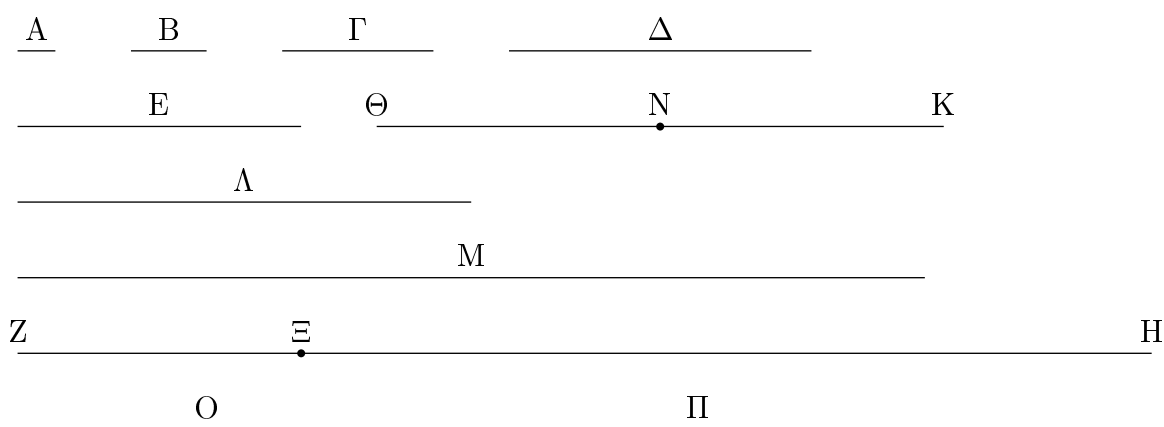
Ἐστωσαν ὁποσοῖδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, BΓ, Δ, EZ ἀρχόμενοι ἀπὸ ἐλαχίστου τοῦ A, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ BΓ καὶ τοῦ EZ τῷ A ἴσος ἕκαστος τῶν BH, ZΘ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ HΓ πρὸς τὸν A, οὕτως ὁ EΘ πρὸς τοὺς A, BΓ, Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν BΓ ἴσος ὁ ZK, τῷ δὲ Δ ἴσος ὁ ZΛ. καὶ ἐπεὶ ὁ ZK τῷ BΓ ἴσος ἐστίν, ὧν ὁ ZΘ τῷ BH ἴσος ἐστίν, λοιπὸς ἄρα ὁ ΘK λοιπῷ τῷ HΓ ἐστὶν ἴσος. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ EZ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν BΓ καὶ ὁ BΓ πρὸς τὸν A, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ZΛ, ὁ δὲ BΓ τῷ ZK, ὁ δὲ A τῷ ZΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ EZ πρὸς τὸν ZΛ, οὕτως ὁ ΛZ πρὸς τὸν ZK καὶ ὁ ZK πρὸς τὸν ZΘ. διελόντι, ὡς ὁ EΛ πρὸς τὸν ΛZ, οὕτως ὁ ΛK πρὸς τὸν ZK καὶ ὁ KΘ πρὸς τὸν ZΘ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἰς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἐπομένους: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ KΘ πρὸς τὸν ZΘ, οὕτως οἱ EΛ, ΛK, KΘ πρὸς τοὺς ΛZ, ZK, ΘZ. ἴσος δὲ ὁ μὲν KΘ τῷ ΓH, ὁ δὲ ZΘ τῷ A, οἱ δὲ ΛZ, ZK, ΘZ τοῖς Δ, BΓ, A: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓH πρὸς τὸν A, οὕτως ὁ EΘ πρὸς τοὺς Δ, BΓ, A. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρώτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

IX.36

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιῶν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπαρ ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῆ τινὰ, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁσοῖδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπαρ συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω, ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν.



Ὅσοι γὰρ εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε, Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α, Μ. καὶ ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε, Δ ὁ ΖΗ: καὶ ὁ ἐκ τῶν Α, Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ. ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν: ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. καὶ ἐστὶ δυὰς ὁ Α: διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ, Λ, ΘΚ, Ε ἐξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων: οἱ Ε, ΘΚ, Λ, Μ, ΖΗ ἄρα ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. ἀφηρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ΖΗ τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος ἑκάτερος τῶν ΘΝ, ΖΞ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ, Λ, ΚΘ, Ε. καὶ ἐστὶν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε: καὶ ὁ ΞΗ ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ, Λ, ΘΚ, Ε. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΖΞ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι. ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τοῖς Α, Β, Γ, Δ καὶ τῇ μονάδι: καὶ μετρεῖται ὑπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. εἰ γὰρ δυνατόν, μετρεῖτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ ἔστω ὁ αὐτός. καὶ ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π: ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὁ Δ ἄρα ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ. καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α, Β, Γ ὁ αὐτός: οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. ἀλλ' ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Π: οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. καὶ

ἔστιν ὁ Ε πρῶτος: πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτος [ἔστιν]. οἱ Ε, Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκεις ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἐπόμενος τὸν ἐπόμενον: καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ: ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ: ἰσάκεις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται παρὲξ τῶν Α, Β, Γ: ὁ Π ἄρα ἐνὶ τῶν Α, Β, Γ ἔστιν ὁ αὐτός. ἔστω τῷ Β ὁ αὐτός. καὶ ὅσοι εἰσίν οἱ Β, Γ, Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εὐλόγησαν ἀπὸ τοῦ Ε οἱ Ε, ΘΚ, Λ. καὶ εἰσίν οἱ Ε, ΘΚ, Λ τοῖς Β, Γ, Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ: δι' ἴσου ἄρα ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Λ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β, Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ, Ε: ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ, Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π, Ο: καὶ ὁ ἐκ τῶν Π, Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β, Λ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός: καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ Ο ἔστιν ὁ αὐτός: ὅπερ ἀδύνατον: ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός. οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρήσει τις ἀριθμὸς παρὲξ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῆς μονάδος. καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΘΚ, Λ, Μ καὶ τῇ μονάδι ἴσος. τέλειος δὲ ἀριθμὸς ἔστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὢν: τέλειος ἄρα ἔστιν ὁ ΖΗ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Book X

Definitions I

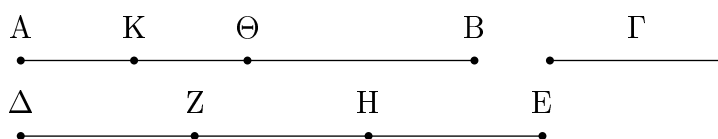
1. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῶ αὐτῶ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι.
2. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα τῶ αὐτῶ χωρίῳ μετρήται, ἀσύμμετροι δέ, ὅταν τοῖς ἀπ' αὐτῶν τετραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γενέσθαι.
3. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται, ὅτι τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει. καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθείσα εὐθεῖα ῥητή, καὶ αἱ ταύτη σύμμετροι εἴτε μήκει καὶ δυνάμει εἴτε δυνάμει μόνον ῥηταί, αἱ δὲ ταύτη ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθωσαν.
4. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τετράγωνον ῥητόν, καὶ τὰ τοῦτῳ σύμμετρα ῥητά, τὰ δὲ τοῦτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω, καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι, εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί, εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι.

Propositions

X.1

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειψθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.

Ἐστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ AB, Γ, ὧν μείζον τὸ AB: λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ AB ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειψθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους.



Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ AB μείζον. πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ AB μείζον, καὶ διηρήσθω τὸ ΔΕ

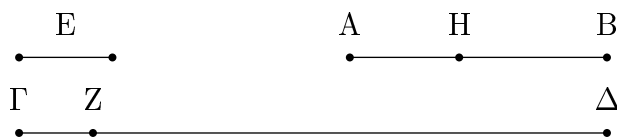
εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ, καὶ ἀφῆρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὔσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ: καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῆρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἥμισυος τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μείζον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῆρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ δὲ ΘΑ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ: καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μείζον ἐστίν. ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὄν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι. Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, καὶν ἡμίση ἢ τὰ ἀφαιρούμενα.

X.2

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῆ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.



Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ: λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

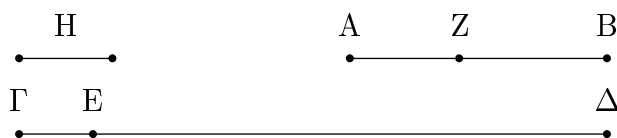
Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖται, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε: καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῆ τι μέγεθος, ὃ ἐστὶν ἔλασσον τοῦ Ε. γεγονέντω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ: καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος: ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἐζῆς.

X.3

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ: δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.



Τὸ AB γὰρ μέγεθος ἦτοι μετρεῖ τὸ $\Gamma\Delta$ ἢ οὐ. εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ AB ἄρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν: καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μείζον γὰρ τοῦ AB μεγέθους τὸ AB οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρεῖτω δὴ τὸ AB τὸ $\Gamma\Delta$. καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ $AB, \Gamma\Delta$: καὶ τὸ μὲν AB τὸ $E\Delta$ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασσον τὸ $E\Gamma$, τὸ δὲ $E\Gamma$ τὸ ZB καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἕλασσον τὸ AZ , τὸ δὲ AZ τὸ ΓE μετρεῖτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ AZ τὸ ΓE μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ, καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό: καὶ ὅλον ἄρα τὸ AB μετρήσει τὸ AZ . ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔE μετρεῖ: καὶ τὸ AZ ἄρα τὸ $E\Delta$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓE : καὶ ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Delta$ μετρεῖ: τὸ AZ ἄρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μείζον τοῦ AZ , ὃ μετρήσει τὰ $AB, \Gamma\Delta$. ἔστω τὸ H . ἐπεὶ οὖν τὸ H τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB τὸ $E\Delta$ μετρεῖ, καὶ τὸ H ἄρα τὸ $E\Delta$ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ $\Gamma\Delta$: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓE μετρήσει τὸ H . ἀλλὰ τὸ ΓE τὸ ZB μετρεῖ: καὶ τὸ H ἄρα τὸ ZB μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB , καὶ λοιπὸν τὸ AZ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἕλασσον: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζον τι μέγεθος τοῦ AZ τὰ $AB, \Gamma\Delta$ μετρήσει: τὸ AZ ἄρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμετρῶν δοθέντων τῶν $AB, \Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἠύρηται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

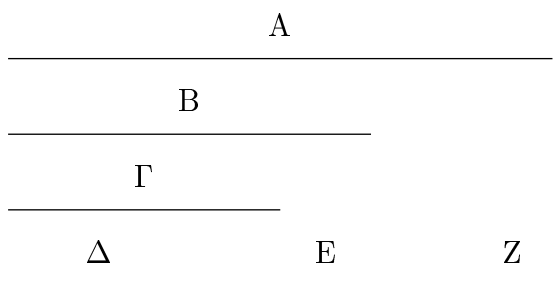
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

X.4

Τριῶν μεγεθῶν συμμετρῶν δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὔρεῖν.

Ἐστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ A, B, Γ : δεῖ δὴ τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὔρεῖν.



Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν A, B τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ : τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ [μετρεῖ]. μετρεῖτω πρότερον. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ A, B , τὸ Δ ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ: τὸ Δ ἄρα τῶν A, B, Γ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον: μείζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ A, B οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρεῖτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ . λέγω πρῶτον, ὅτι σύμμετρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ . ἐπεὶ γὰρ σύμμετρα ἐστὶ τὰ A, B, Γ , μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ A, B μετρήσει: ὥστε καὶ τὸ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ : ὥστε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ, Δ : σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ, Δ . εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ E . ἐπεὶ οὖν τὸ E τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ A, B μετρεῖ, καὶ τὸ E ἄρα τὰ A, B μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ . τὸ E ἄρα τὰ A, B, Γ μετρεῖ: τὸ E ἄρα τῶν A, B, Γ κοινόν ἐστὶ μέτρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ E μείζον μέγεθος τὸ Z , καὶ μετρεῖτω τὰ A, B, Γ . καὶ ἐπεὶ τὸ Z τὰ A, B, Γ μετρεῖ, καὶ τὰ A, B ἄρα μετρήσει καὶ τὸ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. τὸ δὲ τῶν A, B μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ : τὸ Z ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ : τὸ Z ἄρα τὰ Γ, Δ μετρεῖ: καὶ τὸ τῶν Γ, Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Z . ἔστι δὲ τὸ E : τὸ Z ἄρα τὸ E μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα μείζον τι τοῦ E μεγέθους [μέγεθος] τὰ A, B, Γ μετρεῖ: τὸ E ἄρα τῶν A, B, Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν, ἐὰν μὴ μετρή τὸ Δ τὸ Γ , ἐὰν δὲ μετρή, αὐτὸ τὸ Δ .

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἠύρηται [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρή, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Ὅμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.5

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἀλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ A, B : λέγω, ὅτι τὸ A πρὸς τὸ B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρα ἐστὶ τὰ A, B , μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Γ . καὶ ὅσάκις τὸ Γ τὸ A μετρεῖ τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ , ὅσάκις δὲ

τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Α	Β	Γ
Δ	Ε	

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ: ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ καὶ τὸ Γ τὸ Β: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.6

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχη, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἀλλήλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε: λέγω, ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Α	Β	Γ
Δ	Ε	Ζ

Ὅσαι γὰρ εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διηρήσθω τὸ Α, καὶ ἐνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ: ὅσαι δὲ εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ τοῦ Α: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν: μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Α. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν], ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. πάλιν ἐπεὶ, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά εἰσι καὶ ἐν τῷ Ζ ἴσα τῷ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε [ἀριθμὸν]. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ἐστὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β: καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ πρὸς τὸ Ζ. τὸ Α ἄρα πρὸς ἐκάτερον τῶν Β, Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει

λόγον: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ B τῷ Z. μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Z: μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ B. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ A: τὸ Γ ἄρα τὰ A, B μετρεῖ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ A τῷ B.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ᾧσι δύο ἀριθμοί, ὡς οἱ Δ, Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α, Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῆ, ὡς ἡ Β, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, τουτέστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν: γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β εὐθείας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.7

Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

Ἐστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α, Β: λέγω, ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

$$\frac{A}{B}$$

εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. οὐκ ἔστι δέ: οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.8

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχη, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

$$\frac{A}{B}$$

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α, Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν: λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ Α, Β μεγέθη.

Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α, Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.9

Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμετρῶν εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμετρους. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμετρῶν εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἀλλήλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἔξει μήκει συμμετρους.

Ἐστωσαν γὰρ αἱ A, B μήκει σύμμετροι: λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

$$\begin{array}{cc} \frac{A}{\Gamma} & \frac{B}{\Delta} \\ \hline \Gamma & \Delta \end{array}$$

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει, ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς A πρὸς τὴν B λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον: τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: τοῦ δὲ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον: δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἰς μέσος ἀνάλογόν ἐστὶν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον [ἀριθμὸν] διπλασίονα λόγον ἔχει, ἢπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν: ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν].

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον]: λέγω, ὅτι σύμμετρός ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον], οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [τετράγωνον], ἀλλ' ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς A τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς A πρὸς τὴν B λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] τετραγώνου [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ [ἀριθμοῦ] τετράγωνον [ἀριθμὸν] λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ [ἀριθμοῦ] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν] λόγου, ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ὁ Γ [ἀριθμὸς] πρὸς τὸν Δ [ἀριθμὸν]. ἡ A ἄρα πρὸς τὴν B, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ B μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ A τῇ B μήκει: λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον] λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον] λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ A τῇ B. οὐκ ἔστι

δέ: οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B [τετράγωνον] λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: λέγω, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῆ B μήκει.

Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρος ἡ A τῆ B, ἔξει τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. οὐκ ἔχει δέ: οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῆ B μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

Corollary

Καὶ φανερόν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἔσται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει [εἴπερ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστιν. ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

πάλιν ἐπεὶ, ὅσα τετράγωνα πρὸς ἀλλήλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, μήκει ἐδείχθη σύμμετρα καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλὰ ἀπλῶς, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει: ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

λέγω δὴ, ὅτι [καὶ] αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὔσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ὥστε οὐχ αἱ τῷ μήκει ἀσύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ δύνανται μήκει οὔσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι: εἰ γὰρ [εἰσὶ] μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι: ὅπερ ἄτοπον. αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει].

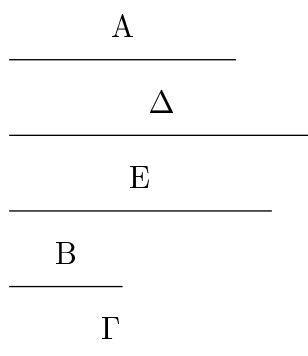
Lemma

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοι εἰσὶν ἐπίπεδοι. καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί, τουτέστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. εἰ γὰρ ἔξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται: ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν.

X.10

Τῆ προτεθείση εὐθεία προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

Ἐστω ἡ προτεθείσα εὐθεῖα ἡ A: δεῖ δὴ τῆ A προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει.

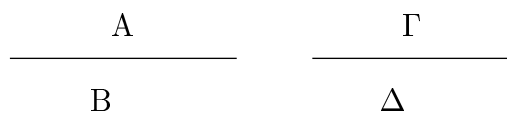


Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ B, Γ πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τουτέστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ B πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον: ἐμάθομεν γάρ: σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τῷ ἀπὸ τῆς Δ. καὶ ἐπεὶ ὁ B πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῆ Δ μήκει. εἰλήφθω τῶν A, Δ μέση ἀνάλογον ἡ E: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς E. ἀσύμμετρος δὲ ἐστὶν ἡ A τῆ Δ μήκει: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς E τετραγώνῳ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῆ E δυνάμει.

Τῆ ἄρα προτεθείση εὐθεία τῆ A προσεύρηται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ, E, μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ E [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

X.11

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾗ, τὸ δὲ πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται: καὶ τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾗ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.



Ἐστώσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον τὰ A, B, Γ, Δ, ὡς τὸ A πρὸς τὸ B, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ A δὲ τῷ B σύμμετρον ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ: καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ: οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.12

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα.

Ἐκάτερον γὰρ τῶν Α, Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. λέγω, ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

A	B	Γ
Δ		
E	Θ	
Z	K	
H	Λ	

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Γ τῷ Β, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν. ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η εὐλόγησαν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις οἱ Θ, Κ, Λ: ὥστε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.

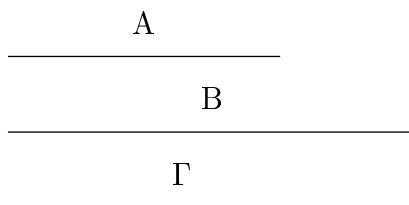
Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, [οὕτως] ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ: δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ. τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Λ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.13

Ἐὰν ἦ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἐστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ A, B, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ A ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ B τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστιν.



Εἰ γὰρ ἔστι σύμμετρον τὸ B τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ A τῷ B σύμμετρον ἔστιν, καὶ τὸ A ἄρα τῷ Γ σύμμετρον ἔστιν. ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα σύμμετρον ἔστι τὸ B τῷ Γ: ἀσύμμετρον ἄρα.

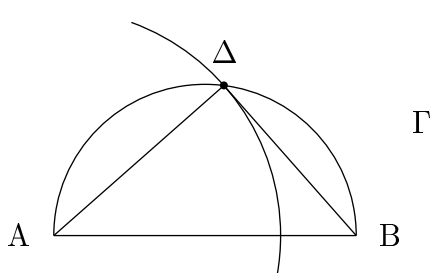
Ἐὰν ἄρα ἦ δύο μεγέθη σύμμετρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

Lemma

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων εὐρεῖν, τίνι μείζον δύναται ἢ μείζον τῆς ἐλάσσονος.

Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ AB, Γ, ὧν μείζον ἔστω ἡ AB: δεῖ δὴ εὐρεῖν, τίνι μείζον δύναται ἢ AB τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AΔB, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἢ AΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB. φανερόν δὴ, ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ AΔB γωνία, καὶ ὅτι



ἢ AB τῆς AΔ, τουτέστι τῆς Γ, μείζον δύναται τῇ ΔB.

Ὅμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ δυναμένη αὐτὰς εὐρίσκεται οὕτως.

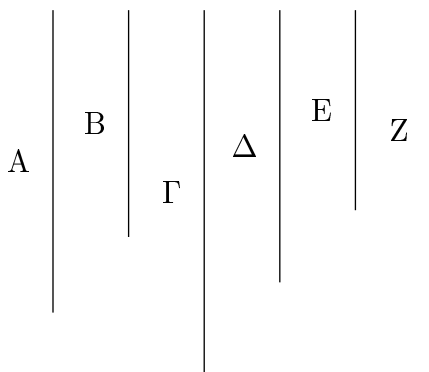
Ἐστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AΔ, ΔB, καὶ δέον ἔστω εὐρεῖν τὴν δυναμένην αὐτάς. κείσθωσαν γὰρ, ὥστε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν τὴν ὑπὸ AΔ, ΔB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB: φανερόν πάλιν, ὅτι ἢ τὰς AΔ, ΔB δυναμένη ἐστὶν ἡ AB: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.14

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ [μήκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ

ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μῆκει], καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ [μῆκει].

Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ A, B, Γ, Δ , ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , καὶ ἡ A μὲν τῆς B μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς E , ἡ δὲ Γ τῆς Δ μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Z : λέγω, ὅτι, εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z , εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z .



Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B ,

οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν E, B , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Z . ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν E, B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Δ, Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ : διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς E πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Z πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ : ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ E πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Z πρὸς τὴν Δ : ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν E , οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Z . ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ : δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν E , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Z . εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z , εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ A τῇ E , ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Z .

Ἐὰν ἄρα, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.15

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῆ, καὶ τὸ ὅλον ἐκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται: καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν σύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ $AB, B\Gamma$: λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ AG ἐκατέρῳ τῶν $AB, B\Gamma$ ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ $AB, B\Gamma$, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ . ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ $AB, B\Gamma$ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ AG μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ



τὰ AB, BΓ. τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BΓ, AΓ μετρεῖ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓ ἑκατέρῳ τῶν AB, BΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ AΓ ἔστω σύμμετρον τῷ AB: λέγω δὴ, ὅτι καὶ τὰ AB, BΓ σύμμετρα ἐστίν.

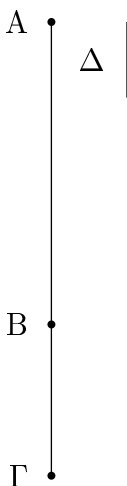
Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρα ἐστὶ τὰ AΓ, AB, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓA, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB: τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρήσει: σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.16

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῆ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται: καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα τὰ AB, BΓ: λέγω, ὅτι καὶ ὅλον τὸ AΓ ἑκατέρῳ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ἀσύμμετρα τὰ ΓA, AB, μετρήσει τι [αὐτὰ] μέγεθος. μετρεῖτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓA, AB μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ BΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ AB: τὸ Δ ἄρα τὰ AB, BΓ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, BΓ: ὑπέκειντο δὲ καὶ ἀσύμμετρα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓA, AB μετρήσει τι μέγεθος: ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓA, AB. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὰ AΓ, ΓB ἀσύμμετρα ἐστίν. τὸ AΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν AB, BΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

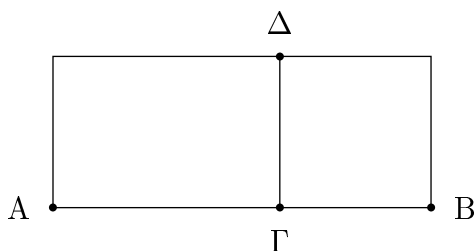
Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἐνὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω. ἔστω δὴ πρότερον τῷ ΑΒ: λέγω, ὅτι καὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστιν. εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ: τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ, ΑΒ μετρεῖ. σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ, ΑΒ: ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος: ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη, καὶ τὰ ἐξῆς.

Lemma

Ἐὰν παρά τινα εὐθείαν παραβληθῆ παραλληλόγραμμον ἑλλείπον εἶδει τετραγώνω, τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρά γὰρ εὐθείαν τὴν ΑΒ παραβελήσθω παραλληλόγραμμον



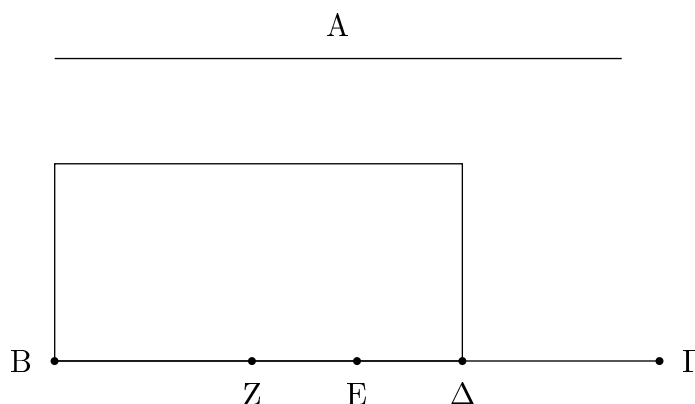
τὸ ΑΔ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνω τῷ ΔΒ: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Καὶ ἐστὶν αὐτόθεν φανερόν: ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καὶ ἐστὶ τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΔ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθείαν, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.17

Ἐὰν ὧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνω καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαίρη μήκει, ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ [μήκει]. καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ [μήκει], τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνω, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαίρει μήκει.



Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A, BΓ, ὧν μείζων ἡ BΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς A, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς A, ἴσον παρὰ τὴν BΓ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ, συμμετρος δὲ ἔστω ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει: λέγω, ὅτι ἡ BΓ τῆς A μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆς.

Τετμήσθω γὰρ ἡ BΓ δίχα κατὰ τὸ E σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔE ἴση ἡ EZ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ BZ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ BΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ E, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ, τὸ ἄρα ὑπὸ BΔ, ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EΓ τετραγώνῳ: καὶ τὰ τετραπλάσια: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς EΓ τετραγώνῳ. ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔZ τετράγωνον: διπλασίων γὰρ ἐστὶν ἡ ΔZ τῆς ΔE. τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς EΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τετράγωνον: διπλασίων γὰρ ἐστὶ πάλιν ἡ BΓ τῆς ΓE. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν A, ΔZ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BΓ τετραγώνῳ: ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς BΓ τοῦ ἀπὸ τῆς A μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔZ: ἡ BΓ ἄρα τῆς A μείζων δύναται τῇ ΔZ. δεικτέον, ὅτι καὶ συμμετρος ἐστὶν ἡ BΓ τῇ ΔZ. ἐπεὶ γὰρ συμμετρος ἐστὶν ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει, συμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BΓ τῇ ΓΔ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ, BZ ἐστὶ συμμετρος μήκει: ἴση γὰρ ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ BZ. καὶ ἡ BΓ ἄρα συμμετρος ἐστὶ ταῖς BZ, ΓΔ μήκει: ὥστε καὶ λοιπὴ τῇ ZΔ συμμετρος ἐστὶν ἡ BΓ μήκει: ἡ BΓ ἄρα τῆς A μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆς.

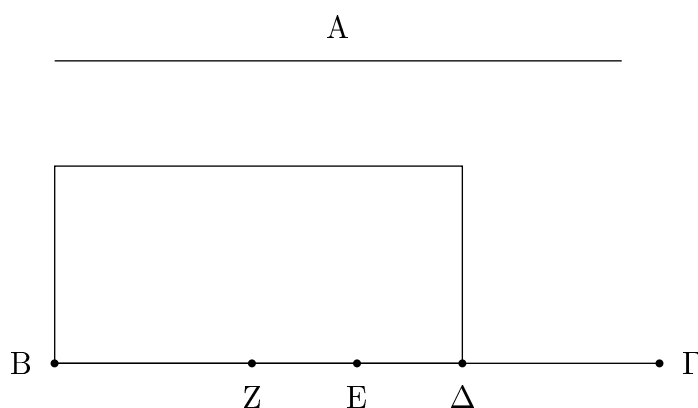
Ἀλλὰ δὴ ἡ BΓ τῆς A μείζων δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆς, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν BΓ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ. δεικτέον, ὅτι συμμετρος ἐστὶν ἡ BΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἡ BΓ τῆς A μείζων δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ZΔ. δύναται δὲ ἡ BΓ τῆς A μείζων τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆς. συμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BΓ τῇ ZΔ μήκει: ὥστε καὶ λοιπὴ συναμφοτέρῳ τῇ BZ, ΔΓ συμμετρος ἐστὶν ἡ BΓ μήκει. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἡ BZ, ΔΓ συμμετρος ἐστὶ τῇ ΔΓ [μήκει]. ὥστε καὶ ἡ BΓ τῇ ΓΔ συμμετρος ἐστὶ μήκει: καὶ διελόντι ἄρα ἡ BΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ συμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.18

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῆ [μήκει], ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ ἐὰν ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ [μήκει].



Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ A , $B\Gamma$, ὧν μείζων ἢ $B\Gamma$, τῷ δὲ τετάρτῳ [μέρει] τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta\Gamma$, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἢ $B\Delta$ τῆ $\Delta\Gamma$ μήκει: λέγω, ὅτι ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. δεικτέον [οὖν], ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ $B\Gamma$ τῆ ΔZ μήκει. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ $B\Delta$ τῆ $\Delta\Gamma$ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ $B\Gamma$ τῆ $\Gamma\Delta$ μήκει. ἀλλὰ ἢ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς BZ , $\Delta\Gamma$: καὶ ἢ $B\Gamma$ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς BZ , $\Delta\Gamma$. ὥστε καὶ λοιπῆ τῆ $Z\Delta$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$: ἢ $B\Gamma$ ἄρα τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν $B\Gamma$ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$. δεικτέον, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ $B\Delta$ τῆ $\Delta\Gamma$ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δεῖξομεν, ὅτι ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Delta$. ἀλλὰ ἢ $B\Gamma$ τῆς A μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ $B\Gamma$ τῆ $Z\Delta$ μήκει: ὥστε καὶ λοιπῆ συναμφοτέρῳ τῆ BZ , $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ $B\Gamma$. ἀλλὰ συναμφοτέρος ἢ BZ , $\Delta\Gamma$ τῆ $\Delta\Gamma$ σύμμετρός ἐστι μήκει: καὶ ἢ $B\Gamma$ ἄρα τῆ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει: ὥστε καὶ διελόντι ἢ $B\Delta$ τῆ $\Delta\Gamma$ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, καὶ τὰ ἐξῆς.

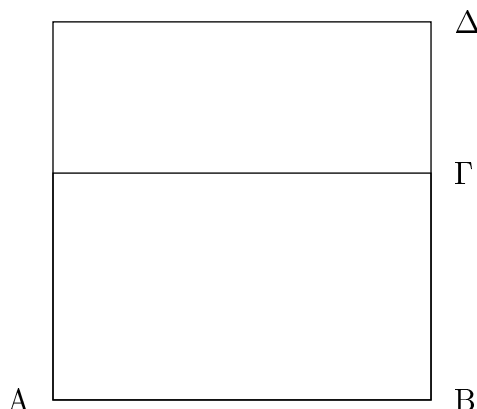
Lemma

Ἐπει δέδεικται, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει [εἰσὶ σύμμετροι], αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει καὶ σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι, φανερόν, ὅτι, ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾗ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾗ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει: εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὔσα δυνάμει μήκει αὐτῇ ᾗ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

X.19

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων κατὰ τινὰ τῶν προειρημένων τρόπων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ῥητόν ἐστιν.

Ἐπὶ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $BΓ$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $AΓ$: λέγω, ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ $AΓ$.



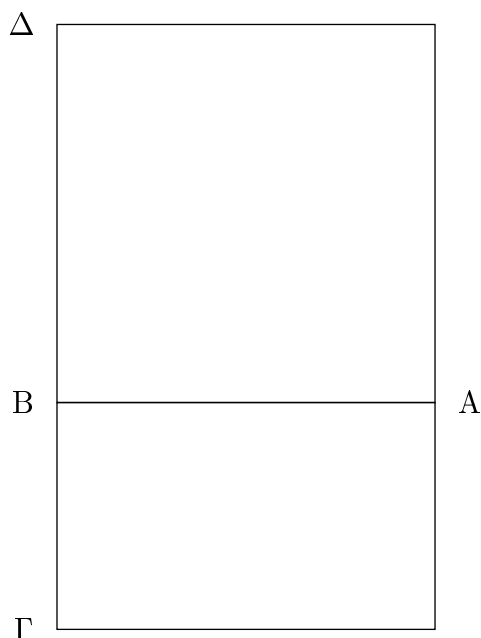
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $AΔ$: ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ $AΔ$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ $BΓ$ μήκει, ἴση δὲ ἐστὶν ἡ AB τῇ $BΔ$, σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $BΔ$ τῇ $BΓ$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $BΔ$ πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ $ΔA$ πρὸς τὸ $AΓ$. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΔA$ τῷ $AΓ$. ῥητόν δὲ τὸ $ΔA$: ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $AΓ$.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.20

Ἐὰν ῥητόν παρὰ ῥητὴν παραβληθῆ, πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ σύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Ῥητόν γὰρ τὸ $AΓ$ παρὰ ῥητὴν κατὰ τινὰ πάλιν τῶν προειρημένων τρόπων τὴν AB παραβεβλήσθω πλάτος ποιῶν τὴν $BΓ$: λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ $BΓ$ καὶ σύμμετρος τῇ BA μήκει.



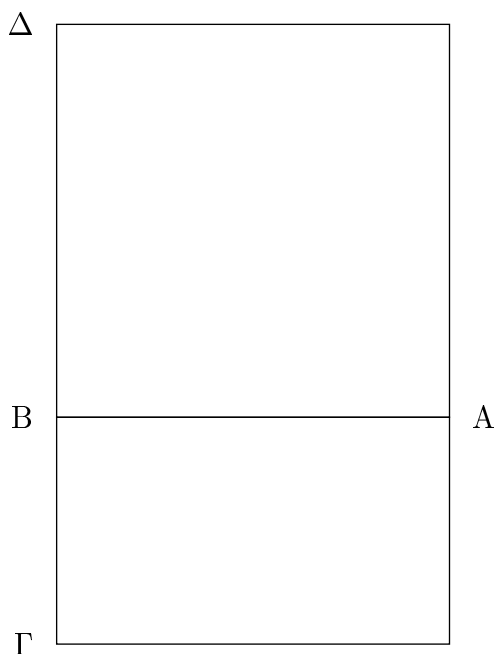
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta$: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta$. ῥητὸν δὲ καὶ τὸ $A\Gamma$: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔA τῷ $A\Gamma$. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΔA πρὸς τὸ $A\Gamma$, οὕτως ἡ ΔB πρὸς τὴν $B\Gamma$. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔB τῇ $B\Gamma$: ἴση δὲ ἡ ΔB τῇ BA : σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῇ $B\Gamma$. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ AB : ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $B\Gamma$ καὶ σύμμετρος τῇ AB μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν παρὰ ῥητὴν παραβληθῆ, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.21

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστίν, καλεῖσθω δὲ μέση.

Ἐπὶ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν εὐθειῶν τῶν AB , $B\Gamma$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $A\Gamma$: λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστὶ τὸ $A\Gamma$, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστίν, καλεῖσθω δὲ μέση.

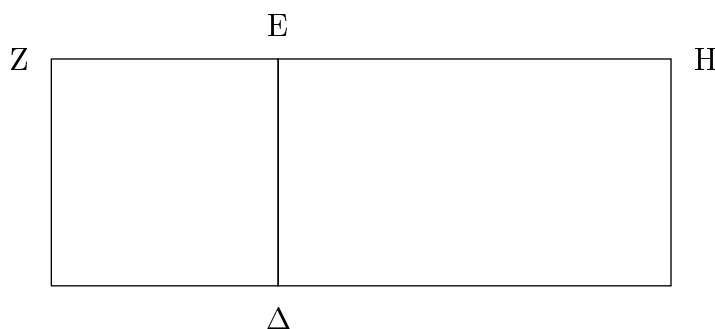


Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta$: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $B\Gamma$ μήκει: δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι: ἴση δὲ ἡ AB τῇ $B\Delta$, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔB τῇ $B\Gamma$ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΔB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ $A\Delta$ πρὸς τὸ $A\Gamma$: ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔA τῷ $A\Gamma$. ῥητὸν δὲ τὸ ΔA : ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Gamma$: ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ $A\Gamma$ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Ἐὰν ὄσι δύο εὐθεῖαι, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἐστώσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ZE , EH . λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ZE πρὸς τὴν EH , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ZE , EH .



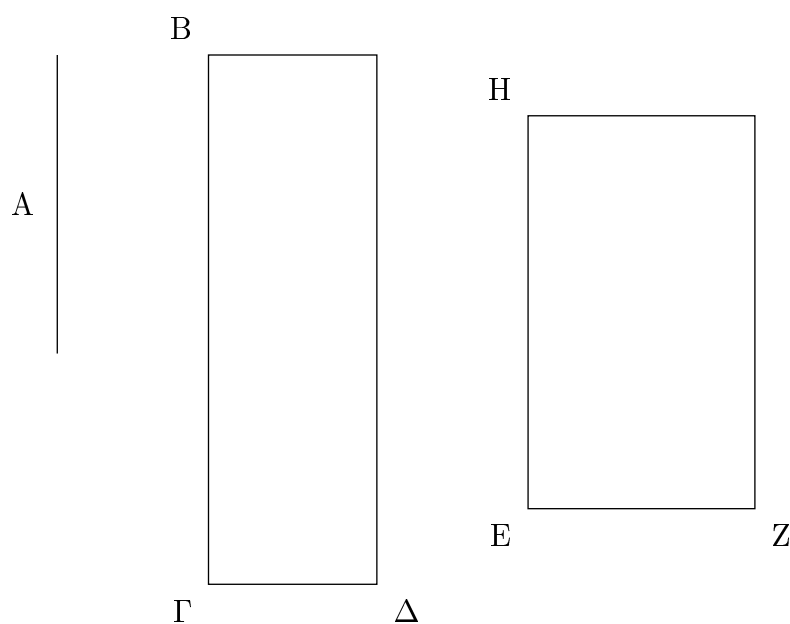
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΗΔ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ, ΕΗ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ, ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτέστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.22

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει.

Ἐστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιῶν τὴν ΓΔ: λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμετρῶν. δυνάσθω τὸ ΗΖ. δύναται δὲ καὶ τὸ ΒΔ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔ τῷ ΗΖ. ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον: τῶν δὲ ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς



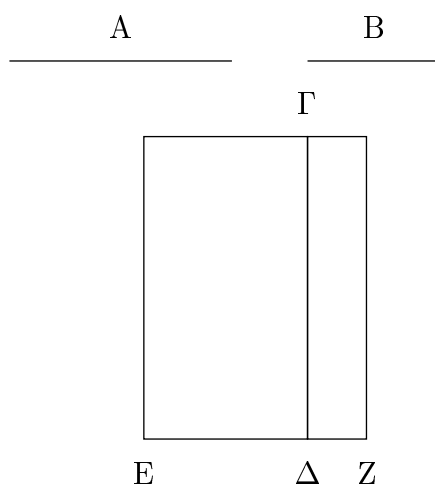
ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ: ῥητὴ γὰρ ἐστὶν ἑκατέρα αὐτῶν: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει: δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι: ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ: ῥηταὶ γὰρ εἰσὶ δυνάμει: τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ, ΕΗ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ: ἴσα γὰρ ἐστὶ τῷ

ἀπὸ τῆς A: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῶ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ, ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆ ΓΒ μήκει. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΒ μήκει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.23

Ἡ τῆ μέση σύμμετρος μέση ἐστίν.

Ἐστω μέση ἡ A, καὶ τῆ A σύμμετρος ἔστω ἡ B: λέγω, ὅτι καὶ ἡ B μέση ἐστίν.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῶ μὲν

ἀπὸ τῆς A ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιῶν τὴν ΕΔ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει. τῶ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιῶν τὴν ΔΖ. ἐπεὶ οὖν σύμμετρος ἐστὶν ἡ A τῆ B, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τῶ ἀπὸ τῆς B. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῶ ΓΖ. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῆ ΔΖ μήκει. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΕΔ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΔΓ μήκει: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΔΓ μήκει: αἱ ΓΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων δυναμένη μέση ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυναμένη μέση ἐστίν: καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ B: μέση ἄρα ἐστὶν ἡ B.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τὸ τῶ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἱ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση: ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν.]

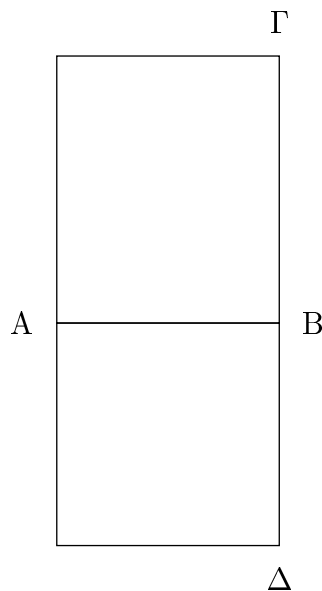
Ἦσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένους καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῆ μέση μήκει σύμμετρον λέγεσθαι μέσην καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει, ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. ἐὰν δὲ τῆ μέση

σύμμετρος τις ἢ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει, εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

X.24

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν κατὰ τινὰ τῶν εἰρημένων τρόπων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μέσον ἐστίν.

Ἐπὶ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $B\Gamma$ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ $A\Gamma$: λέγω, ὅτι τὸ $A\Gamma$ μέσον ἐστίν.



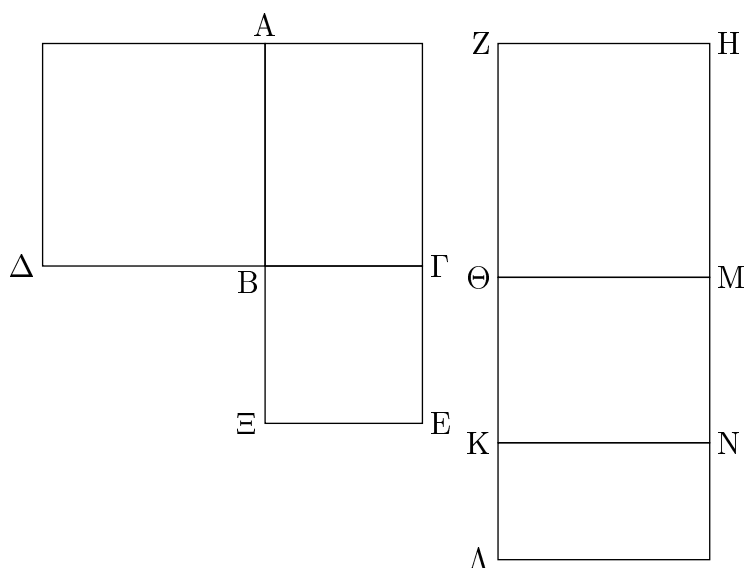
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta$: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta$, καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῇ $B\Gamma$ μήκει, ἴση δὲ ἡ AB τῇ $B\Delta$, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔB τῇ $B\Gamma$ μήκει: ὥστε καὶ τὸ ΔA τῷ $A\Gamma$ σύμμετρόν ἐστιν. μέσον δὲ τὸ ΔA : μέσον ἄρα καὶ τὸ $A\Gamma$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.25

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἐπὶ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν AB , $B\Gamma$ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ $A\Gamma$: λέγω, ὅτι τὸ $A\Gamma$ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετράγωνα τὰ $A\Delta$, BE : μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον

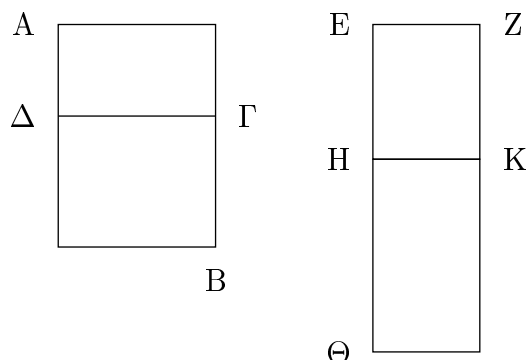


τῶν $ΑΔ$, $ΒΕ$. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ ZH , καὶ τῷ μὲν $ΑΔ$ ἴσον παρὰ τὴν ZH παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ $HΘ$ πλάτος ποιῶν τὴν $ZΘ$, τῷ δὲ $ΑΓ$ ἴσον παρὰ τὴν $ΘΜ$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ MK πλάτος ποιῶν τὴν $ΘK$, καὶ ἔτι τῷ $ΒΕ$ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν KN παραβεβλήσθω τὸ $NΛ$ πλάτος ποιῶν τὴν $KΛ$: ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ $ZΘ$, $ΘK$, $KΛ$. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $ΑΔ$, $ΒΕ$, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν $ΑΔ$ τῷ $HΘ$, τὸ δὲ $ΒΕ$ τῷ $NΛ$, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν $HΘ$, $NΛ$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZH παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκάτερα τῶν $ZΘ$, $KΛ$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ZH μήκει. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ $ΑΔ$ τῷ $ΒΕ$, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $HΘ$ τῷ $NΛ$. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ $HΘ$ πρὸς τὸ $NΛ$, οὕτως ἢ $ZΘ$ πρὸς τὴν $KΛ$: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ $ZΘ$ τῇ $KΛ$ μήκει. αἱ $ZΘ$, $KΛ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι μήκει σύμμετροι: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ZΘ$, $KΛ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν $ΔB$ τῇ BA , ἢ δὲ EB τῇ $BΓ$, ἔστιν ἄρα ὡς ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως ἢ AB πρὸς τὴν BE . ἀλλ' ὡς μὲν ἢ $ΔB$ πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ $ΔA$ πρὸς τὸ $ΑΓ$: ὡς δὲ ἢ AB πρὸς τὴν BE , οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΞ$: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $ΔA$ πρὸς τὸ $ΑΓ$, οὕτως τὸ $ΑΓ$ πρὸς τὸ $ΓΞ$. ἴσον δὲ ἐστὶ τὸ μὲν $ΑΔ$ τῷ $HΘ$, τὸ δὲ $ΑΓ$ τῷ MK , τὸ δὲ $ΓΞ$ τῷ $NΛ$: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $HΘ$ πρὸς τὸ MK , οὕτως τὸ MK πρὸς τὸ $NΛ$: ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἢ $ZΘ$ πρὸς τὴν $ΘK$, οὕτως ἢ $ΘK$ πρὸς τὴν $KΛ$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $ZΘ$, $KΛ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $ΘK$. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $ZΘ$, $KΛ$: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΘK$: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ $ΘK$. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶ τῇ ZH μήκει, ῥητὸν ἐστὶ τὸ $ΘN$: εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστὶ τῇ ZH μήκει, αἱ $KΘ$, $ΘM$ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσον ἄρα τὸ $ΘN$. τὸ $ΘN$ ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. ἴσον δὲ τὸ $ΘN$ τῷ $ΑΓ$: τὸ $ΑΓ$ ἄρα ἦτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.26

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ.



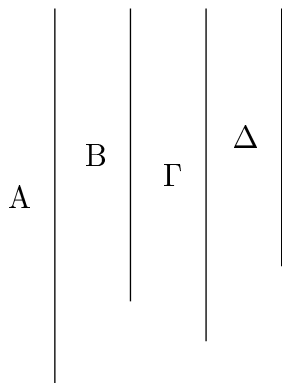
Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερέχτω ῥητῶ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβελήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιῶν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΖΗ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστὶν ἴσον. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ΔΒ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ, ΑΓ, καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ, ΖΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΘΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ῥητὸν ἐστὶ τὸ ΔΒ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΚΘ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΗΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. ἀλλὰ καὶ ἢ ΕΗ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τετράγωνα: ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω: τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ: διπλάσιον γὰρ ἐστὶν αὐτοῦ: ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ: καὶ συναμφοτέρω ἄρα τὰ τε ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρόν ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ, ΗΘ: ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΘ. ἀλλὰ καὶ ῥητὴ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Μέσον ἄρα μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.27

Μέσας εὐρεῖν δυνάμει μόνον συμμετρους ῥητὸν περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α, Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α, Β μέση ἀνάλογον ἢ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἢ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἢ Γ πρὸς τὴν Δ.



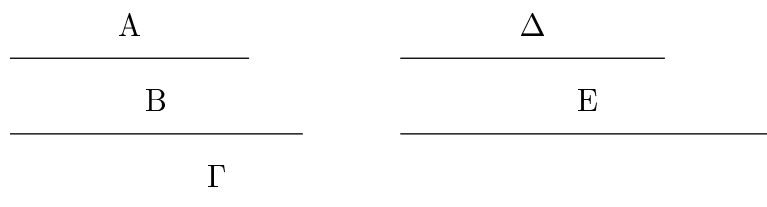
Καὶ ἐπεὶ αἱ A, B ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Γ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, [οὕτως] ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ A, B δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι, καὶ αἱ Γ, Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ: μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. αἱ Γ, Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ, ἡ B πρὸς τὴν Δ. ἀλλ' ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ, ἡ Γ πρὸς τὴν B: καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν B, οὕτως ἡ B πρὸς τὴν Δ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ, Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς B. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B: ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ, Δ.

Εὕρηται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.28

Μέσας εὕρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας.

Ἐκκείσθωσαν [τρεῖς] ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν A, B μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν E.



Ἐπεὶ αἱ A, B ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, B, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστίν. μέση ἄρα ἡ Δ. καὶ ἐπεὶ αἱ B, Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν E, καὶ αἱ Δ, E ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. μέση δὲ ἡ Δ: μέση ἄρα καὶ ἡ E: αἱ Δ, E ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ B πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν E, ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ B πρὸς τὴν Δ, ἡ Γ πρὸς τὴν E. ὡς δὲ ἡ B

πρὸς τὴν Δ , ἢ Δ πρὸς τὴν A : καὶ ὡς ἄρα ἢ Δ πρὸς τὴν A , ἢ Γ πρὸς τὴν E : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν A, Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, E . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A, Γ : μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E .

Εὕρηνται ἄρα μέσα δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

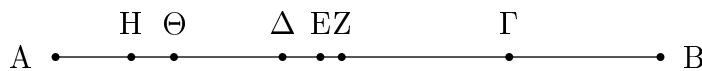


Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ $AB, B\Gamma$, ἔστωσαν δὲ ἦτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. καὶ ἐπεὶ, ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῆ, ἐάν τε ἀπὸ περισσοῦ περισσός, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν, ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ AG ἄρτιός ἐστιν. τετμήσθω ὁ AG δίχα κατὰ τὸ Δ . ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ $AB, B\Gamma$ ἦτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι: ὁ ἄρα ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετραγώνῳ. καὶ ἐστὶ τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$, ἐπειδὴ περ ἐδείχθη, ὅτι, ἐάν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσιν τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν. εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ ὅ τε ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$, οἳ συντεθέντες ποιῶσιν τὸν ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ τετράγωνον.

