gcorbach@uc.cl

Probabilidad Clásica

Los ejercicios que a continuación se presentan son extraídos de diversas publicaciones escritas en Chile para la preparación de la prueba de selección universitaria (PSU). Sin embargo y por lo general, ellas no contienen la publicación de las soluciones de los mismos, sino que solo señalan la respuesta final indicando para ello la alternativa correcta. El presente trabajo es una recopilación en la cuál se ilustran las respectivas soluciones a los mismos-, con lo cual los estudiantes podrán interiorizarse de los contenidos y sus aplicaciones. Junto con ser la más amplia recopilación sobre ejercicios de esta materia a la fecha, destinado como material de consulta para alumnos de enseñanza media -o secundaria- y a sus profesores.

Para su presentación, se consideran los siguientes ítems:

I. **Probabilidad de un evento simple**

1. ¿Cuál es la probabilidad de ganar en una rifa de 1000 números en total, si se compran los 3 centésimos de tal cantidad?

   A) 30 B) 3 C) 3/100 D) 3/10 E) 3/1000

   Solución:
   3 Centésimos equivale al 3%. Y la probabilidad asociada a tal porcentaje es 3/100.
   Alternativa C).

   Otra forma: Compro $\frac{3}{100} \cdot 1000 = 30$ números.
   Por lo tanto, la probabilidad es

   $$P = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{30}{1000} = \frac{3}{100}$$

   La alternativa es C).

2. La probabilidad de que al sacar una carta al azar de un naipe inglés (52 cartas), ella sea un as es:

   A) $\frac{1}{14}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{1}{12}$ D) $\frac{1}{26}$ E) $\frac{1}{13}$

   Solución:
   Los casos favorables a obtener un as son 4.
   Los casos totales o posibles de extraer son 52 (puede salir cualquier carta).
   Por lo tanto, la probabilidad pedida es:
   $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

   Alternativa E).

3. En un jardín infantil hay 8 morenos y 12 morenas así como 7 rubios y 5 rubias. Si se elige un integrante al azar, la probabilidad de que sea rubio o rubia es:

   A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{9}{16}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{13}{32}$ E) $\frac{15}{32}$

   Solución:
   Hay un total de 32 infantes. Los rubios o rubias suman 12. Por lo tanto, la probabilidad pedida es $p = \frac{\text{casos favorables (rubios o rubias)}}{\text{total de infantes}} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$
   Alternativa C).

4. Al lanzar al aire tres veces una moneda, la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtenga sello es:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$

Solución:
No importa lo que ocurra en los dos últimos lanzamientos. Es sólo considerar la probabilidad de que en el primer lanzamiento se obtenga sello.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es $p = \frac{\text{cantidad de resultado(s) favorable(s)}}{\text{cantidad resultados posibles}} = \frac{1}{2}$

Alternativa A).

5. Se lanzó un dado dos veces y en ambas oportunidades se obtuvo 4. ¿Cuál es la probabilidad de que en un tercer lanzamiento se vuelva a obtener 4?

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{216}$

B) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{36}$

Solución:
La probabilidad de obtener 4 en un lanzamiento de dado, que contiene seis caras posibles es 1/6.
Como falta un solo lanzamiento, la probabilidad de obtener cualquier número en un lanzamiento es 1/6.
Alternativa C).

6. Se lanzan al aire consecutivamente dos monedas, la probabilidad de que la segunda sea cara es:

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{1}{4}$

Solución:
No se solicita nada de la primera moneda. Por lo que solo hay que remitirse a la segunda moneda. El segundo lanzamiento –como cualquier otro, tiene dos resultados posibles, cara o sello. De los cuáles uno de ellos es favorable a lo pedido.

Por lo tanto, la probabilidad pedida es $p = \frac{1}{2}$

Alternativa A).

7. Se lanzan al aire uno tras otro tres dados de seis caras numeradas del 1 al 6.
La probabilidad de que el número de tres cifras que se forme, empiece con 4 es:

A) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{120}$ E) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{25}{216}$ D) $\frac{1}{256}$

Solución:
Dan lo mismo los resultados del segundo y tercer lanzamiento. Sólo interesa obtener 4 en el primero.
Al lanzar el primer dado tenemos un caso favorable a obtener 4 y seis casos posibles, por lo tanto, la probabilidad pedida es: $p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{6}$.

Alternativa A).

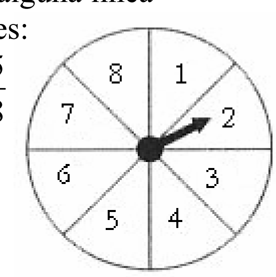
8. La probabilidad de que al lanzar un dado se obtenga un número menor que 5 es:

A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{4}{5}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{6}$

Solución:
Los casos favorables a obtener un número menor que 5 son {1, 2, 3, 4} de un total de seis resultados. Por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Alternativa A).

9. Se hace girar la flecha de la ruleta una vez, si la probabilidad de seleccionar alguna línea divisoria es despreciable, la probabilidad de obtener un número mayor que 4 es:



A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

B) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{3}{4}$

Solución:
Hay 4 números favorables: 5, 6, 7, 8; de un total de 8 números posibles. La probabilidad pedida es $p = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.
La alternativa correcta es A).

10. Se lanza una vez un dado común, ¿cuál es la probabilidad de obtener un número par, menor que 5?

A) 1/6 C) 3/6 E) Ninguna de las anteriores.

B) 2/6 D) 4/6

Solución:
Sea A ≡ Obtener un número par menor que 5 = {2, 4} $\Rightarrow$ #A = 2.
La probabilidad pedida es $P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{2}{6}$
Alternativa B).

11. Se lanza un dado y se obtiene 2. ¿Cuál es la probabilidad de que en un segundo lanzamiento se obtenga un número que, sumado con 2, sea inferior a 6?

A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$

Solución:
Al lanzar el segundo dado tenemos seis resultados posibles, pero los que favorecen una suma con 2, inferior a 6 son: 1, 2, 3. Es decir, tenemos 3 casos favorables.
La probabilidad pedida es $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
Alternativa E).

12. De 25 televisores que se fabrican, 1 sale defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de escoger uno defectuoso en 100 televisores?

A) $\frac{1}{25}$ C) $\frac{1}{100}$ E) $\frac{2}{25}$

B) $\frac{1}{50}$ D) $\frac{1}{20}$

Solución:
Si de 25 televisores que se fabrican 1 sale defectuoso, entonces, la probabilidad de escoger uno defectuoso es $p = \frac{1}{25}$. Alternativa A).
Independiente de la cantidad de televisores que halla, la probabilidad es siempre la misma.
Lo que cambia con la cantidad de la muestra es el número de televisores que se espera que estén defectuosos, que sería en tal caso: $\frac{1}{25} \bullet 100 = 4$ televisores.

13. Se extrae una carta al azar de una baraja de naipe español (40 cartas, 4 pintas o palos: oro, copa, espada y basto). La probabilidad del suceso "sacar una carta que no sea oro" es:

A) $\frac{10}{40}\%$ C) $\frac{10}{40}$ E) 10%

B) $\frac{30}{40}\%$ D) $\frac{30}{40}$

Solución:
Hay 30 cartas de un total de 40, que no son oro. Por lo tanto, la probabilidad pedida es
$$p = \frac{\text{casos favorables a no ser oro}}{\text{total de cartas posibles a extraer}} = \frac{30}{40}$$
Alternativa D).

14. Una tómbola tiene 5 bolas numeradas del 1 al 5. Al sacar una de las bolas, la probabilidad de que el número grabado en ella sea divisor de 5 es:

A) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{4}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$

Solución:
5 es un número primo, es decir, sólo es divisible por 1 y por sí mismo. Es decir, hay dos casos favorables, de un total de 5 bolas numeradas y posibles de extraer.
Entonces, la probabilidad pedida es $p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{5}$. Alternativa A).

15. La probabilidad de que al hacer rodar un dado, salga un número primo es:

A) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{2}$

Solución:
Los casos o resultados posibles al lanzar el dado son {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Esto es, seis casos totales.
Los casos favorables a obtener un número primo (divisible solo por 1 y por sí mismo) son: 2, 3, 5. Esto es, tres casos.

Por lo tanto, $P(\text{primo}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ Alternativa D).

16. Se hacer rodar 2 veces un dado común y se considera la suma de los puntos obtenidos en ambos lanzamientos. La primera vez sale un número par. La probabilidad que la suma sea mayor que 7 es:

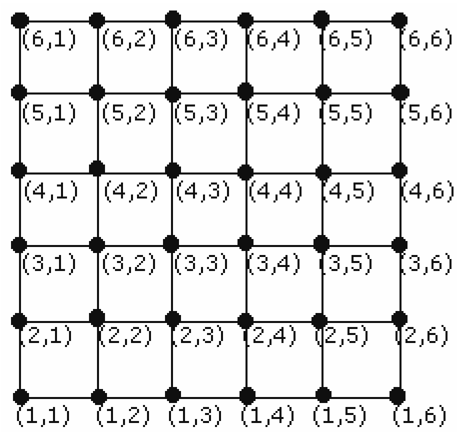
A) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{2}$

Solución:
El espacio muestral al lanzar los dos dados es el que muestra la figura. Constando de 36 casos posibles.
Para hallar los casos favorables, hay que buscar entre los casos posibles aquellos que comiencen con un número par y cuya suma con el otro resultado sea mayor que 7:
{(6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6), (4,4), (4,5), (4,6), (2,6)}.
Totalizando 9 casos favorables.

Entonces, la probabilidad pedida es $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Alternativa A).



17. Si se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de que los números presenten una diferencia de 2 unidades?

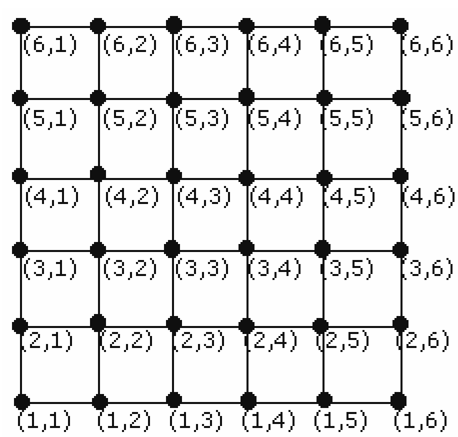
A) $\frac{2}{9}$ C) $\frac{6}{36}$ E) $\frac{2}{36}$

B) $\frac{3}{9}$ D) $\frac{4}{9}$

Solución:
La totalidad del espacio muestral viene dado por la figura de la derecha. El cuál muestra 36 resultados posibles al lanzar dos dados.
En la figura, el primer elemento de cada par de números es asociado al primer dado y el otro número al segundo dado.
Los casos favorables son: {(6,4), (5,3), (4,2), (4,6), (3,1), (3,5), (2,4), (1,3)} $\Rightarrow$ #casos favorables = 8.

$P(\text{diferencia de 2 números}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

Alternativa A).

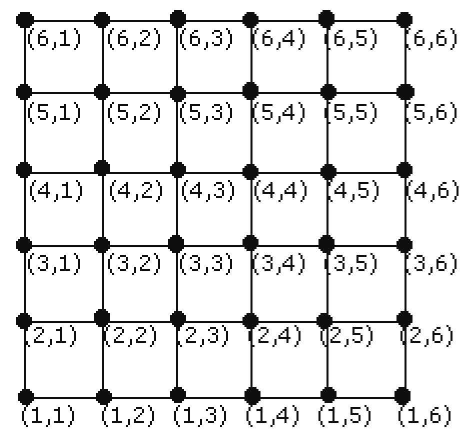


18. La probabilidad de que al hacer rodar dos dados de seis caras, numeradas del 1 al 6, el valor absoluto de la diferencia entre los números obtenidos sea mayor que 1 es:

A) $\frac{11}{18}$ C) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{5}{18}$

B) $\frac{13}{18}$ D) $\frac{5}{9}$

Solución:
Al lanzar un solo un dado tenemos 6 casos resultados posibles.
Al lanzar dos dados, los resultados posibles son $6 \bullet 6 = 36$. Estos se muestran en la figura de la derecha.



Hay que intuir que los casos favorables son numerosos, por eso vamos a ver primero el evento complementario.
Los casos en que la diferencia en valor absoluto (independiente del signo de tal diferencia) entre los dos números, sea menor o igual a 1 son:
{(1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4)}
es decir, 20 casos.
Luego, la probabilidad del evento pedido es:

$$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

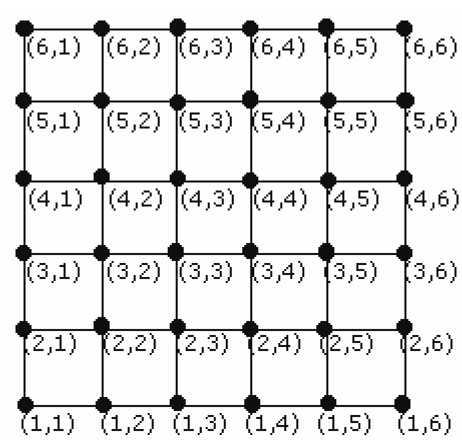
Alternativa D).

19. Si lanzamos dos dados honestos –no cargados, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de los puntos sea igual a cero?

A) $\frac{10}{36}$ C) $\frac{12}{36}$ E) $\frac{8}{3}$

B) $\frac{6}{36}$ D) $\frac{5}{36}$

Solución
Al lanzar un dado obtenemos la base del espacio muestral. E' = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ #E' = 6 resultados posibles.



Al lanzar dos dados, las combinaciones de resultados posibles es $\#E = E'^2 = 6^2 = 36$.
La figura de la derecha ilustra todos los casos.
Para que la diferencia sea cero, los resultados en los dos dados deben ser iguales
{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)} son 6 casos favorables.
Luego la probabilidad pedida es

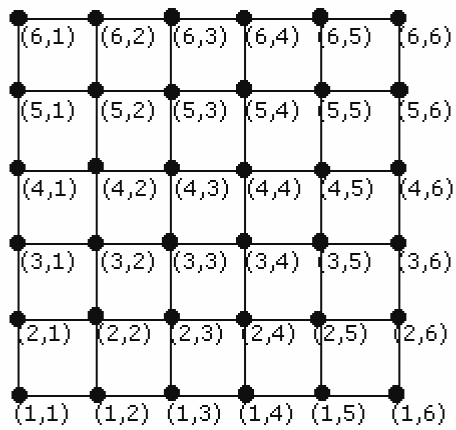
$$P = \frac{\text{resultados favorables}}{\text{resultados totales}} = \frac{6}{36}$$

Alternativa B).

20. Un animador de concurso lanza un par de dados y registra la suma de sus caras en una pantalla. Si el concursante obtiene una suma mayor, gana, de lo contrario, pierde. Si en cierta ocasión, el animador obtuvo una suma de 5, ¿Cuál es la probabilidad de que el concursante pierda?
    A) 12/36
    B) 10/36
    C) 6/36
    D) 4/36
    E) 3/36

    Solución:
    Para que el concursante pierda, debe obtener una suma menor o igual a 5.
    La pareja de resultados que suman menos que 5 son:
    {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)} Habiendo 10 casos favorables.

    Al lanzar un dado obtenemos la base del espacio muestral. E' = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ #E' = 6 resultados posibles.
    Al lanzar dos dados, las combinaciones de resultados posibles es #E = E'^{2} = 6^2 = 36.
    La siguiente figura ilustra todos los casos.
    La probabilidad de que pierda entonces es:
    $p = \dfrac{10}{36}$
    Alternativa B).



21. Si en una caja hay 5 lápices negros, 3 lápices verdes, y 4 amarillos, entonces ¿cuál es la probabilidad de que al sacar un lápiz de la caja, éste no sea negro ni verde?
    A) $\dfrac{1}{15}$ C) $\dfrac{1}{4}$ E) $\dfrac{8}{12}$
    B) $\dfrac{1}{5}$ D) $\dfrac{1}{3}$

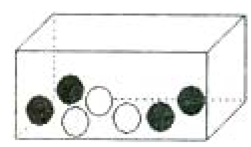
    Solución:
    Del enunciado se desprende que la probabilidad pedida es la de sacar un lápiz amarillo.
    $$P = \frac{\text{n° de casos favorables a extraer un lápiz amarillo}}{\text{n° total de lápices}} = \frac{4}{5+3+4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$
    La alternativa correcta es D).

22. En una caja hay 6 bolitas: 3 rojas, 2 azules y 1 verde. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una de estas bolitas, ella no sea verde o azul?
    A) $\dfrac{1}{3}$ C) $\dfrac{1}{6}$ E) $\dfrac{1}{4}$
    B) $\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{2}{3}$

    Solución:
    Leyendo bien el enunciado, lo que se solicita en el fondo es hallar la probabilidad de que al extraer una bolita, esta sea roja.
    Aplicando la definición de Laplace: $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables a extraer una bola roja}}{\text{casos posibles}} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
    Alternativa B).

23. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un guante derecho rojo de un total de 5 pares de guantes rojos y 5 pares de guantes negros?
   A) $\frac{1}{4}$
   B) $\frac{3}{4}$
   C) $\frac{1}{2}$
   D) $\frac{2}{3}$
   E) $\frac{1}{8}$

   Solución:
   Tenemos en total 10 pares de guantes, los que equivalen a un total de 20 guantes individuales.
   Nos solicitan que sea derecho y de color rojo. Como tenemos 5 pares rojos, 5 guantes serán derechos y de color rojo.
   La probabilidad pedida es $P(\text{derecho y de color rojo}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{cantidad total de guantes}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
   Alternativa A).

24. La caja de la figura contiene bolitas blancas y negras. Para que la probabilidad de sacar una bola blanca sea de 3/5, en la caja habría que:
   
   A) Agregar 2 bolitas blancas.
   B) Quitar 2 bolitas negras.
   C) Agregar 1 bolita negra.
   D) Quitar 2 blancas y 1 negra.
   E) Ninguna de las anteriores.

   Solución:
   Sea $A \equiv$ Extraer una bola blanca $\Rightarrow P(A) = \frac{\text{casos favorables a extraer una blanca}}{\text{cantidad total de bolas en la caja}} = \frac{3}{5}$
   Es decir, debe haber 3 bolas blancas de un total de 5 en la caja. Y viendo la figura, se deben retirar 2 bolas negras.
   Alternativa B).

25. En la bolsa hay 50 bolitas, de las cuáles 12 son rojas, 5 son verdes, 3 son azules y el resto son blancas. Si se saca una bolita sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea blanca?
   A) $\frac{2}{5}$
   B) $\frac{1}{2}$
   C) $\frac{3}{5}$
   D) $\frac{1}{3}$
   E) $\frac{1}{5}$

   Solución:
   Utilizando la típica definición de Laplace para calcular la probabilidad.
   $P(\text{blanca}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales posibles}} = \frac{50-(12+5+3)}{50} = \frac{50-20}{50} = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$
   Alternativa C).