Καὶ φανερόν, ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Gamma\Delta$, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν ὑπὸ $AB, B\Gamma$ εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ $AB, B\Gamma$ ὅμοιοι ᾧσιν ἐπίπεδοι. ὅταν δὲ μὴ ᾧσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγωνοι ὅ τε ἀπὸ τοῦ $B\Delta$ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ $\Delta\Gamma$, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ οὐκ ἐστὶ τετράγωνος: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Εὐρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμούς, ὥστε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.



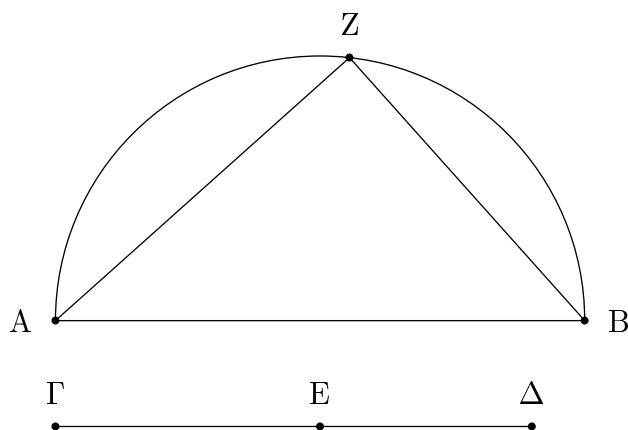
Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓA , καὶ τετμήσθω ὁ ΓA δίχα τῷ Δ . φανερόν δὲ, ὅτι ὁ ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ]

$\Gamma\Delta$ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ [τοῦ] $B\Delta$ τετραγώνῳ. ἀφηρήσθω μονὰς ἡ ΔE : ὁ ἄρα ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$ μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓE ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] $B\Delta$ τετραγώνου. λέγω οὖν, ὅτι ὁ ἐκ τῶν $AB, B\Gamma$ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] ΓE οὐκ ἐστὶ τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἦτοι ἴσος ἐστὶ τῶ ἀπὸ [τοῦ] BE ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ [τοῦ] BE, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μὴ τμηθῆ ἢ μονάς. ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος τῶ ἀπὸ BE, καὶ ἔστω τῆς ΔE μονάδος διπλασίων ὁ HA. ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ AG ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ AH τοῦ ΔE ἐστὶ διπλασίων, καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ HG λοιποῦ τοῦ EG ἐστὶ διπλασίων: δίχα ἄρα τέμνεται ὁ HG τῶ E. ὁ ἄρα ἐκ τῶν HB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος ἐστὶ τῶ ἀπὸ BE τετραγώνω. ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος ὑπόκειται τῶ ἀπὸ [τοῦ] BE τετραγώνω: ὁ ἄρα ἐκ τῶν HB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος ἐστὶ τῶ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE. καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ GE συνάγεται ὁ AB ἴσος τῶ HB: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ [τοῦ] GE ἴσος ἐστὶ τῶ ἀπὸ BE. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ BE. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῶ ἀπὸ BZ ἴσος, καὶ τοῦ ΔZ διπλασίων ὁ ΘA. καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓZ: ὥστε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τεμῆσθαι κατὰ τὸ Z, καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ ZΓ ἴσον γίνεσθαι τῶ ἀπὸ BZ. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος τῶ ἀπὸ BZ. ὥστε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓZ ἴσος ἔσται τῶ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE ἴσος ἐστὶ [τῶ] ἐλάσσωνι τοῦ ἀπὸ BE. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ [αὐτῶ] τῶ ἀπὸ BE. οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν AB, BG μετὰ τοῦ ἀπὸ GE τετράγωνός ἐστιν. [δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς ἐπιδεικνύειν, ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπὶ πλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.29

Εὔρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμετρουσ, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῶ ἀπὸ συμμετρου ἐαυτῆ μήκει.



Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ AB καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ, ΔE, ὥστε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὸν GE μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν GE, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ τετράγωνον καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB.

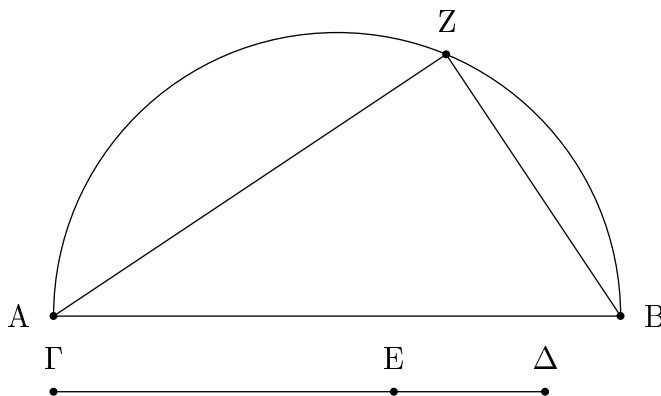
Ἐπεὶ [οὖν] ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν GE, τὸ ἀπὸ τῆς BA ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν

τὸν ΓΕ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΖ μήκει: αἱ ΒΑ, ΑΖ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ [ἐστίν] ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ, ΖΒ: ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μείζον δύναται τῇ ΒΖ συμμέτρῳ ἑαυτῇ.

Εὕρηται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ, ΑΖ, ὥστε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.30

Εὕρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ μήκει.



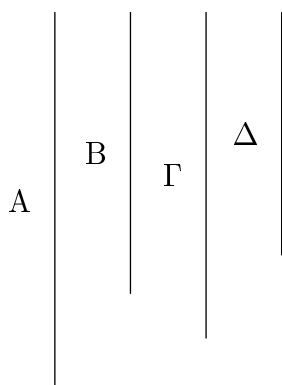
Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ, ΕΔ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ.

Ὅμοιως δὲ δεῖξομεν τῷ πρὸ τούτου, ὅτι αἱ ΒΑ, ΑΖ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστίν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ.

Αί AB , AZ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AB τῆς AZ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ZB ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.31

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.



Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταί δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A , B , ὥστε τὴν A μείζονα οὖσαν τῆς ἐλάσσονος τῆς B μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ τῷ ὑπὸ τῶν A , B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν A , B : μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ : μέση ἄρα καὶ ἡ Γ . τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν

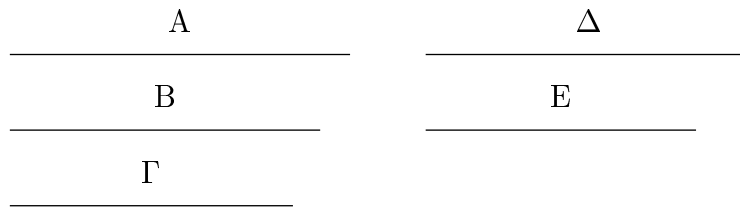
Γ , Δ . ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς B : ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν A , B πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς B , ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A , B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς B ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ , ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ . ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ , Δ , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ : καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν B , οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ . σύμμετρος δὲ ἡ A τῇ B δυνάμει μόνον: σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. καὶ ἐστὶ μέση ἡ Γ : μέση ἄρα καὶ ἡ Δ . καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν B , ἡ Γ πρὸς τὴν Δ , ἡ δὲ A τῆς B μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Γ , Δ ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ὅμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ A τῆς B μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

X.32

Εὐρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.



Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ A, B, Γ, ὥστε τὴν A τῆς Γ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ, καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ: καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστίν. τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν A, B πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ, οὕτως ἡ A πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν A, B ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν B, Γ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν E: καὶ ὡς ἄρα ἡ A πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν E: σύμμετρος δὲ ἡ A τῆ Γ δυνάμει [μόνον]. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῆ E δυνάμει μόνον. μέση δὲ ἡ Δ: μέση ἄρα καὶ ἡ E. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ A πρὸς τὴν Γ, ἡ Δ πρὸς τὴν E, ἡ δὲ A τῆς Γ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ, καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς E μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ, E, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν B, Γ [αἱ γὰρ B, Γ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι], μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ, E.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ, E μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ.

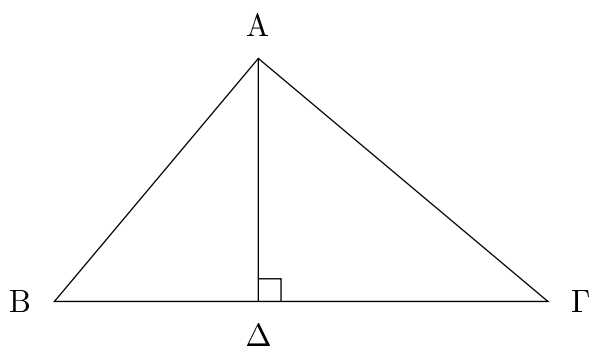
Ὅμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τῷ ἀπὸ ἀσυμέτρου, ὅταν ἡ A τῆς Γ μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμέτρου ἑαυτῆ.

Lemma

Ἐστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ABΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν A, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ AΔ: λέγω, ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓBΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BA, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν BΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓA, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BΔ, ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν BΓ, AΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ὑπὸ τῶν BA, AΓ.

Καὶ πρῶτον, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓBΔ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ἀπὸ τῆς BA.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἤχεται ἡ AΔ, τὰ ABΔ,



$\triangle A\Delta\Gamma$ ἄρα τρίγωνον ὁμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ $\triangle AB\Gamma$ καὶ ἀλλήλοις. καὶ ἐπεὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\triangle AB\Delta$ τριγώνῳ, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓB πρὸς τὴν BA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $B\Delta$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $\Gamma B\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB .

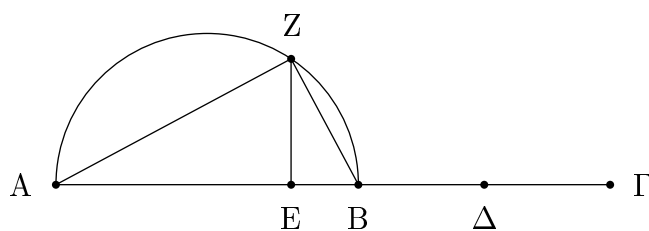
Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$.

Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῆ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστίν, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , οὕτως ἡ $A\Delta$ πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔA .

Λέγω, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $B\Gamma, A\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$. ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὁμοίον ἐστὶ τὸ $\triangle AB\Gamma$ τῷ $\triangle AB\Delta$, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν ΓA , οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$. [ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων.] τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $B\Gamma, A\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.33

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιούσας τὸ μὲν συγκεκριμένον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.



Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ $AB, B\Gamma$, ὥστε τὴν μείζονα τὴν AB τῆς ἐλάσσονος τῆς $B\Gamma$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ τεμηθῆσθαι ἡ $B\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ Δ , καὶ τῷ ἀφ' ὁποτέρας τῶν $B\Delta, \Delta\Gamma$ ἴσον παρὰ τὴν AB παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδος τετραγώνῳ, καὶ ἐστω τὸ ὑπὸ τῶν AEB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AZB , καὶ ἤχθω τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ EZ , καὶ ἐπεξεύχθωσαν αἱ AZ, ZB .

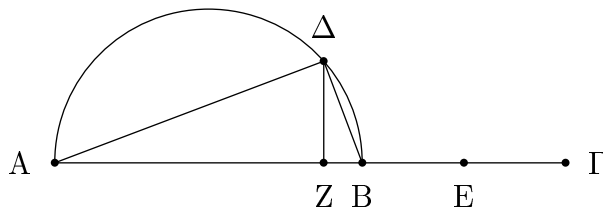
Καὶ ἐπεὶ [δύο] εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ $AB, B\Gamma$, καὶ ἡ AB τῆς $B\Gamma$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Gamma$, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας

αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν AB παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνω καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν AEB , ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AE τῇ EB . καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς EB , οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν BA , AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB , BE , ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AE τῷ ἀπὸ τῆς AZ , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE τῷ ἀπὸ τῆς BZ : ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AZ τῷ ἀπὸ τῆς ZB : αἱ AZ , ZB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ῥητὴ ἐστὶν, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB : ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AZ , ZB ῥητὸν ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ , ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AE , EB καὶ τῷ ἀπὸ τῆς BD ἴσον, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ZE τῇ BD : διπλῆ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς ZE : ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρόν ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AB , EZ . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$: μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ . ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , EZ τῷ ὑπὸ τῶν AZ , ZB : μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB . ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ AZ , ZB ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.34

Εὐρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους ποιοῦσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν.



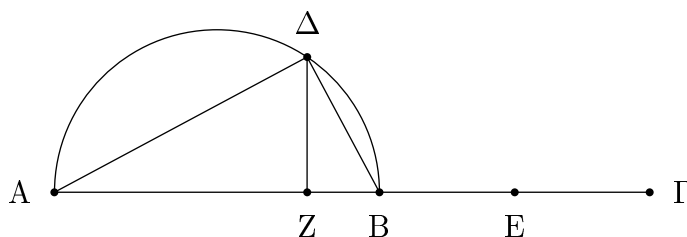
Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB τὸ $AΔB$ ἡμικύκλιον, καὶ τεμηθῆσθω ἡ $BΓ$ δίχα κατὰ τὸ E , καὶ παραβελθήσθω παρὰ τὴν AB τῷ ἀπὸ τῆς BE ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλείπον εἶδει τετραγώνω τὸ ὑπὸ τῶν AZB : ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ AZ τῇ ZB μήκει. καὶ ἦχθω ἀπὸ τοῦ Z τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ZΔ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AΔ$, $ΔB$.

Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ AZ τῇ ZB , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ὑπὸ τῶν AB , BZ . ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν BA , AZ τῷ ἀπὸ τῆς $AΔ$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BZ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $AΔ$ τῷ ἀπὸ τῆς $ΔB$. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $BΓ$ τῆς $ΔZ$, διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$: ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$ ῥητὸν ἐστὶν.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $AΔ$, $ΔB$ ποιοῦσαι τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.35

Εύρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσύμμετρος ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνῳ. Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$ μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν AB τῆς $BΓ$ μείζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω ὁμοίως.



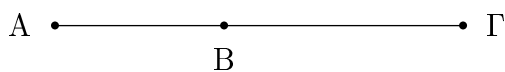
Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AZ τῆς ZB μήκει, ἀσύμμετρος ἐστὶ καὶ ἡ $AΔ$ τῆς $ΔB$ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB , μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν AZ , ZB ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν BE , $ΔZ$, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῆς $ΔZ$: διπλῆ ἄρα ἡ $BΓ$ τῆς $ZΔ$: ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$: μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$: μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῆς $BΓ$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ $ΓB$ τῆς BE , ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ AB τῆς BE μήκει: ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ὑπὸ τῶν AB , BE ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AB , BE ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $ZΔ$, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$ τῷ ὑπὸ τῶν $AΔ$, $ΔB$.

Εὕρηται ἄρα δύο εὐθεῖαι αἱ $AΔ$, $ΔB$ δυνάμει ἀσύμμετροι ποιῶσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.36

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB , $BΓ$: λέγω, ὅτι ὅλη ἡ $AΓ$ ἄλογός ἐστιν.



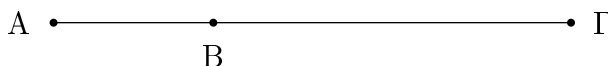
Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AB τῆς $BΓ$ μήκει: δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι: ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $ABΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $BΓ$, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ τῷ ἀπὸ τῆς $BΓ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν AB , $BΓ$ σύμμετρόν

ἔστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ: αἱ γὰρ AB, BΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ. καὶ συνθέντι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ. ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, BΓ: ἄλογον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ἀπὸ τῆς AΓ: ὥστε καὶ ἡ AΓ ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.37

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BΓ ῥητὸν περιέχουσαι: λέγω, ὅτι ὅλη ἡ AΓ ἄλογός ἐστιν.

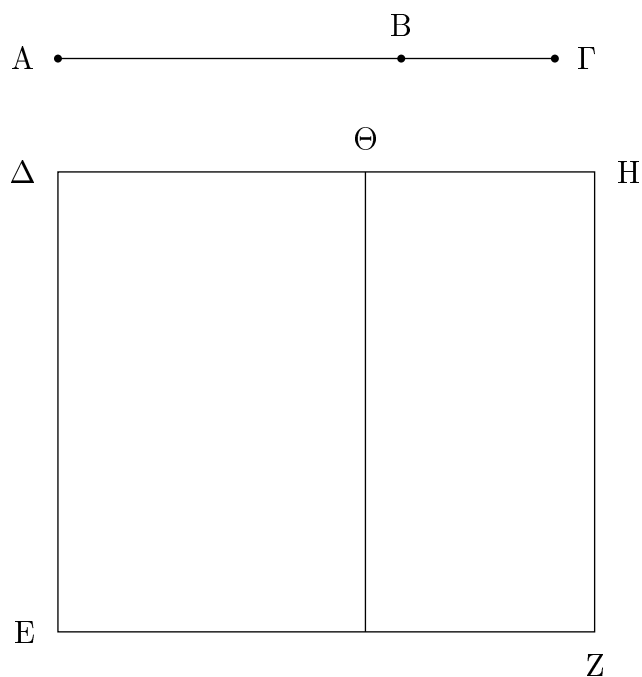


Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ AB τῇ BΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ: καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ: ὑπόκεινται γὰρ αἱ AB, BΓ ῥητὸν περιέχουσαι: ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AΓ: ἄλογος ἄρα ἡ AΓ, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.38

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι μέσον περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ AB, BΓ μέσον περιέχουσαι: λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AΓ.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιῶν τὴν ΔΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ παρὰ τὴν ΔΕ ἴσον τὸ ΕΘ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΑΒ, ΒΓ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ: μέσον ἄρα ἑκάτερον τῶν ΕΘ, ΘΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ΔΘ, ΘΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ: ὥστε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει. αἱ ΔΘ, ΘΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥστε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστιν. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ: τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν: ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον, καὶ ἡ δυναμένη [αὐτὸ] ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἢ ΑΓ: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.39

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $AB, B\Gamma$ ποιῶσαι τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG .



Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ μέσον ἐστίν, καὶ τὸ δις [ἄρα] ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ μέσον ἐστίν. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ῥητόν: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$: ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG , ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ [ῥητόν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$]: ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG . ὥστε καὶ ἡ AG ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μείζων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.40

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν, ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.

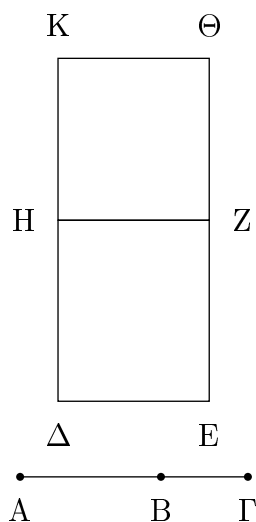


Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $AB, B\Gamma$ ποιῶσαι τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ AG .

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$: ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$. ῥητόν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$: ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG . ἄλογος ἄρα ἡ AG , καλείσθω δὲ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.41

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιῶσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων, ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.



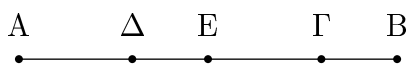
Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ $AB, B\Gamma$ ποιοῦσαι τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι ἡ AG ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ παραβελθήσθω παρὰ τὴν ΔE τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσον τὸ ΔZ , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ ἴσον τὸ $H\Theta$: ὅλον ἄρα τὸ $\Delta\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG τετραγώνῳ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔZ , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔZ . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔE παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔH καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔE μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ HK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ HZ , τουτέστι τῇ ΔE , μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $AB, B\Gamma$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $AB, B\Gamma$, ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ ΔZ τῷ $H\Theta$: ὥστε καὶ ἡ ΔH τῇ HK ἀσύμμετρός ἐστιν. καὶ εἰσι ῥηταί: αἱ $\Delta H, HK$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔK ἢ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. ῥητὴ δὲ ἡ ΔE : ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Theta$ καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. δύναται δὲ τὸ $\Theta\Delta$ ἢ AG : ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AG , καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημένα ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας, ἐξ ὧν σύγκεινται ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἶδη, δείξομεν ἤδη προεχθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον:

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερον τῶν Γ, Δ , ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ AG τῆς ΔB : λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν $AG, \Gamma B$ μείζονά ἐστὶ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta, \Delta B$.



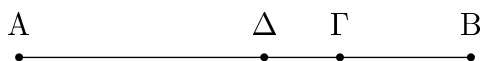
Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E . καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ AG τῆς ΔB , κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $\Delta\Gamma$: λοιπὴ ἄρα ἡ $A\Delta$ λοιπῆς τῆς ΓB μείζων ἐστίν. ἴση δὲ ἡ AE τῇ EB : ἐλάττων ἄρα ἡ ΔE τῆς $E\Gamma$: τὰ Γ, Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AG, \Gamma B$ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB , ἀλλὰ μὴν

καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς EB , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG , GB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς EG ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE : ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔE ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EG : καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . ὥστε καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ $A\Delta$, ΔB . καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB μεῖζόν ἐστὶ τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.42

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατὰ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ : αἱ AG , GB ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους.



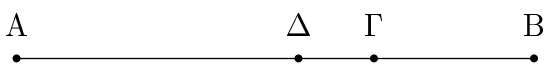
Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. φανερόν δὴ, ὅτι ἡ AG τῇ ΔB οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. ἔσται δὴ καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ GB ἡ αὐτή: καὶ ἔσται ὡς ἡ AG πρὸς τὴν GB , οὕτως ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν ΔA , καὶ ἔσται ἡ AB κατὰ τὸ αὐτὸ τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ : ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ AG τῇ ΔB ἐστὶν ἡ αὐτή. διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ , Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. ὅ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μετὰ τοῦ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς AB . ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB διαφέρει ῥητῶ: ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρω: καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB διαφέρει ῥητῷ μέσα ὄντα: ὅπερ ἄτοπον: μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται: καθ' ἓν ἄρα μόνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.43

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας: λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.



Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. ἐπεὶ οὖν, ὅ ἄρα διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν

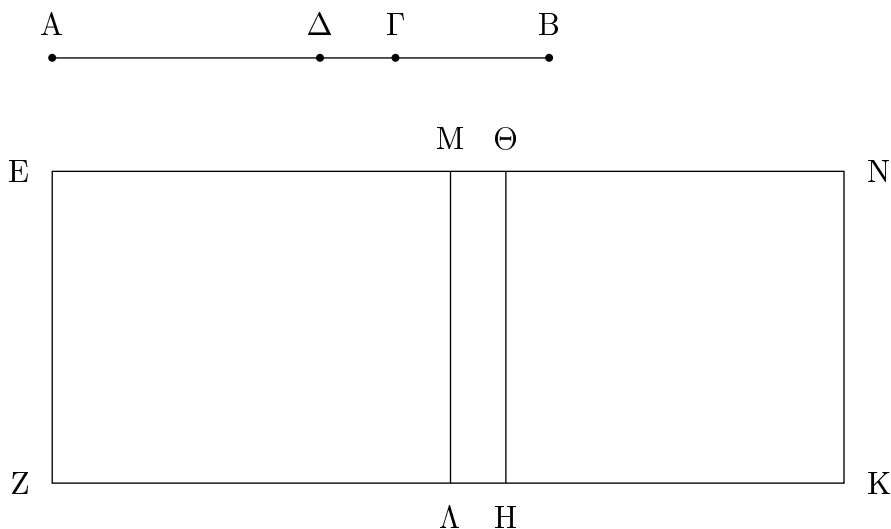
$A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB , τούτω διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , ῥητῶ δὲ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG , GB : ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα: ῥητῶ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB μέσα ὄντα: ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα: καθ' ἓν ἄρα μόνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.44

Ἡ ἐκ μέσων δευτέρα καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς AG , GB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμετρους μέσον περιεχούσας: φανερόν δὴ, ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι. λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.



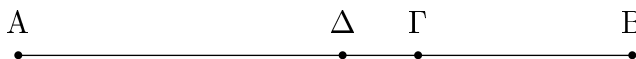
Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ , ὥστε τὴν AG τῇ ΔB μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν AG : δῆλον δὴ, ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν, ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB : καὶ τὰς $A\Delta$, ΔB μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμετρους μέσον περιεχούσας. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ EK , τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν AG , GB ἴσον ἀφηρήσθω τὸ EH : λοιπὸν ἄρα τὸ ΘK ἴσον ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , ἄπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν AG , GB , ἴσον ἀφηρήσθω τὸ EA : καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ MK ἴσον τῶ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB . καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB , μέσα ἄρα [καὶ] τὸ EH . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘN ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AG , GB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AG τῇ GB μήκει. ὡς δὲ ἡ AG πρὸς τὴν GB , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AG πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AG , GB : ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AG τῶ ὑπὸ τῶν AG , GB . ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AG σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB : δυνάμει γὰρ εἰσὶ σύμμετροι αἱ AG , GB . τῶ δὲ ὑπὸ τῶν AG , GB σύμμετρόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AG , GB . καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AG , GB ἄρα ἀσύμμετρά ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν AG ,

ΓΒ. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ: ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρος ἐστὶ μήκει. καὶ εἰσι ρηταί: αἱ ΕΘ, ΘΝ ἄρα ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ δύο ρηταί δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων: ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ, ΜΝ ρηταί δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο διηρημένη τὸ τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἢ αὐτῇ, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δις ὑπὸ ΑΔ, ΔΒ: πολλῶν ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΕΗ, μείζον ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτέστι τοῦ ΜΚ: ὥστε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἢ αὐτῇ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.45

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τετραγώνων ρητόν, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον: λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.

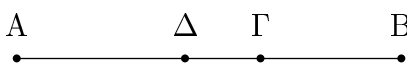


Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ρητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. καὶ ἐπεὶ, ᾧ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τουτῶ διαφέρει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ὑπερέχει ρητῶ: ρητὰ γὰρ ἀμφοτέρω: καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ρητῶ μέσα ὄντα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται: κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.46

Ἡ ρητόν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω ρητόν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὰς ΑΓ, ΓΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ρητόν: λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται.



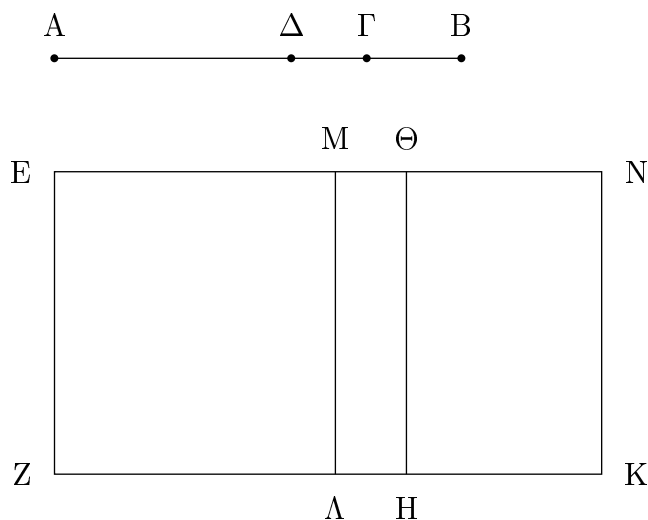
Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω καὶ κατὰ τὸ Δ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον, τὸ δὲ δις ὑπὸ

τῶν $A\Delta$, ΔB ῥητόν. ἐπεὶ οὖν, $\tilde{\omega}$ διαφέρει τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB , τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB τοῦ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ὑπερέχει ῥητῶ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB ὑπερέχει ῥητῶ μέσα ὄντα: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἢ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται. κατὰ ἓν ἄρα σημεῖον διαιρεῖται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.47

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται.

Ἐστω [δύο μέσα δυναμένη] ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ὥστε τὰς $A\Gamma$, ΓB δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι ποιούσας τὸ τε συγκεκριμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκεκριμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν. λέγω, ὅτι ἡ AB κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται ποιούσα τὰ προκείμενα.



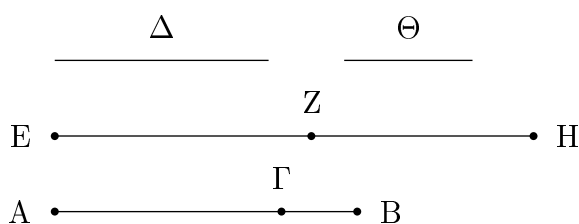
Εἰ γὰρ δυνατόν, διηρήσθω κατὰ τὸ Δ , ὥστε πάλιν δηλονότι τὴν $A\Gamma$ τῇ ΔB μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ' ὑπόθεσιν τὴν $A\Gamma$, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB ἴσον τὸ EH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB ἴσον τὸ ΘK : ὅλον ἄρα τὸ EK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ. πάλιν δὲ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ τοῖς ἀπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB ἴσον τὸ EA : λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Delta$, ΔB λοιπῶ τῷ MK ἴσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκεκριμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ EH . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘE καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ΘN ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ συγκεκριμένον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB τῷ δις ὑπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , καὶ τὸ EH ἄρα τῷ HN ἀσύμμετρόν ἐστίν: ὥστε καὶ ἡ $E\Theta$ τῇ ΘN ἀσύμμετρός ἐστίν. καὶ εἰσι ῥηταί: αἱ $E\Theta$, ΘN ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ EN ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Θ . ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ κατὰ τὸ M διηρήται. καὶ οὐκ ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ MN ἢ αὐτῇ: ἢ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διηρήται: ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται: καθ' ἓν ἄρα μόνον [σημεῖον] διαιρεῖται.

Definitions II

1. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἥς τὸ μείζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῆ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλεῖσθω [ἢ ὅλη] ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη.
2. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα.
3. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη.
4. Πάλιν δὲ ἐὰν τὸ μείζον ὄνομα [τοῦ ἐλάσσονος] μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετροῦ ἑαυτῆ μήκει, ἐὰν μὲν τὸ μείζον ὄνομα σύμμετρον ᾗ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ, καλεῖσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη.
5. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον, πέμπτη.
6. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη.

X.48

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην.



Ἐκκεῖσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκεῖσθω τις ῥητὴ ἢ Δ, καὶ τῆ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἢ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν: ὥστε σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἢ ΕΖ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἢ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΕΖ τῆ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ΕΗ.

Λέγω, ὅτι καὶ πρώτη.

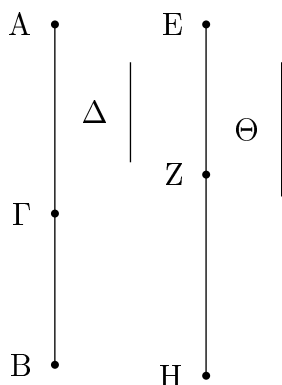
Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν

ΒΓ, ούτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει: ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ, ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.49

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.



Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΕΖ μήκει: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ. γερονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, ούτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει: αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

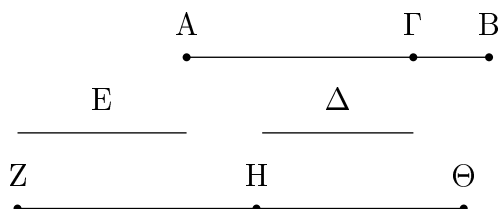
Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλιν ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, ούτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ, μείζον ἄρα [καὶ] τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ: ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, ούτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἀλλ' ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει: ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΖΗ, ΖΕ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΕΖ ἔλασσον ὄνομα τῇ ἐκκεκλιμένη ῥητῇ σύμμετρόν ἐστι τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.50

Εύρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.



Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν συγκεῖμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν,

πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἐκκείσθω δὲ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον μὴ ἔχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ Ε: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

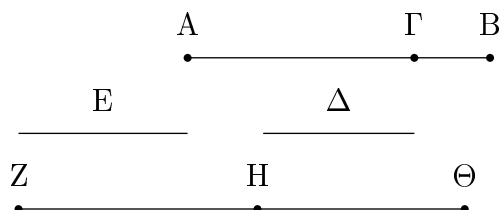
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ: ἀναστρέψαντι ἄρα [ἐστὶν] ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: σύμμετρος ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.51

Εύρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.



Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ὥστε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

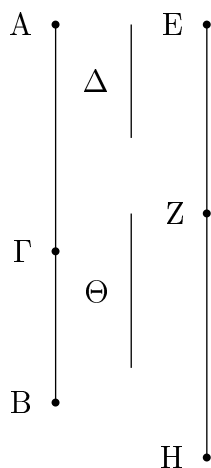
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ [μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ], μείζων ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ, Θ: ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει: ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΗΖ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ εἰσιν αἱ ΕΖ, ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρος ἐστὶ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.52

Εύρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.



Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ

ἐκκείσθω ῥητὴ τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω [μήκει] ἡ ΕΖ: ῥητὴ ἄρα ἡ ΕΖ. καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ὁ δὲ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. αἱ ΕΖ, ΖΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

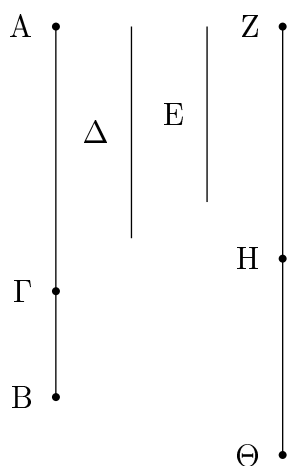
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἀνάπαλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ: μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. ἔστω οὖν τῶ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ, Θ: ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Θ μήκει: ὥστε ἡ ΖΗ τῆς ΖΕ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰσιν αἱ ΗΖ, ΖΕ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι καὶ τὸ ΕΖ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.53

Εὐρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἔκτην.



Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ, ΓΒ, ὥστε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὢν μηδὲ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ, ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ: σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ Ε: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. γεγονέτω δὲ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ῥητὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ: ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. αἱ ΖΗ, ΗΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

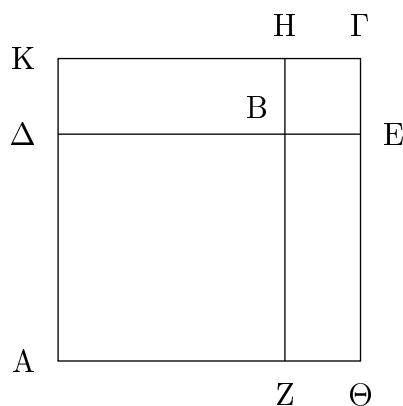
Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος: ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ, ΗΘ ἀσύμμετρος ἐστὶ τῇ Ε μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ [τῆς] ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ, Κ: ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει: ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ. καὶ εἰσιν αἱ ΖΗ, ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον

σύμμετροι, καὶ οὐδετέρᾳ αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῆ ἐκκειμένη ρητῆ τῆ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Ἐστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ, ΒΓ καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῆ ΒΕ: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῆ ΒΗ. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον: λέγω, ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΓ.



Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῆ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῆ ΒΗ, ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλη τῆ ΖΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ, ΚΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση: καὶ ἑκατέρᾳ ἄρα τῶν ΑΘ, ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ, ΘΓ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον: ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον: τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

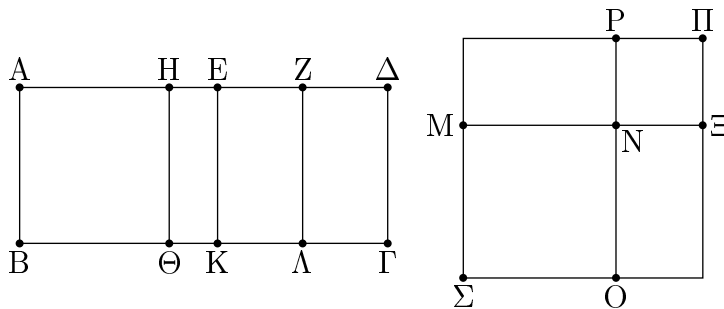
Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΒ, ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΗ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἀνάλογόν [ἐστὶ] τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ: ἴση γάρ [ἐστὶν] ἑκατέρᾳ ἑκατέρᾳ: καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς ΓΒ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ. τῶν ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΔΓ: ἃ προέκειτο δεῖξαι.

X.54

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ρητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.



Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστίν ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ. φανερόν δὴ, ὅτι αἱ ΑΕ, ΕΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς τῆς ΑΒ μήκει. τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΗ, ΗΕ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆς ΕΗ μήκει. καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η, Ε, Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ, ΕΚ, ΖΛ: καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῆς ΝΞ: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῆς ΝΟ. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον: τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς ΕΛ, τὸ ΕΛ πρὸς ΚΗ: τῶν ΑΘ, ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον τῷ ΝΠ: τῶν ΣΝ, ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ, ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ τῷ ΜΡ: ὥστε καὶ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ, ΗΚ τοῖς ΣΝ, ΝΠ ἴσα: ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ: τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.

Λέγω, ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΗ τῆς ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ. ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΑΒ σύμμετρος: καὶ αἱ ΑΗ, ΗΕ ἄρα τῆς ΑΒ σύμμετροί εἰσιν. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ ΑΒ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερα τῶν ΑΗ, ΗΕ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ, ΗΚ, καὶ ἐστὶ σύμμετρον τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ: καὶ τὰ ΣΝ, ΝΠ ἄρα, τουτέστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ, ῥητὰ ἐστὶ καὶ σύμμετρα. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΕ τῆς ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῆς ΕΖ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΕΖ: ὥστε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΜΡ: καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς ΜΡ, ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῆς ΝΡ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῆς ΜΝ, ἡ δὲ ΝΡ τῆς ΝΞ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῆς ΝΞ. καὶ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ

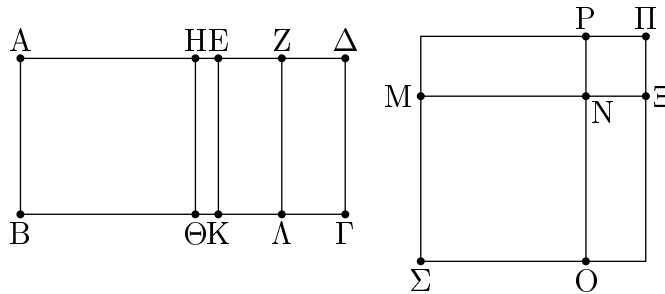
σύμμετρον τῶ ἀπὸ τῆς $NΞ$, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον: αἱ MN , $NΞ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ $MΞ$ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ δύναται τὸ $ΑΓ$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.55

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ $ΑΒΓΔ$ ὑπὸ ῥητῆς τῆς $ΑΒ$ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς $ΑΔ$: λέγω, ὅτι ἢ τὸ $ΑΓ$ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.



Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ $ΑΔ$, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ $ΑE$: αἱ $ΑE$, $EΔ$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ $ΑE$ τῆς $EΔ$ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα ἢ $EΔ$ σύμμετρόν ἐστι τῆ $ΑB$ μήκει. τεμήσθω ἡ $EΔ$ δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ τῶ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον παρὰ τὴν $ΑE$ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνω τὸ ὑπὸ τῶν $ΑHE$: σύμμετρος ἄρα ἡ AH τῆ HE μήκει. καὶ διὰ τῶν H , E , Z παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς $ΑB$, $ΓΔ$ αἱ $HΘ$, EK , $ZΛ$, καὶ τῶ μὲν $AΘ$ παραλληλογράμμω ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ $ΣN$, τῶ δὲ HK ἴσον τετράγωνον τὸ $ΝΠ$, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν MN τῆ $NΞ$: ἐπ' εὐθείας ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ PN τῆ NO . καὶ συμπληρώσθω τὸ $ΣΠ$ τετράγωνον: φανερόν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ MP μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν $ΣN$, $ΝΠ$, καὶ ἴσον τῶ $EΛ$, καὶ ὅτι τὸ $ΑΓ$ χωρίον δύναται ἢ $MΞ$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ $MΞ$ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ $ΑE$ τῆ $EΔ$ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ $EΔ$ τῆ $ΑB$, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ $ΑE$ τῆ $ΑB$. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ AH τῆ EH , σύμμετρός ἐστὶ καὶ ἡ $ΑE$ ἑκατέρω τῶν AH , HE . ἀλλὰ ἡ $ΑE$ ἀσύμμετρος τῆ $ΑB$ μήκει: καὶ αἱ AH , HE ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῆ $ΑB$. αἱ BA , AH , HE ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ὥστε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $AΘ$, HK . ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν $ΣN$, $ΝΠ$ μέσον ἐστίν. καὶ αἱ MN , $NΞ$ ἄρα μέσαι εἰσίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἡ AH τῆ HE μήκει, σύμμετρόν ἐστὶ καὶ τὸ $AΘ$ τῶ HK , τουτέστι τὸ $ΣN$ τῶ $ΝΠ$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς MN τῶ ἀπὸ τῆς $NΞ$ [ὥστε δυνάμει εἰσι σύμμετροι αἱ MN , $NΞ$]. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ $ΑE$ τῆ $EΔ$ μήκει, ἀλλ' ἡ μὲν $ΑE$ σύμμετρός ἐστὶ τῆ AH , ἡ δὲ $EΔ$ τῆ EZ σύμμετρος, ἀσύμμετρος ἄρα ἡ AH τῆ EZ : ὥστε καὶ τὸ $AΘ$ τῶ $EΛ$ ἀσύμμετρόν ἐστὶν, τουτέστι τὸ $ΣN$ τῶ MP , τουτέστιν ἡ ON τῆ NP , τουτέστιν ἡ MN τῆ $NΞ$ ἀσύμμετρός ἐστὶ μήκει. ἐδείχθησαν δὲ αἱ MN , $NΞ$ καὶ μέσαι οὔσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι: αἱ MN , $NΞ$ ἄρα μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. ἐπεὶ γὰρ ἡ $ΔE$ ὑπόκειται ἑκατέρω τῶν $ΑB$, EZ σύμμετρος,

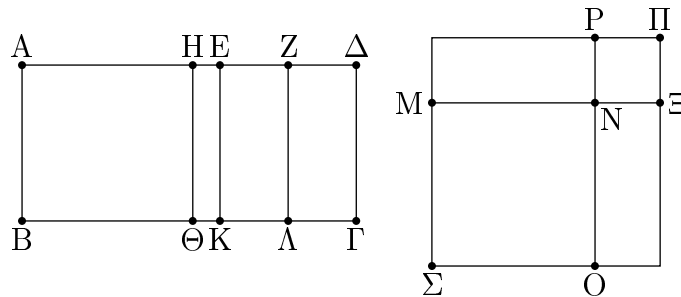
σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ EZ τῆ EK. καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν: ῥητὸν ἄρα τὸ EA, τουτέστι τὸ MP: τὸ δὲ MP ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MNE. ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ME ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.56

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ABΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς AΔ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E, ὧν μείζον ἐστὶ τὸ AE: λέγω, ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.



Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ AΔ, αἱ AE, EΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AE τῆς EΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ οὐδετέρα τῶν AE, EΔ σύμμετρός [ἐστὶ] τῆ AB μήκει. ὁμοίως δὲ τοῖς προοδηγμένοις δεῖξομεν, ὅτι ἡ ME ἐστὶν ἢ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ MN, NE μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ὥστε ἡ ME ἐκ δύο μέσων ἐστίν.

Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

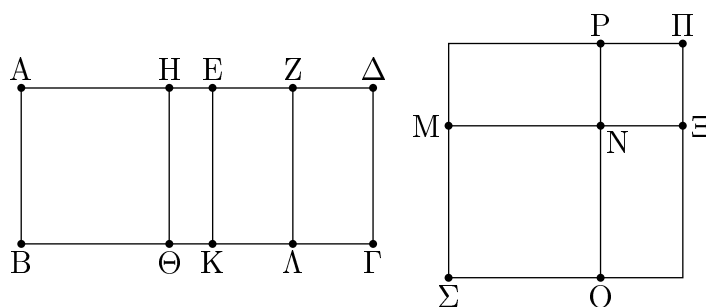
[Καὶ] ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔE τῆ AB μήκει, τουτέστι τῆ EK, σύμμετρος δὲ ἡ ΔE τῆ EZ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῆ EK μήκει. καὶ εἰσι ῥηταί: αἱ ZE, EK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ EA, τουτέστι τὸ MP: καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MNE: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MNE.

Ἡ ME ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.57

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.

Χωρίον γὰρ τὸ AΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς AΔ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E, ὧν μείζον ἔστω τὸ AE: λέγω, ὅτι ἡ τὸ AΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων.



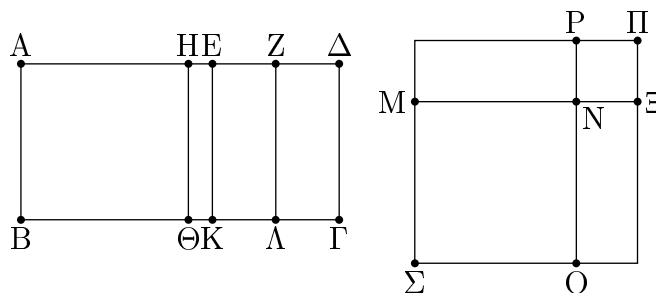
Ἐπεὶ γὰρ ἡ $A\Delta$ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ AE , $E\Delta$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ AE τῆς $E\Delta$ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ, καὶ ἡ AE τῆ AB σύμμετρος [ἐστὶ] μήκει. τεμήσθω ἡ ΔE δίχα κατὰ τὸ Z , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς EZ ἴσον παρὰ τὴν AE παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ AH , HE : ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AH τῆ HE μήκει. ἤχθωσαν παράλληλοι τῆ AB αἱ $H\Theta$, EK , $Z\Lambda$, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω: φανερὸν δὴ, ὅτι ἡ τὸ $A\Gamma$ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ $M\Xi$. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ $M\Xi$ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων. ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ AH τῆ EH μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ $A\Theta$ τῷ HK , τουτέστι τὸ ΣN τῷ $N\Pi$: αἱ MN , $N\Xi$ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ AE τῆ AB μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ AK : καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν MN , $N\Xi$: ῥητόν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $N\Xi$. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος [ἐστὶν] ἡ ΔE τῆ AB μήκει, τουτέστι τῆ EK , ἀλλὰ ἡ ΔE σύμμετρος ἐστὶ τῆ EZ , ἀσύμμετρος ἄρα ἡ EZ τῆ EK μήκει. αἱ EK , EZ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσον ἄρα τὸ ΛE , τουτέστι τὸ MP . καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν MN , $N\Xi$: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN , $N\Xi$. καὶ ῥητόν τὸ [συγκείμενον] ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN , $N\Xi$, καὶ εἰσὶν ἀσύμμετροι αἱ MN , $N\Xi$ δυνάμει. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ $M\Xi$ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ $A\Gamma$ χωρίον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.58

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ $A\Gamma$ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς $A\Delta$ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ E , ὥστε τὸ μείζων ὄνομα εἶναι τὸ AE : λέγω [δὴ], ὅτι ἡ τὸ $A\Gamma$ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.



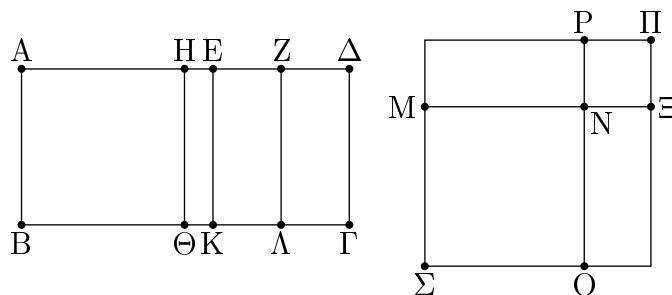
Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις: φανερόν δὴ, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. δεικτέον δὴ, ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ: αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ [ἐστὶν] ἔλασσον αὐτῆς τμήμα τὸ ΕΔ, σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος: καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει. [αἱ ΒΑ, ΑΕ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.] μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τουτέστι τὸ συγκεείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ, ΝΞ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτέστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος ἐστὶν, καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρος ἐστὶν. καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τουτέστι τὸ ΜΡ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΝΞ: αἱ ΜΝ, ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκεείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.59

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ διηρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.



Κατεσκευάσθω [γὰρ] τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. φανερόν δὴ, ὅτι [ἡ] τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρος ἐστὶ ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. καὶ ἐπεὶ

ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ EA τῆ AB μήκει, αἱ EA, AB ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK, τουτέστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ EΔ τῆ AB μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZE τῆ EK: αἱ ZE, EK ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ EL, τουτέστι τὸ MP, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν MNΞ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἡ AE τῆ EZ, καὶ τὸ AK τῷ EL ἀσύμμετρόν ἐστιν. ἀλλὰ τὸ μὲν AK ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MN, NΞ, τὸ δὲ EL ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν MNΞ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν MNΞ τῷ ὑπὸ τῶν MNΞ. καὶ ἐστὶ μέσον ἐκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ MN, NΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ MΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ καὶ δύναται τὸ AG: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[

Lemma

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῆ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ AG: λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG, GB.

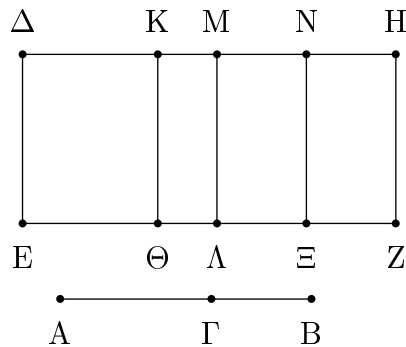


Τετμήσθω γὰρ ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν AG, GB μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ AΔ: ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν AG, GB ἔλαττον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AΔ: τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν AG, GB ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ AΔ. ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν AG, GB διπλάσιά [ἐστὶ] τῶν ἀπὸ τῶν AΔ, ΔΓ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AG, GB μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AG, GB: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.]

X.60

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρότην.

Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ AB διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μείζον ὄνομα εἶναι τὸ AG, καὶ



ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ πλάτος ποιούσιν τὴν ΔΗ: λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ: λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῶ ΜΖ. τεμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ [ἐκατέρω τῶν ΜΛ, ΗΖ]. ἐκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ, ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΒΓ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ ῥητὰ ἐστὶ καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις: ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ [σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ]. καὶ ἐστὶν ἴσον τῶ ΔΛ: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΒΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ, τουτέστι τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καὶ εἰσι ῥηταὶ: αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

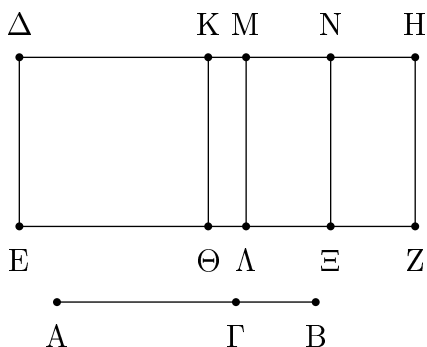
Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, καὶ τῶν ΔΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΜΞ. ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τουτέστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, ἢ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΜΝ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶ ἀπὸ τῆς ΒΓ, σύμμετρόν ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῶ ΚΛ: ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστιν. καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΒΓ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ: ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστὶν. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ, ΚΜ τῶ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτέστι τῶ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. ἐὰν δὲ ὄσιν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῶ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαίρη, ἢ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ: ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆ. καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ, ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μείζον ὄνομα σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.61

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν.



Ἐστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ: λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη διηρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι: ὥστε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσα ἐστίν. μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἐστὶ καὶ τὸ ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται: ῥητὴ ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ ΜΗ καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τούτεστι τῇ ΔΕ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. καὶ εἰσὶ ῥηταί: αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

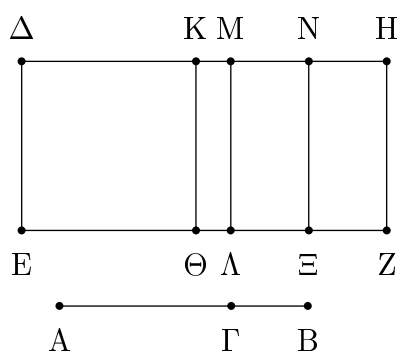
Δεικτέον δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μείζονά ἐστὶ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, μείζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ: ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ: ὥστε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστὶν. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ: ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς. καὶ ἐστὶν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα.

X.62

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην.



Ἐστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διηρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μείζον τμήμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ: λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι: ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΛ: μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ. καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτέστι τῇ ΔΕ, μήκει: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓΒ. ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστίν, τουτέστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ: ὥστε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστιν. καὶ εἰσὶ ῥηταί: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

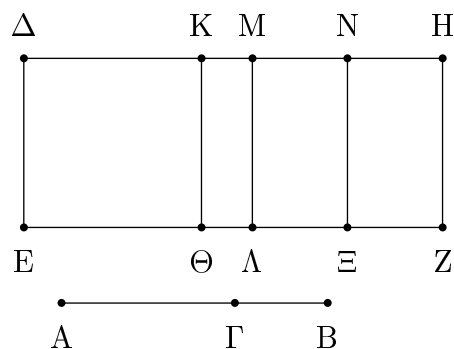
Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τρίτη.

Ὅμοίως δὴ τοῖς προτέροις ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ: ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.63

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην.



Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον πλάτος ποιῶν τὴν ΔΗ: λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΔΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τουτέστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν ἐστὶ τὴν ΜΛ, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

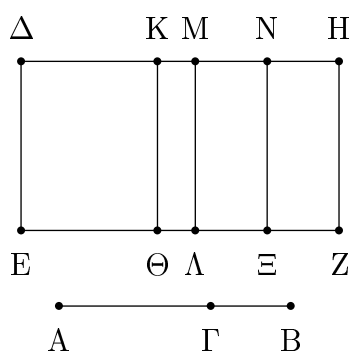
Δεικτέον [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὅμοίως δὴ δεῖξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΜΝ. ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῶ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῶ ΚΛ: ὥστε ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ ἐστίν. ἐὰν δὲ ᾧσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῶ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῆ ἔλλειπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῆ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μείζον δυνήσεται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει: ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ εἰσιν αἱ ΔΜ, ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκευμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.64

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην.



Ἐστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ AB διηρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ , ὥστε μείζονα εἶναι τὴν $A\Gamma$, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔE , καὶ τῶ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν ΔE παραβεβλήσθω τὸ ΔZ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔH : λέγω, ὅτι ἡ ΔH ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη.

Κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , αἱ $A\Gamma$, ΓB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν $A\Gamma$, ΓB , μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Delta\Lambda$: ὥστε ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔM καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔE . πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $A\Gamma B$, τουτέστι τὸ MZ , ῥητὴ ἄρα ἡ MH καὶ σύμμετρος τῇ ΔE . ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔM τῇ MH : αἱ ΔM , MH ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔH .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

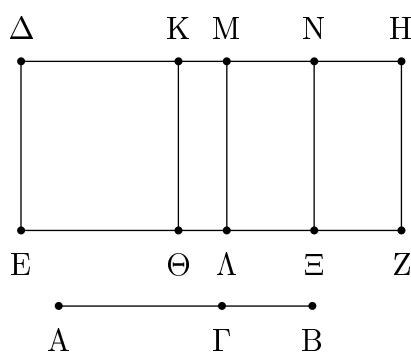
Ὅμοίως γὰρ δειχθήσεται, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔKM ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς MN , καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔK τῇ KM μήκει: ἡ ΔM ἄρα τῆς MH μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς. καὶ εἰσὶν αἱ ΔM , MH [ῥηταὶ] δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάσσων ἡ MH σύμμετρος τῇ ΔE μήκει.

Ἡ ΔH ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.65

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB διηρημένη κατὰ τὸ Γ , ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔE . καὶ παρὰ τὴν ΔE τῶ ἀπὸ τῆς AB



ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ: λέγω, ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ διηρημένη κατὰ τὸ Γ, αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων συγκείμενον τῷ ὑπ' αὐτῶν: ὥστε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἐκάτερον τῶν ΔΛ, ΜΖ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἐκάτερα τῶν ΔΜ, ΜΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ. ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ: αἱ ΔΜ, ΜΗ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

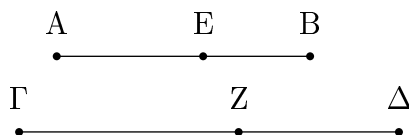
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὅμοιως δὴ πάλιν δείξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος: καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ, ΜΗ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκεκλιμένη ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.66

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ.



Ἐστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΑΕ: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. γεγονέντω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει.

σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. καὶ εἰσι ρῆται αἱ ΑΕ, ΕΒ: ρῆται ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ [ἐπεὶ] ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ, ἡ ΕΒ πρὸς ΖΔ. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι: καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ εἰσι ρῆται: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ, ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

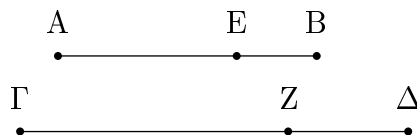
Ἦ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύνανται ἦτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένη ρῆτῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τουτέστι τῇ τάξει ἡ αὐτὴ. εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ρῆτῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστὶν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ: ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἔσται ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ρῆτῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τρίτη. εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μείζον δύνανται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ρῆτῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρός ἐστὶν αὐτῇ, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τετάρτη. εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔσται ἑκατέρα πέμπτη. εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ, ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ρῆτῇ, καὶ ἔσται ἑκατέρα ἕκτη.

Ὡστε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.67

Ἦ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.



Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διηρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέντω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ, ἡ ΑΕ πρὸς ΓΖ: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει: σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσαι δὲ αἱ ΑΕ, ΕΒ: μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ, ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ [ἄρα] δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι: ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἐστὶ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ: ἐναλλάξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. σύμμετρον

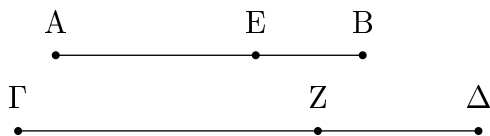
δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ: σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖΔ ῥητόν ἐστίν [καὶ διὰ τοῦτο ἐστὶν ἐκ δύο μέσων πρώτη]. εἴτε μέσον, μέσον, καὶ ἐστὶν ἑκατέρα δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.68

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτῇ μείζων ἐστίν.

Ἐστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστίν.



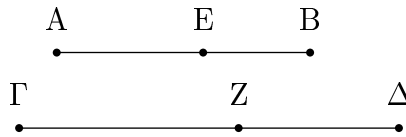
Διηρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον: καὶ γερονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ, ΕΒ ἑκατέρα τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: καὶ ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ: σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ ἅμα ῥητόν, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ ἅμα ῥητόν ἐστίν. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ σύμμετρόν ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. καὶ ἐστὶ μέσον τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ: μέσον ἄρα καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον: ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.69

Ἡ τῇ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη σύμμετρος [καὶ αὐτῇ] ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ: δεικτέον, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.



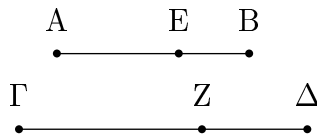
Διηρήσθω ἡ AB εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E : αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν: καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ AE , EB τῶν ὑπὸ ΓZ , $Z\Delta$: ὥστε καὶ τὸ [μὲν] συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ ῥητόν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.70

Ἡ τῆ δύο μέσα δυναμένη σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ἐστω δύο μέσα δυναμένη ἡ AB , καὶ τῆ AB σύμμετρος ἡ $\Gamma\Delta$: δεῖκτέον, ὅτι καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.



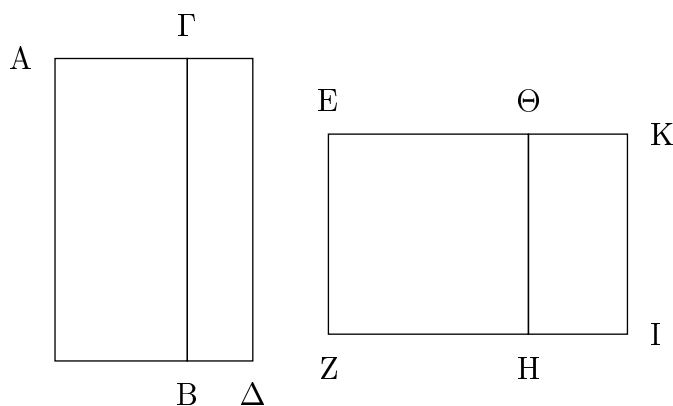
Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ AB , διηρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ E : αἱ AE , EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τετραγώνων τῶν ὑπὸ τῶν AE , EB : καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ ΓZ , $Z\Delta$ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE , EB τῶν συγκειμένων ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE , EB τῶν ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$: ὥστε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$ τετραγώνων τῶν ὑπὸ τῶν ΓZ , $Z\Delta$.

Ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.71

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.

Ἐστω ῥητὸν μὲν τὸ AB , μέσον δὲ τὸ $\Gamma\Delta$: λέγω, ὅτι ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητόν καὶ μέσον δυναμένη.



Τὸ γὰρ AB τοῦ ΓΔ ἤτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω πρότερον μείζον: καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἢ EZ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν EZ

τῷ AB ἴσον τὸ EH πλάτος ποιῶν τὴν ΕΘ: τῷ δὲ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ πλάτος ποιῶν τὴν ΘΚ. καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ AB καὶ ἐστὶν ῥητόν ἐστι τὸ AB καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ EH, ῥητόν ἄρα καὶ τὸ EH. καὶ παρὰ [ῥητὴν] τὴν EZ παραβέβληται πλάτος ποιῶν τὴν ΕΘ: ἢ ΕΘ ἄρα ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘΙ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΘΚ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἢ ΘΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητόν δὲ τὸ AB, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ AB τῷ ΓΔ: ὥστε καὶ τὸ EH ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἢ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΕΘ, ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἢ EK διηρημένη κατὰ τὸ Θ. καὶ ἐπεὶ μείζον ἐστὶ τὸ AB τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν AB τῷ EH, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ, μείζον ἄρα καὶ τὸ EH τοῦ ΘΙ: καὶ ἢ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι οὖν ἢ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ ἐστὶν ἢ μείζων ἢ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ EZ: ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. ῥητὴ δὲ ἢ EZ: ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἢ ἄρα τὸ EI δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν: ὥστε καὶ ἢ τὸ AΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἢ ΕΘ τῆς ΘΚ μείζων τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ: καὶ ἐστὶν ἢ μείζων ἢ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ EZ μήκει: ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη. ῥητὴ δὲ ἢ EZ: ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη μείζων. ἢ ἄρα τὸ EI χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν: ὥστε καὶ ἢ τὸ AΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ AB τοῦ ΓΔ: καὶ τὸ EH ἄρα ἔλασσόν ἐστι τοῦ ΘΙ: ὥστε καὶ ἢ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ. ἤτοι δὲ ἢ ΘΚ τῆς ΕΘ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει: καὶ ἐστὶν ἢ ἐλάσσων ἢ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ EZ μήκει: ἢ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. ῥητὴ δὲ ἢ EZ: ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἢ ἄρα τὸ EI χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη: ὥστε καὶ ἢ τὸ AΔ δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. ἀλλὰ δὴ ἢ ΘΚ τῆς ΘΕ μείζων δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου

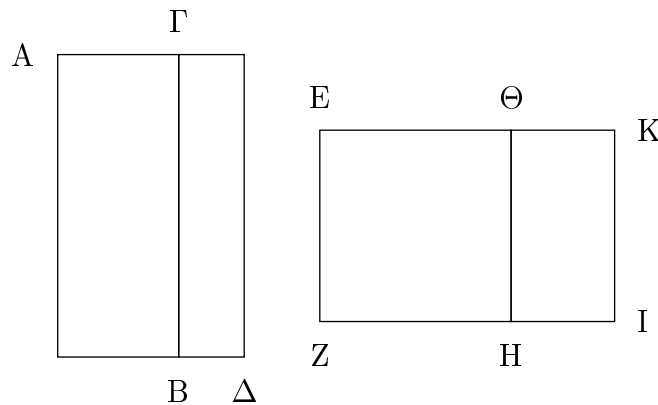
ἑαυτῆ. καὶ ἐστὶν ἡ ἐλάσσων ἡ $E\Theta$ σύμμετρος τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ EZ : ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ῥητὴ δὲ ἡ EZ : ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. ἡ ἄρα τὸ EI χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν: ὥστε καὶ ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίνονται ἦτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη ἢ μείζων ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.72

Δύο μέσων ἀσύμμετρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἦτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ [ἢ] δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθω γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ AB , $\Gamma\Delta$: λέγω, ὅτι ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἦτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.



Τὸ γὰρ AB τοῦ $\Gamma\Delta$ ἦτοι μείζον ἐστὶν ἢ ἔλασσον. ἔστω, εἰ τύχοι, πρότερον μείζον τὸ AB τοῦ $\Gamma\Delta$: καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τῷ μὲν AB ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EH πλάτος ποιῶν τὴν $E\Theta$, τῷ δὲ $\Gamma\Delta$ ἴσον τὸ ΘI πλάτος ποιῶν τὴν ΘK . καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν AB , $\Gamma\Delta$, μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν EH , ΘI . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ZE παράκειται πλάτος ποιῶν τὰς $E\Theta$, ΘK : ἑκάτερα ἄρα τῶν $E\Theta$, ΘK ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρος τῆ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ AB τῷ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν AB τῷ EH , τὸ δὲ $\Gamma\Delta$ τῷ ΘI , ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ EH τῷ ΘI . ὥς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ ΘI , οὕτως ἐστὶν ἡ $E\Theta$ πρὸς ΘK : ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῆ ΘK μήκει. αἱ $E\Theta$, ΘK ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ EK . ἦτοι δὲ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου. δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ μήκει: καὶ οὐδετέρα τῶν $E\Theta$, ΘK σύμμετρος ἐστὶ τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ EZ μήκει: ἡ EK ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. ῥητὴ δὲ ἡ EZ : ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα: ἡ ἄρα τὸ EI , τοῦτέστι τὸ $A\Delta$, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. ἀλλὰ δὴ ἡ $E\Theta$ τῆς ΘK μείζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει: καὶ ἀσύμμετρος ἐστὶ ἑκάτερα τῶν $E\Theta$, ΘK τῆ EZ μήκει: ἡ ἄρα EK ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. ἐὰν δὲ χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν: ὥστε καὶ ἡ τὸ $A\Delta$ χωρίον δυναμένη ἢ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

[Ομοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἔλαττον ἢ τὸ AB τοῦ ΓΔ, ἢ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν ἤτοι δύο μέσα δυναμένη].

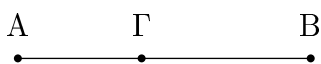
Δύο ἄρα μέσων ἀσύμμετρων ἀλλήλοις συντιθεμένων αἰ λοιπαὶ δύο ἄλλογοι γίνονται ἤτοι ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἰ μετ' αὐτὴν ἄλλογοι οὔτε τῆ μέση οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἰ αὐταί. τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῆ παρ' ἣν παράκειται μήκει. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. τὰ δ' εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν, ἀλλήλων δέ, ὅτι τῆ τάξει οὐκ εἰσὶν αἰ αὐταί: ὥστε καὶ αὐταὶ αἰ ἄλλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

X.73

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῆ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη, ἢ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν: καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς AB ῥητὴ ἀφηρήσθω ἢ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη: λέγω, ὅτι ἢ λοιπὴ ἢ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.



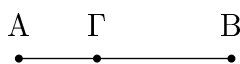
Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἢ AB τῆ ΒΓ μήκει, καὶ ἐστὶν ὡς ἢ AB πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῶ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετράγωνα, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ. καὶ ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΑ, καὶ λοιπῶ ἄρα τῶ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ. ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ ΑΓ: καλείσθω δὲ ἀποτομή. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.74

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῆ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα, ἢ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν: καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς AB μέση ἀφηρήσθω ἢ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῆ AB, μετὰ δὲ τῆς AB ῥητὸν ποιούσα τὸ ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ: λέγω, ὅτι ἢ λοιπὴ ἢ ΑΓ ἄλογός ἐστιν: καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἰ AB, ΒΓ μέσαι εἰσὶν, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ. ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ:

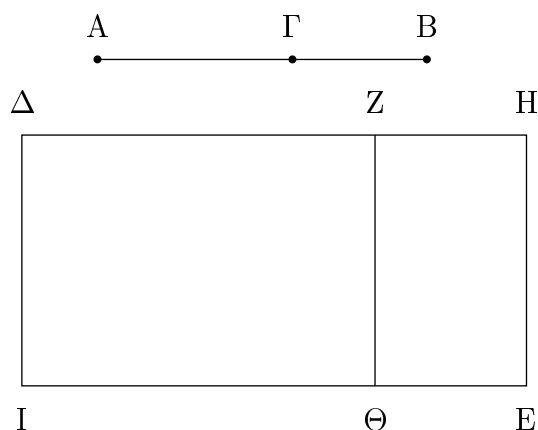


ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ: καὶ λοιπῶ ἄρα τῶ ἀπὸ τῆς AΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ, ἐπεὶ καὶ τὸ ὅλον ἐνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἦ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. ῥητὸν δὲ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ: ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AΓ: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ AΓ: καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομῆ πρώτη.

X.75

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῆ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν: καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς AB μέση ἀφηρήσθω ἡ BΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ τῇ AB, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς AB μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ: λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ AΓ ἄλογός ἐστιν: καλεῖσθω δὲ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα.



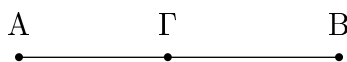
Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ,

καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς AΓ. καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AB, BΓ, καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν AB, BΓ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῶ ΔΘ: καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AB, BΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ BΓ μήκει: ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τῶ ὑπὸ τῶν AB, BΓ. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AB σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, BΓ, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν AB, BΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τοῖς ἀπὸ τῶν AB, BΓ. ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΕ, τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, BΓ τὸ ΔΘ: ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ τῶ ΔΘ. ὥς δὲ τὸ

ΔE πρὸς τὸ $\Delta \Theta$, οὕτως ἡ $H\Delta$ πρὸς τὴν ΔZ : ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $H\Delta$ τῇ ΔZ . καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ρηταί: αἱ ἄρα $H\Delta$, ΔZ ρηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ZH ἄρα ἀποτομή ἐστίν. ρητὴ δὲ ἡ ΔI : τὸ δὲ ὑπὸ ρητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστίν. καὶ δύναται τὸ ZE ἢ AG : ἡ AG ἄρα ἄλογός ἐστίν: καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.76

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν ἅμα ρητόν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστίν: καλείσθω δὲ ἐλάσσων.



Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρεθῶ ἡ $B\Gamma$ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ ποιούσα τὰ προκείμενα. λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ AG ἄλογός ἐστίν ἢ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετραγώνων ρητόν ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$: καὶ ἀναστρέψαντι λοιπῶ τῶ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. ρητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG : ἄλογος ἄρα ἢ AG : καλείσθω δὲ ἐλάσσων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.77

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ρητόν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστίν: καλείσθω δὲ ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρεθῶ ἡ $B\Gamma$ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ AB ποιούσα τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἢ AG ἄλογός ἐστίν ἢ προειρημένη.



Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τετραγώνων μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ρητόν, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG ἀσύμμετρόν ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$. καὶ ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ ρητόν: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AG ἄλογόν ἐστίν: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἢ AG : καλείσθω δὲ ἢ μετὰ ρητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.78

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τὸ τε δις ὑπ' αὐτῶν

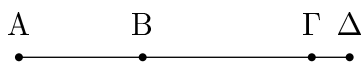
μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν: καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.



Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς AB εὐθεῖα ἀφηρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ AB ποιούσα τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα. Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβελήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιῶν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΔΘ [πλάτος ποιῶν τὴν ΔΖ]. λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ: ὥστε ἡ ΑΓ δύναιται τὸ ΖΕ. καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΕ, μέσον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΕ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΔΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΔΘ, τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΔΖ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν AB, ΒΓ τῷ δις ὑπὸ τῶν AB, ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΗΔ, ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ: ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον [ὀρθογώνιον] ἄλογόν ἐστίν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν. καὶ δύναιται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ: ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστιν: καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.79

Τῇ ἀποτομῇ μία [μόνον] προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.



Ἐστω ἀποτομὴ ἡ AB, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ: αἱ ΑΓ, ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

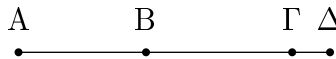
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμόζετω ἡ ΒΔ: καὶ αἱ ΑΔ, ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ: τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἀμφοτέρα ὑπερέχει: ἐναλλάξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει [καὶ] τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ: ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρα. καὶ τὸ δις ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τοῦ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ὑπερέχει ῥητῶ:

ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: μέσα γὰρ ἀμφοτέρα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ. τῆ ἄρα AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνη τῆ ἀποτομῆ προσαρμόζει ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.80

Τῆ μέσης ἀποτομῆ πρώτη μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.



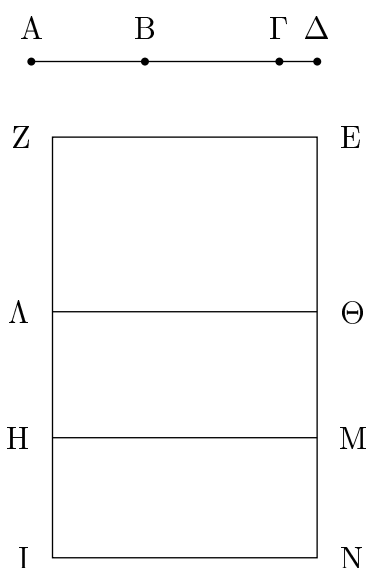
Ἐστω γὰρ μέσης ἀποτομῆ πρώτη ἡ AB, καὶ τῆ AB προσαρμοζέτω ἡ BΓ: αἱ AΓ, BΓ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν AΓ, BΓ: λέγω, ὅτι τῆ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔB. αἱ ἄρα AΔ, ΔB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB. καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΓ, BΓ τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, BΓ: τῷ γὰρ αὐτῷ [πάλιν] ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς AB: ἐναλλάξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, BΓ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, BΓ. τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, BΓ ὑπερέχει ῥητῶ: ῥητὰ γὰρ ἀμφοτέρα. καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, BΓ [τετραγώνων] ὑπερέχει ῥητῶ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῶ.

Τῆ ἄρα μέσης ἀποτομῆ πρώτη μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.81

Τῆ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.



Ἐστω μέσης ἀποτομῆ δευτέρα

ἡ AB καὶ τῇ AB προσαρμόζουσα ἡ $BΓ$: αἱ ἄρα $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$: λέγω, ὅτι τῇ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

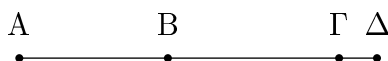
Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ $BΔ$: καὶ αἱ $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ EZ , καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EH πλάτος ποιοῦν τὴν EM : τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ $ΘH$ πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘM$: λοιπὸν ἄρα τὸ EA ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB : ὥστε ἡ AB δύναται τὸ EA . πάλιν δὲ τοῖς ἀπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$ ἴσον παρὰ τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ EI πλάτος ποιοῦν τὴν EN : ἔστι δὲ καὶ τὸ EA ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνῳ: λοιπὸν ἄρα τὸ $ΘI$ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΔ$, $ΔΒ$. καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ ἐστὶν ἴσα τῷ EH : μέσον ἄρα καὶ τὸ EH . καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν EM : ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EM καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ μέσον ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ $ΘH$: καὶ τὸ $ΘH$ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν $ΘM$: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $ΘM$ καὶ ἀσύμμετρος τῇ EZ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ $ΑΓ$, $ΓΒ$ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $ΑΓ$ τῇ $ΓΒ$ μήκει. ὡς δὲ ἡ $ΑΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$, οὕτως ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ τῷ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς $ΑΓ$ σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$: ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ τῷ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$. καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον τὸ EH , τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν $ΑΓ$, $ΓΒ$ ἴσον τὸ $HΘ$: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ EH τῷ $ΘH$. ὡς δὲ τὸ EH πρὸς τὸ $ΘH$, οὕτως ἐστὶν ἡ EM πρὸς τὴν $ΘM$: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EM τῇ $ΜΘ$ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ EM , $ΜΘ$ ἄρα ῥηταί εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομῆ ἄρα ἐστὶν ἡ $EΘ$, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ $ΘM$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ $ΘN$ αὐτῇ προσαρμόζει: τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα

τῆ ὅλη: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῆ ἄρα μέσης ἀποτομῆ δευτέρα μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.82

Τῆ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη ποιούσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον.



Ἐστω ἡ ἐλάσσων ἡ AB, καὶ τῆ AB προσαρμόζουσα ἔστω ἡ BΓ: αἱ ἄρα AΓ, ΓB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον: λέγω, ὅτι τῆ AB ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιούσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ BΔ: καὶ αἱ AΔ, ΔB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὰ προειρημένα. καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῶ: ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφοτέρα: καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB ἄρα τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB ὑπερέχει ῥητῶ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρα.

Τῆ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη καὶ ποιούσα τὰ μὲν ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.83

Τῆ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούση μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῆ ὅλη, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.



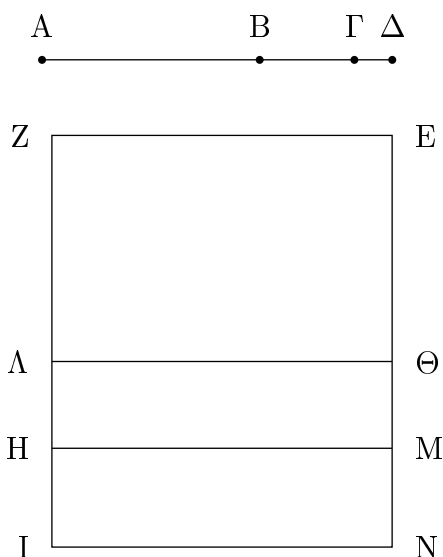
Ἐστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB, καὶ τῆ AB προσαρμοζέτω ἡ BΓ: αἱ ἄρα AΓ, ΓB δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὰ προκείμενα: λέγω, ὅτι τῆ AB ἑτέρα οὐ προσαρμόσει τὰ αὐτὰ ποιούσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ BΔ: καὶ αἱ AΔ, ΔB ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὰ προκείμενα. ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB ἀκολουθῶς τοῖς πρὸ αὐτοῦ, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AΔ, ΔB τοῦ δις ὑπὸ τῶν AΓ, ΓB ὑπερέχει ῥητῶ: ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφοτέρα: καὶ τὰ ἀπὸ τῶν AΔ, ΔB ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν AΓ, ΓB ὑπερέχει ῥητῶ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον: μέσα γὰρ ἐστὶν ἀμφοτέρα. οὐκ ἄρα τῆ

ΑΒ ἐτέρα προσαρμόσει εὐθεΐα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὰ προειρημένα: μία ἄρα μόνον προσαρμόσει: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.84

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούση μία μόνη προσαρμόζει εὐθεΐα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον τό τε δις ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν.



Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ: αἱ ἄρα ΑΓ, ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὰ προειρημένα. λέγω, ὅτι τῇ ΑΒ ἐτέρα οὐ προσαρμόσει ποιούσα τὰ προειρημένα.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, προσαρμόζετω ἡ ΒΔ, ὥστε καὶ τὰς ΑΔ, ΔΒ δυνάμει ἀσύμμετρος εἶναι ποιούσας τὰ τε ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ: καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιῶν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΘΗ πλάτος ποιῶν τὴν ΘΜ: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ: ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. πάλιν τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ πλάτος ποιῶν τὴν ΕΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ: λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΘΙ. καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΕΗ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΕΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΘΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΕΜ, ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι ἡ $E\Theta$ πάλιν ἀποτομή ἐστίν, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘN . τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ: ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῇ AB ἕτερα προσαρμόσει εὐθεΐα.

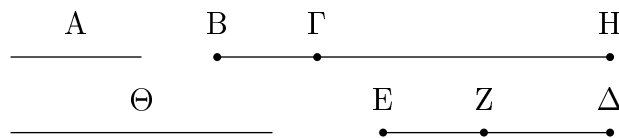
Τῇ ἄρα AB μία μόνον προσαρμόζει εὐθεΐα δυνάμει ἀσύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιούσα τὰ τε ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Definitions III

1. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ πρώτη.
2. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ δευτέρα.
3. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ, καλεῖσθω ἀποτομὴ τρίτη.
4. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μείζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμέτρου ἑαυτῇ [μήκει], ἐὰν μὲν ἡ ὅλη σύμμετρος ἢ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει, καλεῖσθω ἀποτομὴ τετάρτη.
5. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη.
6. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη.

X.85

Εὐρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ A , καὶ τῇ A μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ BH : ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ BH . καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔE , $E Z$, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ $Z\Delta$ μὴ ἔστω τετράγωνος: οὐδ' ἄρα ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ τετράγωνον: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς BH : ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ $H\Gamma$. καὶ ἐπεὶ ὁ $E\Delta$ πρὸς τὸν ΔZ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Gamma$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ BH τῇ $H\Gamma$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ BH , $H\Gamma$ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ἄρα $B\Gamma$ ἀποτομὴ ἐστίν.

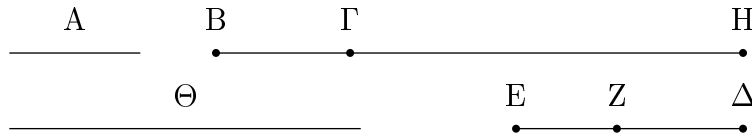
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

᾿Ωτι γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἐκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστιν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῆς Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῶ ἀπὸ τῆς Θ: ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς μήκει τῆς Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Εὐρήται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομή ἡ ΒΓ: ὅπερ ἔδει εὐρεῖν.

X.86

Εὐρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῆς Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ, ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετράγωνον. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον τῶ ἀπὸ τῆς ΗΒ τετραγώνω. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν ἄρα [ἐστὶ] καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΓΗ τῆς ΗΒ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΓΗ, ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

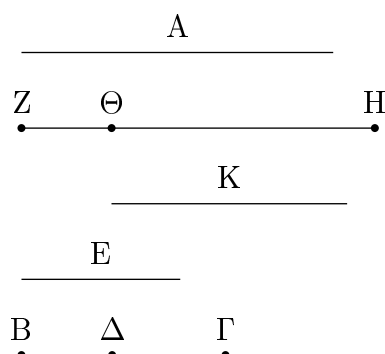
᾿Ωτι γὰρ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμὸν, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. καὶ ἐστὶν ἐκάτερος τῶν ΔΕ, ΕΖ τετράγωνος: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῆς Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῶ ἀπὸ τῆς Θ: ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς σύμμετρος τῆς Α. ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Εὐρήται ἄρα δευτέρα ἀποτομή ἡ ΒΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.87

Εὐρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ



ΓB πρὸς τὸν $\text{B}\Delta$ λόγον ἐχέτω, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $\text{B}\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $\text{B}\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ZH τετραγώνῳ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH : ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ ὁ E πρὸς τὸν $\text{B}\Gamma$ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH [τετράγωνον] λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῇ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH : ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\text{H}\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ $\text{H}\Theta$ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί: αἱ ZH , $\text{H}\Theta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $\text{Z}\Theta$.

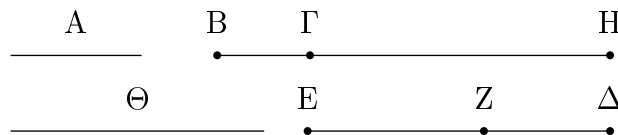
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $\text{B}\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$. ὁ δὲ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ A τῇ $\text{H}\Theta$ μήκει. οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $\text{H}\Theta$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει. ᾧ οὖν μεῖζόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς K . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\text{H}\Theta$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\text{B}\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ $\text{B}\Gamma$ πρὸς τὸν $\text{B}\Delta$ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ K μήκει, καὶ δύναται ἡ ZH τῆς $\text{H}\Theta$ μεῖζον τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH , $\text{H}\Theta$ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ A μήκει: ἡ $\text{Z}\Theta$ ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶ τρίτη.

Εύρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομή ἡ ΖΘ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.88

Εύρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τῆ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΖ, ΕΖ λόγον μὴ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν. καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ. σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῆ ΗΓ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομή ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ.

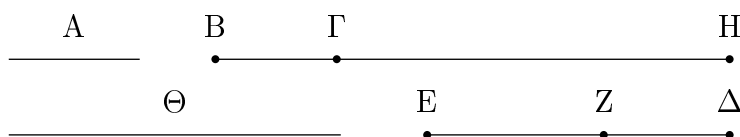
[Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη].

ἽΝι οὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῆ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ: ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῆ ἐκκεκλιμένη ῥητῆ μήκει τῆ Α. ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.

Εύρηται ἄρα ἡ τετάρτη ἀποτομή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.89

Εύρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῆ Α μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΗ: ῥητὴ ἄρα [ἐστὶν] ἡ ΓΗ. καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ, ΖΕ, ὥστε τὸν ΔΕ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΔΖ,

ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΒΗ, ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶν.

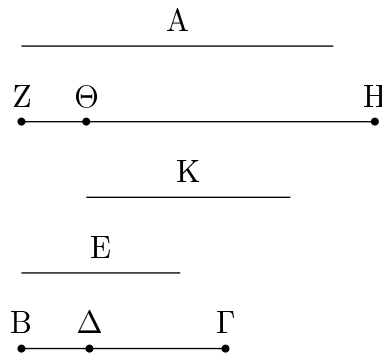
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἵτι γὰρ μεῖζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῶ ἀπὸ τῆς Θ: ἡ ΗΒ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ Α μήκει: ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομὴ ἐστὶ πέμπτη.

Εὐρήται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.90

Εὐρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομὴν.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε, ΒΓ, ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῶ ἀπὸ τῆς ΖΗ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος

ἄρα ἐστὶν ἡ A τῆ ZH μήκει. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH τῷ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH : ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ $H\Theta$. καὶ ἐπεὶ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῆ $H\Theta$ μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ZH , $H\Theta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ἄρα $Z\Theta$ ἀποτομὴ ἐστὶν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἕκτη.

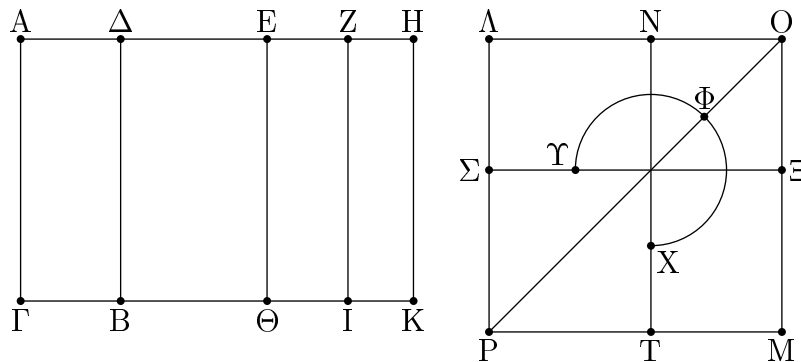
Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς μὲν ὁ E πρὸς τὸν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZH , ὡς δὲ ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$. ὁ δὲ E πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς A πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ A τῆ $H\Theta$ μήκει: οὐδετέρα ἄρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμμετρος ἐστὶ τῆ A ῥητῆ μήκει. ᾧ οὖν μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ZH τοῦ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς K . ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ὁ $B\Gamma$ πρὸς τὸν $\Gamma\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $H\Theta$, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K . ὁ δὲ ΓB πρὸς τὸν $B\Delta$ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς K λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῆ K μήκει. καὶ δύναται ἡ ZH τῆς $H\Theta$ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς K : ἡ ZH ἄρα τῆς $H\Theta$ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ μήκει. καὶ οὐδετέρα τῶν ZH , $H\Theta$ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ἐκκευμένη ῥητῆ μήκει τῆ A . ἡ ἄρα $Z\Theta$ ἀποτομὴ ἐστὶν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ ἡ $Z\Theta$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.91

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν.

Περιεχέσθω γάρ χωρίον τὸ AB ὑπὸ ῥητῆς τῆς AG καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς AD : λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν.



Ἐπεὶ γάρ ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη ἡ $A\Delta$, ἔστω αὐτῆ προσαρμοζουσα ἡ ΔH : αἱ AH , $H\Delta$ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ὅλη ἡ AH σύμμετρος ἐστὶ τῆ ἐκκευμένη

ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ μήκει: ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τεμηθῆσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. καὶ διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ: καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἡ ΑΓ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ΑΖ, ΖΗ: ὥστε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ ῥητόν ἐστίν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει: ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν.

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ τὴν ὑπὸ ΛΟΜ τὸ ΝΞ: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ: τῶν ἄρα ΑΙ, ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΕΚ. ἐστὶ δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, καὶ ἐστὶ τὸ [μὲν] ΑΙ τῷ ΑΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΚΖ τῷ ΝΞ: καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ: τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ τετραγώνοις: λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ. τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἐστὶ τετράγωνον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ: ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ ΑΝ ἀποτομὴ ἐστίν.

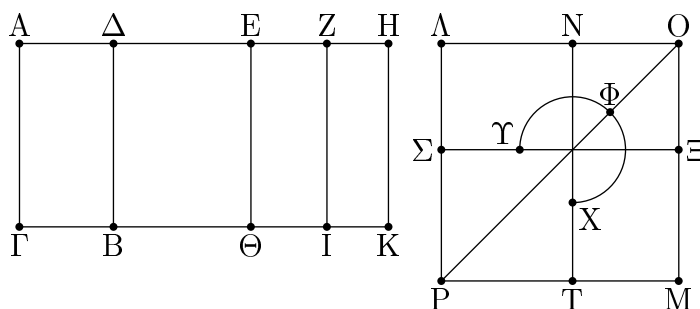
Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΙ, ΖΚ, καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ, καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΜ, ΝΞ ῥητόν ἐστίν, τουτέστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΛΟ, ΟΝ: καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητὴ ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΔΘ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΛΞ, μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ: ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ. καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον: ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομὴ ἐστίν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τὰ ἐξῆς.

X.92

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.



Ἐστω γὰρ τῆς ΑΔ προσαρμοζουσα ἡ ΔΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμοζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῆς ἐκκειμένης ῥητῆς τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε: καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελθήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ: σύμμετρός ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῆς ΖΗ μήκει. καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρός τῆς ΑΓ μήκει: καὶ ἑκατέρω ἄρα τῶν ΑΖ, ΖΗ ῥητὴ ἐστὶ καὶ ἀσύμμετρός τῆς ΑΓ μήκει: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆς ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστίν. ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῆς ΑΓ μήκει. [ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρω τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ σύμμετρός τῆς ΑΓ μήκει.] ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ ῥητόν ἐστιν.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετραγώνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὃν τῷ ΑΜ τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὰ ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ, ΖΚ μέσα ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ [ἄρα] μέσα ἐστίν: καὶ αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ: ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ: ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως [ἐστὶ] τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ: τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ: καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ: καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ: ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΜ, ΝΞ, ὃν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΤΣ. τὸ δὲ ΤΣ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ: τὸ ἀπὸ τῆς ΑΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ: ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω [δὴ], ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.

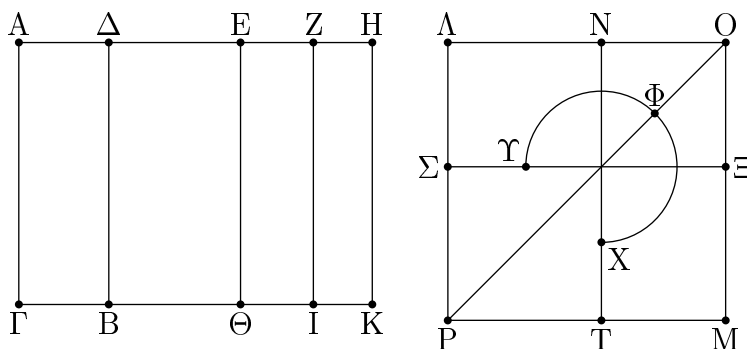
Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστὶ τὸ ΕΚ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΛΞ, ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ: ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς ΟΝ: αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει. αἱ ἄρα ΛΟ, ΟΝ μέσαι εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητόν περιέχουσαι: ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη: καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ πρώτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.93

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.



Ἐστω γὰρ τῆ ΑΔ προσαρμοζουσα ἡ ΔΗ: αἱ ΑΗ, ΗΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ, ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῆ ἐκκεκμένη ῥητῆ τῆ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τεμησθῶ οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβελήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ. καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η σημείων τῆ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ: σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ, ΖΗ: σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκάτερά τῶν ΑΖ, ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει: ὥστε καὶ αἱ ΑΖ, ΖΗ. ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ, ΖΚ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκάτερά τῶν ΔΕ, ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. ῥητὴ δὲ ἡ ΗΔ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει: ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκάτερά τῶν ΔΕ, ΕΗ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΑΓ μήκει: ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ, ΕΚ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῆ ΗΔ. ἀλλ' ἡ μὲν ΑΗ τῆ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῆ ΕΗ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῆ ΕΗ μήκει. ὥς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὄν τῷ ΑΜ: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ: ὥς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ: τῶν ἄρα ΑΙ, ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΕΚ. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΑΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ: καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΑΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ

ΝΞ: και τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ ἴσον [ἐστὶ] τῷ ΔΘ: και ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι και τῷ ΝΞ. ἔστι δὲ και τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΑΜ, ΝΞ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνω: ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΑΙ, ΖΚ και ἐστὶν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα και ἐκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ: μέση ἄρα ἐκάτερα τῶν ΛΟ, ΟΝ. και ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα και τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ και τὸ ΑΜ τῷ ΜΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ: ὥστε και ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστὶ τῇ ΟΝ: αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα μέσα εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δὲ, ὅτι και μέσον περιέχουσιν.

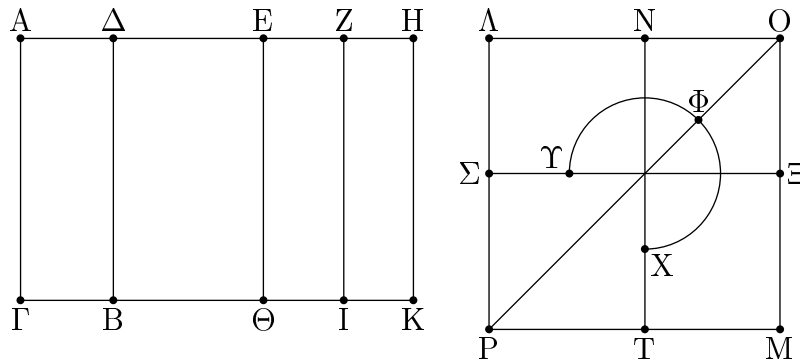
Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ και ἐστὶν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, μέσον ἄρα ἐστὶ και τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ: ὥστε αἱ ΛΟ, ΟΝ μέσα εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα: και δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.94

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς και ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ και ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμοζουσα ἡ ΔΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, και ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκευμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλείπον εἶδει τετραγώνω, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, και τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλείπον εἶδει τετραγώνω, και ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε, Ζ, Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ, ΒΔ αἱ ΕΘ, ΖΙ, ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΑΗ και σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, και εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταὶ, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός

ἔστιν ἡ AZ τῆ ZH μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ AI τῷ ZK. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν AI ἴσον τετράγωνον τὸ AM, τῷ δὲ ZK ἴσον ἀφηρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ τῶν ΛΟΜ τὸ ΝΞ. περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἔστι τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν AZ, ZH ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἔστιν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AZ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἔστι τὸ AI πρὸς τὸ EK, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ZH, οὕτως ἔστι τὸ EK πρὸς τὸ ZK: τῶν ἄρα AI, ZK μέσον ἀνάλογόν ἔστι τὸ EK. ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ, ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν τὸ MN, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν AI τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ZK τῷ ΝΞ: καὶ τὸ EK ἄρα ἴσον ἔστι τῷ MN. ἀλλὰ τῷ μὲν EK ἴσον ἔστι τὸ ΔΘ, τῷ δὲ MN ἴσον ἔστι τὸ ΛΞ: ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἔστι τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ AK ἴσον ἔστι τοῖς ΛΜ, ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἔστι τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ, λοιπὸν ἄρα τὸ AB ἴσον ἔστι τῷ ΣΤ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς AN τετραγώνῳ: ἡ AN ἄρα δύναται τὸ AB χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ AN ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

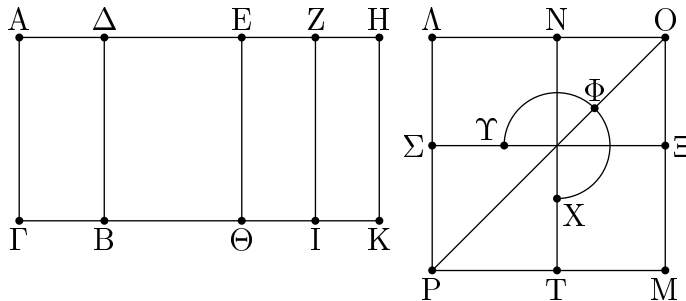
Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ AK καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετραγώνοις, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ ῥητόν ἐστιν. πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἔστιν, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα δις ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἔστιν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ AI τῷ ZK, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ τετραγώνῳ. αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιῶσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον. ἡ AN ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων: καὶ δύναται τὸ AB χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ AB χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.95

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιῶσά ἐστιν.

Χωρίον γὰρ τὸ AB περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ AB χωρίον δυναμένη [ἡ] μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιῶσά ἐστιν.



Ἐστω γὰρ τῆ ΑΔ προσαρμοζουσα ἡ ΔΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ πρὸς ἀρμόζουσα ἡ ΗΔ σύμμετρος ἔστι μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῆ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα

κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρος ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΓΑ μήκει, καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί, μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἡ ΔΗ καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστὶ τὸ ΔΚ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΑΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφηρήσθω τὸ ΝΞ περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΑΟΜ: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΑΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι ἡ ΑΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΑΝ ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν.

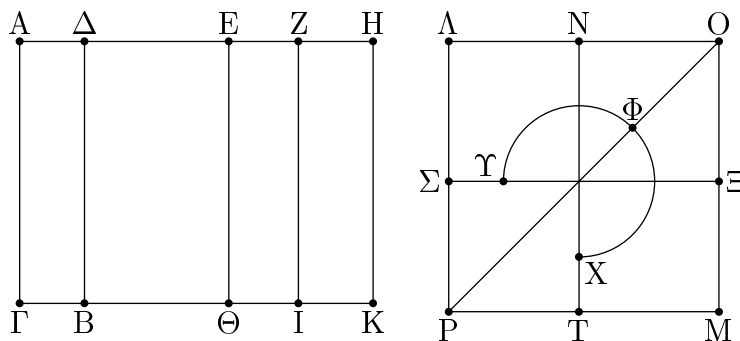
Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστὶ τὸ ΔΚ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΟ, ΟΝ, καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ: αἱ ΑΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΝ ἄλογός ἐστίν ἢ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα: καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.96

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἢ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη [ἢ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστίν.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμοζούσα ἡ ΔΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκευμένη ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἢ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ μήκει, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. τετιμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε [σημεῖον], καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἑλλείπον εἶδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ, ΖΗ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ

ΑΙ τῷ ΖΚ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΑΓ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ, ΔΗ ῥηταὶ εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ, ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ μήκει. ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφηρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὸ ΝΞ: περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρον ἐστὶ τὰ ΛΜ, ΝΞ τετράγωνα. ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν, ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω, ὅτι ἡ ΛΝ [ἡ] μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

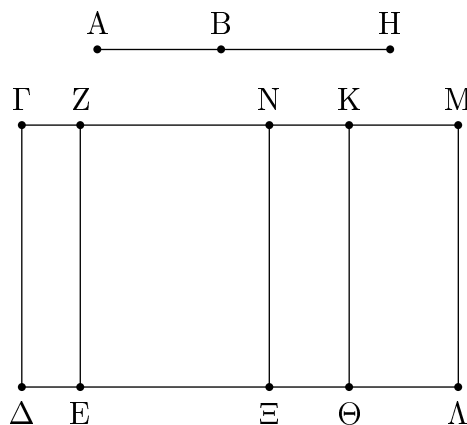
Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ καὶ ἐστὶν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ, καὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ μέσον ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ τετράγωνα τῷ δις ὑπὸ τῶν ΛΟ, ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ: αἱ ΛΟ, ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσιν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ δις ὑπ' αὐτῶν μέσον ἔτι τε τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δις ὑπ' αὐτῶν. ἡ ἄρα ΛΝ ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα: καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δείξαι.

X.97

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιῶν τὴν ΓΖ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶ πρώτη.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ: ὦν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ: λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἦχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἐκάτερον ἄρα

τῶν ΖΞ, ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, καὶ ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, μέσον ἄρα τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητά ἐστιν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΖΛ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΔΜ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πρώτη.

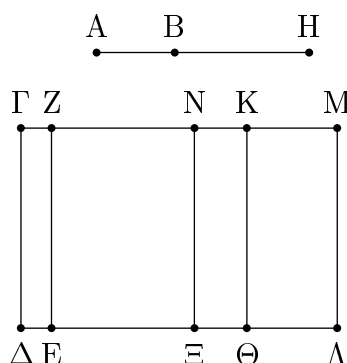
Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τὸ ΝΛ, καὶ τῶν ΓΘ, ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΝΛ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ: ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν [ἐστὶ] καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ, καὶ ἐστὶ σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῆς μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ μήκει: ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.98

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέρα.