26. En una bolsa se tienen 20 fichas numeradas del 1 al 20. Si se saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la ficha extraída tenga un número que sea múltiplo de 4?
    A) 0,25
    B) 0,20
    C) 0,15
    D) 0,10
    E) 0,50

    Solución:
    Sea A ≡ {Obtener número múltiplo de 4} = {4, 8, 12, 16, 20} $\Rightarrow$ #A = 5
    Luego, $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles en total}} = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$
    Alternativa A).

27. Se elige al azar un número natural del 1 al 30. ¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea múltiplo de 4?
    A) 3/30
    B) 23/30
    C) 7/30
    D) 8/30
    E)6/30

    Solución:
    Sea A ≡ {Obtener número múltiplo de 4} = {4, 8, 12, 16, 20, 24, 28} $\Rightarrow$ #A = 7.
    Luego, $P(A) = \dfrac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles en total}} = \dfrac{7}{30}$ Alternativa C).

28. La probabilidad de que al escoger un número positivo de dos cifras, este sea primo y termine en 3 es:
    A) $\dfrac{1}{15}$
    B) $\dfrac{42}{45}$
    C) $\dfrac{1}{99}$
    D) $\dfrac{4}{15}$
    E) Ninguna de las anteriores.

    Solución:
    Hay 90 números de dos cifras, {10, 11, ..., 99}, el cuál se puede obtener rectando de los primeros 99 números, aquellos que tienen dos cifras de los que no lo tienen:
    99 – 9 = 90.
    Por lo tanto, 90 es la cantidad de casos posibles o totales.
    Por definición de número primo, este debe ser solo divisible por 1 y por sí mismo.
    Pues bien, la cantidad de casos favorables, es decir, números que sean tengan dos cifras, sean primos y terminen en tres son: {13, 23, 43, 53, 73, 83}, es decir, 6 casos favorables.
    Por lo tanto, la probabilidad pedida es:
    $p = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$ (donde hemos simplificado por 6 la fracción) Alternativa A).

29. Carla y Beatriz practican el siguiente juego: se saca al azar de una bolsa que contiene 36 bolitas numeradas del 1 al 36. Gana Katty si el número de las bolitas es divisible por 3 y gana Betty si el número es divisible por 4. ¿Cuál tiene más posibilidades de ganar?
    A) Katty
    B) Betty
    C) Ambas tienen la misma posibilidad.
    D) No se puede determinar.
    E) Ninguna de las anteriores.

    Solución:
    - La cantidad de números divisibles por tres son $\frac{36}{3} = 12$.
    - La cantidad de números divisibles por cuatro son $\frac{36}{4} = 9$

    Del mismo total de bolitas numeradas, es Katty quién tiene mayor cantidad de casos favorables, por lo tanto es ella quién gana. Alternativa A).

30. Hacemos rodar un dado de seis caras; entonces la probabilidad del suceso "obtener 2" sabiendo que ha salido un número par es:
    A) 1/3
    B) 2/3
    C) 1/6
    D) 5/6
    E) Ninguna de las anteriores.

    Solución:
    Es un hecho que los casos posibles o espacio muestral es $E = \{2, 4, 6\} \Rightarrow \#E = 3$
    El caso favorable es un solo número. Así, $P(2) = \frac{1}{3}$.
    Alternativa E).

31. Si se elige al azar un número natural del 1 al 100, ¿cuál es la probabilidad de que ese número sea múltiplo de 3 y 5 a la vez?

A) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{3}{25}$ E) $\frac{15}{100}$

B) $\frac{3}{50}$ D) $\frac{8}{100}$

Solución:
El espacio muestral E, todos los números que pueden ser elegidos o casos posibles, viene dado por todos los números del 1 al 100. Es decir, #E = 100.
Sea A ≡ Elegir un número múltiplos de 3 y 5.
Entonces, dichos números son también divisibles por 3 y 5. Y la cantidad de tales números viene dado por
$\# A = [100/(3 \bullet 5)]\ [100/15] = 6$
Donde [ ] es parte entera. De hecho A = {15, 30, 45, 60, 75, 90}
$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\#A}{\#E} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50}.$
Alternativa B).

32. Si se elige al azar un número entre el 20 y el 60, ambos incluidos, la probabilidad de que el producto de sus cifras sea divisor de 24 es:

A) $\frac{24}{41}$ C) $\frac{12}{41}$ E) $\frac{10}{41}$

B) $\frac{13}{41}$ D) $\frac{13}{40}$

Solución:
La cantidad de números entre 20 y 60 inclusive son 41.
El 24 es divisible por 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24.
Los números entre 20 y 60 inclusive, cuyo producto de sus cifras sea divisor de 24 son:
{21, 22, 23, 24, 26, 31, 32, 34, 38, 41, 42, 43, 46} $\Rightarrow$ 13 casos favorables a lo pedido.
Por lo tanto, la probabilidad pedida es $\frac{13}{41}$. Alternativa B).

33. Se lanzan dos dados, ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un as?

A) $\frac{11}{42}$ C) $\frac{11}{12}$ E) Ninguna de las anteriores.

B) $\frac{11}{36}$ D) $\frac{11}{144}$

Solución:
Sea A ≡ Obtener a lo menos un as $\{\underbrace{(1,1), (1,2),..., (1,6)}_{\#6}, \underbrace{(2,1), (3,1),..., (6,1)}_{\#5}\} \Rightarrow \#A=11.$
El número de elementos del espacio muestral, en el lanzamiento de dos dados es #E = 36
Por lo tanto, $P(A) = \frac{11}{36}$
Alternativa B).

34. En una caja hay 90 tarjetas numeradas correlativamente del 10 al 99. Al sacar una tarjeta al azar, la probabilidad de que la suma de sus dígitos sea 4 es:

A) $\frac{4}{9}$
B) 4%
C) $0,0\overline{4}$
D) 44%
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:

- El total de tarjetas posibles o totales son 100. (Se incluye la tarjeta 10).
- Los casos favorables a que la suma de los dígitos sea 4 son:

13, 22, 31, 40
es decir, 4 casos favorables.

La probabilidad pedida es $p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{4}{90} \equiv \frac{4}{90} \bullet 100\% = \frac{4}{9} \bullet 10\% = 4,\overline{4}\%$

$= 0,04$

Alternativa C).

35. La probabilidad de que al lanzar dos dados, los números que se obtengan formen un número divisible por 2 y 3 a la vez es:

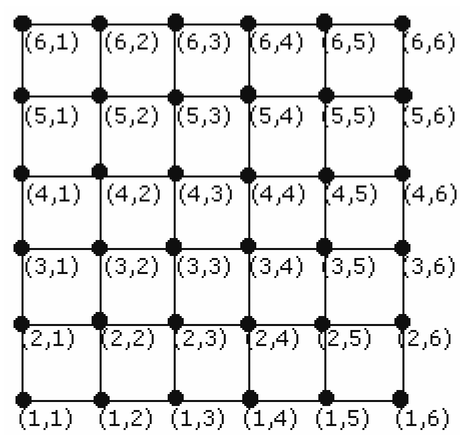
A) $\frac{1}{6}$
C) $\frac{11}{18}$
E) $\frac{7}{18}$
B) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{5}{6}$

Solución:

El espacio muestral al lanzar dos dados arroja 36 combinaciones posibles. Los números que se forman son los que se muestra en la figura (sin la coma intermedia entre los dígitos).
Que un número sea divisible por 2 y 3 a la vez significa que sea divisible por 2 • 3 = 6.
El conjunto de tales números son {12, 24, 36, 42, 54, 66} los que se forman con la pareja de resultados {(1,2), (2,4), (3,6), (4,2), (5,4), (6,6)}.
Son seis casos favorables. Luego, la probabilidad pedida es

$p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{6}$

Alternativa A).

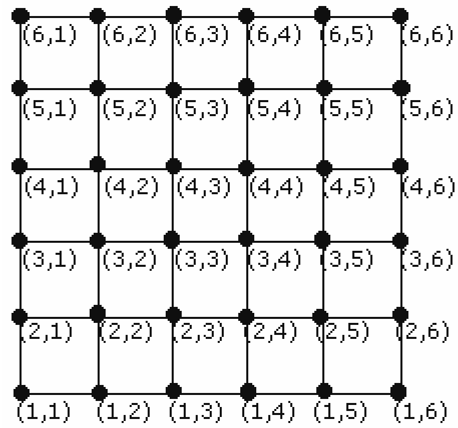


36. La probabilidad de que al hacer rodar dos dados, la suma de los números obtenidos sea divisor de 12 es:

A) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{1}{4}$

Solución:



De los 36 resultados posibles, aquellos cuya suma de números que resulten ser divisores de 12 son:
{(6,6), (5,1), (4,2), (3,1), (3,3), (2,1), (2,2), (2,4), (1,1), (1,2), (1,3), (1,5)}
Son 12 los casos favorables para obtener una suma que sea divisor de 12.
Luego, la probabilidad pedida es:

$$P(\text{primo}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

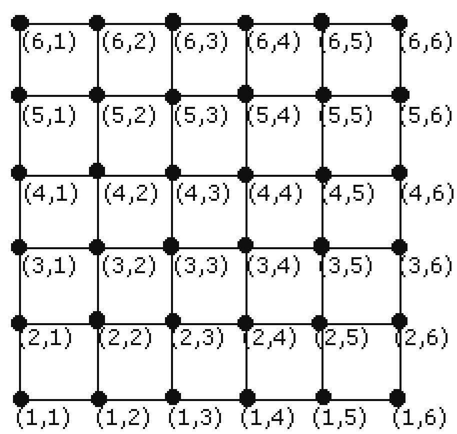
Alternativa C).

37. La probabilidad de que al hacer rodar dos dados, el producto de los números obtenidos sea múltiplo de 5 es:

A) $\frac{25}{36}$ C) $\frac{7}{36}$ E) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{11}{36}$

Solución:



El espacio muestral al lanzar los dos dados, es el que se muestra en la figura. Con 36 casos posibles.
Si un número es múltiplo de 5, entonces termina en 5 o en 0.
El conjunto de casos favorables, que al efectuar el producto de los dígitos su resultado finalice en 5 o 0 es:
{(6,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (4,5), (3,5), (2,5), (1,5)}.
Totalizando 11 casos favorables.
Entonces, la probabilidad pedida es 11/36. Alternativa D).

38. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar 2 dados, sus caras superiores sumen tres?

A) 1/18 C) 10/36 E) 2/18

B) 1/36 D) 8/36

Solución:

Sea A ≡ Suma de los puntos de las caras superiores sumen tres = {(1,2), (2,1)} ⇒ #A = 2.
Mientras que los casos totales del número de elementos del espacio muestral tras lanzar dos dado es #E = 36.

Por lo tanto, $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

Alternativa A).

39. Se tiene un juego de naipes ingleses de 52 cartas. ¿Cuál sería la probabilidad de obtener una reina roja o negra, al sacar un sólo naipe del juego?
    A) 1/52
    B) 1/26
    C) 1/13
    D) 2/13
    E) 1/4

    Solución:
    Todo se reduce a calcular la probabilidad de extraer una reina, cualquiera sea su pinta.
    Sean A ≡ extraer una reina $\Rightarrow$ #A = 4. Pues hay 4 reinas en el mazo.
    Entonces, $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$
    Alternativa C).

40. Se lanzan tres dados iguales, entonces la probabilidad de obtener una suma mayor o igual a 17 es:
    A) $\frac{1}{108}$ C) $\frac{1}{36}$ E) $\frac{1}{6}$
    B) $\frac{1}{54}$ D) $\frac{1}{9}$

    Solución:
    Para el caso da lo mismo si los dados se lanzan simultáneamente o no.
    El espacio muestral del lanzamiento de un dado es E' = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ #E' = 6
    Entonces, el espacio muestral de lanzar tres dados simultáneamente, es
    $$E = (\#E')^3 = 6^3 = 216.$$
    Que constituye la cantidad total de tripletas (a, b, c) u ordenaciones posibles en que salen los resultados. Con a = 1,2,...,6. b = 1,2,...,6. c = 1,2,...,6 indicando los resultados posibles del primero, segundo y tercer lanzamiento respectivamente.

    Sea el evento A ≡ obtener una suma mayor o igual a 17.
    El conjunto de casos posibles es A = {(5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5), (6, 6, 6)} $\Rightarrow$ #A = 4
    $P(A) = \frac{\#A}{\#E} = \frac{4}{216} = \frac{2}{108} = \frac{1}{54}$
    Alternativa B).

41. Se lanzan simultáneamente dos monedas. La probabilidad de obtener un sello es
    A) 1/2
    B) 1/3
    C) 1/4
    D) 1/8
    E) 1

Solución:
Vamos a efectuar una tabla de doble entrada que describa los resultados posibles para cada lanzamiento. Luego contaremos los casos dentro de tal tabla, en que hay un sello.

Cara (C)	CC	CS
Sello (S)	SC	SS
	Cara (C)	Sello (S)

Dentro de la tabla, al combinar los resultados de ambas monedas nos encontramos con cuatro casos posibles. Los casos que tienen un sello son dos de cuatro. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(\text{Obtener al menos una cara}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Alternativa A).

42. ¿Cuál es la probabilidad que, al lanzar tres dados, la suma de los puntos sea 18?

A) $\frac{3}{18}$ C) $\frac{1}{216}$ E) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{18}$ D) $\frac{3}{216}$

Solución:
La "base" del espacio muestral, llamémoslo E', se obtiene del número de casos que existen al hacer un solo lanzamiento del dado. E' = {1, 2, 3, 4, 5, 6} $\Rightarrow$ #E' = 6.
El lanzar tres dados equivale a lanzar un dado tres veces y anotar las pintas o números que salen tras estos lanzamientos. Así, la cardinalidad o número de casos posibles, al lanzar un dado n veces está dada por:
$\#E = (\#E')^n = 6^n \Longrightarrow$ Con n = 3 lanzamientos: $\#E = (\#E')^3 = 6^3 = 216$ casos posibles.

Es decir, si (x, y, z) es una tripleta de números que indica los resultados de tres dados o de un dado tras tres lanzamientos, hay 216 tripletas posibles que indican todos los resultados. Pero estos casos no significan que sean todos favorables a que la suma de sus pintas o números sea igual a 18.

Veamos los casos favorables.
Sea A el evento definido como que, al lanzar tres dados, la suma de las pintas, sea 18.
A = {(6, 6, 6} Es decir, el número de tripletas favorables a que la suma de sus pintas sea 18 es una sola.
Por lo tanto, aplicando la definición de Laplace, la probabilidad pedida es

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{\#A}{\#E} = \frac{1}{216}$$

Alternativa C).

43. Alberto, Bastián y Carlos juegan a lanzar un dado 2 veces y gana el que obtiene una suma par. En el primer lanzamiento Alberto obtiene un 2, Bastián un 3 y Carlos un 6.
¿Cuál de las afirmaciones siguientes es verdadera?

A) todos tienen probabilidad ½ de ganar.
B) todos tienen probabilidad 1/3 de ganar.
C) el que tiene más probabilidad de ganar es Carlos.
D) Carlos tiene más probabilidad de ganar que Alberto.
E) Bastián tiene menos probabilidad de ganar que Alberto y Carlos.

Solución:
Analicemos cada alternativa.
Sea A ≡ Gana Alberto. Para ello debe obtener en el próximo lanzamiento los números {2, 4, 6}
$\Rightarrow$ P(A) = 3/6 = ½.
Sea B ≡ Gana Bastián. Para ello debe obtener en el próximo lanzamiento los números {1, 3, 5}
$\Rightarrow$ P(B) = 3/6 = ½.
Sea C ≡ Gana Carlos. Para ello debe obtener en el próximo lanzamiento los números {2, 4, 6}
$\Rightarrow$ P(C) = 3/6 = ½.

Luego, observamos que todos tienen probabilidad ½ de ganar.
Alternativa A).

44. Al finalizar un programa de televisión, se realiza una encuesta, de la cuál se obtienen los siguientes resultados: A 20 les agradó el programa; a 5 no les agradó; 20 miraron otros programas; 5 no miraron televisión; Total de encuestados: 50.
Al elegir al azar a un encuestado que miró televisión, la probabilidad que viera el programa es

A) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{9}{10}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{9}$

Solución:
Los casos favorables a los que vieron el programa son 20 + 5 = 25.
Los casos posibles son sólo los que vieron televisión, es decir, 45.
Por lo tanto, la probabilidad pedida es

$P(\text{miraron televisión}) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ Alternativa C).

45. En un colegio hay 156 alumnos en 5º básico, de los cuáles 120 usan transporte escolar. De estos últimos, la mitad hace uso del casino del colegio, mientras que sólo 12 de los que no usan transporte escolar acuden al casino. Se elige al azar un alumno de 1º medio, ¿cuál es la probabilidad de que no asista al comedor si se sabe que no utiliza transporte escolar?

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{3}{5}$

Solución:
Sólo basta considerar a los alumnos de 1º medio que no utilizan transporte escolar. Los cuáles son 156 – 120 = 36.
Además nos indican que 12 de estos asisten al casino. Por lo tanto, 24 no lo hacen.
Así, la probabilidad pedida es $P = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$
Alternativa E).

46. En un curso integrado por 16 damas y 14 varones, se sabe que 10 damas y 12 varones prefieren Coca Cola y el resto Sprite. Si elegimos un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ese estudiante sea varón y prefiera Sprite?

A) $\frac{2}{30}$ C) $\frac{12}{30}$ E) $\frac{12}{14}$

B) $\frac{6}{30}$ D) $\frac{2}{14}$

Solución:
Lo que se solicita se puede expresar como:
$P(A \cap B)$ Donde A ≡ El estudiante sea varón; B ≡ Prefiera Sprite.

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Estudiantes Varones y que prefieran Sprite}}{\text{Todos los alumnos (as) entrevistados (as)}} = \frac{2}{30}$$
Alternativa A).

47. Al finalizar un programa de televisión se realizó una encuesta respecto del mismo, obteniéndose los resultados que se muestran en la siguiente tabla:

Le agradó	no le agradó	vio otro programa	no vio televisión	total
20	5	20	5	50

Al elegir al azar a un encuestado que vio televisión, la probabilidad de que viera el citado programa es

A) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{9}{10}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{4}{9}$

Solución:
Del enunciado solo interesa considerar para el total, a aquellas personas **que vieron televisión**, que fueron 45.

$$P(\text{viera el programa}) = \frac{\text{nº de los que les agradó + nº de los que no les agradó}}{\text{total de los que vieron televisión}} = \frac{20+5}{20+5+20} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

Alternativa C).