Ἐστω μέσης ἀποτομῆς πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβέβλησθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.



Ἐστω γὰρ τῇ AB προσαρμόζουσα ἢ BH : αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι. καὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς AH

ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$ πλάτος ποιῶν τὴν ΓK , τῶ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $K\Lambda$ πλάτος ποιῶν τὴν KM : ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB : μέσον ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Lambda$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ΓM : ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ ἀσύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τῶ ΓE , λοιπὸν ἄρα τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον ἐστὶ τῶ $Z\Lambda$. ῥητὸν δὲ [ἐστὶ] τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB : ῥητὸν ἄρα τὸ $Z\Lambda$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $Z E$ παράκειται πλάτος ποιῶν τὴν ZM : ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZM καὶ σύμμετρος τῇ $\Gamma\Delta$ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν AH , HB , τουτέστι τὸ $\Gamma\Lambda$, μέσον ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB , τουτέστι τὸ $Z\Lambda$, ῥητὸν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$ τῶ $Z\Lambda$. ὡς δὲ τὸ $\Gamma\Lambda$ πρὸς τὸ $Z\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν ZM : ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓM τῇ ZM μήκει. καὶ εἰσιν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓM , MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἡ ΓZ ἄρα ἀποτομή ἐστίν.

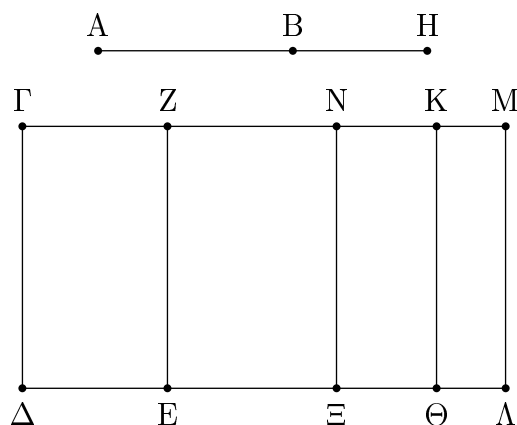
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N , καὶ ἤχθω διὰ τοῦ N τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἢ $N\Xi$: ἐκάτερον ἄρα τῶν $Z E$, $N\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῶν AH , HB . καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς AH τῶ $\Gamma\Theta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB τῶ $N\Lambda$, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς BH τῶ $K\Lambda$, καὶ τῶν $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ $N\Lambda$: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ $N\Lambda$, οὕτως τὸ $N\Lambda$ πρὸς τὸ $K\Lambda$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ $N\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓK πρὸς τὴν NM , ὡς δὲ τὸ $N\Lambda$ πρὸς τὸ $K\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν MK : ὡς ἄρα ἡ ΓK πρὸς τὴν NM , οὕτως ἐστὶν ἡ NM πρὸς τὴν KM : τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓK , KM ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς NM , τουτέστι τῶ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ZM . [καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῶ ἀπὸ τῆς BH , σύμμετρόν ἐστὶ καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῶ $K\Lambda$, τουτέστιν ἡ ΓK τῇ KM .] ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓM , MZ , καὶ τῶ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς MZ ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓM παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓK , KM καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓM τῆς MZ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμέτρου ἑαυτῇ μήκει. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἢ ZM σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκεκμένη ῥητῇ τῇ $\Gamma\Delta$: ἡ ἄρα ΓZ ἀποτομή ἐστὶ δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.99

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.



Ἐστω μέσης ἀποτομῆ δευτέρα ἡ AB , ῥητὴ δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\epsilon$ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓZ : λέγω, ὅτι ἡ ΓZ ἀποτομὴ ἐστὶ τρίτη.

Ἐστω γὰρ τῆ AB προσαρμόζουσα ἡ BH : αἱ ἄρα AH , HB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω τὸ $\Gamma\Theta$ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓK , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς BH ἴσον παρὰ τὴν $K\Theta$ παραβεβλήσθω τὸ $K\Lambda$ πλάτος ποιοῦν τὴν $K M$: ὅλον ἄρα τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB [καὶ ἐστὶ μέσα τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB]: μέσον ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Lambda$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν $\Gamma\Delta$ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓM : ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM καὶ ἀσύμμετρος τῆ $\Gamma\Delta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ $\Gamma\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AH , HB , ὧν τὸ $\Gamma\epsilon$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AB , λοιπὸν ἄρα τὸ ΛZ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . τετμήσθω οὖν ἡ ZM δίχα κατὰ τὸ N σημεῖον, καὶ τῆ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ $N\Xi$: ἐκάτερον ἄρα τῶν $Z\Xi$, $N\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB : μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ $Z\Lambda$. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν EZ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ZM : ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZM καὶ ἀσύμμετρος τῆ $\Gamma\Delta$ μήκει. καὶ ἐπεὶ αἱ AH , HB δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] μήκει ἡ AH τῆ HB : ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ὑπὸ τῶν AH , HB . ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH σύμμετρά ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB , τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB τὸ δις ὑπὸ τῶν AH , HB : ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AH , HB τῷ δις ὑπὸ τῶν AH , HB . ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν AH , HB ἴσον ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$, τῷ δὲ δις ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον ἐστὶ τὸ $Z\Lambda$: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Gamma\Lambda$ τῷ $Z\Lambda$. ὡς δὲ τὸ $\Gamma\Lambda$ πρὸς τὸ $Z\Lambda$, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓM πρὸς τὴν ZM : ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓM τῆ ZM μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓM , MZ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ .

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AH τῷ ἀπὸ τῆς HB , σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ $K\Lambda$: ὥστε καὶ ἡ ΓK τῆ $K M$. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν AH , HB μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AH , HB , καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AH ἴσον τὸ $\Gamma\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς HB ἴσον τὸ $K\Lambda$, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν AH , HB ἴσον τὸ $N\Lambda$, καὶ τῶν $\Gamma\Theta$, $K\Lambda$ ἄρα μέσον

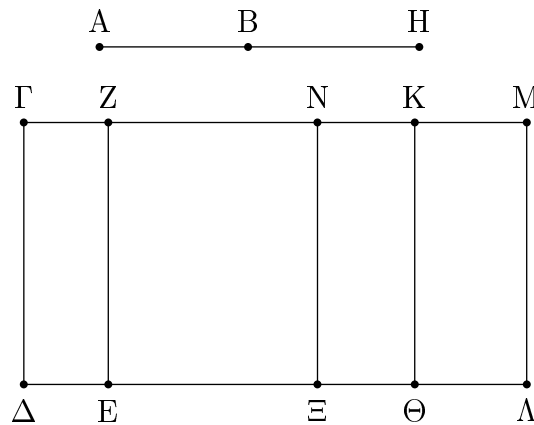
ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ [ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ] τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἀνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ, ΜΖ σύμμετρος ἐστὶ μήκει τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ τῆ ΓΔ: ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.100

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην.

Ἐστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστὶ τετάρτη.



Ἐστω γὰρ τῆ ΑΒ προσαρμοζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν: ῥητόν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ καὶ σύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἴχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἐστὶ καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ΖΛ, καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστίν. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῆ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστίν, τὸ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα [ἄρα] ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῷ δις ὑπὸ τῶν

ΑΗ, ΗΒ. ἴσον δέ [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ: ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῶ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΜ τῆ ΜΖ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομῆ ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΖ.

Λέγω [δὴ], ὅτι καὶ τετάρτη.

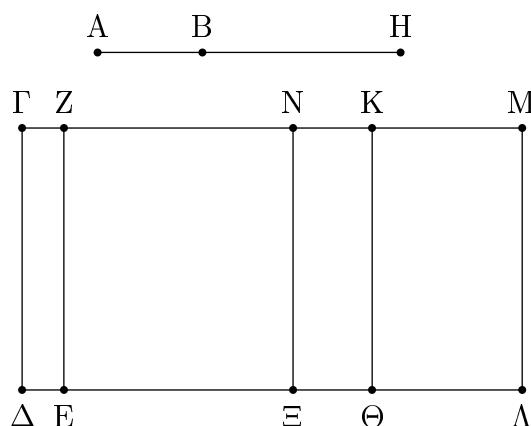
Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ἀπὸ τῆς ΗΒ. καὶ ἐστὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῶ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἢ ΓΚ τῆ ΚΜ μήκει. καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῶ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῶ ΝΛ, τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΝΛ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: ὡς ἄρα ἢ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἢ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῶ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῶ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλείπον εἶδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ, ΚΜ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἢ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ ἐστὶν ὅλη ἢ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῆ ἐκκευμένη ῥητῆ τῆ ΓΔ: ἢ ἄρα ΓΖ ἀποτομῆ ἐστὶ τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος καὶ τὰ ἐξῆς.

X.101

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην.

Ἐστω ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἢ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἢ ΓΔ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιούν τὴν ΓΖ: λέγω, ὅτι ἢ ΓΖ ἀποτομῆ ἐστὶ πέμπτη.



Ἐστω γὰρ τῆ ΑΒ προσαρμόζουσα ἢ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ μὲν συγκεκριμένον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν

τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δις ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. καὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον

ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἅμα μέσον ἐστίν: μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ, ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ῥητόν ἐστι καὶ [ἐστίν] ἴσον τῷ ΖΛ, ῥητόν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΛ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΛ μέσον ἐστίν, τὸ δὲ ΖΛ ῥητόν, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. καὶ εἰσὶν ἀμφότεραι ῥηταί: αἱ ἄρα ΓΜ, ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

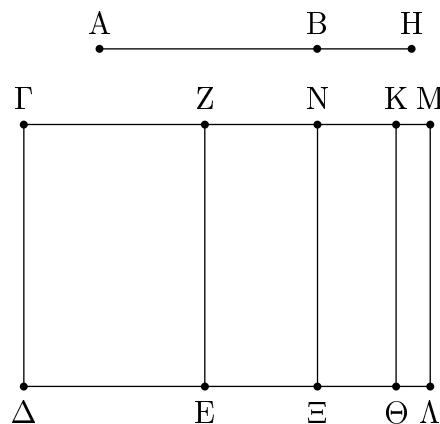
Λέγω δὴ, ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὅμοίως γὰρ δεῖξομεν, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ, ἀσύμμετρον ἄρα τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ, ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἶδει τετραγώνῳ καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ, ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ: ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶ πέμπτη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.102

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην.

Ἐστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ: λέγω, ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομὴ ἐστὶν ἕκτη.



Ἐστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ: αἱ ἄρα ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων

μέσον και τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον και ἀσύμμετρον τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ: ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ: μέσον ἄρα [ἐστὶ] και τὸ ΓΛ. και παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ και ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον τῶ ἀπὸ τῆς ΑΒ, λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. και ἐστὶ τὸ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον: και τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστὶν. και παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ και ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. και ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, και ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῶ δὲ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ, ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΓΛ τῶ ΖΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. και εἰσὶν ἀμφοτέραι ῥηταί. αἱ ΓΜ, ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

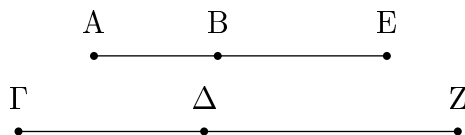
Λέγω δὴ, ὅτι και ἔκτῃ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῶ δις ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, και ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ: ἐκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ, ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ. και ἐπεὶ αἱ ΑΗ, ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῶ ἀπὸ τῆς ΗΒ. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ: ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῶ ΚΛ. ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. και ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ, και ἐστὶ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῶ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ, ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ, και τῶν ἄρα ΓΘ, ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστὶ τὸ ΝΛ: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. και διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆ. και οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκεκλιμένη ῥητῇ τῇ ΓΔ: ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶν ἔκτῃ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.103

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομὴ ἐστὶ και τῇ τάξει ἡ αὐτῇ.

Ἐστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, και τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι και ἡ ΓΔ ἀποτομὴ ἐστὶ και τῇ τάξει ἡ αὐτῇ τῇ ΑΒ.



Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. και τῶ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γερονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ: και ὡς ἐν ἄρα πρὸς ἐν, πάντα [ἐστὶ] πρὸς πάντα: ἔστιν ἄρα και ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει. σύμμετρος ἄρα και ἡ ΑΕ μὲν τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ. και αἱ ΑΕ, ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: και αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. [ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.]

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB.]

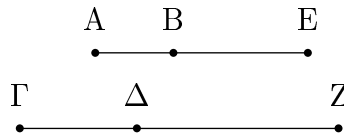
Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν ΓZ, οὕτως ἡ BE πρὸς τὴν ΔZ, ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB, οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ. ἦτοι δὴ ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμετροῦ. εἰ μὲν οὖν ἡ AE τῆς EB μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς ZΔ μείζον δύνησεται τῷ ἀπὸ συμμετροῦ ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓZ, εἰ δὲ ἡ BE, καὶ ἡ ΔZ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓZ, ZΔ. εἰ δὲ ἡ AE [τῆς EB] μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετροῦ ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓZ τῆς ZΔ μείζον δύνησεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμετροῦ ἑαυτῇ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ AE τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓZ, εἰ δὲ ἡ BE, καὶ ἡ ΔZ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν AE, EB, οὐδετέρα τῶν ΓZ, ZΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.104

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ.

Ἐστω μέσης ἀποτομὴ ἡ AB, καὶ τῇ AB μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομὴ ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτῇ τῇ AB.



Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ AB, ἔστω αὐτῇ προσαρμοζουσα ἡ EB. αἱ AE, EB ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ γεγονέντω ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ BE πρὸς τὴν ΔZ: σύμμετρος ἄρα [ἐστὶ] καὶ ἡ AE τῇ ΓZ, ἡ δὲ BE τῇ ΔZ. αἱ δὲ AE, EB μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ αἱ ΓZ, ZΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: μέσης ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ AB.

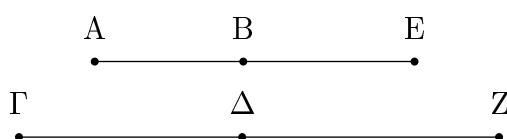
Ἐπεὶ [γάρ] ἐστὶν ὡς ἡ AE πρὸς τὴν EB, οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ [ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AE πρὸς τὴν EB, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ὡς δὲ ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ], ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ [καὶ ἐναλλάξ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓZ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ]. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τῷ ἀπὸ τῆς ΓZ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ. εἴτε οὖν ῥητόν ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, ῥητόν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ, εἴτε μέσον [ἐστὶ] τὸ ὑπὸ τῶν AE, EB, μέσον [ἐστὶ] καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓZ, ZΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ AB: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.105

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἐστω γὰρ ἐλάσσων ἡ AB καὶ τῇ AB σύμμετρος ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστίν.



Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτά: καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ, ΕΒ

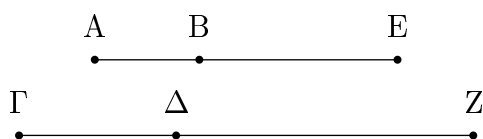
δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ. συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ [καὶ ἐναλλάξ]: σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΖ: σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων: ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνων τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνων, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ. μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ: μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον.

Ἐλάσσω ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.106

Ἡ τῆ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦση σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.

Ἐστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ καὶ τῆ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν.



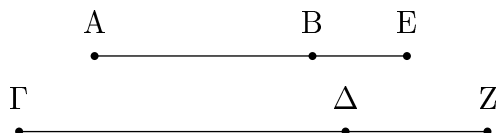
Ἐστω γὰρ τῆ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ: αἱ ΑΕ, ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν. καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ, ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ, ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ, ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: ὥστε καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητὸν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.107

Ἡ τῆ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούση σύμμετρος καὶ αὐτὴ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.

Ἐστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἡ AB, καὶ τῆ AB ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ: λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν.



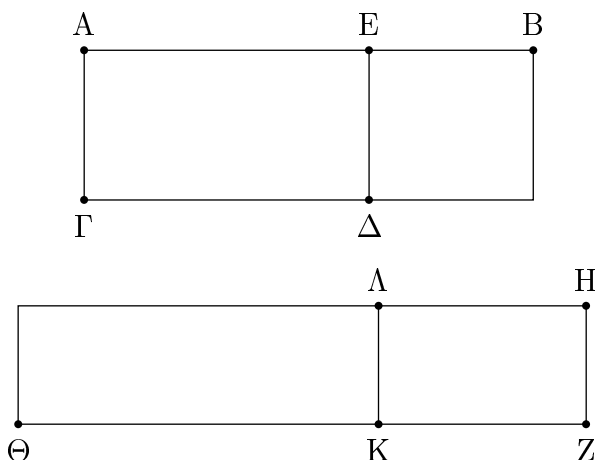
Ἐστω γὰρ τῆ AB προσαρμόζουσα ἡ BE, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω: αἱ AE, EB ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν. καὶ εἰσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ AE, EB σύμμετροι ταῖς ΓΖ, ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν AE, EB τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν AE, EB τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ, ΖΔ: καὶ αἱ ΓΖ, ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι ποιούσαι τὸ τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν [τετραγώνων] τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.108

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου ἢ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἥτοι ἀποτομῆ ἢ ἐλάσσων.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφηρήσθω τὸ ΒΔ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν δυναμένη τὸ ΕΓ μία δύο ἀλόγων γίνεται ἥτοι ἀποτομῆ ἢ ἐλάσσων.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΔΒ ἴσον ἀφηρήσθω τὸ ΗΚ: λοιπὸν

ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ, ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται: ῥητὴ μὲν ἄρα ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει. αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἦτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὐ.

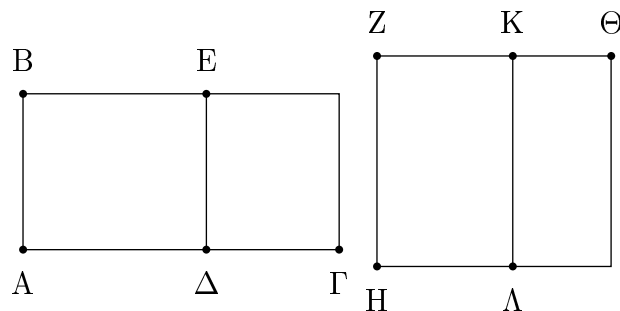
Δυνασθὼ πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ: ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἢ δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν. ἢ ἄρα τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἀποτομὴ ἐστὶν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἢ δυναμένη ἐλάσσων ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.109

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου ἄλλαι δύο ἄλογοι γίνονται ἦτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφηρήσθω τὸ ΒΔ. λέγω, ὅτι ἢ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται ἦτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.



Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία. ἔστι δὴ ἀκολουθῶς ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει: αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. ἦτοι δὴ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ: ὥστε ἢ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν.

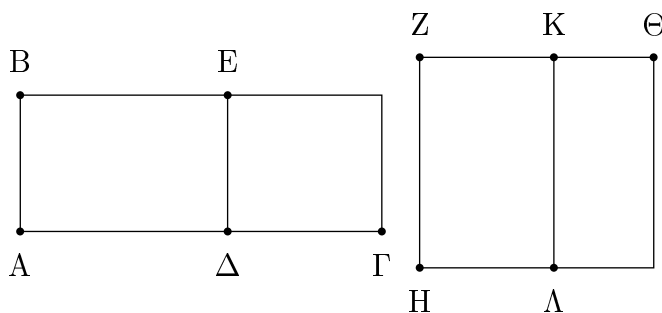
Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, καὶ ἐστὶν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομὴ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ: ὥστε ἢ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.110

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσύμμετρου τῷ ὅλῳ αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται ἥτοι μέσης ἀποτομῆ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἀφηρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων καταγραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ: λέγω, ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων ἥτοι μέσης ἀποτομῆ δευτέρα ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ, ΒΔ, καὶ ἀσύμμετρον τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, ἔσται ἀκολουθῶς ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τουτέστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρος καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ: αἱ ΖΘ, ΖΚ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ [προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΖΚ. ἥτοι δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἢ τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ].



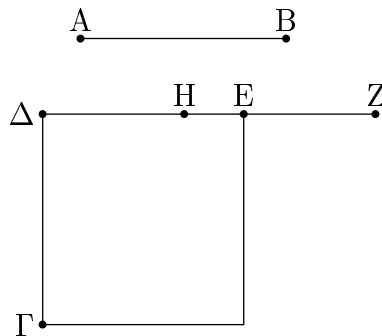
Εἰ μὲν δὴ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐθετέρα τῶν ΖΘ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένη ῥητῇ μήκει τῇ ΖΗ, ἀποτομῆ τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομῆ δευτέρα: ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομῆ ἐστὶ δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ ΖΘ τῆς ΖΚ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῇ [μήκει], καὶ οὐθετέρα τῶν ΘΖ, ΖΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ΖΗ μήκει, ἀποτομῆ ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. τὸ δ' ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα. ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τουτέστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσα ἐστὶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.111

Ἡ ἀποτομῆ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐστω ἀποτομῆ ἡ ΑΒ: λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.



Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω: καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ $\Delta\Gamma$, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς AB ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓE πλάτος ποιοῦν τὴν ΔE . ἐπεὶ οὖν ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ AB , ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔE . ἔστω αὐτῇ προσαρμοζουσα ἡ EZ : αἱ ΔZ , ZE ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔZ τῆς ZE μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ ἡ ΔZ σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει τῆ $\Delta\Gamma$. πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ AB , ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔE . διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ H , καὶ ἔστω μείζον ὄνομα τὸ ΔH : αἱ ΔH , HE ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔH τῆς HE μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ τὸ μείζον ἡ ΔH σύμμετρός ἐστι τῆ ἐκκειμένη ῥητῆ μήκει τῆ $\Delta\Gamma$. καὶ ἡ ΔZ ἄρα τῆ ΔH σύμμετρός ἐστι μήκει: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ HZ σύμμετρός ἐστι τῆ ΔZ μήκει. [ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔZ τῆ HZ , ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΔZ , ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ HZ . ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστὶν ἡ ΔZ τῆ HZ μήκει] ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔZ τῆ EZ μήκει: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ZH τῆ EZ μήκει. αἱ HZ , ZE ἄρα ῥηταὶ [εἰσι] δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ EH . ἀλλὰ καὶ ῥητὴ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῆ ἐκ δύο ὀνομάτων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

[

Corollary

]

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῆ μέση οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῆ, παρ' ἣν παράκειται, μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν, ἀλλήλων δέ, ἐπεὶ τῆ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, δῆλον, ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὔσα ἡ αὐτὴ τῆ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιούσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενα αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς ἀκολουθῶς ἐκάστη τῆ τάξει τῆ καθ'

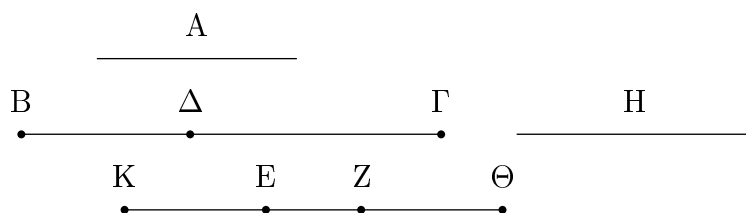
αὐτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αὐταὶ τῇ τάξει ἀκολουθῶσ, ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους (ιγ),

Μέσην,
 Ἐκ δύο ὀνομάτων,
 Ἐκ δύο μέσων πρώτην,
 Ἐκ δύο μέσων δευτέραν,
 Μείζονα,
 Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην,
 Δύο μέσα δυναμένην,
 Ἀποτομὴν,
 Μέσης ἀποτομὴν πρώτην,
 Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν,
 Ἐλάσσονα,
 Μετὰ ῤητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσαν,
 Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσαν.

X.112

Τὸ ἀπὸ ῤητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐστω ῤητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μείζον ὄνομα ἔστω ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ: λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομὴ ἐστίν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ, ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔξει τάξιν τῇ ΒΓ.



Ἐστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, Η, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ: μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ: διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΚΖ ἐστίν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ: ὡς γὰρ ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα. ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ,

KZ, KE ἀνάλογόν εἰσιν. σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῆ KE μήκει: ὥστε καὶ ἡ ΘΕ τῆ EK σύμμετρος ἐστὶ μήκει. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἐστὶ τῶ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ, ῥητὸν δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς A, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘ, ΒΔ. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῆ ΒΔ μήκει: ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ EK ῥητὴ ἐστὶ καὶ σύμμετρος τῆ ΒΔ μήκει. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ, ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ αἱ ΖΚ, ΚΕ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ. αἱ ΖΚ, ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

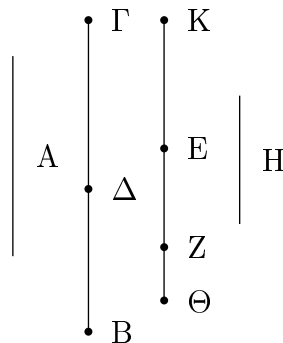
Ἦτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ ἢ τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ συμμέτρου [ἑαυτῆ], καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυνήσεται τῶ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆ ἐκκευμένη ῥητῆ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ: εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ: εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μείζον δύναται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μείζον δυνήσεται τῶ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆ. καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρος ἐστὶ τῆ ἐκκευμένη ῥητῆ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ: εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ: εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ, ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ, ΚΕ: ὥστε ἀποτομὴ ἐστὶν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ, ΚΕ σύμμετρά ἐστὶ τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΔ, ΔΒ καὶ ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῆ ΒΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.113

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστὶ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ, ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῆ ἀποτομῆ.



Ἐστω ῥητὴ μὲν ἡ A, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῶ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς A ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ: λέγω, ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστὶ τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι καὶ ἐν τῶ αὐτῶ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῆ ΒΔ.

Ἐστω γὰρ τῆ ΒΔ προσαρμοζουσα ἡ ΔΓ: αἱ ΒΓ, ΓΔ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. καὶ τῶ ἀπὸ τῆς A ἴσον ἔστω καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς A: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η. καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται: ῥητὴ ἄρα

ἐστὶν ἡ Η καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΚΘ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς Η. μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΒΔ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ: σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς ΚΕ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ. γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, τουτέστιν [ὡς] ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ. αἱ δὲ ΒΓ, ΓΔ δυνάμει μόνον [εἰσὶ] σύμμετροι: καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἀλλ' ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΕ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἡ ΘΖ πρὸς ΖΕ: ὥστε καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. σύμμετρον δὲ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ: αἱ γὰρ ΚΖ, ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι: σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει: ὥστε ἡ ΚΖ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρος [ἐστὶ] μήκει. ῥητὴ δὲ ἐστὶν ἡ ΚΕ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς ΖΘ, ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς ΖΘ. σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ: σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΓΔ μήκει. αἱ ΒΓ, ΓΔ δὲ ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: καὶ αἱ ΚΖ, ΖΘ ἄρα ῥηταὶ εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα ἡ ΚΘ.

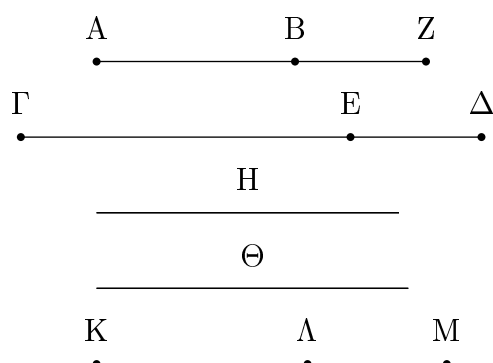
Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζων δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μείζων δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μείζων δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῆς. καὶ εἰ μὲν σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ, εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ, εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ, ΓΔ, οὐδετέρα τῶν ΚΖ, ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ, ΖΘ σύμμετρα [ἐστὶ] τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ, ΓΔ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.114

Ἐὰν χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρα τέ ἐστὶ τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶν.



Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς AB καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς $\Gamma\Delta$, ἧς μείζον ὄνομα ἔστω τὸ ΓE , καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓE , $E\Delta$ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς AZ , ZB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔστω ἡ τὸ ὑπὸ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ δυναμένη ἡ H : λέγω, ὅτι ῥητὴ ἐστὶν ἡ H .

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ , καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ παραβεβλήσθω πλάτος ποιῶν τὴν $K\Lambda$: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Lambda$, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ KM , $M\Lambda$ σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓE , $E\Delta$ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. ἀλλὰ καὶ αἱ ΓE , $E\Delta$ σύμμετροί τε εἰσι ταῖς AZ , ZB καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν ZB , οὕτως ἡ KM πρὸς τὴν $M\Lambda$. ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς τὴν KM , οὕτως ἡ BZ πρὸς τὴν ΛM : καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ AB πρὸς λοιπὴν τὴν $K\Lambda$ ἐστὶν ὡς ἡ AZ πρὸς KM . σύμμετρος δὲ ἡ AZ τῇ KM : σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ $K\Lambda$. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς $K\Lambda$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, AB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$: σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, AB τῷ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, $K\Lambda$ τῷ ἀπὸ τῆς Θ : σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, AB τῷ ἀπὸ τῆς Θ . τῷ δὲ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, AB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς H : σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς H τῷ ἀπὸ τῆς Θ . ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ : ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς H : ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ H . καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν $\Gamma\Delta$, AB .

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχεται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὴ ἐστὶν.

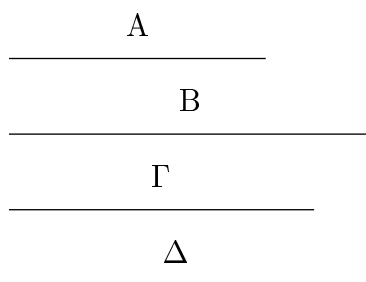
Corollary

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτου φανερόν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

X.115

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.

Ἐστω μέση ἡ A : λέγω, ὅτι ἀπὸ τῆς A ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἢ αὐτή.



Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Α ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ: ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ: τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστιν. καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. πάλιν δὴ τῷ ὑπὸ τῶν Β, Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ: ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ. ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ: καὶ οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ' ἄπειρον προβαίνουσης φανερόν, ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾶ τῶν πρότερον ἡ αὐτή: ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Book XI

Definitions

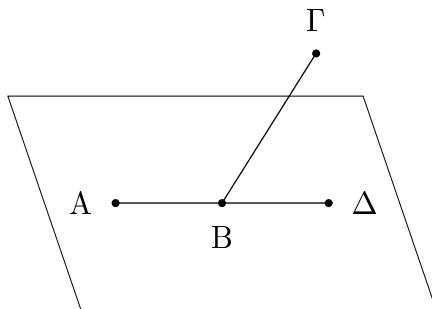
1. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.
2. Στερεοῦ δὲ πέρασ ἐπιράνεια.
3. Εὐθεΐα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ [ὑποκειμένῳ] ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.
4. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῆ κοινῆ τομῆ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεΐαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾧσιν.
5. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν, ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῆ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρασ τῆς εὐθείας εὐθεΐα ἐπιζευχθῆ, ἢ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῆς ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.
6. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστίν ἢ περιεχομένη ὀξεΐα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῆ κοινῆ τομῆ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκατέρῳ τῶν ἐπιπέδων.
7. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κεκλίσθαι λέγεται καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον, ὅταν αἱ εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαὶ ἴσαι ἀλλήλαις ᾧσιν.
8. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα.
9. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλήθος.
10. Ἴσα δὲ καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.
11. Στερεὰ γωνία ἐστίν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γραμμῶν ἀπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως: στερεὰ γωνία ἐστίν ἢ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων.
12. Πυραμὶς ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον ἀπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνεστῶς.
13. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περιεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοια ἐστὶ καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.
14. Σφαῖρα ἐστίν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης τῆς διαμέτρου περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.
15. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστίν ἢ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

16. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου.
17. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεΐα τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.
18. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. καὶν μὲν ἡ μένουσα εὐθεΐα ἴση ἢ τῇ λοιπῇ [τῇ] περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένη, ὀρθογώνιος ἐστὶ ὁ κῶνος, ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος, ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.
19. Ἄξων δὲ τοῦ κῶνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται.
20. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος.
21. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.
22. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεΐα, περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται.
23. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεναντίον περιεγεγραμμένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι.
24. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι εἰσιν, ὧν οἱ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσιν.
25. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἑξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον.
26. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.
27. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.
28. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον.

Propositions

XI.1

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἐστὶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ, ἐπιπέδῳ, μέρος δὲ τι ἐν μετεωροτέρῳ.

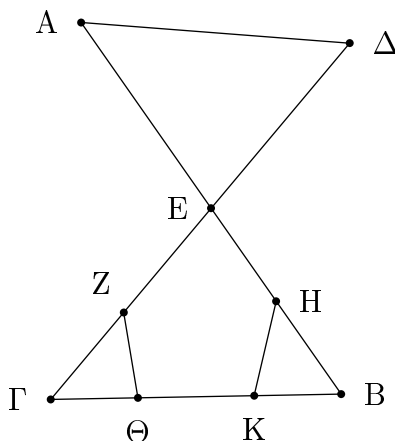


Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς $AB\Gamma$ μέρος μὲν τι τὸ AB ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ $B\Gamma$ ἐν μετεωροτέρῳ. Ἔσται δὴ τις τῆ AB συνεχῆς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. ἔστω ἡ $B\Delta$: δύο ἄρα εὐθειῶν τῶν $AB\Gamma$, $AB\Delta$ κοινὸν τμήμα ἐστὶν ἡ AB : ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ B καὶ διαστήματι τῷ AB κύκλον γράψωμεν, αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήφονται τοῦ κύκλου περιφερείας. Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος μὲν τι οὐκ ἐστὶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν μετεωροτέρῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.2

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον: λέγω, ὅτι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ.

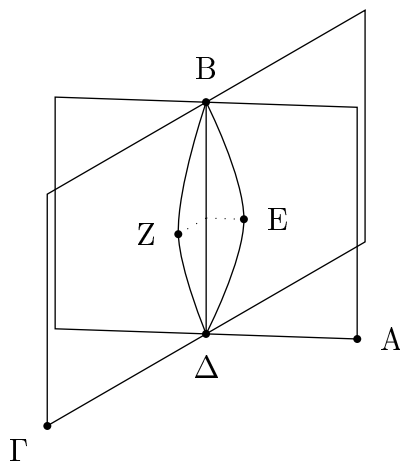


Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν EG , EB τυχόντα σημεῖα τὰ Z , H , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓB , ZH , καὶ διήχθωσαν αἱ $Z\Theta$, HK : λέγω πρῶτον, ὅτι τὸ EGB τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. εἰ γὰρ ἐστὶ τοῦ EGB τριγώνου μέρος ἥτοι τὸ $Z\Theta\Gamma$ ἢ τὸ HBK ἐν τῷ ὑποκειμένῳ [ἐπιπέδῳ], τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν EG , EB εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. εἰ δὲ τοῦ EGB τριγώνου τὸ $ZGBH$ μέρος ἦ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν EG , EB εὐθειῶν μέρος μὲν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ: ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. τὸ ἄρα EGB τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ ἐστὶ τὸ EGB τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρω τῶν EG , EB , ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρω τῶν EG , EB , ἐν τούτῳ καὶ αἱ AB , $\Gamma\Delta$. αἱ AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.3

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνη ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖα ἐστὶν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB , $B\Gamma$ τεμνέτω ἀλλήλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔB γραμμὴ: λέγω, ὅτι ἡ ΔB γραμμὴ εὐθεῖα ἐστὶν.

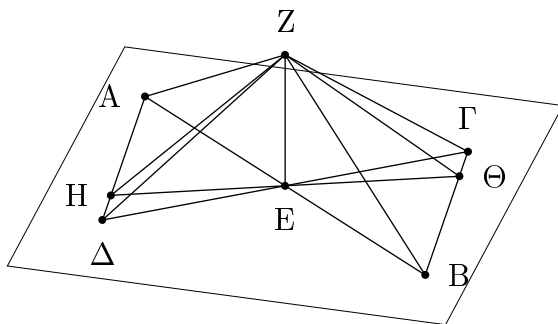


Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ B ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔEB , ἐν δὲ τῷ $B\Gamma$ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔZB . ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔEB , ΔZB τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσιν δηλαδὴ χωρίον: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα αἱ ΔEB , ΔZB εὐθεῖαί εἰσιν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἔσται πλὴν τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB , $B\Gamma$ ἐπιπέδων. Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἀλλήλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖα ἔστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.4

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ EZ δύο εὐθείαις ταῖς AB , $\Gamma\Delta$ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ E σημεῖον ἀπὸ τοῦ E πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω: λέγω, ὅτι ἡ EZ καὶ τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστιν.



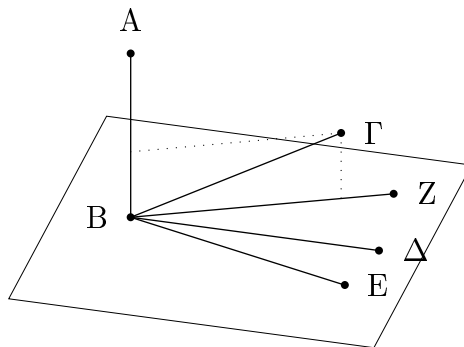
Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ AE , EB , ΓE , $E\Delta$ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ E , ὡς ἔτυχεν, ἡ $HE\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, ΓB , καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Z ἐπεζεύχθωσαν αἱ ZA , ZH , $Z\Delta$, $Z\Gamma$, $Z\Theta$, ZB . καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AE , $E\Delta$ δυσὶ ταῖς ΓE , EB ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ ΓB ἴση ἔστί, καὶ τὸ $AE\Delta$ τρίγωνον τῷ ΓEB τριγώνῳ ἴσον ἔσται: ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔAE

γωνία τῆ ὑπὸ EBF ἴση [ἐστίν]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ AEH γωνία τῆ ὑπὸ BEΘ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ AHE, BEΘ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾶ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν AE τῆ EB: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἡ μὲν HE τῆ EΘ, ἡ δὲ AH τῆ BΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AE τῆ EB, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ZE, βάσις ἄρα ἡ ZA βάσει τῆ ZB ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ZΓ τῆ ZΔ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΔ τῆ ΓB, ἔστι δὲ καὶ ἡ ZA τῆ ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ZA, AΔ δυσὶ ταῖς ZB, BΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ βάσις ἡ ZΔ βάσει τῆ ZΓ ἐδείχθη ἴση: καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ZAΔ γωνία τῆ ὑπὸ ZBΓ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ AH τῆ BΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ZA τῆ ZB ἴση, δύο δὲ αἱ ZA, AH δυσὶ ταῖς ZB, BΘ ἴσαι εἰσὶν. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ZAH ἐδείχθη ἴση τῆ ὑπὸ ZBΘ: βάσις ἄρα ἡ ZH βάσει τῆ ZΘ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ HE τῆ EΘ, κοινὴ δὲ ἡ EZ, δύο δὲ αἱ HE, EZ δυσὶ ταῖς ΘE, EZ ἴσαι εἰσὶν: καὶ βάσις ἡ ZH βάσει τῆ ZΘ ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ HEZ γωνία τῆ ὑπὸ ΘEZ ἴση ἐστίν. ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ HEZ, ΘEZ γωνιῶν. ἡ ZE ἄρα πρὸς τὴν HΘ τυχόντως διὰ τοῦ E ἀχθεῖσαν ὀρθὴ ἐστίν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι ἡ ZE καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐστίν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας: ἡ ZE ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν AB, ΓΔ εὐθειῶν. ἡ ZE ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἐστὶ τῷ διὰ τῶν AB, ΓΔ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.5

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ AB τρισὶν εὐθείαις ταῖς BΓ, BΔ, BE πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ B ἀφῆς ἐφραστάτω: λέγω, ὅτι αἱ BΓ, BΔ, BE ἐν ἐνὶ εἰσὶν ἐπιπέδῳ.



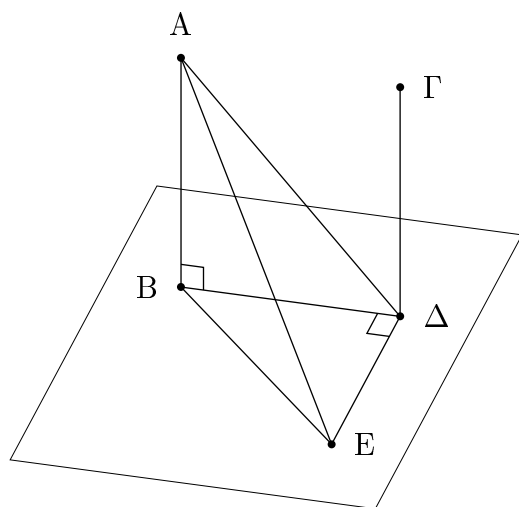
Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν BΔ, BE ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ BΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν AB, BΓ ἐπίπεδον: κοινήν δὲ τομῆν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω τὴν BZ. ἐν ἐνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν AB, BΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ AB, BΓ, BZ. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν BΔ, BE, καὶ τῷ διὰ τῶν BΔ, BE ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ AB. τὸ δὲ διὰ τῶν BΔ, BE ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον ἐστίν: ἡ AB ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὥστε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ AB. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ BZ οὔσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ: ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθὴ ἐστίν. ὑπόκειται

δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ὀρθή: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ABZ γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. καὶ εἰσιν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $B\Gamma$ εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $B\Gamma$, $B\Delta$, BE ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖαι τρισὶν εὐθείαις ἀπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τῆς ἀφῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῆ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.6

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾤσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι.

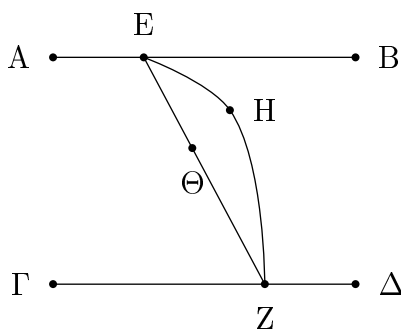
Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $\Gamma\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$.



Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B , Δ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ BE , AE , $A\Delta$. Καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας [ἄρα] τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ τῆς AB ἑκατέρα τῶν $B\Delta$, BE οὐσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, ABE γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $\Gamma\Delta B$, $\Gamma\Delta E$ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$, δύο δὴ αἱ AB , $B\Delta$ δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔB ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν: βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ BE ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , ἀλλὰ καὶ ἡ $A\Delta$ τῇ BE , δύο δὴ αἱ AB , BE δυσὶ ταῖς $E\Delta$, ΔA ἴσαι εἰσίν: καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE : γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE : ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $E\Delta A$: ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν ΔA ὀρθὴ ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ ὀρθὴ. ἡ $E\Delta$ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν: αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ $B\Delta$, ΔA , $\Delta\Gamma$ ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔB , ΔA , ἐν τούτῳ καὶ ἡ AB : πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: αἱ ἄρα AB , $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta$, $B\Delta\Gamma$ γωνιῶν: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾤσιν, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.7

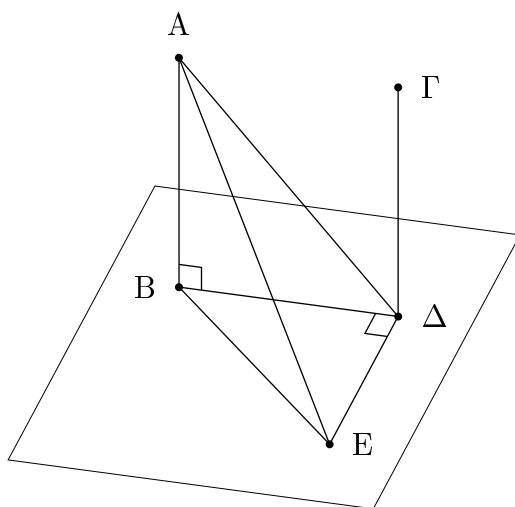
Ἐὰν ὄσιν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῆ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις.



Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB , $\Gamma\Delta$, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ E , Z : λέγω, ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ E , Z σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ EHZ , καὶ διήχθω διὰ τῆς EHZ ἐπίπεδον: τομὴν δὴ ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. ποιείτω ὡς τὴν EZ : δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ EHZ , EZ χωρίον περιέξουσιν: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: ἐν τῷ διὰ τῶν AB , $\Gamma\Delta$ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἢ ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα. Ἐὰν ἄρα ὄσιν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῆ δὲ ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα, ἢ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.8

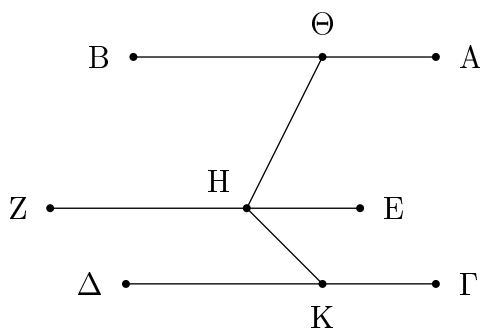
Ἐὰν ὄσιν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἢ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.



Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ $AB, \Gamma\Delta$, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἢ AB τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἢ $\Gamma\Delta$ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ $AB, \Gamma\Delta$ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ B, Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Delta$: αἱ $AB, \Gamma\Delta, B\Delta$ ἄρα ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. ἤχθω τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔE , καὶ κείσθω τῇ AB ἴση ἡ ΔE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $BE, AE, A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἡ AB ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ AB : ὀρθὴ ἄρα [ἐστὶν] ἑκατέρα τῶν ὑπὸ $AB\Delta, ABE$ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς $AB, \Gamma\Delta$ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ $B\Delta$, αἱ ἄρα ὑπὸ $AB\Delta, \Gamma\Delta B$ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ $AB\Delta$: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $\Gamma\Delta B$: ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $B\Delta$ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ ΔE , κοινὴ δὲ ἡ $B\Delta$, δύο δὲ αἱ $AB, B\Delta$ δυσὶ ταῖς $E\Delta, \Delta B$ ἴσαι εἰσίν: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $AB\Delta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta B$ ἴση: ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα: βάσις ἄρα ἡ $A\Delta$ βάσει τῇ BE ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AB τῇ ΔE , ἡ δὲ BE τῇ $A\Delta$, δύο δὲ αἱ AB, BE δυσὶ ταῖς $E\Delta, \Delta A$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα. καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ AE : γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ABE γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta A$ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ABE : ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ $E\Delta A$: ἡ $E\Delta$ ἄρα πρὸς τὴν $A\Delta$ ὀρθὴ ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔB ὀρθὴ: ἡ $E\Delta$ ἄρα καὶ τῶ διὰ τῶν $B\Delta, \Delta A$ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῶ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ $E\Delta$. ἐν δὲ τῶ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$, ἐπειδήπερ ἐν τῶ διὰ τῶν $B\Delta A$ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ $AB, B\Delta$, ἐν ᾧ δὲ αἱ $AB, B\Delta$, ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ $\Delta\Gamma$. ἡ $E\Delta$ ἄρα τῇ $\Delta\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν: ὥστε καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ $B\Delta$ πρὸς ὀρθὰς. ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς $\Delta E, \Delta B$ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν: ὥστε ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ τῶ διὰ τῶν $\Delta E, \Delta B$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. τὸ δὲ διὰ τῶν $\Delta E, \Delta B$ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστὶν: ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. Ἐὰν ἄρα ᾧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.9

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

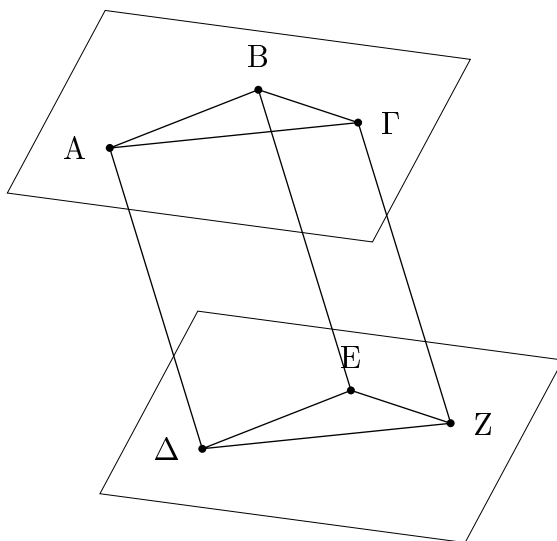


Ἐστω γὰρ ἑκατέρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ τῇ EZ παράλληλος μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$. Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς EZ τυχόν σημεῖον τὸ H , καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ EZ ἐν μὲν τῶ διὰ τῶν EZ, AB ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $H\Theta$, ἐν δὲ τῶ διὰ τῶν $Z\Gamma, \Gamma\Delta$ τῇ EZ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ HK . καὶ ἐπεὶ

ἡ EZ πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta$, HK ὀρθή ἐστίν, ἡ EZ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $H\Theta$, HK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν. καὶ ἐστὶν ἡ EZ τῇ AB παράλληλος: καὶ ἡ AB ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν: ἑκατέρα ἄρα τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τῷ διὰ τῶν ΘHK ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστίν. ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ᾧσιν, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Gamma\Delta$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.10

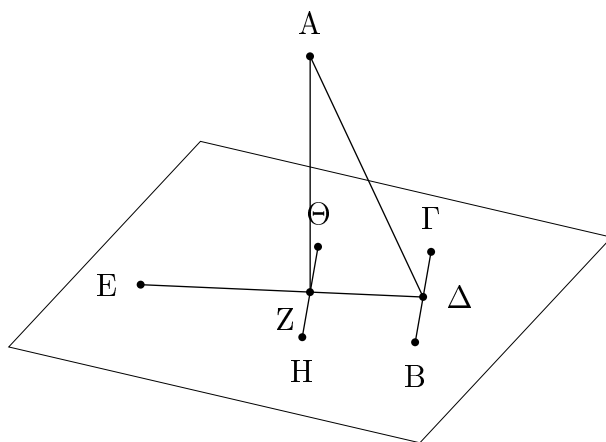
Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ᾧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν.



Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB , $B\Gamma$ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔE , EZ ἀπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ . Ἀπειρήφθωσαν γὰρ αἱ BA , $B\Gamma$, $E\Delta$, EZ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Delta$, ΓZ , BE , AG , ΔZ . καὶ ἐπεὶ ἡ BA τῇ $E\Delta$ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ $A\Delta$ ἄρα τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓZ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος: ἑκατέρα ἄρα τῶν $A\Delta$, ΓZ τῇ BE ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὔσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῇ ΓZ καὶ ἴση. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ AG , ΔZ : καὶ ἡ AG ἄρα τῇ ΔZ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς ΔE , EZ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ AG βάσει τῇ ΔZ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ᾧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.11

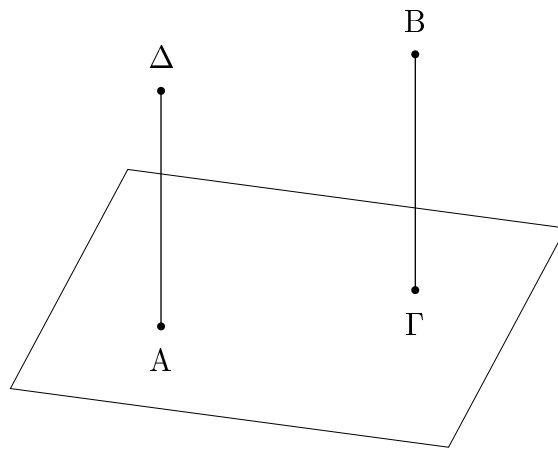
Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ A , τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον: δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα, ὡς ἔτυχεν, ἡ $BΓ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὴν $BΓ$ κάθετος ἡ $AΔ$. εἰ μὲν οὖν ἡ $AΔ$ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονός ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ οὐ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Δ$ σημείου τῇ $BΓ$ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔΕ$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $ΔΕ$ κάθετος ἡ $AΖ$, καὶ διὰ τοῦ Z σημείου τῇ $BΓ$ παράλληλος ἤχθω ἡ $HΘ$. Καὶ ἐπεὶ ἡ $BΓ$ ἑκατέρᾳ τῶν $ΔΑ$, $ΔΕ$ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, ἡ $BΓ$ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν $ΕΔΑ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ ἐστὶν αὐτῇ παράλληλος ἡ $HΘ$: ἐὰν δὲ ὧσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ ἡ λοιπὴ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: καὶ ἡ $HΘ$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ $HΘ$. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ $AΖ$ οὐσα ἐν τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $ΔΑ$ ἐπιπέδῳ: ἡ $HΘ$ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὴν $AΖ$: ὥστε καὶ ἡ $AΖ$ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὴν $ΘΗ$. ἔστι δὲ ἡ $AΖ$ καὶ πρὸς τὴν $ΔΕ$ ὀρθή: ἡ $AΖ$ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν $HΘ$, $ΔΕ$ ὀρθὴ ἐστίν. ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ διὰ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: ἡ $AΖ$ ἄρα τῷ διὰ τῶν $ΕΔ$, $HΘ$ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. τὸ δὲ διὰ τῶν $ΕΔ$, $HΘ$ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον: ἡ $AΖ$ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. Ἀπὸ τοῦ ἄρα δοθέντος σημείου μετέωρου τοῦ A ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἤχεται ἡ $AΖ$: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

XI.12

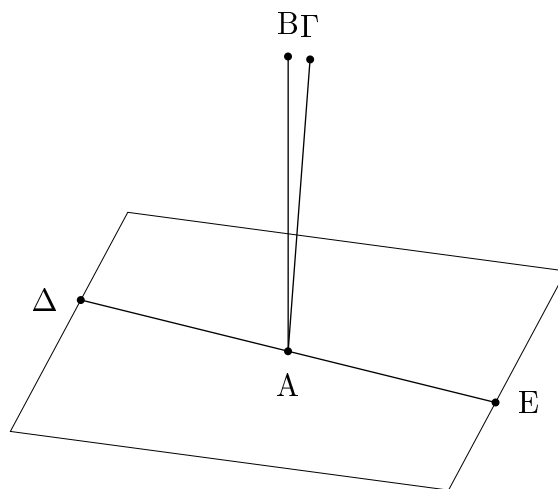
Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι.



Ἐστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ A: δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Νενοήσθω τι σημεῖον μετέωρον τὸ B, καὶ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἦχθω ἡ BΓ, καὶ διὰ τοῦ A σημείου τῇ BΓ παράλληλος ἦχθω ἡ AΔ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ AΔ, BΓ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ BΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ AΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ A πρὸς ὀρθὰς ἀνέσταται ἡ AΔ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

XI.13

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.



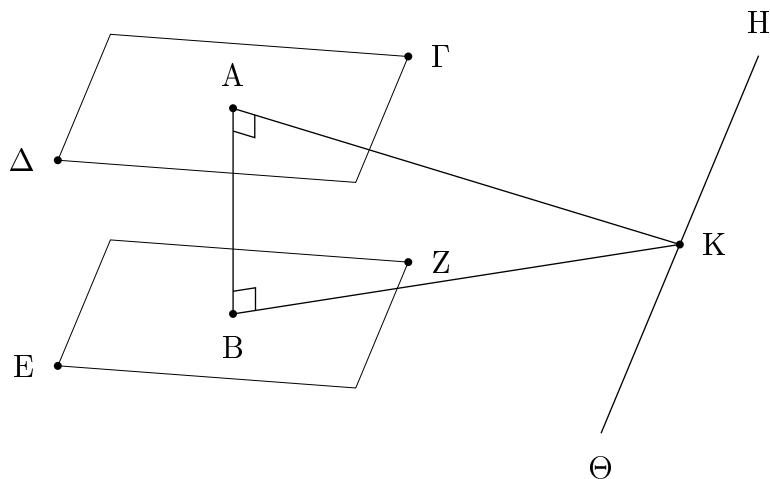
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ A τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ AB, AG πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν BA,

ΑΓ επίπεδον: τομήν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεΐαν. ποιείτω τὴν ΔΑΕ: αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ, ΔΑΕ εὐθεΐαι ἐν ἐνὶ εἰσιν ἐπιπέδῳ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὐσα ἐν τῶ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ: ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστίν: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ. καὶ εἰσιν ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ: ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεΐαι πρὸς ὀρθὰς ἀνασταθῆσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.14

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεΐα ὀρθή ἐστίν, παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

Εὐθεΐα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἐκάτερον τῶν ΓΔ, ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω: λέγω, ὅτι παράλληλα ἔσται τὰ ἐπίπεδα.

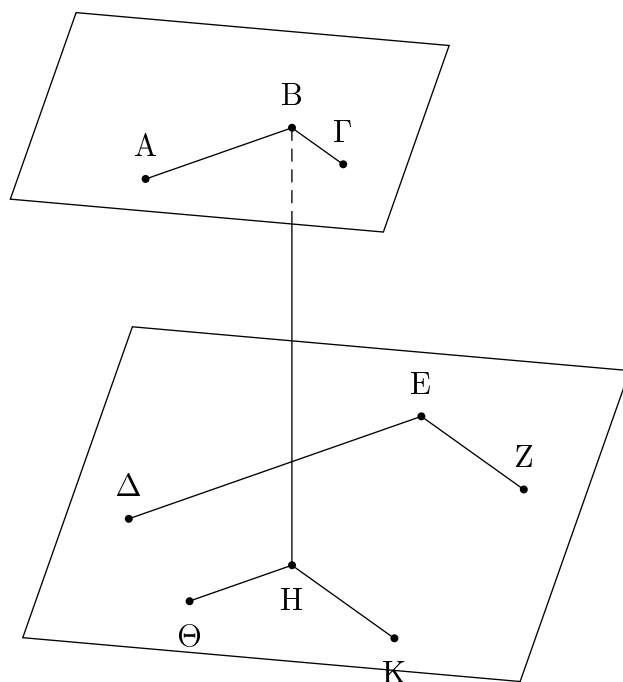


Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. συμπιπέτωσαν: ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομήν εὐθεΐαν. ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΒΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστίν πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεΐαν οὐσαν ἐν τῶ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστίν ἡ ΑΒ: ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστίν. τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ, ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι: ὅπερ ἐστίν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται: παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ, ΕΖ ἐπίπεδα. Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα ἡ αὐτὴ εὐθεΐα ὀρθή ἐστίν, παράλληλα ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.15

Ἐὰν δύο εὐθεΐαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ οὐσαι, παράλληλα ἔσται τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα.

Δύο γὰρ εὐθεΐαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ, ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ, ΕΖ ἔστωσαν μὴ ἐν τῶ αὐτῶ ἐπιπέδῳ οὐσαι: λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις.

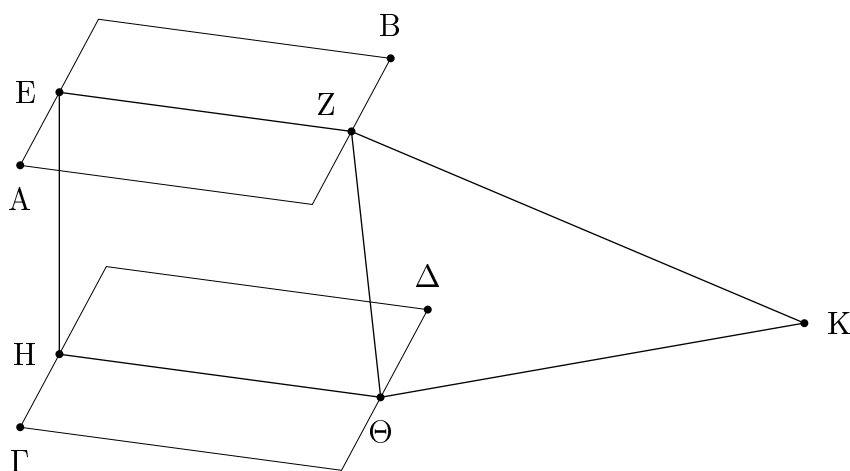


Ἦχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἦχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρω τῶν ΗΘ, ΗΚ οὐσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΒΗΚ γωνιῶν. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ, ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ: ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ: ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΗΒ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΗΒ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ, ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν, ἡ ΗΒ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. [διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ, ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ: ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθὰς. ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς]. πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθὴ ἐστὶν, παράλληλά ἐστὶ τὰ ἐπίπεδα: παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ, ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ, ΕΖ. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων ὧσι μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, παράλληλά ἐστὶ τὰ δι' αὐτῶν ἐπίπεδα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.16

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ, ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοινὰ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ, ΗΘ: λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

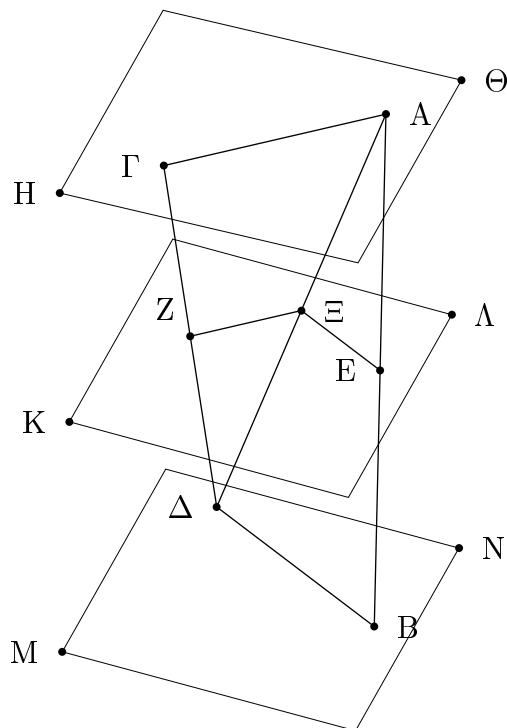


Εἰ γὰρ μὴ, ἐκβαλλόμεναι αἱ EZ, ΗΘ ἤτοι ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ E, Η συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν ὡς ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη καὶ συμπίπτωσαν πρότερον κατὰ τὸ K. καὶ ἐπεὶ ἡ EZK ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ, καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς EZK σημεῖα ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἐν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς EZK εὐθείας σημείων ἐστὶ τὸ K: τὸ K ἄρα ἐν τῷ AB ἐστὶν ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ K καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: τὰ AB, ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι: οὐκ ἄρα αἱ EZ, ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Z, Θ μέρη συμπεσοῦνται. ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι αἱ EZ, ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ E, Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EZ τῇ ΗΘ. Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσιν: ὅπερ ἔδει δείξαι.

XI.17

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ AB, ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ, ΚΛ, ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ A, E, B, Γ, Z, Δ σημεῖα: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE εὐθεῖα πρὸς τὴν EB, οὕτως ἡ ΓZ πρὸς τὴν ZΔ.

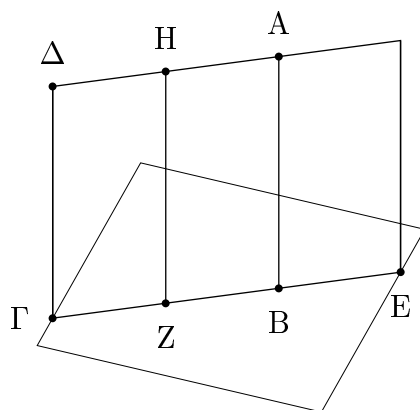


Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἰ ΑΓ, ΒΔ, ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἰ ΕΞ, ΞΖ. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ, ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἰ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἰ ΕΞ, ΒΔ παράλληλοί εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ, ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἰ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἰ ΑΓ, ΞΖ παράλληλοί εἰσιν. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ. πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἤκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ. Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.18

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾗ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω: λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

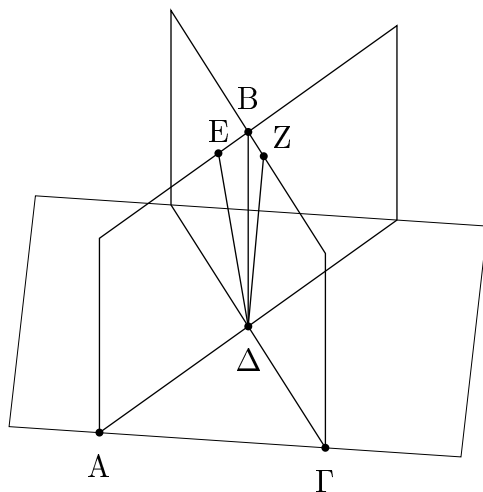


Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς AB ἐπίπεδον τὸ ΔE , καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔE ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἢ ΓE , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓE τυχὸν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἀπὸ τοῦ Z τῇ ΓE πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔE ἐπιπέδῳ ἡ ZH . καὶ ἐπεὶ ἡ AB πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐστίν, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστίν ἡ AB : ὥστε καὶ πρὸς τὴν ΓE ὀρθὴ ἐστίν: ἡ ἄρα ὑπὸ ABZ γωνία ὀρθὴ ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ HZB ὀρθή: παράλληλος ἄρα ἐστίν ἡ AB τῇ ZH . ἡ δὲ AB τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν: καὶ ἡ ZH ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν. καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστίν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ᾶσιν. καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓE ἐν ἐνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ZH ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς: τὸ ἄρα ΔE ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς AB ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾦ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.19

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται.

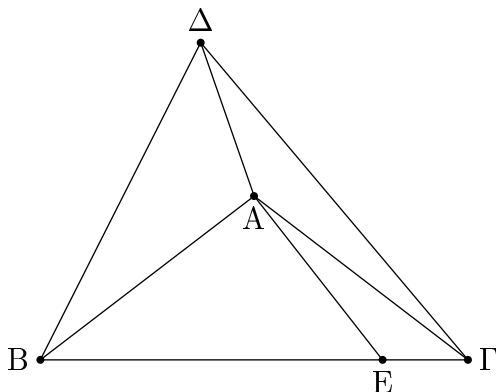
Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ AB , $B\Gamma$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ $B\Delta$: λέγω, ὅτι ἡ $B\Delta$ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστίν.



Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ AB ἐπιπέδῳ τῇ $A\Delta$ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔE , ἐν δὲ τῷ $B\Gamma$ ἐπιπέδῳ τῇ $\Gamma\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔZ . καὶ ἐπεὶ τὸ AB ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ $A\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ AB ἐπιπέδῳ ἤκται ἡ ΔE , ἡ ΔE ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔZ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς πλὴν τῆς ΔB κοινῆς τομῆς τῶν AB , $B\Gamma$ ἐπιπέδων. Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ἦ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.20

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

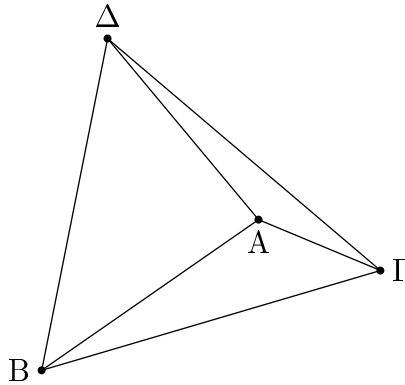


Στερεὰ γὰρ γωνία ἢ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ περιεχέσθω: λέγω, ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, φανερόν, ὅτι δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. εἰ δὲ οὐ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς ΑΒ, ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β, Γ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ, ΔΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, δύο δυσὶν ἴσαι: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΔ, ΔΓ τῆς ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση: αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ, ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται, δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.21

Ἄπαντα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἢ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται.

Ἐστω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ: λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.



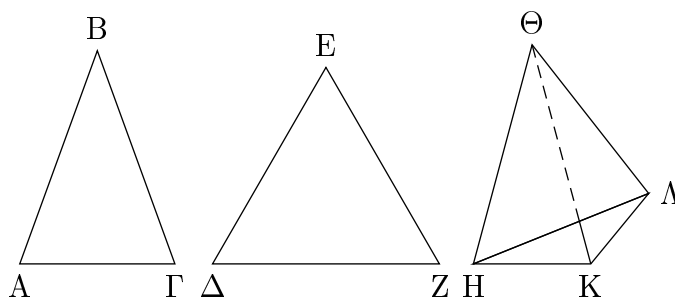
Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἐκάστης τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τυχόντα σημεία τὰ Β, Γ, Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΓΒΔ, δύο ὁποιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν: αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ, ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ, ΑΔΒ τῆς ὑπὸ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν: αἱ ἔξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΓΔ, ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ, ΒΔΓ, ΒΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν: αἱ ἔξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσιν. καὶ ἐπεὶ ἐκάστου τῶν ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς

γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΓΒ, ΒΑΓ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΓΑΔ, ΑΔΒ, ΔΒΑ, ΒΑΔ ἕξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΑΓΔ, ΓΔΑ, ΑΔΒ, ΔΒΑ ἕξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες: λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΓΑΔ, ΔΑΒ τρεῖς [γωνίαι] περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ἄπασα ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων [ἧ] τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.22

Ἐὰν ὧσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι, δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἐπιζευγνουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ, ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ: λέγω, ὅτι δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτέστιν ὅτι τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ δύο ὁποιαοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

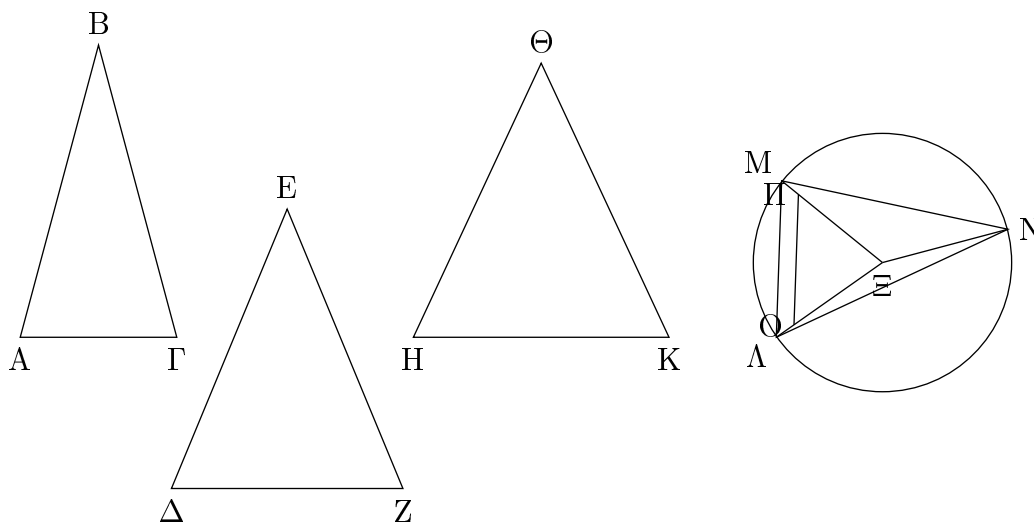


Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, φανερόν, ὅτι καὶ τῶν ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ ἴσων γινομένων δυνατόν ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. εἰ δὲ οὐ, ἔστωσαν ἄνιστοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ ΚΘΛ: καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἴση ἢ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΗΛ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ, ΘΛ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση, βάσις ἄρα ἢ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἴση. καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἢ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ, ἢ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ, ΘΛ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων, βάσις ἄρα ἢ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. ἀλλὰ αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσιν. πολλῶ ἄρα αἱ ΗΚ, ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ἴση δὲ ἢ ΚΛ τῇ ΑΓ: αἱ ΑΓ, ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ, ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, καὶ ἔτι αἱ ΔΖ, ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσιν. δυνατόν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ, ΔΖ, ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.23

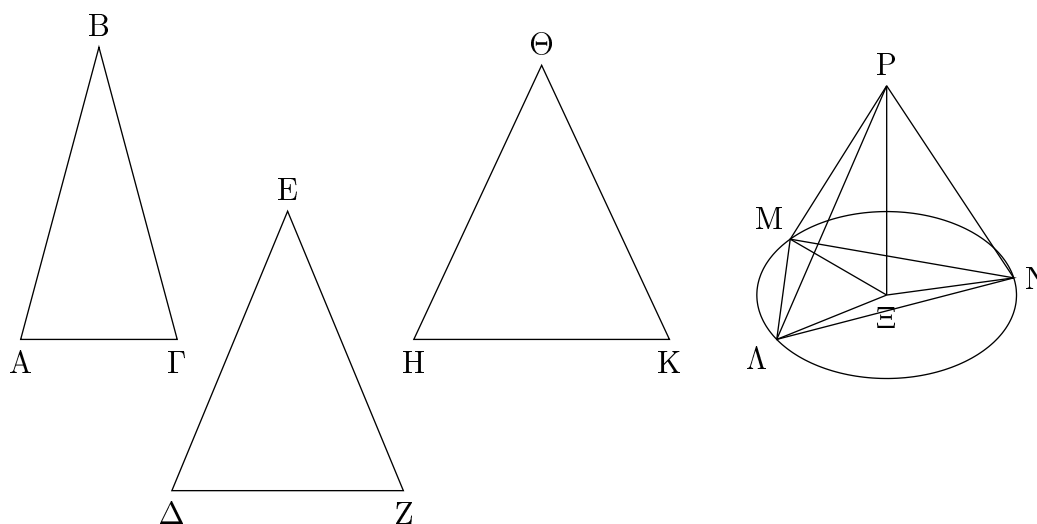
Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβάνόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι: δεῖ δὴ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας

εἶναι. Ἐστῶσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστῶσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες: δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.



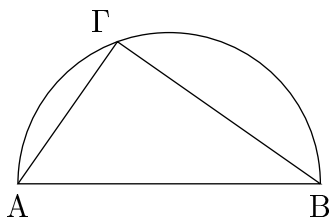
Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ AB , $B\Gamma$, ΔE , EZ , $H\Theta$, ΘK , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Gamma$, ΔZ , HK : δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς $A\Gamma$, ΔZ , HK τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τὸ ΛMN , ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν $A\Gamma$ τῇ ΛM , τὴν δὲ ΔZ τῇ MN , καὶ ἔτι τὴν HK τῇ $N\Lambda$, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛMN τρίγωνον κύκλος ὁ ΛMN καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον καὶ ἔστω τὸ Ξ , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Lambda \Xi$, $M\Xi$, $N\Xi$: λέγω, ὅτι ἡ AB μείζων ἐστὶ τῆς $\Lambda \Xi$. εἰ γὰρ μή, ἦτοι ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Lambda \Xi$ ἢ ἐλάττων. ἔστω πρότερον ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $\Lambda \Xi$, ἀλλὰ ἡ μὲν AB τῇ $B\Gamma$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $\Xi \Lambda$ τῇ ΞM , δύο δὴ αἱ AB , $B\Gamma$ δύο ταῖς $\Lambda \Xi$, ΞM ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρω ἑκατέρω: καὶ βάσις ἡ $A\Gamma$ βάσει τῇ ΛM ὑπόκειται ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ $\Lambda \Xi M$ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῇ ὑπὸ $M\Xi N$ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ $H\Theta K$ τῇ ὑπὸ $N\Xi \Lambda$: αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ $\Lambda \Xi M$, $M\Xi N$, $N\Xi \Lambda$ εἰσὶν ἴσαι. ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ $\Lambda \Xi M$, $M\Xi N$, $N\Xi \Lambda$ τέτταρσιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι: καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ τέτταρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ AB τῇ $\Lambda \Xi$ ἴση ἐστὶν. λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ AB τῆς $\Lambda \Xi$. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω: καὶ κείσθω τῇ μὲν AB ἴση ἡ ΞO , τῇ δὲ $B\Gamma$ ἴση ἡ $\Xi \Pi$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $O\Pi$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ $B\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞO τῇ $\Xi \Pi$: ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΛO τῇ ΠM ἐστὶν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛM τῇ $O\Pi$, καὶ ἰσογώνιον τὸ $\Lambda M \Xi$ τῷ $O\Pi \Xi$: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $\Xi \Lambda$ πρὸς ΛM , οὕτως ἡ ΞO πρὸς $O\Pi$: ἐναλλάξ ὡς ἡ $\Lambda \Xi$ πρὸς ΞO , οὕτως ἡ ΛM πρὸς $O\Pi$. μείζων δὲ ἡ $\Lambda \Xi$ τῆς ΞO : μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛM τῆς $O\Pi$. ἀλλὰ ἡ ΛM κείνται τῇ $A\Gamma$ ἴση: καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄρα τῆς $O\Pi$ μείζων ἐστὶν. ἐπεὶ οὖν δύο αἱ AB , $B\Gamma$ δυσὶ ταῖς $O\Xi$, $\Xi \Pi$ ἴσαι εἰσὶν, καὶ βάσις ἡ $A\Gamma$ βάσεως τῆς $O\Pi$ μείζων ἐστὶν, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνίας τῆς ὑπὸ $O\Xi \Pi$ μείζων ἐστὶν. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔEZ τῆς ὑπὸ $M\Xi N$ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ $H\Theta K$ τῆς ὑπὸ $N\Xi \Lambda$. αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ τριῶν τῶν ὑπὸ $\Lambda \Xi M$, $M\Xi N$, $N\Xi \Lambda$ μείζονες εἰσὶν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ $AB\Gamma$, ΔEZ , $H\Theta K$ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται: πολλῶ ἄρα αἱ ὑπὸ $\Lambda \Xi M$,

ΜΕΝ, ΝΕΛ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ἀλλὰ καὶ ἴσαι: ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ ἴση: μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, καὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκεῖνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ.



καὶ ἐπεὶ ἡ ΡΞ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΑΜΝ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς ἐκάστην ἄρα τῶν ΛΞ, ΜΞ, ΝΞ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ΡΞ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ, βάσις ἄρα ἡ ΡΑ βάσει τῇ ΡΜ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΡΝ ἐκατέρω τῶν ΡΑ, ΡΜ ἐστὶν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ᾧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκεῖνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ, ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΡ: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΡ: ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΑΡ. ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἐκάστη τῶν ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ, τῇ δὲ ΑΡ ἴση ἐκατέρω τῶν ΡΜ, ΡΝ: ἐκάστη ἄρα τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ, ΕΖ, ΗΘ, ΘΚ ἐκάστη τῶν ΡΑ, ΡΜ, ΡΝ ἴση ἐστίν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΡ, ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ ΑΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΡΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ. Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ, αἶ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΑΡΜ, ΜΡΝ, ΑΡΝ γωνιῶν: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Lemma

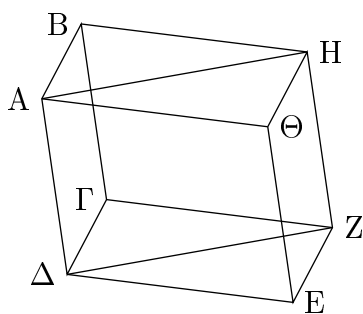


Ὅν δὲ τρόπον, ὧ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνω ἴσον λαβεῖν ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως. ἐκκείσθωσαν αἱ AB, ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ AB, καὶ γεγράφθω ἐπ' αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ABΓ, καὶ εἰς τὸ ABΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὕση τῆς AB διαμέτρου ἴση ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ. ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΓΒ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ, ΓΒ. ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΛΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. εἰ δὲ τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ μείζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ: ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

XI.24

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχεται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ, ΗΖ, ΑΘ, ΔΖ, ΒΖ, ΑΕ: λέγω, ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.



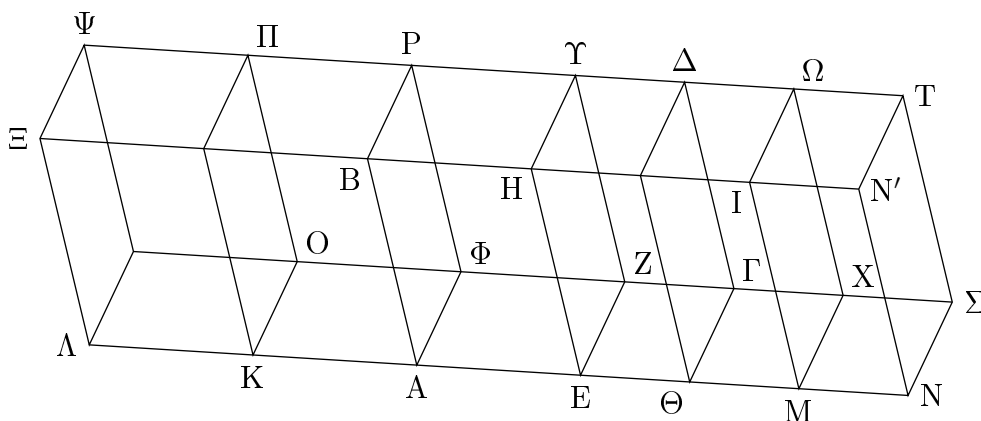
Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ, ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ, ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοινὰ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοι εἰσιν. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος: παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ, ΖΗ, ΗΒ, ΒΖ, ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ, ΔΖ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ, δύο δὲ αἱ ΑΒ,

ΒΘ ἀπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ, ΓΖ ἀπτομένας ἀλλήλων εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ: ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. καὶ ἐπεὶ δύο αἰ ΑΒ, ΒΘ δυοὶ ταῖς ΔΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον: ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλόγραμμῳ. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ. Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.25

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ



ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ, ΔΘ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν.

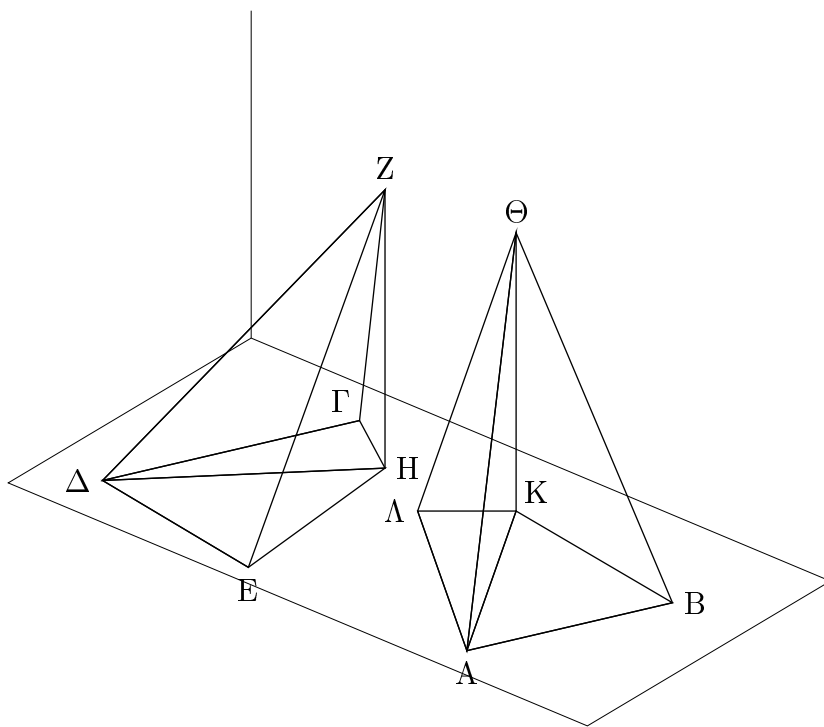
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαϊδηποτοῦν αἰ ΑΚ, ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαϊδηποτοῦν αἰ ΘΜ, ΜΝ, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΛΟ, ΚΦ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα καὶ τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΔΜ, ΜΤ στερεά. καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἰ ΑΚ, ΚΑ, ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ, ΚΦ, ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ, ΚΒ, ΑΗ ἀλλήλοις καὶ ἔτι τὰ ΛΨ, ΚΠ, ΑΡ ἀλλήλοις: ἀπεναντίον γάρ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ, ΘΧ, ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ, ΘΙ, ΙΝ ἴσα εἰσὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ, ΜΩ, ΝΤ: τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα: τὰ ἄρα τρία στερεά τὰ ΛΠ, ΚΡ, ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεά τὰ ΕΔ, ΔΜ, ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΑΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ

ἐλλείπει, ἐλλείπει. τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν AZ , $Z\Theta$, δύο δὲ στερεῶν τῶν $A\Upsilon$, $\Upsilon\Theta$, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια τῆς μὲν AZ βάσεως καὶ τοῦ $A\Upsilon$ στερεοῦ ἢ τε ΛZ βάσις καὶ τὸ $\Lambda\Upsilon$ στερεόν, τῆς δὲ ΘZ βάσεως καὶ τοῦ $\Theta\Upsilon$ στερεοῦ ἢ τε NZ βάσις καὶ τὸ $N\Upsilon$ στερεόν, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛZ βάσις τῆς ZN βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ $\Lambda\Upsilon$ στερεὸν τοῦ $N\Upsilon$ [στερεοῦ], καὶ εἰ ἴση, ἴσον, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ AZ βάσις πρὸς τὴν $Z\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ $A\Upsilon$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Upsilon\Theta$ στερεόν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.26

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνία ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ AB , τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ δοθὲν σημεῖον τὸ A , ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Δ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$, $E\Delta Z$, $Z\Delta\Gamma$ γωνιῶν ἐπιπέδων: δεῖ δὴ πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνία ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.



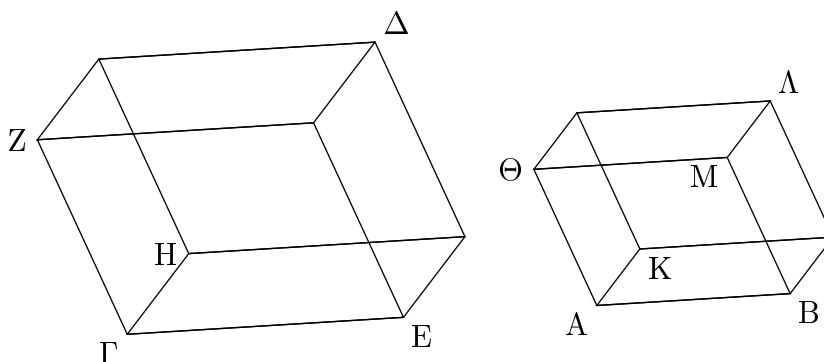
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΔZ τυχόν σημεῖον τὸ Z , καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὸ διὰ τῶν $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ZH , καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ H , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔH , καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ AB εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ A τῇ μὲν ὑπὸ $E\Delta\Gamma$ γωνία ἴση ἢ ὑπὸ BAA , τῇ δὲ ὑπὸ $E\Delta H$ ἴση ἢ ὑπὸ BAK , καὶ κείσθω τῇ ΔH ἴση ἢ AK , καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ διὰ τῶν BAA ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ $K\Theta$, καὶ κείσθω ἴση τῇ HZ ἢ $K\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘA : λέγω, ὅτι ἡ πρὸς τῷ A στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν BAA , $BA\Theta$, ΘAA γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ

Δ στερεᾶ γωνία τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ, ΕΔΖ, ΖΔΓ γωνιῶν. Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ, ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ, ΚΒ, ΖΕ, ΗΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστὶ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρωθεν τῶν ὑπὸ ΖΗΔ, ΖΗΕ γωνιῶν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρωθεν τῶν ὑπὸ ΘΚΑ, ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθὴ ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΗΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρωθεν ἑκατέρωθεν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΗΕ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση: καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν: ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ, ΚΘ δυοὶ ταῖς ΔΗ, ΗΖ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΖΔ ἴση ἐστίν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση: δύο δὴ αἱ ΘΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΔΖ, ΔΕ ἴσαι εἰσὶν. καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση [ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ, ΔΓ καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ, ΘΛ, ΗΓ, ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλη τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπὴ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ, ΑΛ δυοὶ ταῖς ΗΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση: δύο δὴ αἱ ΑΚ, ΚΘ δυοὶ ταῖς ΓΗ, ΗΖ εἰσὶν ἴσαι: καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν: βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΛ δυοὶ ταῖς ΖΔ, ΔΓ εἰσὶν ἴσαι, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση]. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση. Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ στερεᾶ γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση συνέσταται: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

XI.27

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

Ἐστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΔ: δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι.

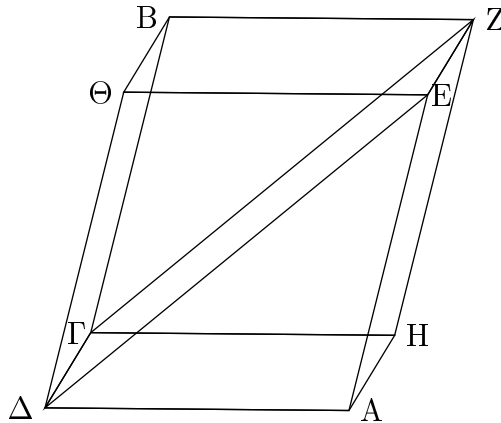


Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾶ γωνία ἴση ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ, ΘΑΚ, ΚΑΒ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, τὴν δὲ ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ: καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ

ἢ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἢ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ δὶ ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἢ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. καὶ συμπληρώσθω τὸ ΘΒ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ, ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιον ἐστὶ καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ: τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὁμοιά ἐστὶν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια: ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιον ἐστὶν. Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπίεδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιον τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγράφεται τὸ ΑΛ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

XI.28

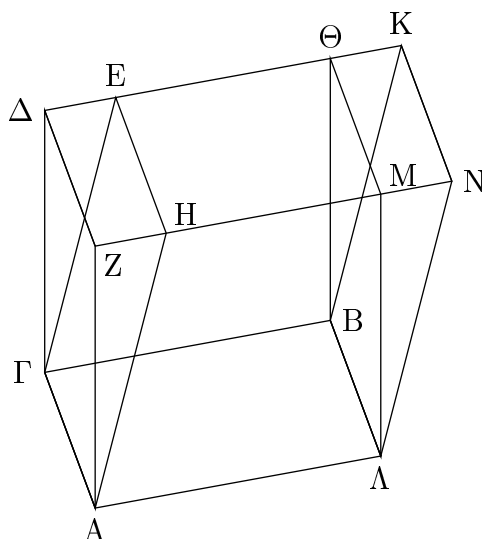
Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῆῖ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.



Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τεμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ, ΔΕ: λέγω, ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον: ἀπεναντίον γάρ: τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ, καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΗΖ, ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΓΖΒ, ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ: ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει. ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέτμηται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.29

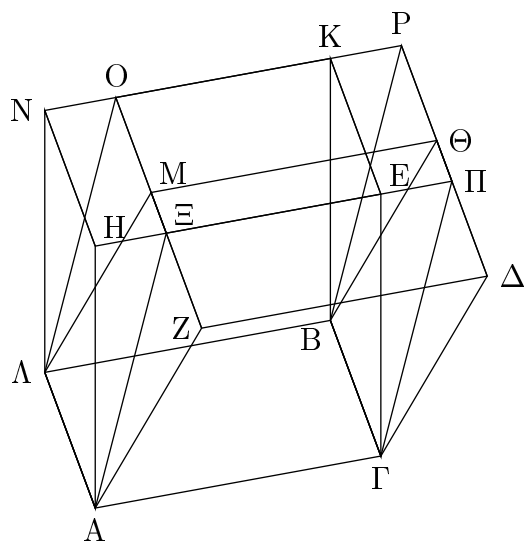
Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.



Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓM , ΓN ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AH , AZ , AM , AN , $\Gamma\Delta$, ΓE , $B\Theta$, BK ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ZN , ΔK : λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓM στερεὸν τῷ ΓN στερεῷ. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν $\Gamma\Theta$, ΓK , ἴση ἐστὶν ἡ ΓB ἑκάτερα τῶν $\Delta\Theta$, EK : ὥστε καὶ ἡ $\Delta\Theta$ τῇ EK ἐστὶν ἴση. κοινὴ ἀφηρήσθω ἡ $E\Theta$: λοιπὴ ἄρα ἡ ΔE λοιπῇ τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ὥστε καὶ τὸ μὲν $\Delta\Gamma E$ τρίγωνον τῷ $\Theta B K$ τριγῶνῳ ἴσον ἐστίν, τὸ δὲ ΔH παραλληλόγραμμον τῷ ΘN παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AZH τρίγωνον τῷ MAN τριγῶνῳ ἴσον ἐστίν. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ μὲν ΓZ παραλληλόγραμμον τῷ BM παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓH τῷ BN : ἀπεναντίον γάρ: καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγῶνων τῶν AZH , $\Delta\Gamma E$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $A\Delta$, ΔH , ΓH ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγῶνων τῶν MAN , $\Theta B K$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν BM , ΘN , BN . κοινὸν προσκείσθω τὸ στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ AB παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $HE\Theta M$: ὅλον ἄρα τὸ ΓM στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλω τῷ ΓN στερεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστίν. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσὶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.30

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

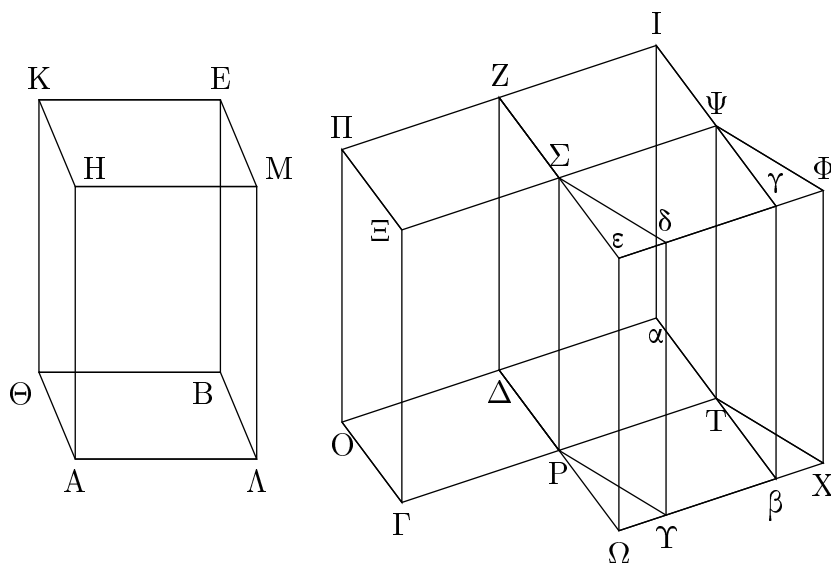


Ἐστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς AB στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ GM , GN ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AZ , AH , AM , AN , $ΓΔ$, $ΓΕ$, $BΘ$, BK μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ GM στερεὸν τῷ GN στερεῷ. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ NK , $ΔΘ$ καὶ συμπιπέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ P , καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ZM , HE ἐπὶ τὰ O , $Π$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $AΞ$, $ΛΟ$, $ΓΠ$, BP . ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ GM στερεόν, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΓΒΛ$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ZΔΘM$, τῷ $ΓΟ$ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΓΒΛ$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΞΠΡΟ$: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $ΑΓΒΛ$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AZ , $AΞ$, AM , $ΛΟ$, $ΓΔ$, $ΓΠ$, $BΘ$, BP ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ZO , $ΔP$. ἀλλὰ τὸ $ΓΟ$ στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΑΓΒΛ$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $ΞΠΡΟ$, ἴσον ἐστὶ τῷ GN στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ $ΑΓΒΛ$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $HEKN$: ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς $ΑΓΒΛ$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ AH , $AΞ$, $ΓΕ$, $ΓΠ$, AN , $ΛΟ$, BK , BP ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν HP , NP . ὥστε καὶ τὸ GM στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ GN στερεῷ. Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.31

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν AB , $ΓΔ$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AE , $ΓZ$ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ AE στερεὸν τῷ $ΓZ$ στερεῷ.

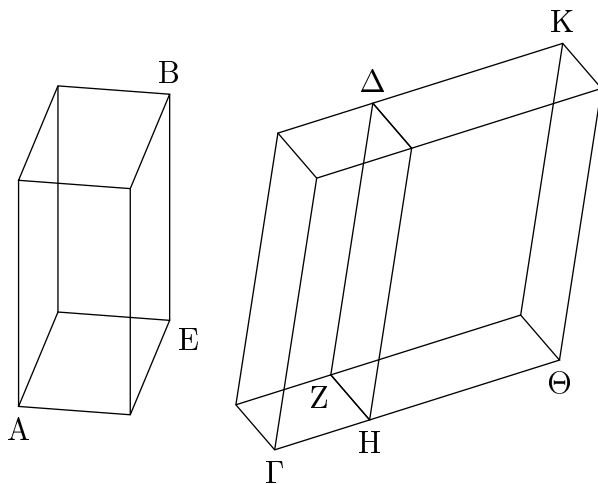


Ἐστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΛΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ, ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεῖα ἢ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΑΛΒ γωνίᾳ ἴση ἢ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἢ ΡΤ, τῇ δὲ ΛΒ ἴση ἢ ΡΥ, καὶ συμπληρώσθω ἢ τε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ, ΡΥ δυσὶ ταῖς ΑΛ, ΛΒ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση μὲν ἢ ΑΛ τῇ ΡΤ, ἢ δὲ ΛΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον ἐστὶ τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὅμοιον: τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον: ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπίπεδῳ ἴσον ἐστίν. διήχθωσαν αἱ ΔΡ, ΧΥ καὶ συμπίπτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἢ ΑΤβ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἢ ΟΔ κατὰ τὸ α, καὶ συμπληρώσθω τὰ ΩΨ, ΡΙ στερεά. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ ΨΩ στερεόν, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωγ, τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΨ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΡΩ, ΡΥ, Τβ, ΤΧ, Σε, Σδ, Ψγ, ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ, εΦ. ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον: καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλογράμμῳ: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΤ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ, ΩΧ: ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ, καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον. ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ: ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἢ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΠΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἢ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἢ ΩΤ

βάσις πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ βάσιν, οὕτως τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ Π . ἀλλ' ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$, οὕτως ἡ $\Omega\Gamma$ πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓZ στερεὸν πρὸς τὸ Π στερεόν, οὕτως τὸ $\Omega\Psi$ στερεὸν πρὸς τὸ Π . ἐκάτερον ἄρα τῶν ΓZ , $\Omega\Psi$ στερεῶν πρὸς τὸ Π τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓZ στερεὸν τῷ $\Omega\Psi$ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ $\Omega\Psi$ τῷ AE ἐδείχθη ἴσον: καὶ τὸ AE ἄρα τῷ ΓZ ἐστὶν ἴσον. Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ AH , ΘK , BE , ΛM , ΓN , $O\Pi$, ΔZ , $P\Sigma$ πρὸς ὀρθὰς ταῖς AB , $\Gamma\Delta$ βάσεσιν: λέγω πάλιν, ὅτι ἴσον τὸ AE στερεὸν τῷ ΓZ στερεῷ. ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν K , E , H , M , Π , Z , N , Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ $K\Xi$, ET , $H\Upsilon$, $M\Phi$, ΠX , $Z\Psi$, $N\Omega$, ΣI , καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ξ , T , Υ , Φ , X , Ψ , Ω , I σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΞT , $\Xi\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$, $T\Phi$, $X\Psi$, $X\Omega$, ΩI , $I\Psi$. ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ $K\Phi$ στερεὸν τῷ Π στερεῷ: ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν KM , $\Pi\Sigma$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθὰς εἰσι ταῖς βάσεσιν. ἀλλὰ τὸ μὲν $K\Phi$ στερεὸν τῷ AE στερεῷ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ Π τῷ ΓZ : ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν. καὶ τὸ AE ἄρα στερεὸν τῷ ΓZ στερεῷ ἐστὶν ἴσον. Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.32

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις.

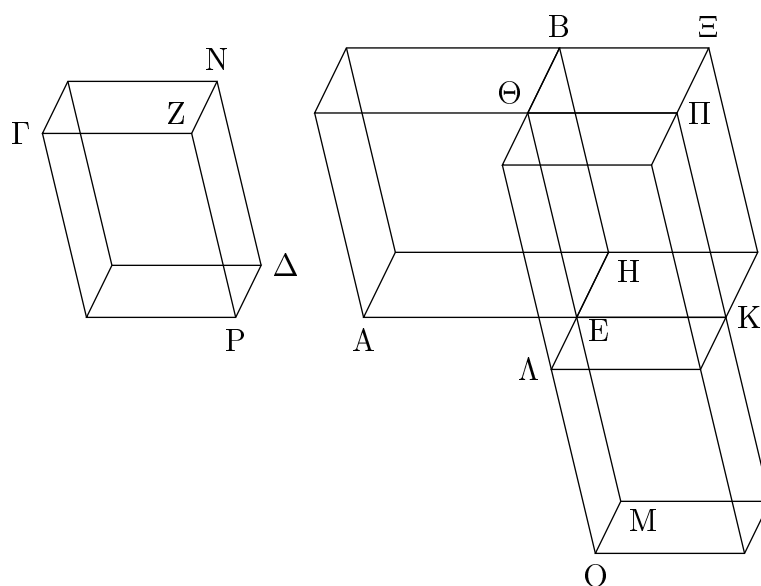


Ἐστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ AB , $\Gamma\Delta$: λέγω, ὅτι τὰ AB , $\Gamma\Delta$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις, τουτέστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ AE βάσις πρὸς τὴν ΓZ βάσιν, οὕτως τὸ AB στερεὸν πρὸς τὸ $\Gamma\Delta$ στερεόν. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ZH τῷ AE ἴσον τὸ $Z\Theta$, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς $Z\Theta$, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ $\Gamma\Delta$ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπληρώσθω τὸ HK . ἴσον δὴ ἐστὶ τὸ AB στερεὸν τῷ HK στερεῷ: ἐπὶ τε γὰρ ἴσων βάσεων εἰσι τῶν AE , $Z\Theta$ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓK ἐπιπέδῳ τῷ ΔH τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΓZ βάσις πρὸς τὴν $Z\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ $\Gamma\Delta$ στερεὸν πρὸς τὸ $\Delta\Theta$ στερεόν. ἴση δὲ ἡ μὲν $Z\Theta$ βάσις τῇ AE βάσει, τὸ δὲ HK στερεὸν τῷ AB στερεῷ: ἐστὶν ἄρα καὶ ὡς ἡ AE βάσις πρὸς

τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν. Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἔστιν ὡς αἱ βάσεις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.33

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Ἐστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ: λέγω, ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἢ περ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ. Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ, ΗΕ, ΘΕ αἱ ΕΚ, ΕΛ, ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΚΟ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ, ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἔστιν ἴση, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἔστιν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν, ἴσον ἄρα ἐστὶ [καὶ ὅμοιον] τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ [παραλληλογράμμῳ] καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ: τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμους τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια: ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. συμπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ, ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ στερεὰ συμπληρώσθω τὰ ΕΞ, ΛΠ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΖ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ [παραλληλόγραμμον] πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς

τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΕΞ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεόν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾗ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ δεύτερον: τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. ἀλλ' ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ καὶ ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ: ὥστε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΚ. ἴσον δὲ τὸ [μὲν] ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ: καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ. Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

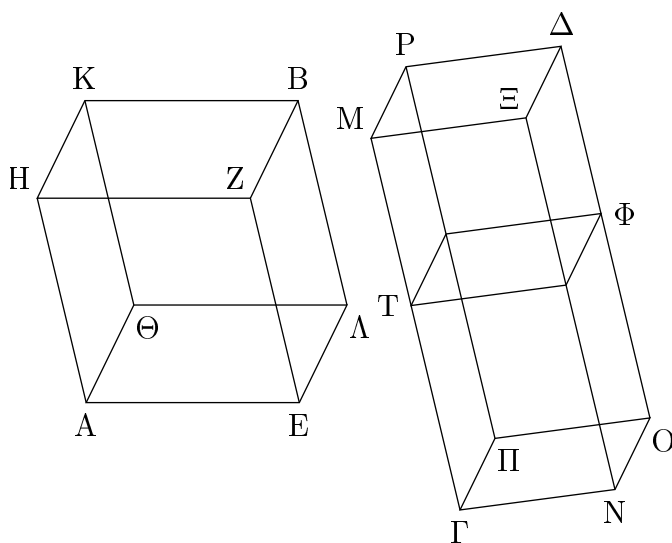
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾗσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην, οὕτω τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον, ἐπεὶπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ πρὸς τὴν δευτέραν.