48. La siguiente tabla muestra el número de alumnos de un colegio, matriculados en cada uno de los niveles de enseñanza media:

	1º Medio	2º Medio	3º Medio	4º Medio
Mujeres	50	82	76	82
Varones	73	99	103	125

¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un escolar de enseñanza media al azar, éste sea de 1º medio, sabiendo que es mujer?

A) $\frac{50}{123}$ C) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{123}{300}$

B) $\frac{1}{14}$ D) $\frac{123}{700}$

Solución:
Sabiendo que es mujer, vale considerar sólo como casos totales la suma de mujeres que hay de 1º medio hasta 4º medio. Esto es, 50 + 92 + 76 + 82 = 300
Y como casos favorables, solo las mujeres existentes en 1º medio. Esto es, 50.
Luego, la probabilidad pedida es

$$P = \frac{50}{300} = \frac{1}{6}$$

Alternativa C).

Prof.: Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

49. Dos jugadores juegan a lanzar tres dados y a hacer la suma de los tres. Uno elige la suma de 9 y el otro la suma de 10. ¿Tienen los dos la misma probabilidad de alcanzar sus resultados?
    A) P(A) = 0,5 y P(B) = 0,5
    B) P(A) ≈ 0,1157 y P(B) = 0,125
    C) P(A) = 0,12 y P(B) = 0,88
    D) P(A) = 0,125 y P(B) = 0,875
    E) P(A) ≈ 0,1137 y P(B) ≈ 0,115

Solución:
La base del espacio muestral son los resultados otorgados por el lanzamiento de un solo dado.
E' = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ⇒ #E' = 6
Para n dados, la cardinalidad o casos totales del espacio muestral es $\#E = (\#E')^n$.
Para tres dados, n = 3: $\#E = (\#E')^3 = 6^3 = 216$.

Sea A ≡ Obtener una suma de 9, tras tres lanzamientos.

$$\Rightarrow A = \{ \underbrace{(1,2,6)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(1,3,5)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(1,4,4)}_{\substack{\frac{3!}{2!} \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(2,2,5)}_{\substack{\frac{3!}{2!} \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(2,3,4)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(3,3,3)}_{\substack{\frac{3!}{3!} \\ \text{permutaciones}}} \}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \#A &= 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{3!} \\ &= 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 \\ &= 25 \text{ casos favorables.}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{25}{216} \approx 0{,}1157$$

B ≡ Obtener una suma de 10 tras tres lanzamientos.

$$\Rightarrow B = \{ \underbrace{(1,3,6)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(1,4,5)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(2,2,6)}_{\substack{\frac{3!}{2!} \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(2,3,5)}_{\substack{3! \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(2,4,4)}_{\substack{\frac{3!}{2!} \\ \text{permutaciones}}}, \underbrace{(3,3,4)}_{\substack{\frac{3!}{2!} \\ \text{permutaciones}}} \}$$

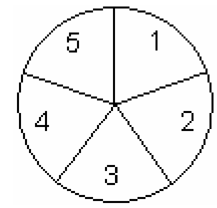
$$\begin{aligned}\Rightarrow \#B &= 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \\ &= 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 \\ &= 27 \text{ casos favorables.}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\#B) = \frac{27}{216} = 0{,}125$$

Alternativa B).

II. **Probabilidad Porcentual**

50. Si siempre se acierta en la ruleta de la figura, formada por cinco sectores circulares iguales, ¿cuál es la probabilidad de que en un lanzamiento resulte 2?
    A) 144%
    B) 40%
    C) 20%
    D) 4%
    E) 2%



Solución:
Hay un único sector circular favorable a lo solicitado de un total de 5, por lo tanto,
$$P(\text{Obtener } 2) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} \bullet 100\% = \frac{2}{5} \equiv \frac{2}{5} \bullet 100\% = 2 \bullet 20\% = 40\%$$
Alternativa B).

51. En una caja se tienen fichas de 1 al 50 numeradas. Si se saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el número de la ficha extraída no sea mayor que 20?
    A) 20%
    B) 30%
    C) 40%
    D) 60%
    E) 80%

Solución:
$$P(n \leq 20) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0,4 \equiv 0,4 \bullet 100\% = 40\%$$
Alternativa C).

52. Seleccionamos al azar una carta de la baraja española. La probabilidad de que la carta seleccionada sea figura, sabiendo que salió oro es:
    A) 10%
    B) 20%
    C) 25%
    D) 30%
    E) 40%

Solución:
La baraja española consta de 40 cartas, 10 de cada pinta, de las cuáles 3 son figuras, entonces, la probabilidad es $p = \frac{3}{10} \equiv \frac{3}{10} \bullet 100\% = 3 \bullet 10\% = 30\%$
Alternativa D).

53. Una caja contiene una mezcla de bolitas rojas y azules indistinguibles al tacto, que en total suman 8000. Se saca una bolita al azar con reposición y se repite 100 veces este experimento. Se obtuvo 21 veces una bolita roja y 79 veces una de color azul. Entonces, la probabilidad de extraer una bolita roja es:
    A) 8000 • 21%
    B) 8000 • 21%
    C) 21%
    D) 79%
    E) 21 • 79%

Solución:
No importa el número total de bolitas en la caja, si de 100 extracciones con reposición se obtuvo 21 rojas, entonces la probabilidad de extraer una bolita roja es 21%.
Alternativa C).

54. Se recoge información en estudiantes sobre el uso de transporte colectivo para llegar de la casa al liceo, elaborando la siguiente tabla:

Transporte colectivo	alumnos	alumnas
Usa	60	20
No usa	40	80

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea hombre, dado que usa transporte colectivo es:

A) 40%
B) 50%
C) 60%
D) 80%
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
El hecho o condición aceptada y conocida, es que el estudiante elegido ya usa transporte colectivo. Por lo tanto, solo de la suma ellos salen los casos totales.
La primera fila después del encabezado de la tabla muestra la suma de estudiantes que lo hacen: 60 + 20 = 80. De esta suma, los hombres son 60. Ellos representan los casos posibles del total de estudiantes (alumnos y alumnas) que usan transporte, lo que traducido a una probabilidad porcentual es:

$$p = \frac{60}{80} = \frac{3}{4} \equiv \frac{3}{4} \bullet 100\% = 3 \bullet 25\% = 75\%$$

Luego, la probabilidad de que un estudiante elegido al azar sea hombre que usa transporte colectivo es 75%.
Alternativa E).

Considerar correcta la alternativa C) es un error, puesto que ella se refiere a la probabilidad de elegir a un estudiante que use transporte colectivo, poniendo como condición "se sabe que el estudiante elegido es hombre".
Mientras que la probabilidad pedida tiene como condición "se sabe que el estudiante elegido usa transporte colectivo", viendo a partir de ello cuántos son hombres.

Prof.: Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

III. Probabilidad de eventos independientes

55. Si se lanza una moneda normal tres veces, la probabilidad de obtener tres sellos es:

A) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{6}$ D) 1

Solución:
Cada lanzamiento es independiente del resultado de los otros.
Además, la probabilidad de obtener sellos en un lanzamiento es $1/2$. Por lo tanto, la probabilidad de cada obtención de una cara (S) se multiplicará con las otras probabilidades.

$$P(\text{tres caras}) = P(S) \bullet P(S) \bullet P(S)$$
$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Alternativa A).

56. Una moneda se lanza tres veces, ¿cuál es la probabilidad de que las tres veces salga cara?

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{16}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{8}$

Solución

La probabilidad de que salga cara en un lanzamiento es $\frac{1}{2}$.

En tres lanzamientos independientes entre sí, donde el resultado de uno no afecta los resultados de los otros lanzamientos, la probabilidad es:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

La respuesta es D).

57. Sobre la base de información histórica, se estima que el “Chino” Ríos tiene una probabilidad 2/3 de ganarle a P y de 3/4 de ganarle a Q. Si en un torneo debe enfrentarlos, ¿Cuál es la probabilidad de ganarle a ambos?

A) 5/ 7 C) 0,45 E) 5/12

B) 50% D) 8 : 9

Solución:
Los eventos de ganarle a cada uno son independientes entre sí, por lo tanto, la probabilidad pedida es el producto de cada una de ellas.

$$p = \frac{2}{3} \bullet \frac{3}{4}$$ (simplificando por 2 y 3 obtenemos...)

$$= \frac{1}{2}$$

$$\equiv \frac{1}{2} \bullet 100\%$$ (nos consultan por una probabilidad porcentual)

$$= 50\%$$

Alternativa B).

58. Cierta águila tiene una probabilidad $\frac{3}{5}$ de lograr capturar su presa en cada intento. Si esto es así y cada intento es independiente de otro, ¿cuál es la probabilidad de que en una cacería logre atrapar una presa en el segundo intento, puesto que no lo hizo en el primero?
   A) 3/5
   B) 2/5
   C) 4/25
   D) 6/25
   E) 9/25

Solución:
En el primer intento falla, lo cuál es un evento complementario y tiene una probabilidad de fallar de $1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$.

En el segundo evento, acierta con una probabilidad de $\frac{3}{5}$.

Como los eventos son independientes, la probabilidad pedida es el producto de cada una de las probabilidades anteriores, como se muestra a continuación:
$\frac{2}{5}\bullet\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$
Alternativa D).

59. Se extrae una carta de una baraja de 52 naipes. Se repone y se extrae una segunda carta. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean reyes?
   A) $\frac{1}{182}$ C) $\frac{1}{663}$ E) $\frac{4}{52}$
   B) $\frac{1}{169}$ D) $\frac{2}{52}$

Solución:
Sea A ≡ Obtener un rey de un mazo de 52 cartas.
Hay 4 reyes en el mazo. Por lo tanto, $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.
Al reponer la carta, cada extracción es independiente de la anterior, esto quiere decir que no se ve afectado el valor de obtener la misma probabilidad de obtener un rey.
Además, por ser eventos independientes, se multiplica el valor según el número de extracciones con reposición que hay, que son dos.
Así, $P(\text{extraer dos reyes en dos extracciones y con reposición})=\frac{1}{13}\bullet\frac{1}{13}=\frac{1}{169}$
Alternativa B).

60. El macabro juego de la ruleta rusa (no recomendado por el autor), consiste en introducir una bala en una de las seis recámaras del cilindro del revólver, dejando las otras cinco vacías. Ahora,... si cada juego consiste en hacer girar el cilindro, apuntar a la cabeza y apretar el gatillo. ¿Cuál es la probabilidad de estar vivo después de jugar dos veces?

A) $\frac{11}{36}$ C) $\frac{25}{36}$ E) $\frac{1}{6}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{18}$

Solución:

Cada vez que se hace girar el cilindro, la probabilidad de que salga el disparo es $\frac{1}{6}$.

Por lo tanto, la probabilidad de sobrevivir a cada juego $\frac{5}{6}$.

Como los juegos son independientes, la probabilidad de sobrevivir a dos juegos es:

$$\underbrace{\frac{5}{6}}_{1^\circ \text{ juego}} \bullet \underbrace{\frac{5}{6}}_{2^\circ \text{ juego}} = \frac{25}{36}$$

Alternativa C).

61. Se lanza un dado dos veces. ¿Cuál es la probabilidad de que en el primer lanzamiento resulte 3 y en el segundo lanzamiento un número impar?

A) 1/6 C) 1/9 E) 1/36

B) 1/2 D) 1/12

Solución:

Sean los eventos:

- A ≡ Obtener un 3. De seis números posibles, hay un solo 3 $\Rightarrow$ P(A) = $\frac{1}{6}$
- B ≡ Obtener un número impar.

De seis números posibles, tenemos tres impares $\Rightarrow$ P(B) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Los eventos A y B son independientes, por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{6} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Alternativa D).

62. Una persona muy distraída ha extraviado el número telefónico de su mejor amigo, pero logra averiguar las 5 cifras intermedias de un total de 7. Sabiendo además que el primer dígito debe ser par, distinto de 0 y que la última cifra es impar mayor que 4, ¿cuál es la probabilidad de acertar al número de teléfono de su amigo?

A) $\frac{1}{10}$

B) $\frac{1}{12}$

C) $\frac{2}{13}$

D) $\frac{1}{2}$

E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Solo debe adivinar dos dígitos, el primero y el último.
Las posibilidades para el primer número son –par y distinto de cero–: 2, 4, 6, 8.
Las posibilidades para el segundo número son –impar y mayor que 4–: 5, 7, 9.
Sean los eventos:
A ≡ Acertar el primer dígito. Entonces $P(A) = \frac{1}{4}$.B ≡ Acertar el segundo dígito. Entonces $P(B) = \frac{1}{3}$. $A \cap B$ ≡ Acertar los dos dígitos.
Como son eventos independientes, la probabilidad de acertar los dos dígitos en el número telefónico de su amigo es el producto de ambas probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B) = \frac{1}{4} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Alternativa B).

63. Una persona que participa en un concurso debe responder verdadero o falso a una afirmación que se le hace en cada una de seis etapas. Si la persona responde al azar, la probabilidad que acierte en las seis etapas es

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{6}$

C) $\frac{1}{12}$

D) $\frac{1}{32}$

E) $\frac{1}{64}$

Solución:
Sea x la variable que indique el número de veces que acierta una etapa.
La probabilidad de acertar una afirmación es de ½. Como es una afirmación por etapa, se tiene la misma probabilidad de acertar una etapa es también ½.

$$P(x = 1) = \frac{1}{2}$$

Como todas las etapas son independientes, la probabilidad de acertar dos etapas es

$$P(x = 2) = \left(\frac{1}{2}\right) \bullet \left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Así sucesivamente, para n etapas, la probabilidad de acertar en todas ellas es:

$$P(x = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$ Para n = 6 etapas: $$P(x = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Alternativa E).

64. Un estudiante responde al azar 5 preguntas de verdadero y falso de una prueba. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte todas las preguntas?

A) $\left(\frac{1}{5}\right)^2$

B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

C) $5 \bullet \frac{1}{2}$

D) 0

E) $1 - \frac{5}{2}$

Solución:
Cada pregunta tiene dos respuestas posibles, las que constituyen los casos totales.
El caso favorable a cada respuesta correcta es una en cada pregunta.
Por lo tanto, la probabilidad de responder correctamente una pregunta es:

$$P(1\ \text{correcta}) = \frac{1}{2}$$

Responder cada pregunta constituye un evento independiente. Por lo tanto, se multiplica los resultado probable de acertar cada una de las 5 preguntas. Así, la probabilidad pedida es:

$$P(5\ \text{correctas}) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

Alternativa B).

65. Un test de selección múltiple consta de 30 preguntas. Cada pregunta tiene 4 posibles respuestas siendo sólo una de ellas la correcta. Si un alumno responde al azar cada pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que todas sus respuestas sean correctas?

A) $\frac{1}{4} \bullet 30$

B) $\left(\frac{1}{4}\right)^{30}$

C) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{30}}$

D) $4 \bullet 30$

E) $\frac{1}{4}$

Solución:

Hay una alternativa correcta de un total de cuatro en cada pregunta. Por lo tanto, la probabilidad de acertar una es $\frac{1}{4}$.

Como cada pregunta es independiente de las otras, la probabilidad final es el producto de las probabilidades de cada una de las 40 preguntas. Es decir,

$$P(30\ \text{aciertos}) = \underbrace{\frac{1}{4} \bullet \frac{1}{4} \bullet \cdots \bullet \frac{1}{4}}_{\text{treinta veces}} = \left(\frac{1^{30}}{4^{30}}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{30}$$

Alternativa B).

66. Un alumno contesta las 70 preguntas de la P.S.U. de matemáticas al azar. Si cada pregunta tiene 5 alternativas y sólo una de éstas es correcta, entonces ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el puntaje máximo?

A) $70 \bullet \frac{1}{5}$ C) $1-\left(\frac{1}{5}\right)^{70}$ E) 1/70

B) $1-70 \bullet \frac{4}{5}$ D) $\left(\frac{1}{5}\right)^{70}$

Solución:
Hay una alternativa correcta de un total de cinco en cada pregunta. Por lo tanto, la probabilidad de acertar una es una de cuatro, es decir, $P(x=1)=\frac{1}{5}$.

Para obtener el puntaje máximo se debe acertar las 70 preguntas, independientes entre sí. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$P(x=70)=\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)\bullet\left(\frac{1}{5}\right)\bullet\bullet\bullet\left(\frac{1}{5}\right)}_{70\text{ veces}}=\left(\frac{1}{5}\right)^{70}=\frac{1}{5^{70}}$$

La alternativa correcta es D).

67. Un alumno en un examen debe contestar verdadero o falso a cada una de seis preguntas. Si el alumno responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de que conteste correctamente las cinco últimas preguntas, si acertó en la primera?

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{64}$

B) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{32}$

Solución:
Sea x la variable que indica el número de veces que se acierta una pregunta. Entonces, si la respuesta correcta se halla entre dos alternativas, la probabilidad de acertar una pregunta es una de dos, es decir:

$P(x=1)=\frac{1}{2}$.

Y como todas las preguntas son independientes, la probabilidad de acertar las últimas cinco es

$$P(x=5)=\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)\bullet\bullet\bullet\left(\frac{1}{2}\right)}_{5\text{ veces}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

Alternativa D).

68. Un restaurante ofrece un almuerzo en que se pueden elegir 2 entradas, 3 platos de fondo y 5 postres. Si no me gustan 2 de los platos de fondo y 3 de los postres. ¿Cuál es la probabilidad de que me toque un menú de mi agrado si la elección es el azar?

A) $\frac{1}{30}$ C) $\frac{2}{15}$ E) Ninguna de las anteriores.

B) $\frac{(2-1)(3-2)}{15}$ D) $\frac{2}{3}$

Solución:
Todo menú tendrá finalmente 1 entrada, 1 plato de fondo y 1 postre y la composición de cada uno de estos es independiente de los otros. Así, tendremos de seguro, varias probabilidades que multiplicar.
Denotemos las probabilidades de obtener entrada, fondo y postre de mi agrado, con P(entrada), P(fondo) y P(postre) respectivamente.
En la siguiente expresión consideramos en los numeradores solo los casos favorables que sean de mi agrado, mientras que en los denominadores, a la cantidad total de posibilidades de componerlos.
Así, la probabilidad de obtener un menú de mi agrado es:

$$P(\text{entrada}) \bullet P(\text{fondo}) \bullet P(\text{postre}) = \frac{2}{2} \bullet \frac{(3-2)}{3} \bullet \frac{(5-3)}{5} = 1 \bullet \frac{1}{3} \bullet \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$$

La alternativa correcta es C).

69. El procesador, la placa madre y la memoria tienen un 5%, 10% y 20% de probabilidades de fallar antes de un año respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de comprar un computador que presente fallas antes de un año en los tres componentes señalados?