XI.34

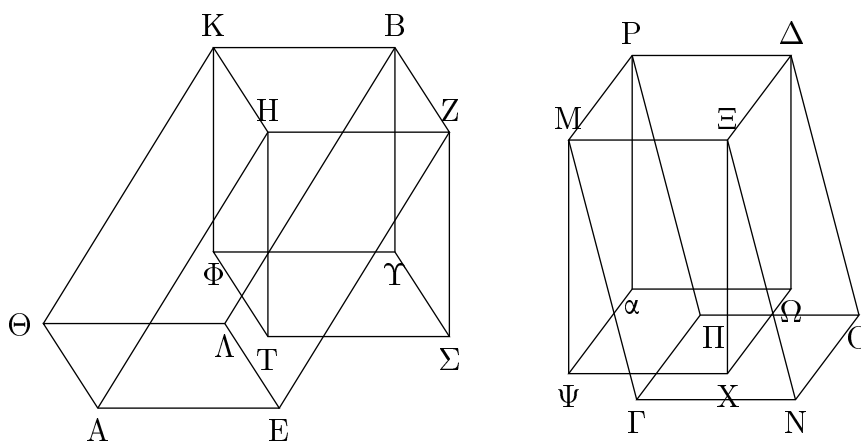
Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα.

Ἐστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ, ΓΔ: λέγω, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βᾶσις πρὸς τὴν ΝΠ βᾶσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.



Ἐστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ, ΕΖ, ΑΒ, ΘΚ, ΓΜ, ΝΞ, ΟΔ, ΠΡ

πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον, ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις [εἰ γὰρ τῶν ΕΘ, ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν μὴ εἶη τὰ ΑΗ, ΓΜ ὕψη ἴσα, οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. ὑπόκειται δὲ ἴσον: οὐκ ἄρα ἀνισόν ἐστὶ τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει: ἴσον ἄρα]. καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερόν, ὅτι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Μὴ ἔστω δὲ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον: μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ [εἰ γὰρ μὴ, οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ, ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται: ὑπόκειται δὲ ἴσα]. κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἔξωθεν δὲ τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν: ἰσοῦψῆ γὰρ τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά: ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΤΠ βάσιν καὶ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Πάλιν δὲ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονήτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος: λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

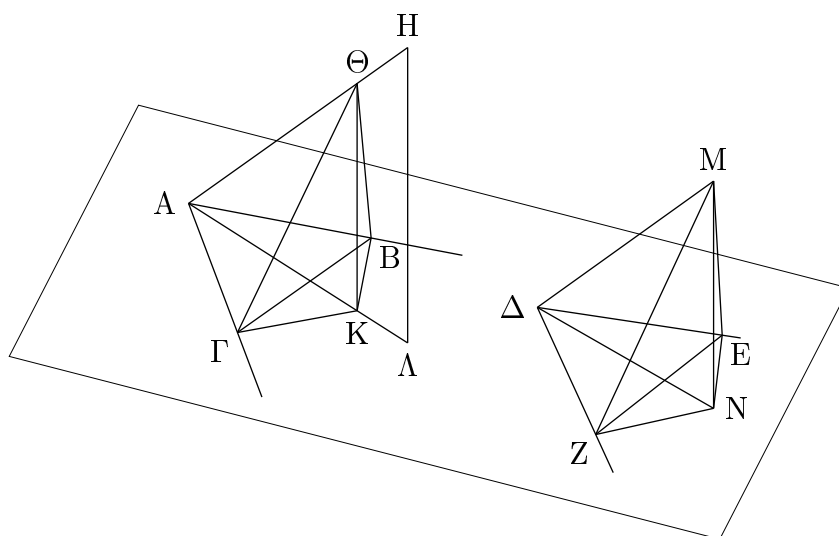


Ἐστῶσαν [γὰρ] πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν, καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. Μὴ ἔστω δὲ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ [βάσει] ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ: μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτέστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ,

ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ [βάσις] πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν: ἰσοῦψῆ γὰρ ἔστι τὰ ΑΒ, ΓΦ στερεά: ὡς δὲ ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἡ τε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν: ἐκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. ἴσον ἄρα ἔστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ [ὅπερ ἔδει δεῖξαι]. Μὴ ἔστωσαν δὲ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ, ΒΑ, ΗΑ, ΘΚ, ΕΝ, ΔΟ, ΜΓ, ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ, Η, Β, Κ, Ξ, Μ, Δ, Ρ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΕΘ, ΝΠ ἐπίπεδα κάθετοι καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, α, καὶ συμπεληρώσθω τὰ ΖΦ, ΞΩ στερεά: λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Ἐπεὶ ἴσον ἔστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΒΤ ἔστιν ἴσον: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]: τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἔστιν ἴσον: ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]: καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἔστιν [τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς ἔστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν]. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἔστι τῶν ΔΨ, ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ, ΒΑ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Πάλιν δὲ τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος: λέγω, ὅτι ἴσον ἔστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ. Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος, ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἔστι τῶν ΑΒ, ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ, ΔΨ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. τῶν ΒΤ, ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν [ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων τὰ ὕψη πρὸς ὀρθὰς ἔστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἔστιν ἐκεῖνα]: ἴσον ἄρα ἔστι τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΒΑ ἴσον ἔστιν: ἐπὶ τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεως [εἰσι] τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος [ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσὶν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν]. τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἔστιν [ἐπὶ τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεως εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις]. καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἔστιν ἴσον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.35

Ἐὰν ὄσιν δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῆ τυχόντα σημεία, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσὶν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων.



Ἐστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι αἱ ὑπὸ BAG , $E\Delta Z$, ἀπὸ δὲ τῶν A , Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφειστάτωσαν αἱ AH , ΔM ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ $M\Delta E$ τῇ ὑπὸ HAB , τὴν δὲ ὑπὸ $M\Delta Z$ τῇ ὑπὸ HAG , καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν AH , ΔM τυχόντα σημεία τὰ H , M , καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν H , M σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν BAG , $E\Delta Z$ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ HL , MN , καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπίπεδοις κατὰ τὰ N , L , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ LA , ND : λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ HAL γωνία τῇ ὑπὸ $M\Delta N$ γωνία. Κείσθω τῇ ΔM ἴση ἡ $A\Theta$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ HL παράλληλος ἡ ΘK . ἡ δὲ HL κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAG ἐπίπεδον: καὶ ἡ ΘK ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν BAG ἐπίπεδον. ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν K , N σημείων ἐπὶ τὰς AB , AG , ΔZ , ΔE εὐθείας κάθετοι αἱ $K\Gamma$, NZ , KB , NE , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Theta\Gamma$, ΓB , MZ , ZE . ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , KA , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς KA ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν $K\Gamma$, ΓA , καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘA ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$, ΓA . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘK , $K\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta\Gamma$: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘA ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $\Theta\Gamma$, ΓA . ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Theta\Gamma A$ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔZM γωνία ὀρθὴ ἐστὶν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $A\Gamma\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔZM . ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $\Theta A\Gamma$ τῇ ὑπὸ $M\Delta Z$ ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ $M\Delta Z$, $\Theta A\Gamma$ δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν ΘA τῇ $M\Delta$: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Gamma$ τῇ ΔZ . ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ AB τῇ ΔE ἐστὶν ἴση [οὕτως: ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘB , ME . καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς $A\Theta$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AK , $K\Theta$, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AK ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν AB , BK , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BK , $K\Theta$ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ $A\Theta$. ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν BK , $K\Theta$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $B\Theta$: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘKB γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν ΘK κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $A\Theta$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν AB , $B\Theta$: ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AB\Theta$ γωνία. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔEM γωνία ὀρθὴ ἐστὶν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $BA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $E\Delta M$ ἴση: ὑπόκεινται γάρ: καὶ ἔστιν ἡ $A\Theta$ τῇ ΔM ἴση: ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ AB τῇ ΔE]. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $A\Gamma$ τῇ ΔZ , ἡ δὲ AB τῇ ΔE , δύο δὴ

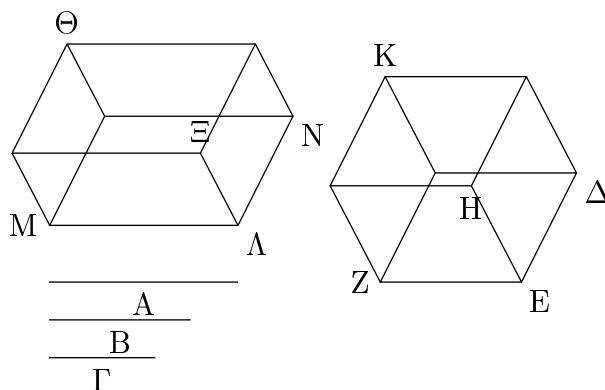
αί ΓΑ, ΑΒ δυσι ταῖς ΖΔ, ΔΕ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνία τῆ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση: βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῆ ΕΖ ἴση ἐστὶ καὶ τὸ τρίγωνον τῶ τριγώνω καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῆ ὑπὸ ΔΖΕ. ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῆ τῆ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῆ τῆ ὑπὸ ΕΖΝ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῆ ὑπὸ ΖΕΝ ἐστὶν ἴση. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΓΚ, ΕΖΝ [τὰς] δύο γωνίας δυσι γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρω καὶ μίαν πλευρὰν μιᾶ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῆ ΕΖ: καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆ ΖΝ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῆ ΔΖ ἴση: δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΚ δυσι ταῖς ΔΖ, ΖΝ ἴσαι εἰσίν: καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν. βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῆ ΔΝ ἴση ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῶ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἀλλὰ τῶ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ: τῶ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ: ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ, ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ, ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΔΝ: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς ΝΜ: ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῆ ΜΝ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ, ΑΚ δυσι ταῖς ΜΔ, ΔΝ ἴσαι εἰσίν ἑκατέρω ἑκατέρω, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῆ ΜΝ ἐδείχθη ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνία τῆ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστὶν ἴση. Ἐὰν ἄρα ὧσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι καὶ τὰ ἐξῆς τῆς προτάσεως [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι, ἐὰν ὧσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρω, αἱ ἀπ' αὐτῶν κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.36

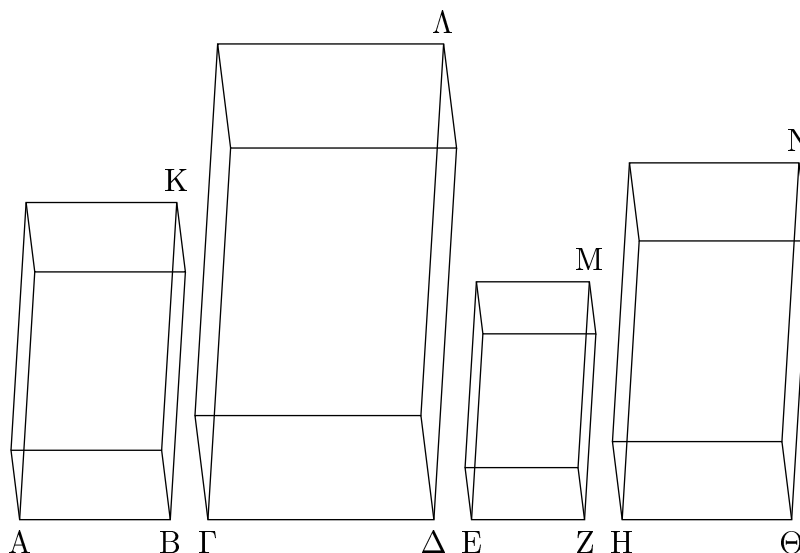
Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὧσιν, τὸ ἐκ τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῶ παραλληλεπιπέδω ἰσοπλευρῶ μὲν, ἰσογωνίω δὲ τῶ προειρημένω. Ἐστῶσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α, Β, Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ: λέγω, ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῶ ἀπὸ τῆς Β στερεῶ ἰσοπλευρῶ μὲν, ἰσογωνίω δὲ τῶ προειρημένω.



Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἢ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τῶν ὑπὸ ΔΕΗ, ΗΕΖ, ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἐκάστη τῶν ΔΕ, ΗΕ, ΕΖ, καὶ συμπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α ἴση ἢ ΑΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΜ εὐθεῖα καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνία ἴση στερεᾷ γωνία ἢ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ, ΞΑΜ, ΜΑΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἢ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἢ ΛΝ. καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΑΜ, ἡ δὲ Β ἐκατέρᾳ τῶν ΛΞ, ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΝΑΜ, ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν: ἴσον ἄρα ἔστι τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμῳ. καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ, ΝΑΜ, καὶ ἐπ' αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστᾶσιν αἱ ΛΞ, ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἐκατέραν ἐκατέρᾳ, αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η, Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΑΜ, ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν: ὥστε τὰ ΛΘ, ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἔστιν. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἔστιν: ἴσον ἄρα ἔστι τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΛΘ τὸ ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεόν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν: τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α, Β, Γ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.37

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ᾧσιν, καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται: καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾧ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

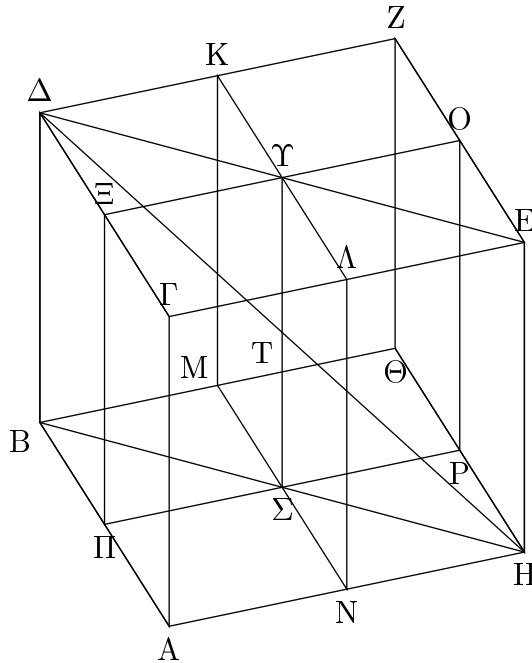


Ἐστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΑ, ΛΓ, ΜΕ, ΝΗ: λέγω, ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ. Ἐπεὶ γὰρ ὁμοίων ἔστι τὸ ΚΑ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΛΓ, τὸ ΚΑ ἄρα πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ

ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ. Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΑΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΛΓ στερεὸν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι καὶ τὰ ἐξῆς τῆς προτάσεως: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.38

Ἐὰν κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Κύβου γὰρ τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ, ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Π, Ο, Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆσθω τὰ ΚΝ, ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ κύβου διαγώνιος ἡ ΔΗ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.



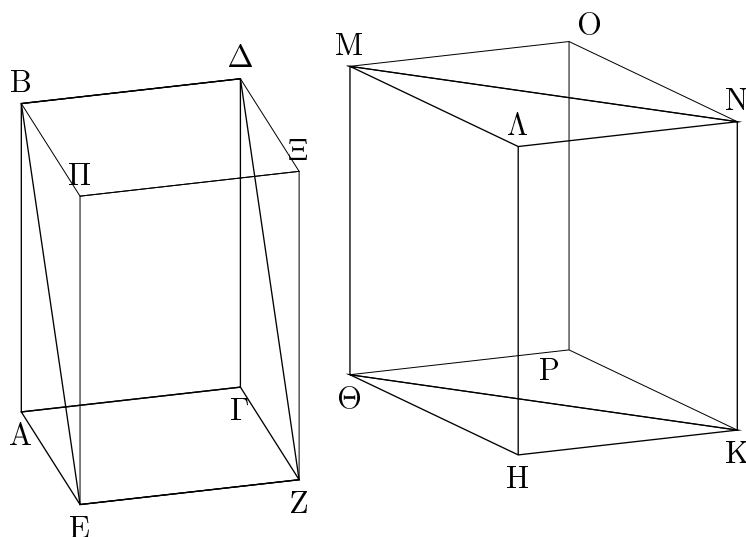
Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ, ΥΕ, ΒΣ, ΣΗ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλάξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ, ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνία. διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖα ἐστὶν ἡ ΔΥΕ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖα ἐστὶν, καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστὶ καὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ, ΒΗ: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ: ἐναλλάξ γάρ: ἡ δὲ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ. δύο δὴ τρίγωνά

ἔστι τὰ $\Delta\Upsilon$, $\text{HT}\Sigma$ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυοὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν τὴν $\Delta\Upsilon$ τῆ $\text{H}\Sigma$: ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔE , BH : καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἔξει. ἴση ἄρα ἢ μὲν $\Delta\Gamma$ τῆ TH , ἢ δὲ $\Upsilon\Gamma$ τῆ $\text{T}\Sigma$. Ἐὰν ἄρα κύβου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσιν, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῆ, ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ κύβου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XI.39

Ἐὰν ἦ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἦ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα.

Ἐστω δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ τὰ $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}\text{Z}$, $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{MN}$, καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ AZ παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τὸ $\text{H}\Theta\text{K}$ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $\text{H}\Theta\text{K}$ τριγώνου: λέγω, ὅτι ἴσον ἔστι τὸ $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}\text{Z}$ πρίσμα τῷ $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{MN}$ πρίσματι.



Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ $\text{A}\Xi$, HO στερεά. ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ AZ παραλληλόγραμμον τοῦ $\text{H}\Theta\text{K}$ τριγώνου, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΘK παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ $\text{H}\Theta\text{K}$ τριγώνου, ἴσον ἄρα ἔστι τὸ AZ παραλληλόγραμμον τῷ ΘK παραλληλογράμμῳ. τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν: ἴσον ἄρα ἔστι τὸ $\text{A}\Xi$ στερεὸν τῷ HO στερεῷ. καὶ ἐστι τοῦ μὲν $\text{A}\Xi$ στερεοῦ ἥμισυ τὸ $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}\text{Z}$ πρίσμα, τοῦ δὲ HO στερεοῦ ἥμισυ τὸ $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{MN}$ πρίσμα: ἴσον ἄρα ἔστι τὸ $\text{AB}\Gamma\Delta\text{E}\text{Z}$ πρίσμα τῷ $\text{H}\Theta\text{K}\Lambda\text{MN}$ πρίσματι. Ἐὰν ἄρα ἦ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἦ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

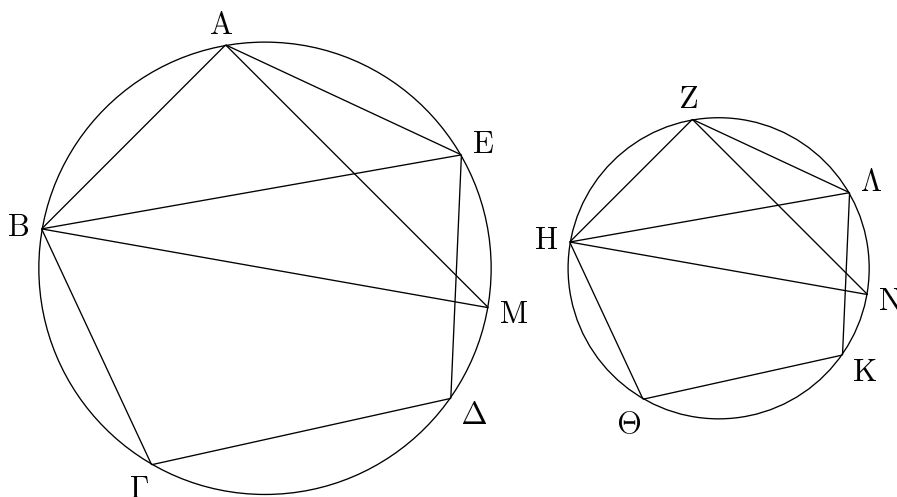
Book XII

Propositions

XII.1

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἐστωσαν κύκλοι οἱ $AB\Gamma$, $ZH\Theta$, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$, διαμέτροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ BM , HN : λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BM τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον, οὕτως τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον πρὸς τὸ $ZH\Theta K\Lambda$ πολύγωνον.



Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ BE , AM , $H\Lambda$, ZN . καὶ ἐπεὶ ὅμοιον τὸ $AB\Gamma\Delta E$ πολύγωνον τῷ $ZH\Theta K\Lambda$ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ BAE γωνία τῇ ὑπὸ HZA , καὶ ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν AE , οὕτως ἡ HZ πρὸς τὴν $Z\Lambda$. δύο δὲ τρίγωνα ἐστὶ τὰ BAE , HZA μίαν γωνίαν μιᾶ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ BAE τῇ ὑπὸ HZA , περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABE τρίγωνον τῷ ZHA τριγώνῳ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ AEB γωνία τῇ ὑπὸ $Z\Lambda H$. ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AEB τῇ ὑπὸ AMB ἐστὶν ἴση: ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν: ἡ δὲ ὑπὸ $Z\Lambda H$ τῇ ὑπὸ ZNH : καὶ ἡ ὑπὸ AMB ἄρα τῇ ὑπὸ ZNH ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ BAM ὀρθῇ τῇ ὑπὸ HZN

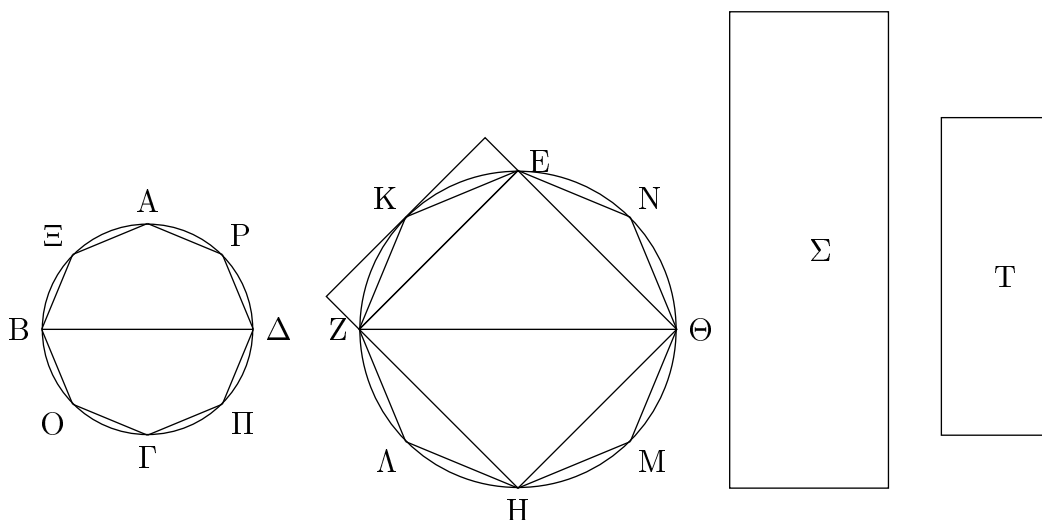
ἴση: καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα τῆ λοιπῆ ἐστὶν ἴση. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABM τρίγωνον τῶ ZHN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BM πρὸς τὴν HN, οὕτως ἡ BA πρὸς τὴν HZ. ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς BM πρὸς τὴν HN λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς BM τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς BA πρὸς τὴν HZ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ABΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ZH ΘΚΛ πολύγωνον: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BM τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς HN τετράγωνον, οὕτως τὸ ABΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ZHΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἀλλήλα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.2

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἐστωσαν κύκλοι οἱ ABΓΔ, EZHΘ, διάμετροι δὲ αὐτῶν [ἔστωσαν] αἱ BΔ, ZΘ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ABΓΔ κύκλος πρὸς τὸν EZHΘ κύκλον, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ τετράγωνον.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὡς ὁ ABΓΔ κύκλος πρὸς τὸν EZHΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ, ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς BΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ZΘ, οὕτως ὁ ABΓΔ κύκλος ἢτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ EZHΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZHΘ κύκλον τετράγωνον τὸ EZHΘ: τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ EZHΘ κύκλου, ἐπειδὴ περ ἐὰν διὰ τῶν E, Z, H, Θ σημείων ἐφαπτομένας [εὐθείας] τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἡμισύ ἐστὶ τὸ EZHΘ τετράγωνον, τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάττων ἐστὶν ὁ κύκλος: ὥστε τὸ EZHΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ EZHΘ κύκλου. τετμήσθωσαν δίχα αἱ EZ, ZH, HΘ, ΘE περιφέρειαι κατὰ τὰ K, Λ, M, N σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE: καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ

τιμήματος τοῦ κύκλου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν K, Λ, M, N σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν $EKZ, Z\Lambda H, H\Lambda M\Theta, \Theta NE$ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου, ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμήμα ἔλαττον ἔστι τοῦ παραλληλογράμμου: ὥστε ἕκαστον τῶν $EKZ, Z\Lambda H, H\Lambda M\Theta, \Theta NE$ τριγώνων μείζον ἔστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύοντες εὐθείας καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μείζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μείζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειψθήσεται τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. λειψθῶ οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν $EK, KZ, Z\Lambda, \Lambda H, H\Lambda, M\Theta, \Theta N, NE$ τμήματα τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ $EZH\Theta$ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. λοιπὸν ἄρα τὸ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολύγωνον μείζον ἔστι τοῦ Σ χωρίου. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολύγωνον. ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον: καὶ ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ $A\Xi B O \Gamma \Pi \Delta P$ πολύγωνον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολύγωνον: ἐναλλάξ ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολύγωνον. μείζων δὲ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου: μείζων ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ $EKZ\Lambda H M\Theta N$ πολυγώνου. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον: ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίου. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ $Z\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $B\Delta$, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Σ . ἀνάπαλι ἄρα [ἔστιν] ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB , οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον. ἀλλ' ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλαττον τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου: ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς μείζον τι τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου χωρίου. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον: ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

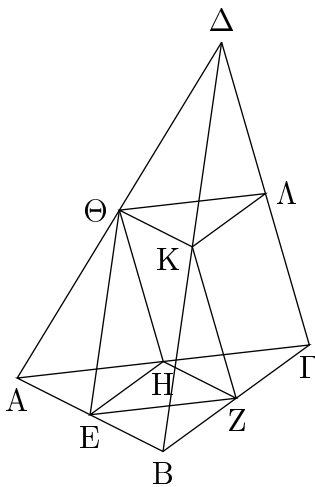
Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου ἔστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλαττον τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου.

Γεγονέτω γάρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον. λέγω, ὅτι ἔλαττόν ἐστι τὸ T χωρίον τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον, ἐναλλάξ ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸ T χωρίον. μείζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου: μείζων ἄρα καὶ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος τοῦ T χωρίου. ὥστε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $AB\Gamma\Delta$ κύκλου χωρίου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.3

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ [ὁμοίας] τῇ ὅλῃ τριγώνου ἔχουσας βάσεις καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα: καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Ἐστω πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον: λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma\Delta$ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνου βάσεις ἔχουσας καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα: καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.



Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ AB , $B\Gamma$, ΓA , $A\Delta$, ΔB , $\Delta\Gamma$ δίχα κατὰ τὰ E , Z , H , Θ , K , Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘE , $E H$, $H\Theta$, ΘK , $K\Lambda$, $\Lambda\Theta$, KZ , ZH . ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν AE τῇ EB , ἡ δὲ $A\Theta$ τῇ $\Delta\Theta$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Theta$ τῇ ΔB . διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘK τῇ AB παράλληλός ἐστιν. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $\Theta E BK$: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘK τῇ EB . ἀλλὰ ἡ EB τῇ EA ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ AE ἄρα τῇ ΘK ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$ ἴση: δύο δὴ αἱ EA , $A\Theta$ δυσὶ ταῖς $K\Theta$, $\Theta\Delta$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα: καὶ γωνία ἡ ὑπὸ $EA\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Theta\Delta$ ἴση: βάσις ἄρα ἡ $E\Theta$ βάσει τῇ $K\Delta$ ἐστὶν ἴση. ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $AE\Theta$ τρίγωνον τῷ $\Theta K\Delta$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ $A\Theta H$ τρίγωνον τῷ $\Theta\Lambda\Delta$ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστὶ καὶ ὁμοίον. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ $E\Theta$, ΘH παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $K\Delta$, $\Delta\Lambda$ εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὔσαι, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῇ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ γωνία. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ $E\Theta$, ΘH δυσὶ ταῖς $K\Delta$,

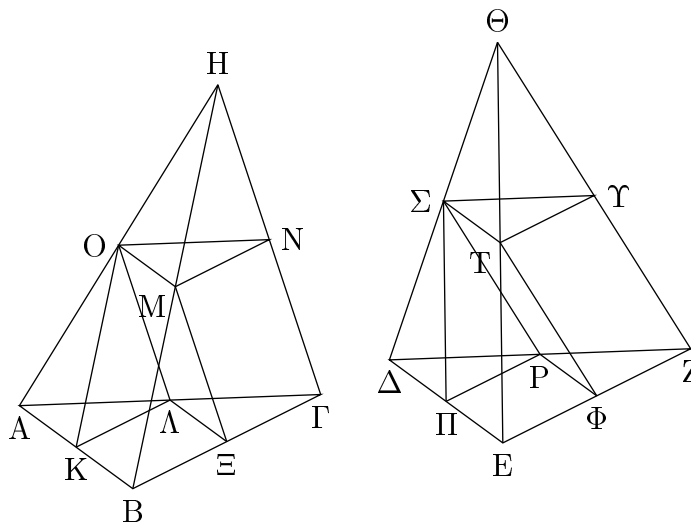
$\Delta\Lambda$ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρα, καὶ γωνία ἢ ὑπὸ $E\Theta H$ γωνία τῆ ὑπὸ $K\Delta\Lambda$ ἐστὶν ἴση, βάσις ἄρα ἢ EH βάσει τῆ $K\Lambda$ [ἐστὶν] ἴση: ἴσον ἄρα καὶ ὁμοίον ἐστὶ τὸ $E\Theta H$ τρίγωνον τῷ $K\Delta\Lambda$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ AEH τρίγωνον τῷ $\Theta K\Lambda$ τριγώνῳ ἴσον τε καὶ ὁμοίον ἐστὶν. ἢ ἄρα πυραμῖς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ $A\Delta B$ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν AB ἤκται ἢ ΘK , ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν: ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Delta B$ τρίγωνον τῷ $\Delta\Theta K$ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν $\Delta B\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Delta K\Lambda$ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶν, τὸ δὲ $A\Delta\Gamma$ τῷ $\Delta\Lambda\Theta$. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἀπτόμεναι ἀλλήλων αἱ BA , $A\Gamma$ παρὰ δύο εὐθείας ἀπτομένας ἀλλήλων τὰς $K\Theta$, $\Theta\Lambda$ εἰσὶν οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἴσας γωνίας περιέξουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἢ ὑπὸ BAG γωνία τῆ ὑπὸ $K\Theta\Lambda$. καὶ ἐστὶν ὡς ἢ BA πρὸς τὴν $A\Gamma$, οὕτως ἢ $K\Theta$ πρὸς τὴν $\Theta\Lambda$: ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον τῷ $\Theta K\Lambda$ τριγώνῳ. καὶ πυραμῖς ἄρα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἀλλὰ πυραμῖς, ἣς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον [ὥστε καὶ πυραμῖς, ἣς βάσις μὲν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον]. ἑκατέρα ἄρα τῶν $AEH\Theta$, $\Theta K\Lambda\Delta$ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῆ ὅλη

τῆ $AB\Gamma\Delta$ πυραμίδι. ΓK καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ BZ τῆ $Z\Gamma$, διπλάσιόν ἐστὶ τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον τοῦ $HZ\Gamma$ τριγώνου. καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἢ δύο πρίσματα ἰσοῦψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχη βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἢ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν BKZ , $E\Theta H$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $EBZH$, $EBK\Theta$, ΘKZH τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν $HZ\Gamma$, $\Theta K\Lambda$, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν $KZ\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Gamma H\Theta$, ΘKZH . καὶ φανερόν, ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισματῶν, οὗ τε βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἢ ΘK εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστὶν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ , Δ σημεία, ἐπειδήπερ [καὶ] ἐὰν ἐπιζευξώμεν τὰς EZ , EK εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἢ ΘK εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστὶ τῆς πυραμίδος, ἣς βάσις τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον. ἀλλ' ἢ πυραμῖς, ἣς βάσις τὸ EBZ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ K σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον: ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται. ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἢ ΘK εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστὶ πυραμίδος, ἣς βάσις μὲν τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον. ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $EBZH$ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἢ ΘK εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ $HZ\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον: ἢ δὲ πυραμῖς, ἣς βάσις τὸ AEH τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις τὸ $\Theta K\Lambda$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μεῖζονά ἐστὶ τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ AEH , $\Theta K\Lambda$ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ , Δ σημεία.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμῖς, ἣς βάσις τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, διήρηται εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις [καὶ ὁμοίας τῆ ὅλη] καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μεῖζονά ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.4

Ἐὰν ᾧσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῆ δὲ ἑκατέρω αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βᾶσις πρὸς τὴν τῆς ἐτέρας πυραμίδος βᾶσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἐτέρα πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ.



Ἐστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ABΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεῖα, καὶ διηρήσθω ἑκατέρω αὐτῶν εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ABΓ βᾶσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βᾶσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ABΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἰσοπληθῆ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΑΒ καὶ ὁμοίον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὁμοίον ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ διπλασίον ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ, ΓΞ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ, ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ, ΖΦ ὁμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα [εὐθύγραμμα] τὰ ΔΕΖ, ΡΦΖ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον: ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ [τρίγωνον], οὕτως τὸ ΛΞΓ [τρίγωνον] πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν [ἐστὶ] τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βᾶσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βᾶσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον

δὲ ἡ OM , καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ $\Lambda E\Gamma$, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς τὰ πρίσματα, οὗ τε βάσις μὲν τὸ $\Pi E\Phi P$, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣT εὐθεΐα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma T\Upsilon$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα.

Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ $OMNH$, $\Sigma T\Upsilon\Theta$ πυραμίδες εἰς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται ὡς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν $\Sigma T\Upsilon$ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $OMNH$ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Sigma T\Upsilon\Theta$ πυραμίδι δύο πρίσματα. ἀλλ' ὡς ἡ OMN βάσις πρὸς τὴν $\Sigma T\Upsilon$ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν: ἴσον γὰρ ἐκάτερον τῶν OMN , $\Sigma T\Upsilon$ τριγώνων ἐκατέρω τῶν $\Lambda E\Gamma$, $P\Phi Z$. καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. ὁμοίως δὲ κὰν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἰς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

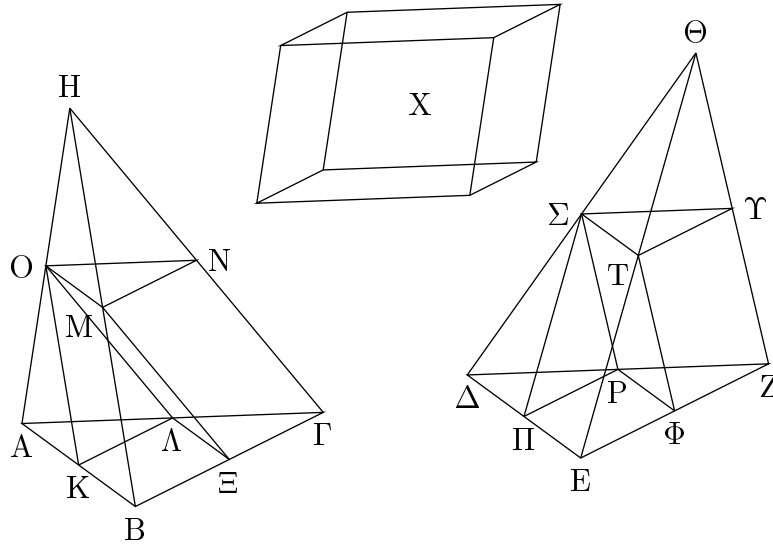
Ἐπι δὲ ἔστιν ὡς τὸ $\Lambda E\Gamma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $P\Phi Z$ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις τὸ $\Lambda E\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ OMN , πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ $P\Phi Z$ [τρίγωνον], ἀπεναντίον δὲ τὸ $\Sigma T\Upsilon$, οὕτω δεικτέον.

Ἐπι γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν H , Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοῦψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεΐαι ἢ τε $H\Gamma$ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν $AB\Gamma$, OMN τέμνονται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. καὶ τέτμηται ἡ $H\Gamma$ δίχα ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου κατὰ τὸ N : καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ $AB\Gamma$ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ OMN ἐπιπέδου. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔEZ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ $\Sigma T\Upsilon$ ἐπιπέδου. καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ ἀπὸ τῶν H , Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ ἐπίπεδα: ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν OMN , $\Sigma T\Upsilon$ τριγώνων ἐπὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ κάθετοι. ἰσοῦψῆ ἄρα [ἐστὶ] τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ $\Lambda E\Gamma$, $P\Phi Z$ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ OMN , $\Sigma T\Upsilon$. ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισματῶν ἀναγραφόμενα ἰσοῦψῆ καὶ πρὸς ἀλλήλα [εἰσὶν] ὡς αἱ βάσεις: καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $\Lambda E\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $P\Phi Z$ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἀλλήλα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.5

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ H , Θ σημεία: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα.



Εἰ γὰρ μὴ ἔστιν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς ἦτοι πρὸς ἔλασσόν τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ X , καὶ διηρήσθω ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς εἰς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα: τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γινόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διηρήσθωσαν, καὶ τοῦτο αἰεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειψθῶσι τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος, αἱ εἰσὶν ἐλάττωνας τῆς ὑπεροχῆς, ἢ ὑπερέχει ἡ $\Delta E Z\Theta$ πυραμὶς τοῦ X στερεοῦ. λειψθῶσαν καὶ ἔστωσαν λόγου ἕνεκεν αἱ $\Delta\Pi P\Sigma$, $\Sigma T Y\Theta$: λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ $\Delta E Z\Theta$ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ X στερεοῦ. διηρήσθω καὶ ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὸ X στερεόν: καὶ ὡς ἄρα ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὸ X στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ $AB\Gamma H$ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα: ἐναλλάξ ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ X στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρίσματα. μείζων δὲ ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων: μείζων ἄρα καὶ τὸ X στερεὸν τῶν ἐν τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι πρισμάτων. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἔστιν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$ βάσιν, οὕτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, οὕτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν.

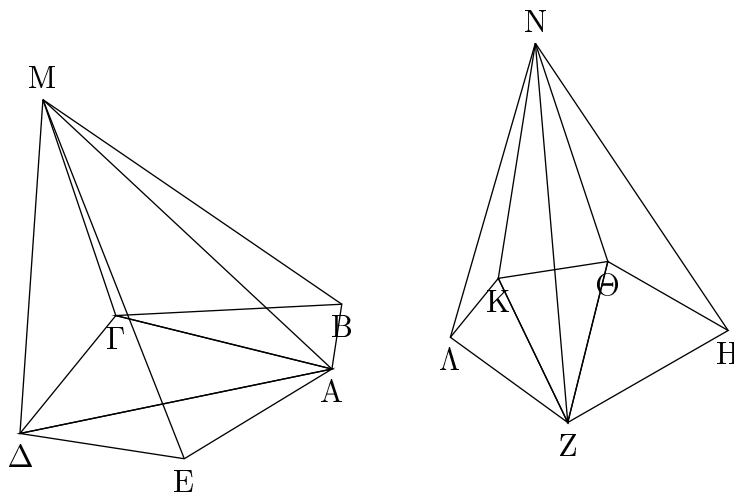
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ X : ἀνάπαλιν ἄρα ἔστιν ὡς ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$ βάσιν, οὕτως τὸ X στερεὸν πρὸς τὴν $AB\Gamma H$ πυραμίδα. ὡς δὲ τὸ X στερεὸν πρὸς τὴν $AB\Gamma H$ πυραμίδα, οὕτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔEZ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma$

βάσιν, ούτως ἡ $\Delta EZ\Theta$ πυραμὶς πρὸς ἔλασσόν τι τῆς $AB\Gamma H$ πυραμίδος: ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς μείζον τι τῆς $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδος στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν ΔEZ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.6

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὔσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἐστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν [αἱ] βάσεις μὲν τὰ $AB\Gamma\Delta E$, $ZH\Theta K\Lambda$ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ M , N σημεῖα: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma\Delta E M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda N$ πυραμίδα.



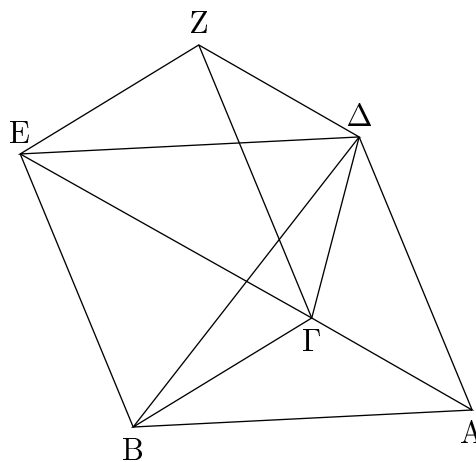
Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ $ΑΓ$, $ΑΔ$, $Z\Theta$, ZK . ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $AB\Gamma M$, $ΑΓΔ M$ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔ M$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΓΔ$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma\Delta M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΓΔ M$ πυραμίδα. ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ $ΑΓΔ$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔ E$ βάσιν, ούτως ἡ $ΑΓΔ M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔ E M$ πυραμίδα. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔ E$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma\Delta M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔ E M$ πυραμίδα. καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $ΑΔ E$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma\Delta E M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ΑΔ E M$ πυραμίδα. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ὡς ἡ $ZH\Theta K\Lambda$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta$ βάσιν, ούτως καὶ ἡ $ZH\Theta K\Lambda N$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta N$ πυραμίδα. καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ $ΑΔ E M$, $ZH\Theta N$ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις καὶ ὕψος ἴσον, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $ΑΔ E$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta$ βάσιν, ούτως ἡ $ΑΔ E M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta N$ πυραμίδα. ἀλλ' ὡς ἡ $ΑΔ E$ βάσις πρὸς τὴν $AB\Gamma\Delta E$ βάσιν, ούτως ἦν ἡ $ΑΔ E M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $AB\Gamma\Delta E M$ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta$ βάσιν, ούτως ἡ $AB\Gamma\Delta E M$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta N$ πυραμίδα. ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ $ZH\Theta$ βάσις πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda$ βάσιν, ούτως ἦν καὶ ἡ $ZH\Theta N$ πυραμὶς πρὸς τὴν $ZH\Theta K\Lambda N$ πυραμίδα. καὶ δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta E$ βάσις

πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἢ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.7

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους βάσεις ἐχούσας.

Ἐστω πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ: λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.



Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ, ΕΓ, ΓΔ. ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστὶν ἡ ΒΔ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΔ τριγώνῳ: καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἣς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον. ἀλλὰ ἡ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΔΕΒ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἢ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον: ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ ἐστὶν αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον. ἡ δὲ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον: διήρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις τριγώνους ἐχούσας βάσεις.

Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἣς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἢ αὐτὴ ἐστὶ πυραμίδι, ἣς βάσις τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον: ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχονται: ἡ δὲ πυραμὶς, ἣς βάσις τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ, καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἣς βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Δ σημεῖον,

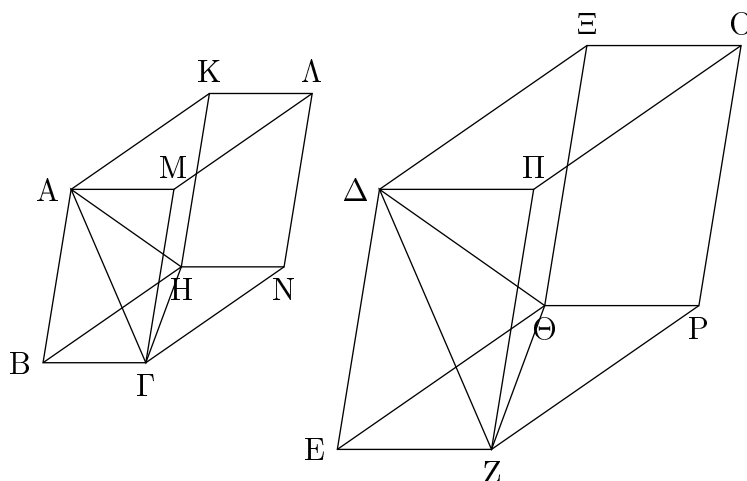
τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔEZ .

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ ὕψος ἴσον [ἐπειδὴ περ ἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχη ἢ βάσις τοῦ πρίσματος, τοιοῦτο καὶ τὸ ἀπεναντίον, καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον]: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.8

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.



Ἐστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶ τὰ $AB\Gamma$, ΔEZ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ H , Θ σημεῖα: λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς πρὸς τὴν $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ὅμοια ἐστὶν ἡ $AB\Gamma H$ πυραμὶς τῇ $\Delta EZ\Theta$ πυραμίδι, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ $AB\Gamma$ γωνία τῇ ὑπὸ ΔEZ γωνία, ἡ δὲ ὑπὸ $HB\Gamma$ τῇ ὑπὸ ΘEZ , ἡ δὲ ὑπὸ ABH τῇ ὑπὸ $\Delta E\Theta$, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , καὶ ἡ BH πρὸς τὴν $E\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΔE , οὕτως ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ BM παραλληλόγραμμον τῷ $E\Pi$ παραλληλογράμμῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν BN τῷ EP ὁμοίον ἐστὶ, τὸ δὲ BK τῷ $E\Xi$: τὰ τρία ἄρα τὰ MB , BK , BN τρισὶ τοῖς $E\Pi$, $E\Xi$, EP ὁμοιά ἐστίν. ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ MB , BK , BN τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστίν, τὰ δὲ τρία τὰ $E\Pi$, $E\Xi$, EP τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὁμοιά ἐστίν. τὰ $BHMA$, $E\Theta\Pi O$ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $BHMA$ στερεὸν τῷ $E\Theta\Pi O$ στερεῷ. τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ

τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. τὸ ΒΗΜΑ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΑ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, οὕτως ἢ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδὴπερ ἢ πυραμὶς ἔκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα ἡμισυ ὄν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος. καὶ ἢ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

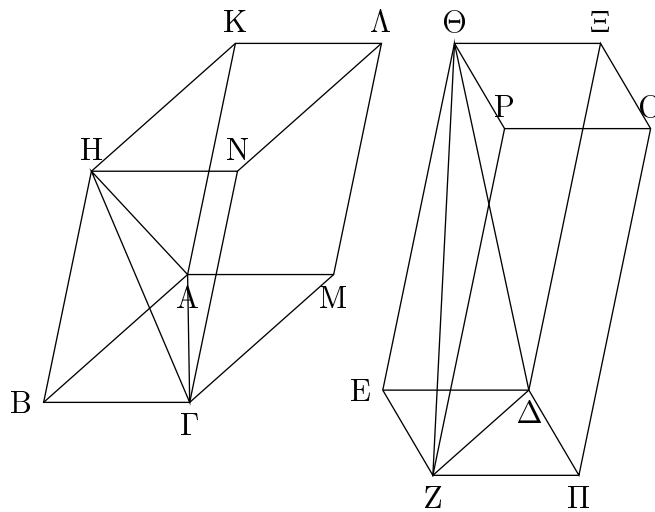
Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. διαιρηθειῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις ἔσται ὡς [ἢ] ἐν τῇ ἐτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν πρὸς τὴν ἐν τῇ ἐτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἐτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τουτέστιν αὐτὴ ἢ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. ἢ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: καὶ ἢ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἢ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

XII.9

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες τριγώνους βάσεις ἔχουσαι τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η, Θ σημεία: λέγω, ὅτι τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος.



Συμπεπληρώσω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ, ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗ ΜΛ στερεόν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον. καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει, τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ ἄρα πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ, ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονητέωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος: λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος, ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. ἀλλὰ τὸ [μὲν] τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτὸ ἐστὶ τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. ὦν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα: ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘ ΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. καὶ ἐστὶ τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς: ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ

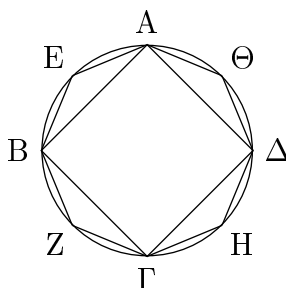
πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἔχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.10

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρω βάσιν τε τὴν αὐτὴν τὸν ΑΒΓΔ κύκλον καὶ ὕψος ἴσον: λέγω, ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος, τουτέστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίων ἐστίν.



Εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ: τὸ δὲ ΑΒΓΔ τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρω. τὸ δὲ ἀνιστάμενον πρίσμα μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κᾶν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισυ ἐστὶ τοῦ περιγεγραμμένου: καὶ ἐστὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρίσματα ἰσοῦψῆ: τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις: καὶ τὸ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισυ ἐστὶ τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου: καὶ ἐστὶν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου: τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοῦψές τῷ κυλίνδρω μείζον ἐστὶ τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. τεμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. ἀνεστάτω ἐφ' ἕκαστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρω: καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ εἰς τὰ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοῦψῆ τῷ κυλίνδρω, ἐκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίση ἐστὶ τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγώνων: καὶ ἐστὶ τὰ τοῦ κυλίνδρου

τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀνασταθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων: ὥστε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγῶνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ' ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγῶνων πρίσματα ἰσοῦψῆ τῶν κυλίνδρῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶντες καταλείβομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖ ΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῶν κυλίνδρῳ, μείζον ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῶν κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῶν κώνῳ: καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν [ἐστὶ] τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῶν κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒ ΓΔ κύκλον. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων: ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλάσιος.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου: ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κώνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ: τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῶν κώνῳ: ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδὴ περ, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγεγραμμένου τετραγώνου: καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγῶνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοῦψῆ τῶν κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου: πρὸς ἄλληλα γὰρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. ὥστε καὶ τὰ τρίτα: καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισυ ἐστὶ τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. καὶ ἐστὶ μείζων ἢ πυραμὶς ἢ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου: ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν. ἢ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῶν κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε, Ζ, Η, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγῶνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. καὶ ἀνεστάτωσαν ἐφ' ἑκάστου τῶν ΑΕΒ, ΒΖΓ, ΓΗΔ, ΔΘΑ τριγῶνων πυραμίδες τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῶν κώνῳ: καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγῶνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῶν κώνῳ καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶντες καταλείβομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ κώνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ, ΕΒ, ΒΖ, ΖΓ, ΓΗ, ΗΔ, ΔΘ, ΘΑ: λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῶν κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. ἀλλ' ἢ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓ ΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῶν κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΕΒΖΓ ΗΔΘ πολύγωνον,

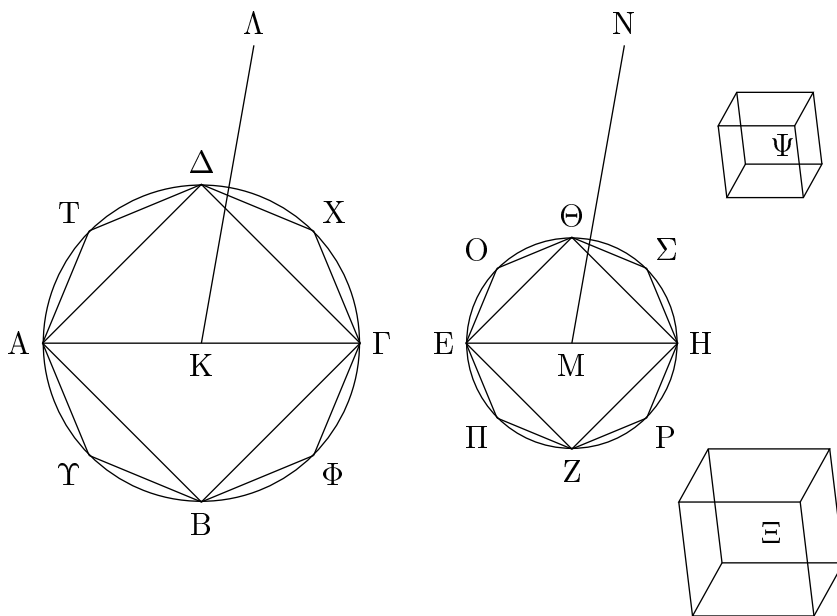
ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῶ κυλίνδρῳ: τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῶ κυλίνδρῳ, μείζον ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον: ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος: τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου: ὥστε ὁ κώνος τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κώνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῶ καὶ ὕψος ἴσον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.11

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κώνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κώνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν [εἰσὶν] οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, διαμέτροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ, ΕΗ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κώνος πρὸς τὸν ΕΝ κώνον.



Εἰ γὰρ μή, ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κώνος ἦτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μείζον. ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστὶ τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν: ὁ ΕΝ κώνος ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Ξ, Ψ στερεοῖς. ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ: τὸ ἄρα τετράγωνον μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖ ΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοῦψῆς τῶ κώνῳ: ἢ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοῦψῆ τῶ κώνῳ, ἢ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισυ ἐστὶ τῆς περιγραφείσης: πρὸς ἀλλήλας γὰρ εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις: ἐλάττων δὲ ὁ κώνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος. τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ,

HO , OE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ O , Π , P , Σ σημεία, καὶ ἐπεζεύχθησαν αἱ HO , OE , EP , PZ , ZP , PH , HS , $\Sigma\Theta$. ἕκαστον ἄρα τῶν HOE , EPZ , ZPH , $HS\Theta$ τριγώνων μείζον ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν HOE , EPZ , ZPH , $HS\Theta$ τριγώνων πυραμῖς ἰσοῦψῆς τῷ κώνῳ: καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας καὶ ἀνιστάντες ἐπὶ ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοῦψεῖς τῷ κώνῳ καὶ αἰ τοῦτο ποιοῦντες καταλείβομεν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν HOE , EPZ , ZPH , $HS\Theta$: λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμῖς, ἣς βᾶσις τὸ $HOEPZPHS$ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον τῷ $HOEPZPHS$ πολυγώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$, καὶ ἀνεστάτω ἐπ' αὐτοῦ πυραμῖς ἰσοῦψῆς τῷ AA κώνῳ. ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς AG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EH , οὕτως τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ πολύγωνον πρὸς τὸ $HOE PZPHS$ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AG πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς EH , οὕτως ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, καὶ ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ πολύγωνον πρὸς τὸ $HOEPZPHS$ πολύγωνον. ὡς δὲ ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ AA κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, ὡς δὲ τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ πολύγωνον πρὸς τὸ $HOEPZPHS$ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμῖς, ἣς βᾶσις μὲν τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἣς βᾶσις μὲν τὸ $HOEPZPHS$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον. καὶ ὡς ἄρα ὁ AA κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεόν, οὕτως ἡ πυραμῖς, ἣς βᾶσις μὲν τὸ $\Delta TAYB\Phi\Gamma X$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἣς βᾶσις μὲν τὸ $HOEPZPHS$ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ N σημεῖον: ἐναλλάξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ AA κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεόν πρὸς τὴν ἐν τῷ EN κώνῳ πυραμίδα. μείζων δὲ ὁ AA κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος: μείζων ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεόν τῆς ἐν τῷ EN κώνῳ πυραμίδος. ἀλλὰ καὶ ἔλασσον: ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ AA κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ EN κώνου στερεόν. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐστὶν ὡς ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ EN κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ AA κώνου στερεόν.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ AA κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ EN κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἔστω πρὸς μείζον τὸ Ξ : ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεόν πρὸς τὸν AA κῶνον. ἀλλ' ὡς τὸ Ξ στερεόν πρὸς τὸν AA κῶνον, οὕτως ὁ EN κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ AA κώνου στερεόν: καὶ ὡς ἄρα ὁ $EZH\Theta$ κύκλος πρὸς τὸν $AB\Gamma\Delta$ κύκλον, οὕτως ὁ EN κῶνος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ AA κώνου στερεόν: ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ AA κῶνος πρὸς μείζον τι τοῦ EN κώνου στερεόν. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως ὁ AA κῶνος πρὸς τὸν EN κῶνον.

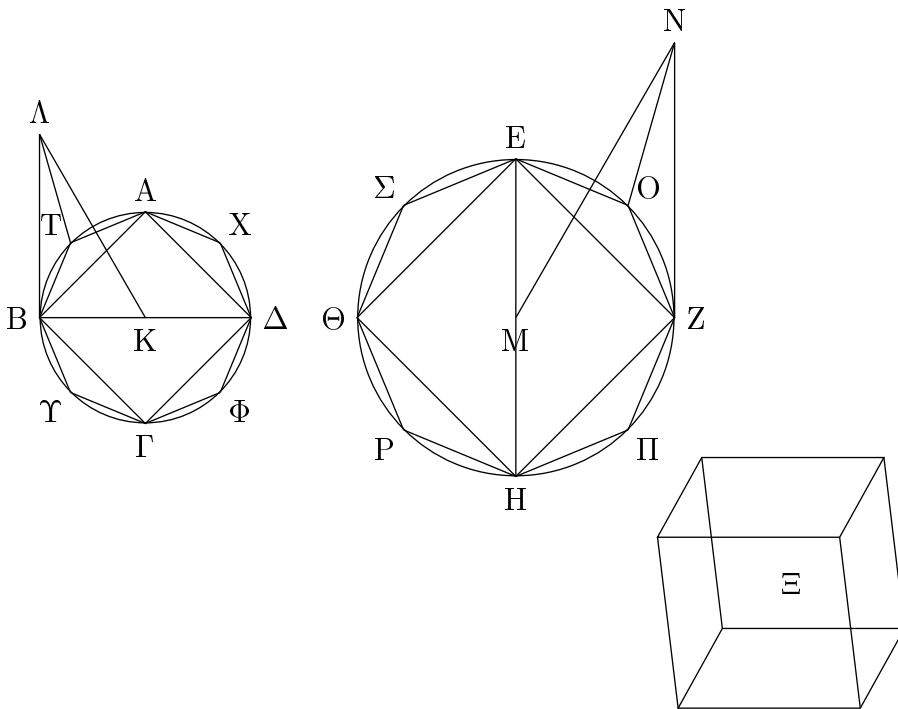
Ἄλλ' ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον: τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου. καὶ ὡς ἄρα ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος πρὸς τὸν $EZH\Theta$ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ' αὐτῶν ἰσοῦψεῖς [τοῖς κῶνοις] κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βᾶσεις: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.12

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων.

Ἐστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ $B\Delta$, $Z\Theta$, ἄξονες δὲ τῶν κῶνων καὶ κυλίνδρων οἱ $ΚΛ$, MN : λέγω, ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν [ἐστίν] ὁ $AB\Gamma\Delta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μὲν [ἐστίν] ὁ $EZH\Theta$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ N σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$.



Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος πρὸς τὸν $EZH\Theta N$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἢπερ ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $Z\Theta$, ἔξει ὁ $AB\Gamma\Delta\Lambda$ κῶνος ἢ πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ $EZH\Theta N$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζον. ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Ξ , καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν

$EZH\Theta$ κύκλον τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$: τὸ ἄρα $EZH\Theta$ τετράγωνον μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κῶνῳ: ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κῶνου. τεμήσθωσαν δὴ αἱ EZ , ZH , $H\Theta$, ΘE περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ O , Π , P , Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ EO , OZ , $Z\Pi$, ΠH , HP , $P\Theta$, $\Theta\Sigma$, ΣE . καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ τριγῶνων μείζον ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου. καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἕκαστου τῶν EOZ , $Z\Pi H$, $HP\Theta$, $\Theta\Sigma E$ τριγῶνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κῶνῳ: καὶ ἕκαστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστίν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κῶνου. τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα καὶ ἐπιζευγύνοντες εὐθεῖας καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἕκαστου τῶν τριγῶνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν

κορυφήν ἐχούσας τῷ κώνῳ καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα ἀποτμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ἣ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κώνος τοῦ Ξ στερεοῦ. λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ, ΟΖ, ΖΠ, ΠΗ, ΗΡ, ΡΘ, ΘΣ, ΣΕ: λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὁμοίον τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΑΤΒΥ ΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἐν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΖΟ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ, ΜΟ. καὶ ἐπεὶ ὁμοίος ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔΛ κώνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ: καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ, ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν: ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ, ΖΜΟ, ἐπειδήπερ, ὁ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν: ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΤΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ, ΟΜΝ: ὀρθαὶ γάρ: αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν: ὁμοίον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΚΒ, ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ, ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΤΚ, ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΤΚΒ, ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ, δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ. δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ. τῶν ΑΤΒ, ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ: ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΤΒ, ΝΟΖ τρίγωνα: ὥστε καὶ ὅμοια. καὶ πυραμὶς ἄρα, ἥς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὅμοια ἐστὶ πυραμίδι, ἥς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον: ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. ὁμοίως δὲ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α, Χ, Δ, Φ, Γ, Υ ἐπὶ τὸ Κ εὐθείας καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Σ, Θ, Ρ, Η, Π ἐπὶ τὸ Μ καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἐκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχούσας τοῖς κώνοις δείζομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἐκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔξει ἢπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τουτέστιν ἢπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἥς

βάσις τὸ $ΑΒΥΓΦΔΧ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Λ$ σημείον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$ σημείον: ὥστε καὶ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ $ΑΒΥΓΦΔΧ$, κορυφή δὲ τὸ $Λ$, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις [μὲν] τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$ σημείον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις [μὲν] ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Λ$ σημείον, πρὸς τὸ $Ξ$ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχων ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ἐστὶν ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Λ$, πρὸς τὸ $Ξ$ στερεόν, οὕτως ἢ πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν τὸ $ΑΒΥΓΦΔΧ$ [πολύγωνον], κορυφή δὲ τὸ $Λ$, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$: ἐναλλάξ ἄρα, ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Λ$, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν τὸ $ΑΒΥΓΦΔΧ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Λ$, οὕτως τὸ $Ξ$ [στερεόν] πρὸς τὴν πυραμίδα, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$. μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος: ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν. μείζων ἄρα καὶ τὸ $Ξ$ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $ΕΟΖΠΗΡΘΣ$ πολύγωνον, κορυφή δὲ τὸ $Ν$. ἀλλὰ καὶ ἔλαττον: ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις ὁ $ΑΒΓΔ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Λ$ [σημείον], πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κῶνου στερεόν, οὗ βάσις μὲν ὁ $ΕΖΗΘ$ κύκλος, κορυφή δὲ τὸ $Ν$ σημείον, τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΛ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ὁ $ΑΒΓΔΛ$ κῶνος πρὸς μείζόν τι τοῦ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζων τὸ $Ξ$. ἀνάπαλιν ἄρα τὸ $Ξ$ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΛ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$. ὡς δὲ τὸ $Ξ$ στερεὸν πρὸς τὸν $ΑΒΓΔΛ$ κῶνον, οὕτως ὁ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΛ$ κῶνου στερεόν. καὶ ὁ $ΕΖΗΘΝ$ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ $ΑΒΓΔΛ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΖΘ$ πρὸς τὴν $ΒΔ$: ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ὁ $ΑΒΓΔΛ$ κῶνος πρὸς μείζόν τι τοῦ $ΕΖΗΘΝ$ κῶνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$. ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον. ὁ $ΑΒΓΔΛ$ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν $ΕΖΗΘΝ$ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$.

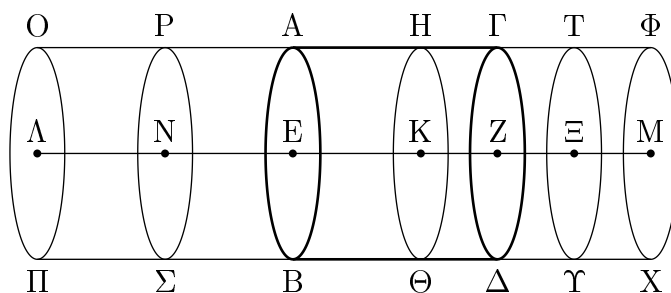
Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον: τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κῶνου ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῶ κῶνω καὶ ἰσοϋφῆς αὐτῷ. καὶ ὁ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἥπερ ἢ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΖΘ$.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.13

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῆ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξωνα.

Κύλινδρος γὰρ ὁ $ΑΔ$ ἐπιπέδῳ τῷ $ΗΘ$ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς $ΑΒ$, $ΓΔ$, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἄξωνι τὸ $ΗΘ$ ἐπίπεδον κατὰ τὸ $Κ$ σημείον: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ $ΒΗ$ κύλινδρος πρὸς τὸν $ΗΔ$ κύλινδρον, οὕτως ὁ $ΕΚ$ ἄξων πρὸς τὸν $ΚΖ$ ἄξωνα.

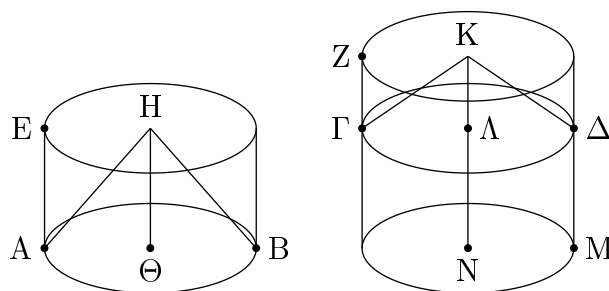


Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἐκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ ΕΚ ἄξωνι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ, ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ, ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ, ΦΧ κύκλοι. καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν, Ξ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ, ΓΔ καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ, ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν, Ξ κέντρα. καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξωνες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, οἱ ἄρα ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσοι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις: ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ, ΝΕ, ΕΚ ἄξωνες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ, ΡΒ, ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει, ὅσαπλασίων ἄρα ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξωνι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ, εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ, ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ, ΗΔ, εἴληπται ἰσάκεις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου ὅ τε ΑΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξωνα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.14

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ, ΓΔ κύκλων κύλινδροι οἱ ΕΒ, ΖΔ: λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξωνα.

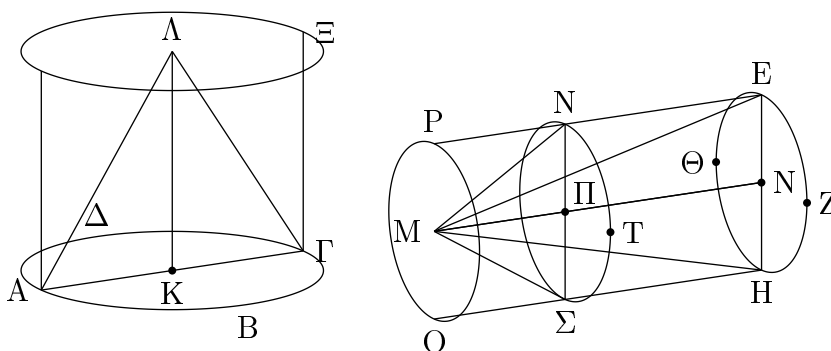


Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξωνι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξωνα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. ἴσαι δὲ εἰσὶν αἱ βάσεις ἀλλήλαις: ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ, ΓΜ κύλινδροι. καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξωνα. ἴσος δὲ ἐστὶν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξωνι: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξωνα. ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον. καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξωνα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.15

Τῶν ἴσων κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν: καὶ ὧν κῶνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ κύκλοι, διαμέτροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΕΗ, ἄξωνες δὲ οἱ ΚΛ, ΜΝ, οἷτινες καὶ ὕψη εἰσὶ τῶν κῶνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ, ΕΟ κύλινδροι. λέγω, ὅτι τῶν ΑΞ, ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βᾶσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος.



Τὸ γὰρ ΑΚ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἴσων ἐστὶν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον ἴσων. ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις: ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βᾶσις τῇ ΕΖΗΘ

βάσει. ὥστε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΚΛ$ ὕψος. ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ AK ὕψος τῷ MN ἴσον, ἀλλ' ἔστω μείζον τὸ MN , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ MN ὕψους τῷ $ΚΛ$ ἴσον τὸ $ΠΝ$, καὶ διὰ τοῦ Π σημείου τεμηθῶ ὁ EO κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ $T\Upsilon\Sigma$ παραλλήλῳ τοῖς τῶν $EZH\Theta$, PO κύκλων ἐπιπέδοις, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ NI κύλινδρος νενοήσθω ὁ ES . καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ $AΞ$ κύλινδρος τῷ EO κυλίνδρῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον, οὕτως ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον. ἀλλ' ὡς μὲν ὁ $AΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον, οὕτως ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$: ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ $AΞ$, ES κύλινδροι: ὡς δὲ ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν ES , οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος: ὁ γὰρ EO κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις. ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἴσον δὲ τὸ $ΠΝ$ ὕψος τῷ $ΚΛ$ ὕψει: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΚΛ$ ὕψος. τῶν ἄρα $AΞ$, EO κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν $AΞ$, EO κυλίνδρων ἀντιπεπονηθέντων αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, καὶ ἔστω ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΚΛ$ ὕψος: λέγω, ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ $AΞ$ κύλινδρος τῷ EO κυλίνδρῳ.

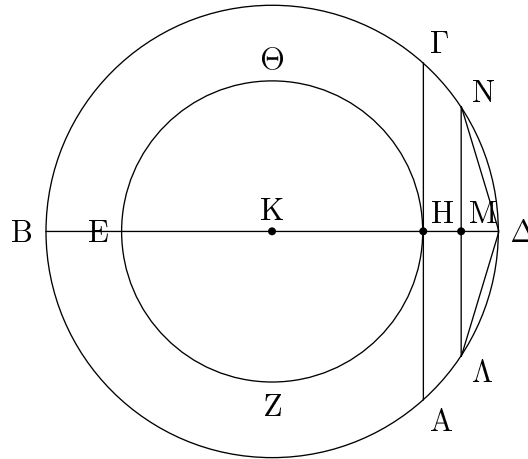
Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΚΛ$ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ $ΚΛ$ ὕψος τῷ $ΠΝ$ ὕψει, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ ὕψος. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $AB\Gamma\Delta$ βάσις πρὸς τὴν $EZH\Theta$ βάσιν, οὕτως ὁ $AΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον: ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν: ὡς δὲ τὸ MN ὕψος πρὸς τὸ $ΠΝ$ [ὕψος], οὕτως ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον: ἔστιν ἄρα ὡς ὁ $AΞ$ κύλινδρος πρὸς τὸν ES κύλινδρον, οὕτως ὁ EO κύλινδρος πρὸς τὸν ES . ἴσος ἄρα ὁ $AΞ$ κύλινδρος τῷ EO κυλίνδρῳ. ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κῶνων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.16

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ φαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου.

Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι

οἱ $AB\Gamma\Delta$, $EZH\Theta$ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ K : δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν $AB\Gamma\Delta$ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ φαῦον τοῦ $EZH\Theta$ κύκλου.

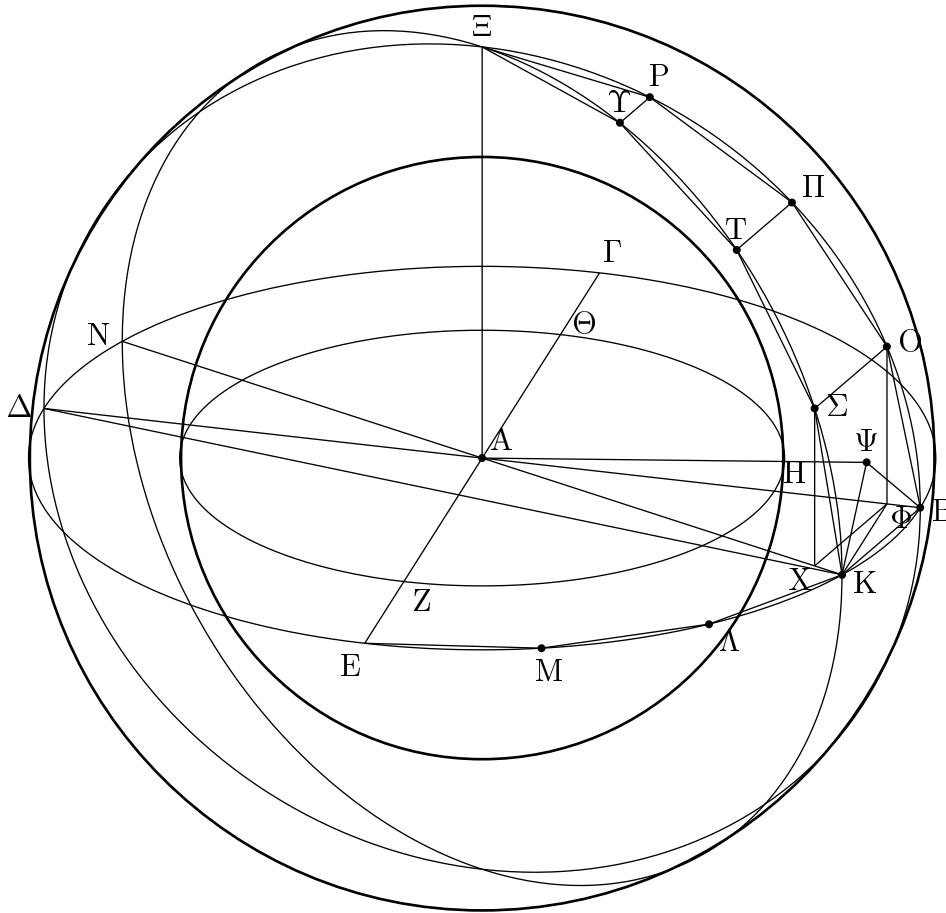


Ἦχθω γὰρ διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῆς ΒΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ: ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα καὶ τοῦτο αἰεὶ ποιοῦντες καταλείψομεν περιφέρειαν ἐλάσσονα τῆς ΑΔ. λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ, ΔΝ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῆς ΔΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΝ τῆς ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἡ ΑΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου: πολλῶ ἄρα αἱ ΛΔ, ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. ἐὰν δὴ τῆς ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

XII.17

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α: δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.



Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου: ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδὴ περ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα: ὥστε καὶ καθ' οἷας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δὲ αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδὴ περ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων [εὐθειῶν]. ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διαμέτροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ, ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ, ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ αἱ ΒΚ, ΚΛ, ΛΜ, ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπιφανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΑΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ, ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω: ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μέγιστους κύκλους. ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ, ΚΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΑ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα

ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞA ἐπίπεδά ἐστὶν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον: ὥστε καὶ τὰ $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἡμικύκλια ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ $B\Xi\Delta$, $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἡμικύκλια: ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν $B\Delta$, KN : ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ BE , $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρτημόρια ἀλλήλοις. ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ BE τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς $B\Xi$, $K\Xi$ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς BK , KL , LM , ME εὐθείαις. ἐγγεγράφωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ BO , $O\Pi$, ΠP , $P\Xi$, $K\Sigma$, ΣT , TY , $Y\Xi$, καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ SO , $T\Pi$, $Y P$, καὶ ἀπὸ τῶν O , Σ ἐπὶ τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν: πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς $B\Delta$, KN , ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἐπίπεδα ὀρθὰ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον. πιπτέωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ $O\Phi$, ΣX , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $X\Phi$. καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς $B\Xi\Delta$, $K\Xi N$ ἴσαι ἀπειλημμένοι εἰσὶν αἱ BO , $K\Sigma$, καὶ κάθετοι ἡγμένοι εἰσὶν αἱ $O\Phi$, ΣX , ἴση [ἄρα] ἐστὶν ἡ μὲν $O\Phi$ τῇ ΣX , ἡ δὲ $B\Phi$ τῇ KX . ἐστὶ δὲ καὶ ὅλη ἡ BA ὅλη τῇ KA ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦA λοιπὴ τῇ $X A$ ἐστὶν ἴση: ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ $B\Phi$ πρὸς τὴν ΦA , οὕτως ἡ KX πρὸς τὴν $X A$: παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ KB . καὶ ἐπεὶ ἐκάτερα τῶν $O\Phi$, ΣX ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $B\Gamma\Delta E$ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $O\Phi$ τῇ ΣX . ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση: καὶ αἱ $X\Phi$, SO ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστὶν ἡ $X\Phi$ τῇ SO , ἀλλὰ ἡ $X\Phi$ τῇ KB ἐστὶ παράλληλος, καὶ ἡ SO ἄρα τῇ KB ἐστὶ παράλληλος. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ BO , $K\Sigma$: τὸ $KBO\Sigma$ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ, ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ' ἐκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐκάτερον τῶν $SO\Pi T$, $T\Pi P Y$ τετραπλεύρων ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ $Y P \Xi$ τρίγωνον ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν O , Σ , Π , T , P , Y σημείων ἐπὶ τὸ A ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν πολυέδρον μεταξὺ τῶν $B\Xi$, $K\Xi$ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ $KBO\Sigma$, $SO\Pi T$, $T\Pi P Y$ τετράπλευρα καὶ τὸ $Y P \Xi$ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον. ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἐκάστης τῶν KL , LM , ME πλευρῶν καθάπερ ἐπὶ τῆς BK τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, συσταθήσεται τι σχῆμα πολυέδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν πυραμίσι περιεχόμενον, ὧν βάσεις [μὲν] τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ $Y P \Xi$ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον.

Λέγω, ὅτι τὸ εἰρημένον πολυέδρον οὐκ ἐφάπεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ' ἧς ἐστὶν ὁ $ZH\Theta$ κύκλος.

Ἦχθω ἀπὸ τοῦ A σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ $KBO\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ $A\Psi$ καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχωσαν αἱ ΨB , ΨK . καὶ ἐπεὶ ἡ $A\Psi$ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ $KBO\Sigma$ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθὴ ἐστὶν. ἡ $A\Psi$ ἄρα ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς ἐκατέραν τῶν $B\Psi$, ΨK . καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AB τῇ AK , ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τῷ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς AB ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨB : ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ : τῷ δὲ ἀπὸ τῆς AK ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨK . τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨB ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $A\Psi$, ΨK . κοινὸν ἀφηρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς $A\Psi$: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $B\Psi$ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨK ἴσον ἐστὶν: ἴση ἄρα ἡ $B\Psi$ τῇ ΨK . ὁμοίως δὴ δείζομεν, ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ O , Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἐκατέρα τῶν $B\Psi$, ΨK . ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἐνὶ τῶν ΨB , ΨK γραφόμενος κύκλος ἤξει καὶ διὰ τῶν O , Σ , καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ $KBO\Sigma$ τετράπλευρον.

Καί ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ KB τῆς $X\Phi$, ἴση δὲ ἡ $X\Phi$ τῇ ΣO , μείζων ἄρα ἡ KB τῆς ΣO . ἴση δὲ ἡ KB ἑκατέρα τῶν $K\Sigma$, BO : καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν $K\Sigma$, BO τῆς ΣO μείζων ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ $KBO\Sigma$, καὶ ἴσαι αἱ KB , BO , $K\Sigma$, καὶ ἐλάττων ἡ $O\Sigma$, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ $B\Psi$, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς KB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Psi$ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἤχθω ἀπὸ τοῦ K ἐπὶ τὴν $B\Phi$ κάθετος ἡ $K\Omega$. καὶ ἐπεὶ ἡ $B\Delta$ τῆς $\Delta\Omega$ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς τὴν $\Delta\Omega$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔB , $B\Omega$ πρὸς τὸ ὑπὸ [τῶν] $\Delta\Omega$, ΩB , ἀναγραφομένου ἀπὸ τῆς $B\Omega$ τετραγώνου καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς $\Omega\Delta$ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὑπὸ ΔB , $B\Omega$ ἄρα τοῦ ὑπὸ $\Delta\Omega$, ΩB ἔλαττόν ἐστὶν ἢ διπλάσιον. καὶ ἐστὶ τῆς $K\Delta$ ἐπιζευγνυμένης τὸ μὲν ὑπὸ ΔB , $B\Omega$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BK , τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $\Delta\Omega$, ΩB ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $K\Omega$: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς KB τοῦ ἀπὸ τῆς $K\Omega$ ἔλασσόν ἐστὶν ἢ διπλάσιον. ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς KB τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Psi$ μείζον ἐστὶν ἢ διπλάσιον: μείζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς $K\Omega$ τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Psi$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ BA τῇ KA , ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τῷ ἀπὸ τῆς AK . καὶ ἐστὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς BA ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $B\Psi$, ΨA , τῷ δὲ ἀπὸ τῆς KA ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν $K\Omega$, ΩA : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $B\Psi$, ΨA ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν $K\Omega$, ΩA , ὧν τὸ ἀπὸ τῆς $K\Omega$ μείζον τοῦ ἀπὸ τῆς $B\Psi$: λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΩA ἔλασσόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΨA . μείζων ἄρα ἡ $A\Psi$ τῆς ΩA : πολλῶ ἄρα ἡ $A\Psi$ μείζων ἐστὶ τῆς AH . καὶ ἐστὶν ἡ μὲν $A\Psi$ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ AH ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν: ὥστε τὸ πολυέδρον οὐ φαύσει τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολυέδρον ἐγγέγραπται μὴ φαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν: ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

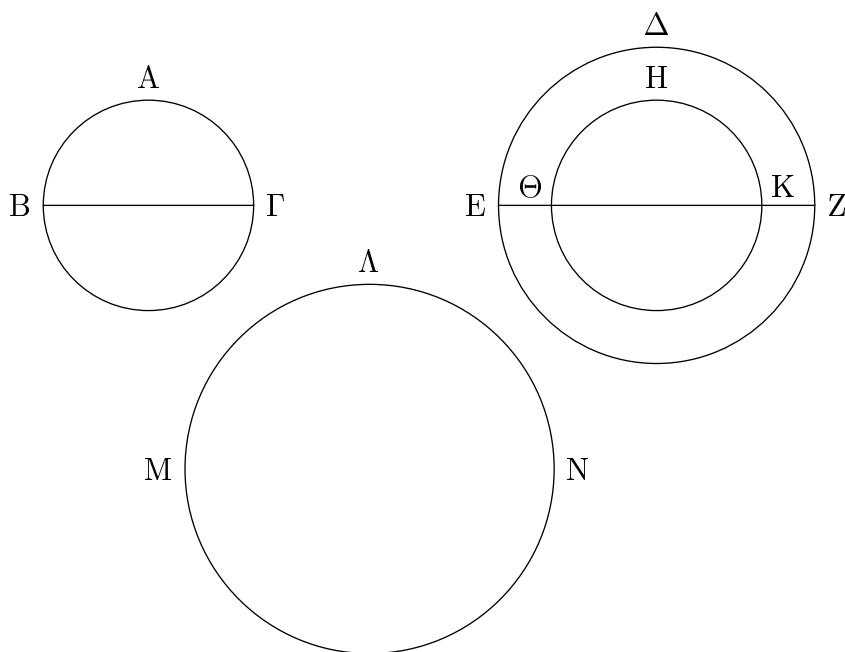
Corollary

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ $B\Gamma\Delta E$ σφαίρα στερεῶ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον ἐγγραφῆ, τὸ ἐν τῇ $B\Gamma\Delta E$ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ τῆς $B\Gamma\Delta E$ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον. διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοιοπληθεῖς καὶ ὁμοιοταγεῖς πυραμίδας ἔσσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν: ἡ ἄρα πυραμὶς, ἥς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ $KBO\Sigma$ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ A σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἥπερ ἡ ὁμολόγος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμολόγον πλευράν, τουτέστιν ἥπερ ἡ AB ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ κέντρον τὸ A πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. ὁμοίως καὶ ἐκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα πρὸς ἐκάστην ὁμοιοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρα τριπλασίονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. καὶ ὡς ἐν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἐν τῶν ἐπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἐπόμενα: ὥστε ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ κέντρον τὸ A σφαίρα στερεὸν πολυέδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ [σφαίρα] στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔξει, ἥπερ ἡ AB πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τουτέστιν ἥπερ ἡ $B\Delta$ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XII.18

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἰ $AB\Gamma$, ΔEZ , διαμέτροι δὲ αὐτῶν αἰ $B\Gamma$, EZ : λέγω, ὅτι ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .



Εἰ γὰρ μὴ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ , ἔξει ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἢ πρὸς μείζονα ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν $H\Theta K$, καὶ νενοήσθω ἡ ΔEZ τῆ $H\Theta K$ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔEZ στερεὸν πολυέδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας τῆς $H\Theta K$ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τῶ ἐν τῆ ΔEZ σφαίρα στερεῶ πολυέδρω ὅμοιον στερεὸν πολυέδρον: τὸ ἄρα ἐν τῆ $AB\Gamma$ στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῆ ΔEZ στερεὸν πολυέδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἔχει δὲ καὶ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ : ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν $H\Theta K$ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῆ $AB\Gamma$ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον πρὸς τὸ ἐν τῆ ΔEZ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον: ἐναλλάξ [ἄρα] ὡς ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῆ πολυέδρον, οὕτως ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῆ ΔEZ σφαίρα στερεὸν πολυέδρον. μείζων δὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῆ πολυέδρου: μείζων ἄρα καὶ ἡ $H\Theta K$ σφαῖρα τοῦ ἐν τῆ ΔEZ σφαίρα πολυέδρου. ἀλλὰ καὶ ἐλάττων: ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $B\Gamma$ διάμετρος πρὸς τὴν EZ . ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔEZ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$.

Λέγω δὴ, ὅτι οὐδὲ ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ .

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛMN : ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛMN σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢ περ ἢ EZ διάμετρος πρὸς τὴν $B\Gamma$ διάμετρον. ὡς δὲ ἡ ΛMN σφαῖρα πρὸς τὴν $AB\Gamma$ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔEZ σφαῖρα

πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας, ἐπειδὴπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛMN τῆς ΔEZ , ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη. καὶ ἡ ΔEZ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς $AB\Gamma$ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ EZ πρὸς τὴν $B\Gamma$: ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη. οὐκ ἄρα ἡ $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔEZ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ . ἐδείχθη δέ, ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα. ἡ ἄρα $AB\Gamma$ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔEZ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει ἢπερ ἡ $B\Gamma$ πρὸς τὴν EZ : ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

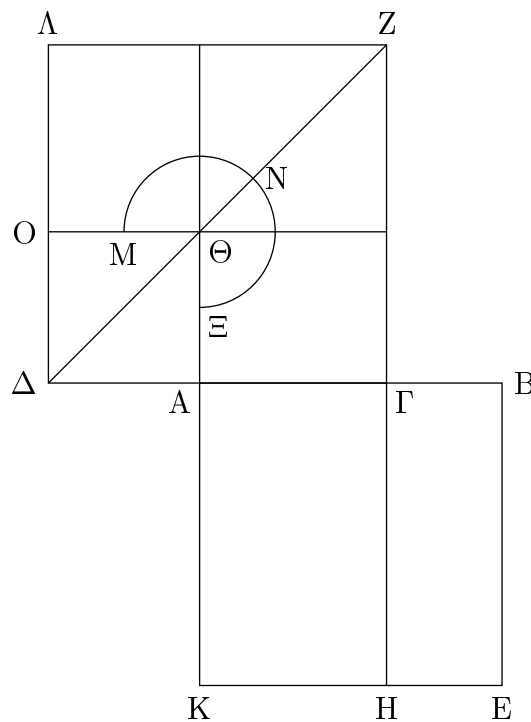
Book XIII

Propositions

XIII.1

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG , καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆ GA εὐθεῖα ἡ ΔA , καὶ κείσθω τῆς AB ἡμίσεια ἡ $\Delta\Delta$: λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA .



Ἀναγεγράφθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν AB , $\Delta\Gamma$ τετράγωνα τὰ AE , ΔZ , καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ZG ἐπὶ τὸ H . καὶ ἐπεὶ ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν

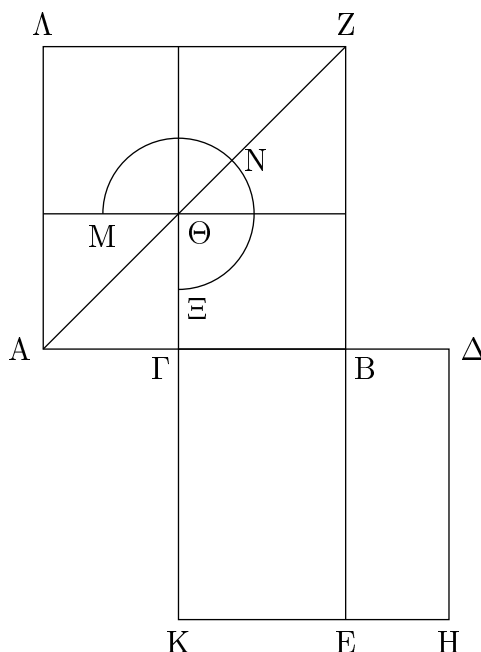
ὕπὸ τῶν $AB\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τὸ $Z\Theta$: ἴσον ἄρα τὸ ΓE τῷ $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$, ἴση δὲ ἡ μὲν BA τῇ KA , ἡ δὲ $A\Delta$ τῇ $A\Theta$, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ KA τῆς $A\Theta$. ὡς δὲ ἡ KA πρὸς τὴν $A\Theta$, οὕτως τὸ ΓK πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$: διπλάσιον ἄρα τὸ ΓK τοῦ $\Gamma\Theta$. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ $\Lambda\Theta$, $\Theta\Gamma$ διπλάσια τοῦ $\Gamma\Theta$. ἴσον ἄρα τὸ $K\Gamma$ τοῖς $\Lambda\Theta$, $\Theta\Gamma$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓE τῷ ΘZ ἴσον: ὅλον ἄρα τὸ AE τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $MN\Xi$ γνῶμονι. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$, τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, τουτέστι τὸ AE τοῦ $\Delta\Theta$. ἴσον δὲ τὸ AE τῷ $MN\Xi$ γνῶμονι: καὶ ὁ $MN\Xi$ ἄρα γνῶμων τετραπλάσιός ἐστὶ τοῦ AO : ὅλον ἄρα τὸ ΔZ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ AO . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔZ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, τὸ δὲ AO τὸ ἀπὸ τῆς ΔA : τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔA .

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.2

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ AB τμήματος ἑαυτῆς τοῦ $A\Gamma$ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ $A\Gamma$ διπλῆ ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$: λέγω, ὅτι τῆς $\Gamma\Delta$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓB .



Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ' ἑκατέρας τῶν AB , $\Gamma\Delta$ τετράγωνα τὰ AZ , ΓH , καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ AZ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ BE . καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς $A\Gamma$, πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ AZ τοῦ $A\Theta$. τετραπλάσιος ἄρα ὁ $MN\Xi$ γνῶμων τοῦ $A\Theta$. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῆς ΓA , τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ $\Delta\Gamma$ τοῦ

ἀπὸ ΓΑ, τουτέστι τὸ ΓΗ τοῦ ΑΘ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνῶμων τετραπλάσιος τοῦ ΑΘ: ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνῶμων τῷ ΓΗ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ [διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ], διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ, ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια: ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ, ΘΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνῶμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος: καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ τῷ ΒΗ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ: ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ: τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται, τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

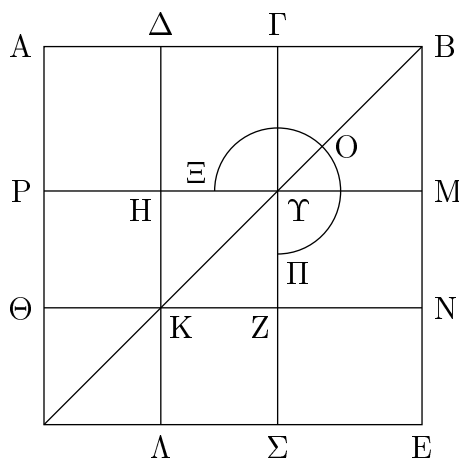
Ἵτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μὴ, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΑΓ. τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ: πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ, ΑΓ: ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασία ἐστὶ τῆς ΑΓ. ὁμοίως δὲ δεῖξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλασίῳ ἐστὶ τῆς ΑΓ: πολλῶ γὰρ [μείζων] τὸ ἄτοπον.

Ἦ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΓ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.3

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ ἔλασσον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμίσειας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. Εὐθεῖα γὰρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετηρήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ ΑΓ, καὶ τετηρήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ: λέγω, ὅτι πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

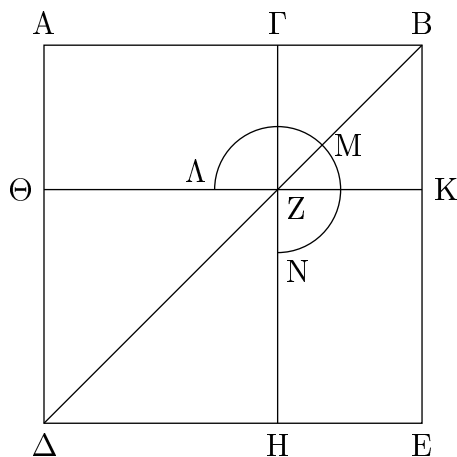


Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ AE , καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AG τῆς $\Delta\Gamma$, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AG τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$, τουτέστι τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH . καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG , καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ τὸ ΓE , τὸ ἄρα ΓE ἴσον ἐστὶ τῷ $P\Sigma$. τετραπλάσιον δὲ τὸ $P\Sigma$ τοῦ ZH : τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓE τοῦ ZH . πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς $\Delta\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘK τῆς KZ . ὥστε καὶ τὸ HZ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ $\Theta\Lambda$ τετραγώνῳ. ἴση ἄρα ἡ HK τῆς $K\Lambda$, τουτέστιν ἡ MN τῆς NE : ὥστε καὶ τὸ MZ τῷ ZE ἐστὶν ἴσον. ἀλλὰ τὸ MZ τῷ ΓH ἐστὶν ἴσον: καὶ τὸ ΓH ἄρα τῷ ZE ἐστὶν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓN : ὁ ἄρα $\Xi O\Pi$ γνῶμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓE . ἀλλὰ τὸ ΓE τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ HZ : καὶ ὁ $\Xi O\Pi$ ἄρα γνῶμων τετραπλάσιός ἐστὶ τοῦ ZH τετραγώνου. ὁ $\Xi O\Pi$ ἄρα γνῶμων καὶ τὸ ZH τετράγωνον πενταπλάσιός ἐστὶ τοῦ ZH . ἀλλὰ ὁ $\Xi O\Pi$ γνῶμων καὶ τὸ ZH τετράγωνόν ἐστὶ τὸ ΔN . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔN τὸ ἀπὸ τῆς ΔB , τὸ δὲ HZ τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔB πενταπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.4

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάσσονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου.

Ἐστω εὐθεῖα ἡ AB , καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ , καὶ ἔστω μείζον τμήμα τὸ AG : λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν AB , $B\Gamma$ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓA .



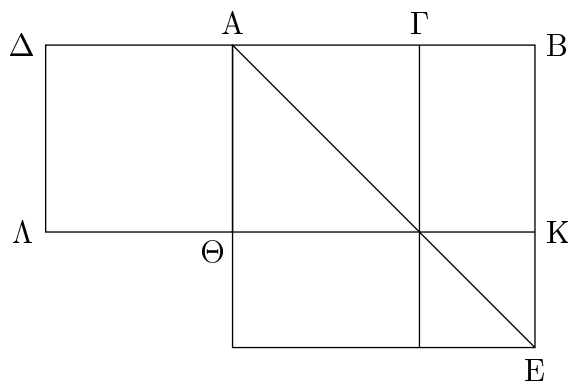
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον τὸ $A\Delta EB$, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ οὖν ἡ AB ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ , καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ AG , τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AG . καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$ τὸ AK , τὸ δὲ ἀπὸ τῆς AG τὸ ΘH : ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ AK τῷ ΘH . καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ AZ τῷ ZE , κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓK : ὅλον ἄρα τὸ AK ὅλῳ τῷ ΓE ἐστὶν ἴσον: τὰ ἄρα AK , ΓE τοῦ AK ἐστὶ διπλάσια. ἀλλὰ τὰ AK , ΓE ὁ ΛMN γνῶμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓK τετράγωνον: ὁ ἄρα ΛMN γνῶμων καὶ τὸ ΓK τετράγωνον διπλάσιά ἐστὶ τοῦ AK . ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ AK τῷ ΘH ἐδείχθη ἴσον: ὁ ἄρα ΛMN γνῶμων καὶ [τὸ ΓK τετράγωνον διπλάσιά ἐστὶ τοῦ ΘH : ὥστε ὁ ΛMN γνῶμων καὶ] τὰ ΓK , ΘH τετράγωνα τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ΘH τετραγώνου. καὶ ἐστὶν ὁ [μὲν] ΛMN γνῶμων καὶ τὰ ΓK , ΘH

τετράγωνα όλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον. τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ τετράγωνα τριπλάσια ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.5

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, καὶ προστεθῆ αὐτῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι, ἢ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἢ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση [κείσθω] ἢ ΑΔ. λέγω, ὅτι ἢ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἢ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἢ ΑΒ.



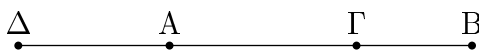
Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. ἐπεὶ ἢ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΓ. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ: ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΘΓ. ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΕ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ: καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ [κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΒ]. ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλω τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ, ΔΑ: ἴση γὰρ ἢ ΑΔ τῇ ΔΛ: τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. ἐστὶν ἄρα ὡς ἢ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. μείζων δὲ ἢ ΔΒ τῆς ΒΑ: μείζων ἄρα καὶ ἢ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἢ ΑΒ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.6

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῆ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἀλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐστω εὐθεῖα ῥητὴ ἢ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζον τμήμα ἢ ΑΓ: λέγω, ὅτι ἐκάτερα τῶν ΑΓ, ΓΒ ἀλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἀποτομή.



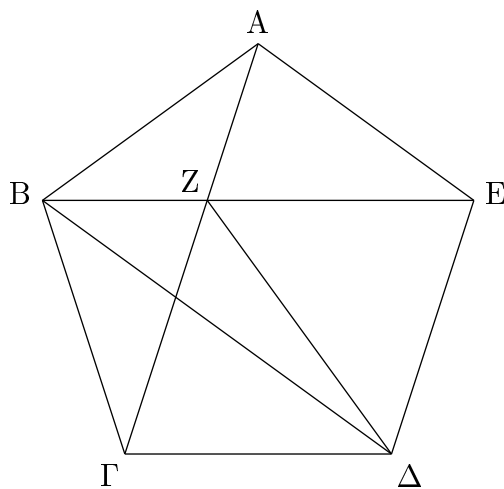
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ, καὶ κείσθω τῆς ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΔ. ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόσκειται ἡ ΑΔ ἡμίσεια οὕσα τῆς ΑΒ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ τοῦ ἀπὸ ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστιν. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν: σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΔ τῷ ἀπὸ ΔΑ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ ΔΑ: ῥητὴ γὰρ [ἐστίν] ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὕσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὕσης: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ: ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ: αἱ ΓΔ, ΔΑ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΒ, ΒΓ τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον ἐστίν. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην: ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΓΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ ἀποτομὴ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομὴ: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.7

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἦτοι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἐξῆς ἴσαι ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α, Β, Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν: λέγω, ὅτι ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.



Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΕ, ΖΔ. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ, ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ, ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκάτερα ἑκάτερα, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστὶν ἴση, βάσεις

ἄρα ἡ $ΑΓ$ βάσει τῆ $ΒΕ$ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ $ΑΒΓ$ τρίγωνον τῶ $ΑΒΕ$ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἢ μὲν ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῆ ὑπὸ $ΒΕΑ$, ἢ δὲ ὑπὸ $ΑΒΕ$ τῆ ὑπὸ $ΓΑΒ$: ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ $ΑΖ$ πλευρᾶ τῆ $ΒΖ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ $ΑΓ$ ὅλη τῆ $ΒΕ$ ἴση: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $ΖΓ$ λοιπῆ τῆ $ΖΕ$ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΓΔ$ τῆ $ΔΕ$ ἴση. δύο δὴ αἱ $ΖΓ$, $ΓΔ$ δυοὶ ταῖς $ΖΕ$, $ΕΔ$ ἴσαι εἰσὶν: καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ $ΖΔ$: γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΖΓΔ$ γωνία τῆ ὑπὸ $ΖΕΔ$ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΓΑ$ τῆ ὑπὸ $ΑΕΒ$ ἴση: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ὅλη τῆ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ $ΒΓΔ$ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Β$ γωνίαις: καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Β$ γωνίαις ἴση ἐστίν.

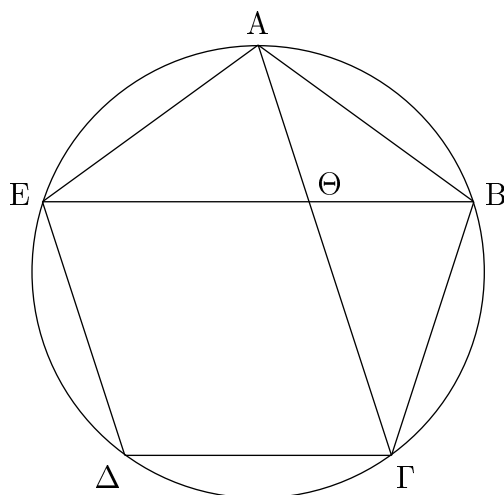
ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Β$, $Γ$ γωνίαις: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἐξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$, $Δ$ σημείοις: λέγω, ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον.

Ἐπεξεύχθω γὰρ ἡ $ΒΔ$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $ΒΑ$, $ΑΕ$ δυοὶ ταῖς $ΒΓ$, $ΓΔ$ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ $ΒΕ$ βάσει τῆ $ΒΔ$ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ $ΑΒΕ$ τρίγωνον τῶ $ΒΓΔ$ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὅφ' ἄς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΑΕΒ$ γωνία τῆ ὑπὸ $ΓΔΒ$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ $ΒΕΔ$ γωνία τῆ ὑπὸ $ΒΔΕ$ ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ $ΒΕ$ πλευρᾶ τῆ $ΒΔ$ ἐστὶν ἴση. καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ γωνία ὅλη τῆ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $ΓΔΕ$ ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$ γωνίαις ὑπόκειται ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΕΔ$ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$ ἴση ἐστίν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΑΒΓ$ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς $Α$, $Γ$, $Δ$ γωνίαις. ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΑΒΓΔΕ$ πεντάγωνον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.8

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλευροῦ καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῆ τοῦ πενταγώνου πλευρᾶ.



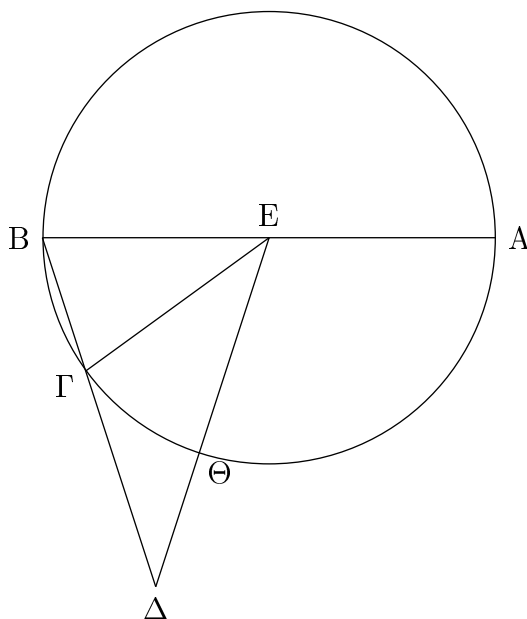
Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλευροῦ καὶ ἰσογωνίου τοῦ $ΑΒΓ ΔΕ$ δύο γωνίας τὰς κατὰ τὸ ἐξῆς τὰς πρὸς τοῖς $Α$, $Β$ ὑποτείνετωσαν εὐθεῖαι αἱ $ΑΓ$, $ΒΕ$ τέμνουσαι ἀλλήλας κατὰ

τὸ Θ σημείον: λέγω, ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημείον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ, ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶ καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἧς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ: διπλῇ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῇ, ἐπειδὴ περὶ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΔΓ περιφέρειᾶς τῆς ΓΒ ἐστὶ διπλῇ: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ: ὥστε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τουτέστι τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ: ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ: μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ. ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μείζον τμήμα τὸ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. ὁμοίως δὲ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ: ὅπερ ἔδει δείξαι.

XIII.9

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν, ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ.



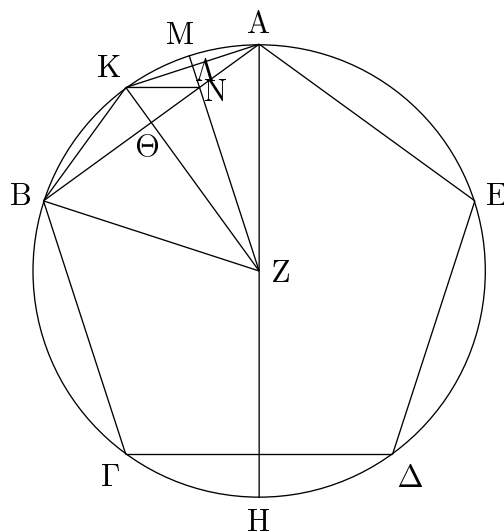
Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓ$, καὶ τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ $ΒΓ$, ἑξαγώνου δὲ ἡ $ΓΔ$, καὶ ἔστωσαν ἐπ' εὐθείας: λέγω, ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ $ΒΔ$ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ $ΓΔ$.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ $Ε$ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΒ$, $ΕΓ$, $ΕΔ$, καὶ διήχθω ἡ $ΒΕ$ ἐπὶ τὸ $Α$. ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρὰ ἐστὶν ἡ $ΒΓ$, πενταπλασίων ἄρα ἡ $ΑΓΒ$ περιφέρεια τῆς $ΒΓ$ περιφέρειας: τετραπλασίων ἄρα ἡ $ΑΓ$ περιφέρεια τῆς $ΓΒ$. ὡς δὲ ἡ $ΑΓ$ περιφέρεια πρὸς τὴν $ΓΒ$, οὕτως ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ $ΓΕΒ$: τετραπλασίων ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΓΕΒ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἡ ὑπὸ $ΕΒΓ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$, ἡ ἄρα ὑπὸ $ΑΕΓ$ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΕΓ$ εὐθεῖα τῇ $ΓΔ$: ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ τοῦ εἰς τὸν $ΑΒΓ$ κύκλον [ἐγγραφομένου]: ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΕΔ$ γωνία τῇ ὑπὸ $ΓΔΕ$ γωνία: διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΕΓΒ$ γωνία τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ $ΕΓΒ$ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$: τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$ τῆς ὑπὸ $ΕΔΓ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ $ΒΕΓ$ τετραπλασία ἡ ὑπὸ $ΑΕΓ$: ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ $ΕΔΓ$ τῇ ὑπὸ $ΒΕΓ$. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε $ΒΕΓ$ καὶ τοῦ $ΒΕΔ$, ἡ ὑπὸ $ΕΒΔ$ γωνία: καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ $ΒΕΔ$ τῇ ὑπὸ $ΕΓΒ$ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $ΕΒΔ$ τρίγωνον τῷ $ΕΒΓ$ τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς τὴν $ΒΕ$, οὕτως ἡ $ΕΒ$ πρὸς τὴν $ΒΓ$. ἴση δὲ ἡ $ΕΒ$ τῇ $ΓΔ$. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $ΒΔ$ πρὸς τὴν $ΔΓ$, οὕτως ἡ $ΔΓ$ πρὸς τὴν $ΓΒ$. μείζων δὲ ἡ $ΒΔ$ τῆς $ΔΓ$: μείζων ἄρα καὶ ἡ $ΔΓ$ τῆς $ΓΒ$. ἡ $ΒΔ$ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται [κατὰ τὸ $Γ$], καὶ τὸ μείζον τμημὰ αὐτῆς ἐστὶν ἡ $ΔΓ$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.10

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Ἐστω κύκλος ὁ $ΑΒΓΔΕ$, καὶ εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ $ΑΒΓΔΕ$. λέγω, ὅτι ἡ τοῦ $ΑΒΓΔΕ$ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν τῶν εἰς τὸν $ΑΒΓΔΕ$ κύκλον ἐγγραφομένων.



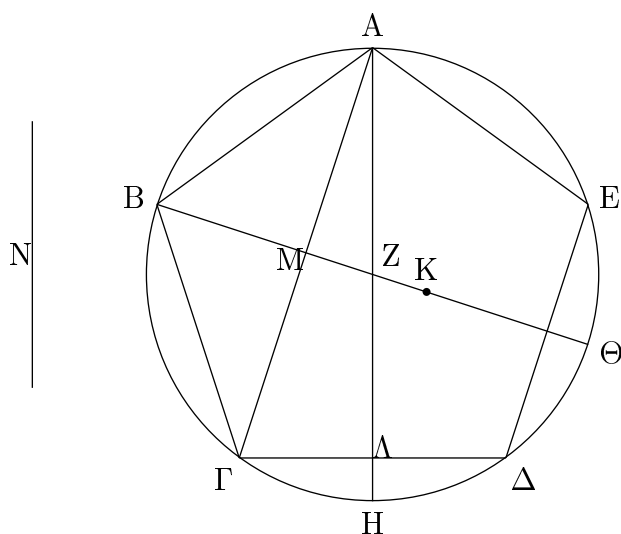
Εὐλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AZ διήχθω ἐπὶ τὸ H σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ZB, καὶ ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἤχθω ἡ ZΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ K, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AK, KB, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Z ἐπὶ τὴν AK κάθετος ἤχθω ἡ ZΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ M, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KN. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ABΓH περιφέρεια τῇ AEDH περιφερείᾳ, ὧν ἡ ABΓ τῇ AED ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓH περιφέρεια λοιπῇ τῇ HD ἐστὶν ἴση. πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ: δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓH. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ZA τῇ ZB, καὶ κάθετος ἡ ZΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ AZK γωνία τῇ ὑπὸ KZB. ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ AK τῇ KB ἐστὶν ἴση: διπλῆ ἄρα ἡ AB περιφέρεια τῆς BK περιφερείας: δεκαγώνου ἄρα πλευρὰ ἐστὶν ἡ AK εὐθεῖα. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ AK τῆς KM ἐστὶ διπλῆ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AB περιφέρεια τῆς BK περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ AB περιφερείᾳ, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς BK περιφερείας. ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓH διπλῆ: ἴση ἄρα ἡ ΓH περιφέρεια τῇ BK περιφερείᾳ. ἀλλὰ ἡ BK τῆς KM ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ KA: καὶ ἡ ΓH ἄρα τῆς KM ἐστὶ διπλῆ. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓB περιφέρεια τῆς BK περιφερείας ἐστὶ διπλῆ: ἴση γὰρ ἡ ΓB περιφέρεια τῇ BA. καὶ ὅλη ἄρα ἡ HB περιφέρεια τῆς BM ἐστὶ διπλῆ: ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ HZB γωνίας τῆς ὑπὸ BZM [ἐστὶ] διπλῆ. ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ HZB καὶ τῆς ὑπὸ ZAB διπλῆ: ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ZAB τῇ ὑπὸ ABZ. καὶ ἡ ὑπὸ BZN ἄρα τῇ ὑπὸ ZAB ἐστὶν ἴση. κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ABZ καὶ τοῦ BZN, ἡ ὑπὸ ABZ γωνία: λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AZB λοιπῇ τῇ ὑπὸ BNZ ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ABZ τρίγωνον τῷ BZN τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ AB εὐθεῖα πρὸς τὴν BZ, οὕτως ἡ ZB πρὸς τὴν BN: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ BZ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AA τῇ AK, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ AN, βάσις ἄρα ἡ KN βάσει τῇ AN ἐστὶν ἴση: καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ AKN γωνία τῇ ὑπὸ LAN ἐστὶν ἴση. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ LAN τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση: καὶ ἡ ὑπὸ AKN ἄρα τῇ ὑπὸ KBN ἐστὶν ἴση. καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε AKB καὶ τοῦ AKN ἡ πρὸς τῷ A. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AKB λοιπῇ τῇ ὑπὸ KNA ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ KBA τρίγωνον τῷ KNA τριγώνῳ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ BA εὐθεῖα πρὸς τὴν AK, οὕτως ἡ KA πρὸς τὴν AN: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν BAN ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς AK. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ABN ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς BZ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ABN μετὰ τοῦ ὑπὸ BAN, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς BZ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς AK. καὶ ἐστὶν ἡ μὲν BA πενταγώνου πλευρὰ, ἡ δὲ BZ ἑξαγώνου, ἡ δὲ AK δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.11

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ABΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ABΓΔΕ: λέγω, ὅτι ἡ τοῦ [ABΓΔΕ] πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



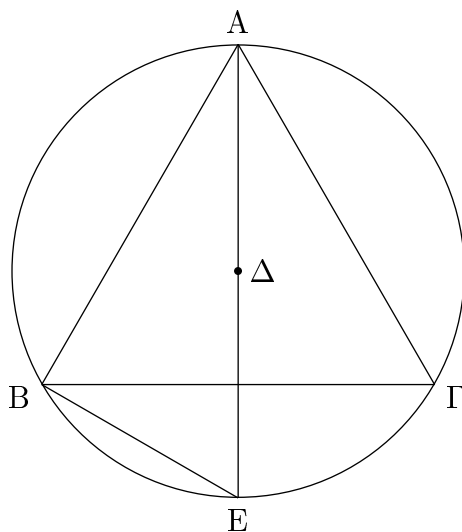
Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Z σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AΓ, καὶ κείσθω τῆς AZ τέταρτον μέρος ἡ ZK. ῥητὴ δὲ ἡ AZ: ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ZK. ἔστι δὲ καὶ ἡ BZ ῥητὴ: ὅλη ἄρα ἡ BK ῥητὴ ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AΓH περιφέρεια τῇ AΔH περιφερείᾳ, ὧν ἡ ABΓ τῇ AΕΔ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΓH λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν AΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΓΔ τῆς ΓΛ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ M ὀρθαὶ εἰσιν, καὶ διπλῆ ἡ AΓ τῆς ΓM. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ AΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ AMZ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε AΓΛ καὶ τοῦ AMZ ἡ ὑπὸ ΛAΓ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ AΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ MZA ἐστὶν ἴση: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ AΓΛ τρίγωνον τῷ AMZ τριγώνῳ: ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓA, οὕτως ἡ MZ πρὸς ZA: καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια: ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓA, οὕτως ἡ τῆς MZ διπλῆ πρὸς τὴν ZA. ὡς δὲ ἡ τῆς MZ διπλῆ πρὸς τὴν ZA, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA: καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓA, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ZA. καὶ τῶν ἐπομένων τὰ ἡμίσεια: ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓA, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ZA. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΛΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΓA ἡμίσεια ἡ ΓM, τῆς δὲ ZA τέταρτον μέρος ἡ ZK: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓM, οὕτως ἡ MZ πρὸς τὴν ZK. συνθέντι καὶ ὡς συναμφοτέρως ἡ ΔΓM πρὸς τὴν ΓM, οὕτως ἡ MK πρὸς KZ: καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρως τῆς ΔΓM πρὸς τὸ ἀπὸ ΓM, οὕτως τὸ ἀπὸ MK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ. καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρᾶς τοῦ πενταγώνου ὑποτενουούσης, οἷον τῆς AΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμήμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτέστι τῇ ΔΓ, τὸ δὲ μείζον τμήμα προσλαβὼν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμίσειας τῆς ὅλης, καὶ ἐστὶν ὅλης τῆς AΓ ἡμίσεια ἡ ΓM, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓM ὡς μιᾶς πενταπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓM. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓM ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓM, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς MK πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς KZ: πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ. ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς KZ: ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος: ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς MK: ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MK [δυνάμει μόνον]. καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ BZ τῆς ZK, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ BK τῆς KZ: εἰκοσιπενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς MK τοῦ ἀπὸ τῆς KZ: πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς BK τοῦ ἀπὸ τῆς

ΚΜ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΜ λόγον οὐκ ἔχει, ὄν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. καὶ ἐστὶ ῥητὴ ἑκατέρωθεν αὐτῶν. αἱ ΒΚ, ΚΜ ἄρα ῥηταὶ εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὔσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἀποτομῆ: ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ, προσαρμοζούσα δὲ αὐτῇ ἡ ΜΚ. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τετάρτη. ζῷ δὴ μείζον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκεῖνω ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν: ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῇ Ν. καὶ ἐπεὶ σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρος ἐστὶν ἡ ΚΒ τῇ ΖΒ. ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρος ἐστὶν: καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρος ἐστὶν. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει, ὄν (ε) πρὸς (ε). ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον ἔχει, ὄν (ε) πρὸς (δ), οὐχ ὄν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον: ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ Ν: ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΚΜ μείζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσύμμετρου ἑαυτῆς, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρος ἐστὶ τῇ ἐκκευμένη ῥητῇ τῇ ΒΘ, ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστὶν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλεῖται δὲ ἐλάττων. δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒΜ ἢ ΑΒ διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν ἢ καλουμένη ἐλάττων: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.12

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.



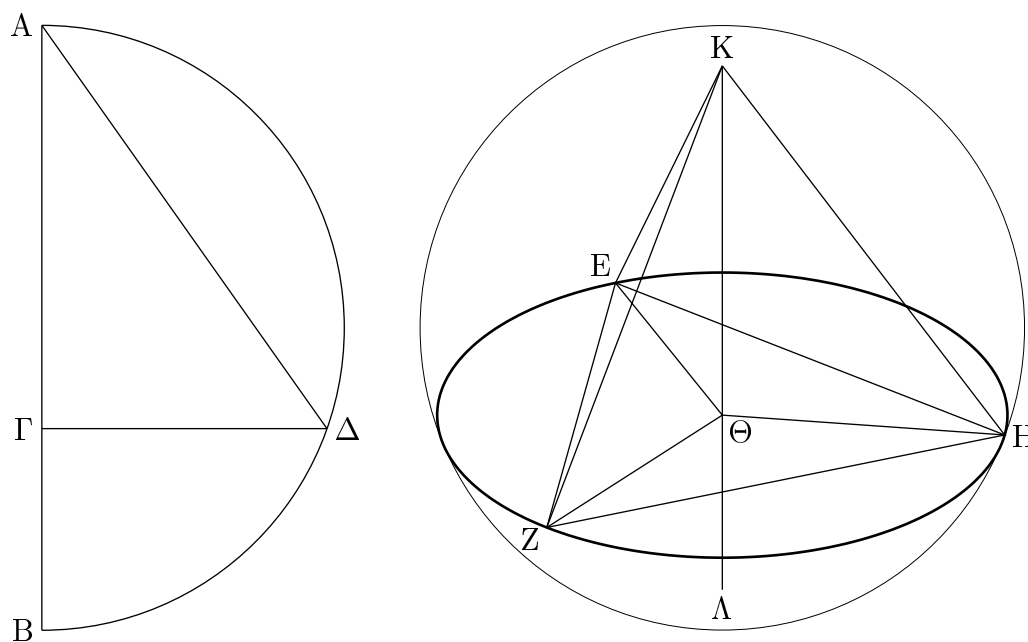
Ἐστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ: λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου μία πλευρὰ δυνάμει τριπλασίῳ ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου τὸ Δ , καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $A\Delta$ διήχθω ἐπὶ τὸ E , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE . καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, ἡ BEG ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ $AB\Gamma$ κύκλου περιφερείας. ἡ ἄρα BE περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας: ἕξαγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ BE εὐθεῖα: ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔE . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ AE τῆς ΔE , τετραπλάσιόν ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῦ ἀπὸ τῆς $E\Delta$, τουτέστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς AE τοῖς ἀπὸ τῶν AB , BE : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν AB , BE τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς BE . διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ BE . ἴση δὲ ἡ BE τῇ ΔE : τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς AB τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔE .

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [τοῦ κύκλου]: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.13

Πυραμίδα συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τεμηθῆσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥστε διπλασίαν εἶναι τὴν $A\Gamma$ τῆς ΓB : καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔA : καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ EZH ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ $\Delta\Gamma$, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν EZH κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ EZH : καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $E\Theta$, ΘZ , ΘH : καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘK , καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΘK τῇ $A\Gamma$ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘK , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KE , KZ , KH . καὶ ἐπεὶ ἡ $K\Theta$ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς τὸ τοῦ EZH κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἀπτομένας αὐτῆς εὐθείας

καὶ οὐσας ἐν τῷ τοῦ EZH κύκλου ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. ἄπτεται δὲ αὐτῆς ἐκάστη τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ: ἢ ΘΚ ἄρα πρὸς ἐκάστην τῶν ΘΕ, ΘΖ, ΘΗ ὀρθή ἐστίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἢ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἢ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσιν, βάσις ἄρα ἢ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστὶν ἴση. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρω τῶν ΚΖ, ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστὶν ἴση: αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἢ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἢ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὡς ἐξῆς δειχθήσεται. τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἐστὶν ἴση ἢ ΔΓ τῇ ΕΘ: ἴση ἄρα καὶ ἢ ΔΑ τῇ ΕΖ. ἀλλὰ ἢ ΔΑ ἐκάστη τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐδείχθη ἴση: καὶ ἐκάστη ἄρα τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΕ ἐκάστη τῶν ΚΕ, ΚΖ, ΚΗ ἐστὶν ἴση: ἰσοπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ, ΚΕΖ, ΚΖΗ, ΚΕΗ. πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγῶνων ἰσοπλευρῶν, ἧς βάσις μὲν ἐστὶ τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφή δὲ τὸ Κ σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῇ ΚΘ εὐθεία ἢ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἢ ΘΛ. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἢ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἢ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἢ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἢ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἢ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ, ἔστιν ἄρα ὡς ἢ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἢ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ: τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ, ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἑκατέρω τῶν ὑπὸ ΚΘΕ, ΕΘΛ γωνιῶν: τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Ε [ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίνεται ἢ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία διὰ τὸ ἰσογώνιον γίνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρω τῶν ΕΛΘ, ΕΘΚ τριγῶνων]. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η σημείων ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ, ΛΗ καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γινομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ, Η γωνιῶν: καὶ ἔσται ἢ πυραμὶς σφαῖρα περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ. ἢ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἢ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἢ ΘΛ.

Λέγω δὴ, ὅτι ἢ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστὶν ἢ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἢ ΑΒ τῆς ΒΓ: ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἢ ΒΑ τῆς ΑΓ. ὡς δὲ ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ [ἐπειδήπερ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΔΒ ἐστὶν ὡς ἢ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἢ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ, ΔΑΓ τριγῶνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας]. ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. καὶ ἐστὶν ἢ μὲν ΒΑ ἢ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἢ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Δεικτέον, ὅτι ἐστὶν ὡς ἢ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

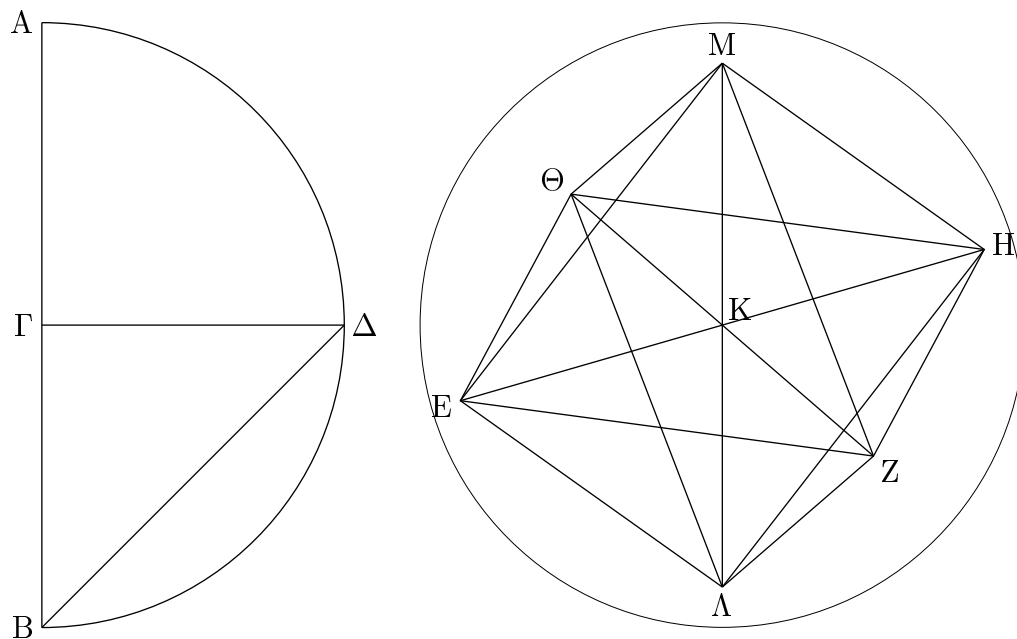
Ἐκκείσθω γὰρ ἢ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφῆ, καὶ ἐπεζεύχθω ἢ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπληρώσθω

τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ

$\Delta\Lambda\Gamma$ τριγώνω ἐστὶν ὡς ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως ἡ ΔA πρὸς τὴν $A\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ BZ , καὶ ἐστὶ τὸ μὲν EB τὸ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$: ἴση γὰρ ἡ EA τῇ $A\Gamma$: τὸ δὲ BZ τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma, \Gamma B$, ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $A\Gamma, \Gamma B$. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν $BA, A\Gamma$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν $A\Gamma B$ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$: ἡ γὰρ $\Delta\Gamma$ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν $A\Gamma, \Gamma B$ μέση ἀνάλογόν ἐστι διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ $A\Delta B$. ὡς ἄρα ἡ AB πρὸς τὴν $B\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.14

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, ἧ καὶ τὰ πρότερα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $A\Delta B$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔB , καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ $EZH\Theta$ ἴσην ἔχον ἐκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΔB , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $\Theta Z, EH$, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ K σημείου τῷ τοῦ $EZH\Theta$ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ KL καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ KM , καὶ ἀφηρήσθω ἀφ' ἐκατέρας τῶν KL, KM μιᾶ τῶν $EK, ZK, HK, \Theta K$ ἴσην ἑκάτερα τῶν KL, KM , καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $LE, LZ, LH, L\Theta, ME, MZ, MH, M\Theta$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ KE τῇ $K\Theta$, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $EK\Theta$ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘE διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK . πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ LK τῇ KE , καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ LKE γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EL διπλασίον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ EK . ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘE διπλασίον τοῦ ἀπὸ τῆς EK : τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς LE ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $E\Theta$: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ LE τῇ $E\Theta$. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ

ΛΘ τῆ ΘΕ ἐστὶν ἴση: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσὶν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ, Μ σημεία, ἰσόπλευρόν ἐστίν: ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτῶ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῆ δοθείση καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

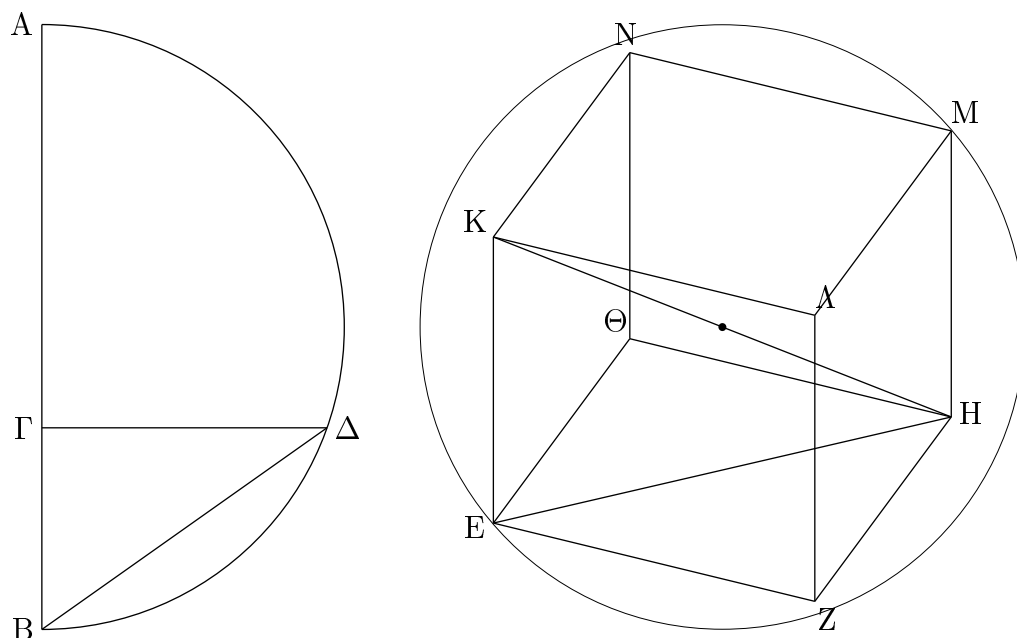
Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ, ΚΜ, ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Ε. καὶ διὰ τὰ αὐτά, εἰ μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τῶν Ζ, Η, Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαῖρα περιελημμένον τὸ ὀκτάεδρον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῆ δοθείση. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῆ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν, βάσεις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῆ ΕΜ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία: ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆ ΓΒ, διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ: διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. καὶ ἐστὶν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ: ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῆ ΔΒ. ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ: ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῆ ΛΜ. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος: ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῆ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιεῖληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῆ δοθείση σφαῖρα. καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.15

Κύβον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, ἣ καὶ τὴν πυραμίδα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε διπλὴν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῆ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῆ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ ἐκάστης τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ μιᾶ τῶν ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ ἴση ἐκάστη τῶν ΕΚ, ΖΛ, ΗΜ, ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ, ΛΜ, ΜΝ, ΝΚ: κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῆ δοθείση καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου.



Ἐπεξεύχθωσαν γὰρ αἱ KH , EH . καὶ ἐπεὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ KEH γωνία διὰ τὸ καὶ τὴν KE ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ EH ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν EH εὐθεΐαν, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς KH γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ E σημείου. πάλιν, ἐπεὶ ἡ HZ ὀρθὴ ἐστὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν $ZΛ$, ZE , καὶ πρὸς τὸ ZK ἄρα ἐπίπεδον ὀρθὴ ἐστὶν ἡ HZ : ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ZK , ἡ HZ ὀρθὴ ἔσται καὶ πρὸς τὴν ZK : καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς HK γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Z . ὁμοίως καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. ἐὰν δὴ μενούσης τῆς KH περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἔσται σφαῖρα περιελημμένος ὁ κύβος. λέγω δὴ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ HZ τῇ ZE , καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ πρὸς τῷ Z γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EZ . ἴση δὲ ἡ EZ τῇ EK : τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς EH διπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK : ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν HE , EK , τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς HK , τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς EK . καὶ ἐπεὶ τριπλασίον ἐστὶν ἡ AB τῆς $BΓ$, ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $BΓ$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $BΔ$, τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς $BΔ$. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς HK τοῦ ἀπὸ τῆς KE τριπλάσιον. καὶ κεῖται ἴση ἡ KE τῇ $ΔB$: ἴση ἄρα καὶ ἡ KH τῇ AB . καὶ ἐστὶν ἡ AB τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος: καὶ ἡ KH ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαῖρα περιεληπταὶ ὁ κύβος: καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

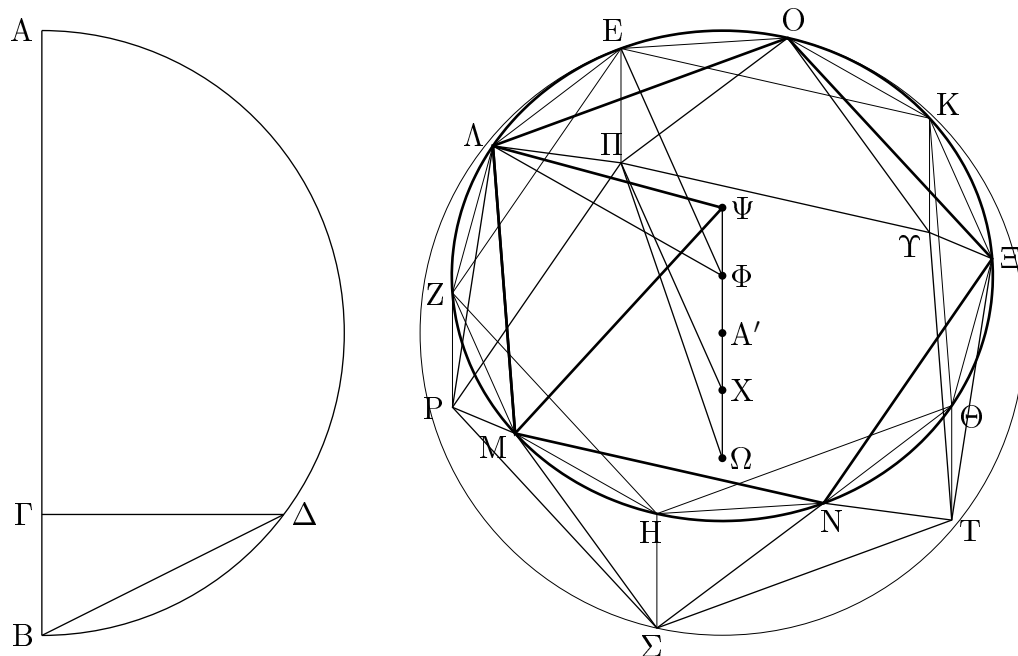
XIII.16

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, ἣ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσάεδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Ἐκχείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB καὶ τεμηθῆσθω κατὰ τὸ $Γ$ ὥστε τετραπλὴν εἶναι τὴν $AΓ$ τῆς $ΓB$, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ $AΔB$, καὶ

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῆ AB πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῆ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο σημεία, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΜ, ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, ΕΟ. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε, Ζ, Η, Θ, Κ σημείων τῶ τοῦ κύκλου ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ, ΖΡ, ΗΣ, ΘΤ, ΚΥ ἴσαι οὔσαι τῆ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ, ΥΠ, ΠΛ, ΛΡ, ΡΜ, ΜΣ, ΣΝ, ΝΤ, ΤΞ, ΞΥ, ΥΟ, ΟΠ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΕΠ, ΚΥ τῶ αὐτῶ ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῆ ΚΥ. ἔστι δὲ αὐτῆ καὶ ἴση: αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παράλληλους ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. ἡ ΠΥ ἄρα τῆ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλος ἐστίν. πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ: πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου καὶ ἡ ΠΥ τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ πενταγώνου ἐστὶν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου: ἰσόπλευρον ἄρα τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. καὶ ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ: ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τὴν τε τοῦ ἐξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ, ΡΜΣ, ΣΝΤ, ΤΞΥ ἰσόπλευρόν ἐστίν. καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρω τῶν ΠΛ, ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου, ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ, ΜΣΝ, ΝΤΞ, ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστίν. εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον: καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῶ τοῦ κύκλου ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφηρήσθω ἐξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρω τῶν ΦΨ, ΧΩ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ, ΠΧ, ΥΩ, ΕΦ, ΛΦ, ΛΨ, ΨΜ. καὶ ἐπεὶ ἑκατέρω τῶν ΦΧ, ΠΕ τῶ τοῦ κύκλου ἐπιπέδω πρὸς ὀρθὰς ἐστίν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῆ ΠΕ. εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι: καὶ αἱ ΕΦ, ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοι εἰσιν. ἐξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ: ἐξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. καὶ ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἐστὶν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστίν, ἐπειδήπερ, ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ, ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἐστὶν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὔσα ἐξαγώνου: ἐξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ: πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ ΠΡ, ΡΣ, ΣΤ, ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστίν. πάλιν, ἐπεὶ ἐξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθὴ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία, πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΜΦ οὔσαν ἐξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου: ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ ΜΝ, ΝΞ, ΞΟ, ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστίν. συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλευρῶν περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῆ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστίν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.



Ἐπει γὰρ ἑξαγώνου ἐστὶν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ ΦΧ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΕ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΕ, οὕτως ἡ ΕΦ πρὸς τὴν ΦΨ. καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΕ, ΕΦΨ γωνίαι: ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΩ εὐθείαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΕΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΕΩ, ΦΕΩ τριγώνων. διὰ τὰ αὐτὰ δὲ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία: τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἤξει καὶ διὰ τοῦ Π. καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῆ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἤξει καὶ διὰ τοῦ Π καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαῖρα περιειλημμένη τὸ εἰκοσαέδρον. λέγω δὲ, ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ Α'. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΦΩ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνεται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλασσον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ ΩΧ, ἡ ἄρα ΩΧ προσλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν ΧΑ' πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΑ' τοῦ ἀπὸ τῆς Α'Χ. καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΩΑ' διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ Α'Χ διπλῆ ἡ ΦΧ: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΦ. καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ: ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου: ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος: καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ. τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαῖρα περιείληπται τὸ εἰκοσαέδρον.

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἐπεὶ γὰρ ῥητὴ ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἐστὶ δυνάμει

πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου: ὥστε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητὴ ἐστὶν. ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῆ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάττων. ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν. ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἐλάττων.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσαέδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ ἐξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

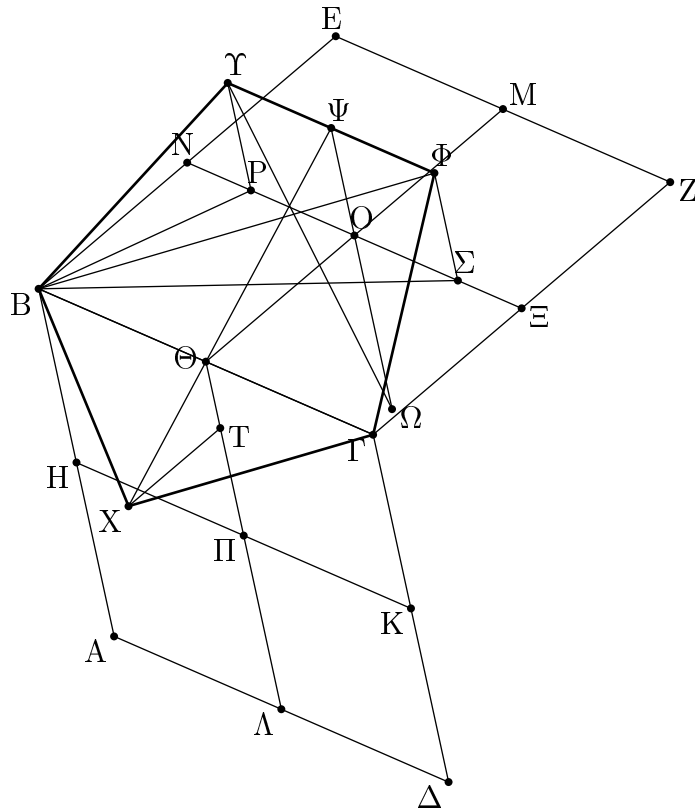
XIII.17

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν, ἥ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα, καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἀλογός ἐστὶν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ, ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΕΖ, ΕΒ, ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η, Θ, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ, ΘΛ, ΜΘ, ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἐκάστη τῶν ΝΟ, ΟΞ, ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὰ Ρ, Σ, Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ, Σ, Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ, ΣΦ, ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ, ΟΣ, ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ, ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ, ΦΥ. λέγω, ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ καὶ ἔτι ἰσογώνιον ἐστὶν. ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ, ΣΒ, ΦΒ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μείζον τμήμα ἐστὶν ἡ ΡΟ, τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τριπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ, ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστὶν ἴσον: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ: ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ τετραπλάσιά ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ, ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ: διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΡΥ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΣΡ τῆς ΟΡ, τουτέστι τῆς ΡΥ, ἐστὶ διπλῆ: ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν ΒΧ, ΧΓ, ΓΦ ἑκατέρω τῶν ΒΥ, ΥΦ ἐστὶν ἴση. ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἐν ἐνὶ ἐπιπέδῳ. ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρω τῶν ΡΥ, ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ, ΘΧ: λέγω, ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖα ἐστὶν. ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμήμα ἐστὶν ἡ ΠΤ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. ἴση δὲ ἡ μὲν ΘΠ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρω τῶν ΤΧ, ΟΨ: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. καὶ ἐστὶ παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ: ἑκατέρω γὰρ αὐτῶν τῶ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν: ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ: ἑκατέρω γὰρ αὐτῶν τῶ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν. ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῆ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ, ΘΤΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶν ἀνάλογον

έχοντα, ώστε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ' εὐθείας ἔσσονται: ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ $\Psi\Theta$ τῇ ΘX . πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἐνὶ ἐστὶν ἐπιπέδῳ: ἐν ἐνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ $\Upsilon B X \Gamma \Phi$ πεντάγωνον.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν.



Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ NO ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ P , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ OP [ἐστὶν ἄρα ὡς συναμφοτέρος ἡ NO , OP πρὸς τὴν ON , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OP], ἴση δὲ ἡ OP τῇ OS [ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ SN πρὸς τὴν NO , οὕτως ἡ NO πρὸς τὴν OS], ἡ NS ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ O , καὶ τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ NO : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν NS , SO τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NO . ἴση δὲ ἡ μὲν NO τῇ NB , ἡ δὲ OS τῇ $S\Phi$: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν NS , $S\Phi$ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB : ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΦS , SN , NB τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν SN , NB ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς SB : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $B S$, $S\Phi$, τουτέστι τὸ ἀπὸ τῆς $B\Phi$ [ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ $\Phi S B$ γωνία]¹, τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς NB : διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Phi$ τῆς NB . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ τῆς NB διπλῆ: ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Phi$ τῇ $B\Gamma$. καὶ ἐπεὶ δύο αἱ $B\Upsilon$, $\Upsilon\Phi$ δυσὶ ταῖς BX , $X\Gamma$ ἴσαι εἰσίν, καὶ βάσις ἡ $B\Phi$ βάσει τῇ $B\Gamma$ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ $B\Upsilon\Phi$ γωνία τῇ ὑπὸ $BX\Gamma$ ἐστὶν ἴση. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ $\Upsilon\Phi\Gamma$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $BX\Gamma$: αἱ ἄρα ὑπὸ $BX\Gamma$, $B\Upsilon\Phi$, $\Upsilon\Phi\Gamma$ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλευροῦ αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον: ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ $B\Upsilon\Phi\Gamma X$ πεντάγωνον. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον: τὸ ἄρα $B\Upsilon\Phi\Gamma X$ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἐστὶν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς $B\Gamma$. ἐὰν ἄρα ἐφ' ἐκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν

τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεται τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ $\Psi\Omega$, καὶ ἔστω ἡ $\Psi\Omega$: συμβάλλει ἄρα ἡ $\Omega\Omega$ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας: τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ἐνδεκάτου βιβλίου. τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω : τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ $\Omega\Omega$ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ $\Upsilon\Omega$. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ω , καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΝΟ , τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ , $\Sigma\Omega$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ . ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ $\Psi\Omega$, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ $\Omega\Omega$ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ $\Psi\Omega$ τῇ $\Omega\Omega$. ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ $\Omega\Omega$ τῇ $\Psi\Upsilon$, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ : τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Omega\Psi$, $\Psi\Upsilon$ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ . τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν $\Omega\Psi$, $\Psi\Upsilon$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Upsilon\Omega$: τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς $\Upsilon\Omega$ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς: προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι καὶ σφαῖρα περιλαβεῖν καὶ δεῖξαι, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ [ἡ] ἡμίσεια τῆς ἡμισείας: καὶ ἐστὶν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς: ἡ ἄρα $\Upsilon\Omega$ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. καὶ ἐστὶ τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον: τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. ὁμοίως δὴ δεῖξομεν, ὅτι καὶ ἐκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας: περιεῖληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ, ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἢ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΡΟ , τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΟΣ , ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ ΡΣ . οἷον ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ , ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ , καὶ τὰ διπλάσια: τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον: ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ , οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφοτέρου τὴν ΝΡ , $\Sigma\Xi$. μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ : μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ , $\Sigma\Xi$: ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μείζον αὐτῆς τμημὰ ἐστὶν ἡ ΡΣ . ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ $\Upsilon\Phi$: τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ $\Upsilon\Phi$. καὶ ἐπεὶ ῥητὴ ἐστὶν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος καὶ ἐστὶ δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὔσα τοῦ κύβου. ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἐκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

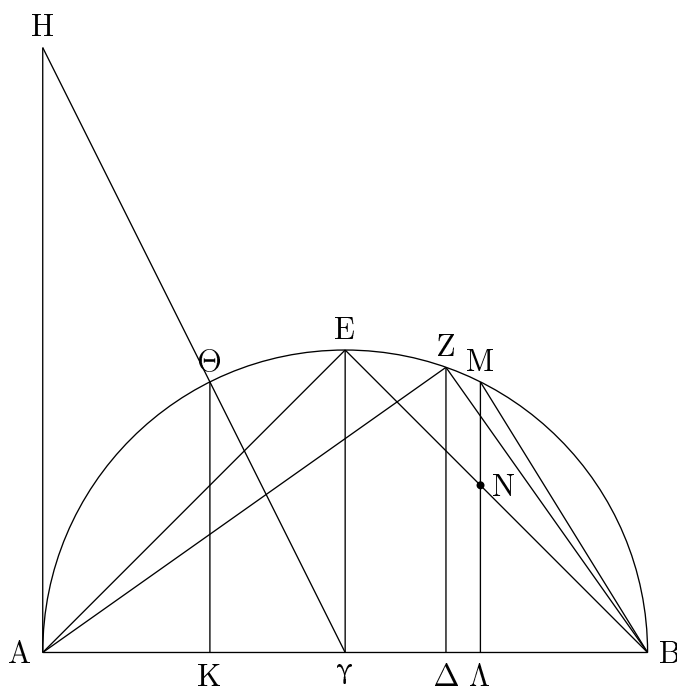
Ἡ $\Upsilon\Phi$ ἄρα πλευρὰ οὔσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἀποτομή.

Corollary

Ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζον τμημὰ ἐστὶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

XIII.18

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκθέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.



Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ AB , καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ ὥστε ἴσην εἶναι τὴν AG τῇ GB , κατὰ δὲ τὸ Δ ὥστε διπλασίονα εἶναι τὴν $A\Delta$ τῆς ΔB , καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς AB ἡμικύκλιον τὸ AEB , καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ $GE, \Delta Z$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB, EB . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB , τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ BA τῆς $A\Delta$. ὡς δὲ ἡ BA πρὸς τὴν $A\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς BA πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς AZ : ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ AZB τρίγωνον τῷ $AZ\Delta$ τριγώνῳ: ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς BA τοῦ ἀπὸ τῆς AZ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος: ἡ AZ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίον ἐστὶν ἡ $A\Delta$ τῆς ΔB , τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς $B\Delta$. ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν $B\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BZ : τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BZ . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίον τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος: ἡ BZ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ AG τῇ GB , διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ AB τῆς BG . ὡς δὲ ἡ AB πρὸς τὴν BG , οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς AB πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς BE : διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς AB τοῦ ἀπὸ τῆς BE . ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίον τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς. καὶ ἐστὶν ἡ AB ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος: ἡ BE ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἦχθω δὲ ἀπὸ τοῦ A σημείου τῇ AB εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ AH , καὶ κείσθω ἡ AH ἴση τῇ AB , καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $H\Gamma$, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἤχθω ἡ ΘK . καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ HA τῆς AG : ἴση γὰρ ἡ HA τῇ AB : ὡς δὲ ἡ HA πρὸς τὴν AG , οὕτως ἡ ΘK πρὸς τὴν $K\Gamma$, διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘK τῆς $K\Gamma$. τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘK τοῦ ἀπὸ τῆς $K\Gamma$: τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν $\Theta K, K\Gamma$, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς $\Theta\Gamma$,

πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ: πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΓΒ, ὣν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστὶ διπλῆ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλῆ. τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ: ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ: μείζων ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΑΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καὶ ἐστὶ τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ, πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐστὶν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος: ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται: ἡ ΚΛ ἄρα ἐξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἐκ τε τῆς τοῦ ἐξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἐξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ ΑΚ τῇ ΑΒ, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΚ, ΑΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΑΒ, ἐξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ: ἴση γάρ ἐστὶ τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ: ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου: καὶ ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΘΚ, ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ: πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου: εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μείζων τμήμα τὸ ΝΒ: ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρὰ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων, οἷων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο. ἡ μὲν ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραί, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς. αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὴ ἡ τε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς: ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιον ἐστὶ τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΒΑ. καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας: ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ: ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ: τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον: διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ: μείζων ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ: μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ: πολλῶ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστὶν. καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζων τμήμα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΑΚ ἐξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου: τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μείζων τμήμα ἐστὶν ἡ ΝΒ: μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΜ: μείζων ἄρα ἡ ΑΜ τῆς ΝΒ [τῆς δὲ ΑΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ]. πολλῶ

ἄρα ἡ MB πλευρὰ οὕσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς NB πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λέγω δὴ, ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ἐπὶ μὲν γὰρ δύο τριγώνων ἢ ὅλως ἐπιπέδων στερεὰ γωνία οὐ συνίσταται. ὑπὸ δὲ τριῶν τριγώνων ἢ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἢ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἢ τοῦ εἰκοσαέδρου: ὑπὸ δὲ ἕξ τριγώνων ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἐνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία: οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς ἔσονται αἱ ἕξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι: ὅπερ ἀδύνατον: ἅπαντα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἕξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἢ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται: ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον: ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλευρῶν καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἢ τοῦ δωδεκαέδρου: ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον: οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους: ὅπερ ἀδύνατον. οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἐτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλευρῶν τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Lemma

Ἐπιπέδου δὲ ἢ τοῦ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστὶ καὶ πέμπτου, οὕτω δεικτέον.

Ἐστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον τὸ ABΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ. δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε τοῦ πενταγώνου γωνίας. καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ καὶ εἰσὶν ἴσαι, μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ πέμπτου: λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ, ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ: καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου: ὅπερ ἔδει δεῖξαι.