A) 0,12 C) 0,01 E) 0,0001

B) 0,02 D) 0,001

Solución:
Sean los eventos:

A ≡ falla el procesador antes de un año. Por el enunciado, $P(A) = 5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$.

B ≡ falla la tarjeta madre antes de un año. D el enunciado, $P(B) = 10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$.

C ≡ falla la memoria antes de un año. Entonces, $P(C) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Como los tres eventos son independientes uno del otro, la probabilidad de que los tres fallen antes de un año es:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \bullet P(B) \bullet P(C) = \frac{1}{20} \bullet \frac{1}{10} \bullet \frac{1}{5} = \frac{1}{200 \bullet 5} = \frac{1}{1000}$$

Un milésimo.
Por lo tanto, la alternativa es D).

70. Según cierta información de prensa del año 2002, el tenista nacional Fernando González tenía un 45% de probabilidad de ganar al "Chino" Ríos y del 60% de ganar al "Nico" Massú. Si en un torneo de aquél año hubiese enfrentado a ambos, ¿Cuál es la probabilidad de que hubiese ganado sólo a uno de ellos?
    A) 24%
    B) 25%
    C) 45%
    D) 51%
    E) 55%

<u>Solución</u>:
Cada partido constituye *un evento independiente* del anterior, por lo tanto, se multiplicaran sus probabilidades.
Hay dos casos a considerar:

- Que venza a Ríos y pierda con Massú;

Con probabilidad $45\% \bullet 40\% = \frac{45}{100} \bullet \frac{40}{100} = \frac{45}{100} \bullet \frac{4}{10} = \frac{180}{100 \bullet 10} = \frac{18}{100} = 18\%$
Donde hemos utilizado sucesivas simplificaciones.

- Que venza a Massú y pierda con Ríos.

Con probabilidad $60\% \bullet 55\% = \frac{60}{100} \bullet \frac{55}{100} = \frac{6}{10} \bullet \frac{55}{100} = \frac{330}{10 \bullet 100} = \frac{33}{100} = 33\%$
Donde hemos utilizado sucesivas simplificaciones.

La probabilidad de ganar a uno solo de ellos tiene así dos opciones posibles y la probabilidad final viene dada por la suma de estas:
18% + 33% = 51%
Alternativa D).

IV. **Probabilidad de extracciones sin reposición**

71. Un estuche contiene 3 lápices rojos y 2 negros. Si se sacan uno a uno 2 lápices sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que esos lápices sean negros?

A) $\frac{1}{5}$ C) 3 E) $\frac{1}{10}$

B) $\frac{1}{100}$ D) $\frac{2}{5}$

Solución:

$$P(1^{\circ}\text{ lápiz negro}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{2}{5}$$

Tras satisfacerse esta probabilidad, queda en el estuche 1 lápiz negro y 4 lápices en total.

$$P(2^{\circ}\text{ lápiz negro}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de sacar dos lápices negros es: $\frac{2}{5} \bullet \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

Alternativa E).

72. En una tómbola hay 3 bolas rojas y 5 blancas. Se extraen una a una y sin reposición, dos bolas. La probabilidad de que ambas resulten rojas es:

A) $\frac{3}{28}$ C) $\frac{9}{56}$ E) $\frac{3}{4}$

B) $\frac{9}{64}$ D) $\frac{3}{32}$

Solución:

Los eventos de extracción son independientes, por lo tanto, la probabilidad pedida será el producto de cada una de las probabilidades individuales.

La 1° extracción tiene 3 casos favorables de un total de 8 bolas. La probabilidad es 3/8.

La 2° tiene 2 casos favorables de un total de 7 bolas que quedan. Su probabilidad es 2/7

Así, la probabilidad pedida es $\frac{3}{8} \bullet \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \bullet \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$

La alternativa es A).

73. Desde una tómbola en la que sólo hay 5 bolitas, 2 negras y 3 rojas, se extraen dos, de una en una y sin reposición. Entonces, la probabilidad de que ambas resulten negras es:

A) 4/25 C) 1/5 E) 1/4

B) 1/10 D) 4/9

Solución:

Los eventos de extracción son independientes, por lo tanto, la probabilidad pedida será el producto de cada una de las probabilidades individuales.

La 1° extracción tiene 2 casos favorables de un total de 5 bolas. Su probabilidad es 2/5.

La 2° extracción tiene 1 caso favorable de un total de 4 bolas que quedan.

Su probabilidad es 1/4

Así, la probabilidad pedida es $\frac{2}{5} \bullet \frac{1}{4} = \frac{1}{5} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

La alternativa es B).

74. En una urna hay 10 fichas blancas y 5 azules. La probabilidad de que, de dos fichas extraídas sin devolución, la primera ficha sea blanca y la segunda sea azul es:

A) 7/21	C) 3/8	E) Otro valor.
B) 16/21	D) 5/21	

Solución:
Sea B ≡ La primera ficha sea **b**lanca. A ≡ La segunda ficha sea **a**zul.
La probabilidad pedida es P(B) • P(A), y conforme a Laplace (casos favorables/casos totales), así:

$$P(B) \bullet P(A) = \frac{10}{15} \bullet \frac{5}{14} = \frac{5}{3} \bullet \frac{1}{7} = \frac{5}{21}$$

Alternativa D).

75. Se extraen dos cartas de una baraja española, una después de la otra sin devolución. La probabilidad que la segunda carta sea un rey, dado que la primera carta fue rey de bastos es:

A) 1/10	C) 1/13	E) 1/6
B) 1/4	D) 1/5	

Solución:
La baraja española consta de 4 reyes en 40 cartas. Después de la $1^{\underline{era}}$ extracción quedan 3 reyes en un total de 39 cartas. Entonces, la probabilidad pedida es $p = \frac{3}{39} = \frac{1}{13}$
Alternativa C).

76. Si Pedro tiene un llavero con 4 llaves y solo una de ellas abre una puerta. ¿Cuál es la probabilidad de que si prueba las llaves, logre abrir la puerta al tercer intento sin usar una llave más de una vez?

A) $\frac{1}{4}$	C) $\frac{9}{4}$	E) $\frac{9}{16}$
B) $\frac{3}{4}$	D) $\frac{3}{16}$	

Solución:
En el primer y segundo intento falla, por lo que hay que considerar solo como casos favorables aquellos en que la llave no es correcta.
En el tercer intento hay que considerar como caso favorable únicamente el caso en que la llave es correcta.
Como además no se repite ninguna llave, de un intento a otro habrá una llave menos.
La probabilidad pedida es:
P(abre 3º intento) = P(falla en 1º intento) • P(falla en 2º intento) • P(acierta en 3º intento)

$$= \frac{3}{4} \bullet \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{2}$$

$$= \frac{6}{24}$$

$$= \frac{1}{4}$$

Alternativa A).

77. De un naipe de 52 cartas se extraen consecutivamente 2 cartas al azar, sin restitución. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea el as de trébol y la segunda sea un 4?

A) $\frac{1}{52}\bullet\frac{4}{52}$ C) $\frac{1}{52}\bullet\frac{4}{51}$ E) $\frac{4}{52}\bullet\frac{4}{51}$

B) $\frac{1}{52}\bullet\frac{1}{52}$ D) $\frac{1}{52}\bullet\frac{1}{51}$

Solución:
Sea los eventos
A ≡ extraer un as de trébol de un mazo de 52 cartas

$$\Rightarrow\ P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}=\frac{\text{hay un solo as de trébol}}{\text{hay 52 cartas en total}}=\frac{1}{52}$$

B ≡ extraer un 4 de un mazo de 51 cartas.

$$\Rightarrow\ P(B)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}=\frac{\text{hay cuatros naipes con número 4 (1 por cada pinta)}}{\text{Quedan 51 cartas en total}}=\frac{4}{51}$$

La probabilidad pedida es $P(A)\bullet P(B)=\frac{1}{52}\bullet\frac{4}{51}$ Alternativa C).

78. Se toman una a una y sin reposición, cinco cartas de una baraja de 52. ¿Cuál es la probabilidad de que las cuatro primeras sean ases y la última, reina de diamantes?

A) $\frac{4!}{52}$ C) $\frac{4!\bullet 52!}{48}$ E) $\frac{4!\bullet 47!}{52!}$

B) $\frac{4!}{52!}$ D) $\frac{4!\bullet 47!}{51!}$

Solución:
Cada extracción es sin reposición, por lo que la cantidad de cartas (y particularmente ases), va disminuyendo de una en una.
Además, cada extracción es independiente. La probabilidad pedida viene dada por:

$$\frac{4}{52}\bullet\frac{3}{51}\bullet\frac{2}{50}\bullet\frac{1}{49}\bullet\frac{1}{48}=\frac{4!}{52\bullet 51\bullet 50\bullet 49\bullet 48}=\frac{4!\bullet 47!}{52\bullet 51\bullet 50\bullet 49\bullet 48\bullet 47!}=\frac{4!\bullet 47!}{52!}$$

La alternativa correcta es E).

Otra forma, empleando combinatoria:
Sea A ≡ elegir 4 ases de una baraja de 52 cartas.
Sea B ≡ elegir 1 reina de diamante del total de 48 cartas restantes, si se extrajeron ya los ases.
No importa el orden en que se escojan los ases entre sí, por tanto:

$$\#A=\binom{4}{4}\binom{48}{0}=\frac{4!}{0!\bullet 4!}\bullet\frac{48!}{48!\bullet 0!}=1$$

$$\#B=\binom{1}{1}\binom{47}{0}=1$$

La cardinalidad del espacio muestral, o el número de casos posibles que hay, al extraer 4 cartas de un total de 52, viene dada, sin importar el orden en que se extraen, por:

$$\#E_{4\text{ cartas}}=\binom{52}{4}=\frac{52!}{48!\bullet 4!}$$

La cardinalidad del espacio muestral, o de casos posibles que hay, al extraer 1 carta de las 48 restantes viene dada, por:

$$\#E_{1\text{ carta}}=\binom{48}{1}=\frac{48!}{47!\bullet 1!}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\bullet P(B)=\frac{1}{\frac{52!}{48!\bullet 4!}}\bullet\frac{1}{\frac{48!}{47!\bullet 1!}}=\frac{48!\bullet 4!}{52!}\bullet\frac{47!\bullet 1!}{48!}=\frac{4!\bullet 47!}{52!}$$ Alternativa E).

79. Se sacan dos cartas de una baraja de 52, ¿cuál es la probabilidad que éstas sean un as y un diez?

A) $\frac{1}{13}$ C) $\frac{1}{169}$ E) $\frac{8}{663}$

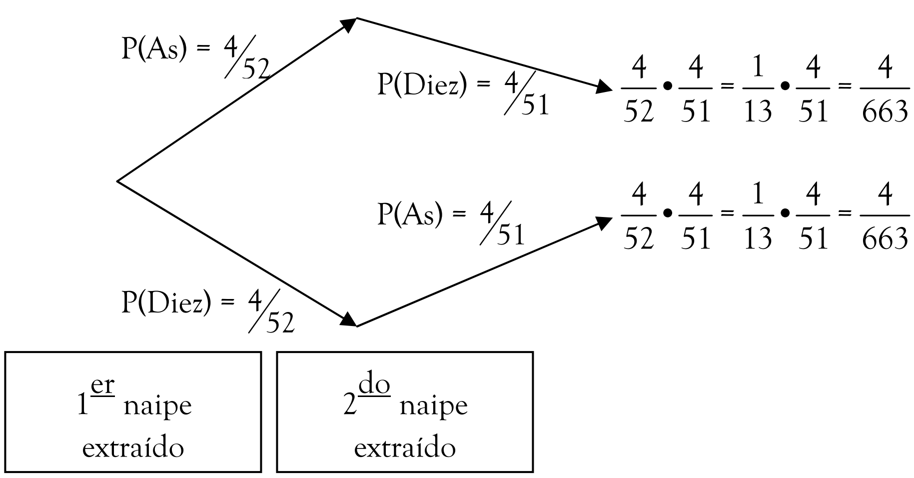
B) $\frac{8}{51}$ D) $\frac{2}{219}$

<u>Solución</u>:
Tenemos un evento sin sustitución que puede ocurrir de dos maneras. Ya sea si primero obtenemos el As y después un diez o viceversa. Además, al extraer la primera carta ya no habrá 52 en el mazo, sino que 51 para la próxima extracción. Por lo tanto la probabilidad pedida será una suma de probabilidades que considerará las dos maneras en que puede suceder lo pedido:
P(obtener un as y un diez) = P(Sacar 1º As y después 1diez + P(Sacar 1º diez y después el As)

$$= \frac{4}{52}\bullet\frac{4}{51}+\frac{4}{52}\bullet\frac{4}{51} = 2\left(\frac{1}{13}\bullet\frac{4}{51}\right) = \frac{8}{663}$$

Alternativa E).

<u>Otra forma</u>:
Empleando diagrama del árbol.



La probabilidad pedida viene dada por las suma de las probabilidades de las dos ramas del diagrama del árbol. Dado que el evento puede ocurrir tanto si se obtiene primero un as o un diez.

Así, P(obtener un as y un diez) = $2\left(\frac{1}{13}\bullet\frac{4}{51}\right) = \frac{8}{663}$

Alternativa E).

V. Probabilidad en unión de eventos que no se excluyen entre sí

80. Se elige al azar un número entero positivo del 1 al 19. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea múltiplo de 3 ó de 5?

A) $\frac{9}{19}$ C) $\frac{6}{19}$ E) $\frac{1}{19}$

B) $\frac{8}{19}$ D) $\frac{3}{19}$

Solución:
Como son 19 números, la cantidad de elementos del espacio muestral es # E = 19.
Sean los eventos:
A ≡ Obtener un número múltiplos de 3 y B ≡ Obtener un número múltiplos de 5.
Si podemos identificar la cantidad de elementos del espacio muestral A∪B lo resolvemos directamente como sigue:

$A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18\} \Rightarrow \# A \cup B = 8 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{8}{19}$

Alternativa B).

Otra forma:
Sabemos que:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*)

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{19}$

$B = \{5, 10, 15\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{19}$

$A \cap B \equiv$ Números múltiplos de 3 y 5 $= \{15\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{19}$

Reemplazando P(A), P(B) y P(A∩B) en (*) obtenemos:

$P(A \cup B) = \frac{6}{19} + \frac{3}{19} - \frac{1}{19} = \frac{6+3-1}{19} = \frac{8}{19}$ Alternativa B).

81. Se lanza un dado normal. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número par o menor que 5?

A) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{5}{6}$ E) Ninguna de las anteriores.

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{7}{6}$

Solución:
Sea los siguientes eventos tras el lanzamiento de un dado.
Sean A ≡ obtener un número par $\Rightarrow A = \{2, 4, 6\}$
B ≡ obtener un número menor que 5 $\Rightarrow B = \{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\} \Rightarrow \# A \cup B = 5 \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{5}{6}$. Alternativa C).

Otra forma:
La probabilidad pedida es la unión de dos eventos, por lo tanto se tiene que es:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (*)
$A \cap B \equiv$ número par y menor que 5 $= \{2, 4\}$

$\#A = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6}$; $\#B = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{6}$; $\#(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

Reemplazando los valores de cada probabilidad en (*)

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Alternativa C).

82. Desde una tómbola con 36 bolitas numeradas del 1 al 36 se extrae una al azar. La probabilidad de que resulte un número par o número menor que 10 es:

A) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{27}{36}$

B) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{23}{36}$

Solución:
Al extraer una bola, tenemos 36 casos posibles o totales. Y Los casos favorables a extraer un número par, o menor que 10 son:
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36}

La probabilidad pedida es $p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{23}{36}$ Alternativa D).

83. De un naipe inglés de 52 cartas se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que resulte 8 o trébol?

A) $\frac{17}{52}$ C) $\frac{13}{52}$ E) $\frac{15}{52}$

B) $\frac{4}{13}$ D) $\frac{9}{26}$

Solución:
La probabilidad de que uno de los dos eventos A o B ocurran es:
$P(A\cup C) = P(A) + P(B) - P(A\cap C)$ (*)

$A \equiv$ Obtener un 8 $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{52}$ Pues existen 4 ochos en el naipe.

$B \equiv$ Obtener un trébol $\Rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$ Pues existen 13 tréboles en el naipe.

$A\cap C \equiv$ Obtener un 8 trébol $\Rightarrow P(A\cap C) = \frac{1}{52}$ Pues existe un solo ocho trébol.

Reemplazando estos valores en (*), obtenemos:

$P(A\cup C) = \frac{4+13-1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{8}{26} = \frac{4}{13}$ Alternativa B).

84. Se elige al azar un número entero entre los 30 primeros enteros positivos. ¿Cuál es la probabilidad de que el número sea primo o múltiplo de 5?

A) $\frac{1}{15}$ C) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{17}{30}$

B) $\frac{11}{150}$ D) $\frac{8}{15}$

Solución:
Es claro que al escoger un número al azar, tenemos 30 números posibles o totales.
Como nos piden uno u otro evento, usamos el teorema de la unión de eventos:
$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
Con $A \equiv$ escoger un número primo entre los 30 primeros enteros positivos
= {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29} Luego, # A = 10 $\Rightarrow P(A) = 10/30$.
y $B \equiv$ escoger un múltiplo de 5 = {5, 10, 15, 20, 25, 30} Así, #B=6 $\Rightarrow P(B) = 6/30$.
y $A\cap B \equiv$ escoger un número primo y múltiplo de 5 a la vez = {5}
Luego, # $(A\cap B) = 1 \Rightarrow P(A\cap B) = 1/30$.

Reemplazando las probabilidades de la derecha en el teorema:

$P(A\cup B) = \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{1}{30} = \frac{10+6-1}{30} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ Alternativa C).

85. Al lanzar un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 2 ó un 3?

A) 1/6	C) 1/4	E) 1/2
B) 1/5	D) 1/3	

Solución:
Sea A ≡ Obtener un 2. B ≡ Obtener un 3.
La probabilidad pedida es: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ **(I)**
Ambos son eventos mutuamente excluyentes, por lo tanto $P(A\cap B) = 0$.
Y $P(A) = P(B) = 1/6$
Con lo que la expresión (I) se transforma en:
$P(A\cup B) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-0 = \frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ Alternativa D).

86. Una ruleta tiene 36 sectores circulares iguales, numerados del 1 al 36. Los 12 primeros son rojos, los 12 siguientes azules y los 12 restantes negros. En este juego gana el número que sale indicado después de girar la ruleta. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar o un número de color rojo?

A) $\frac{12}{36}$	C) $\frac{22}{36}$	E) $\frac{30}{36}$
B) $\frac{18}{36}$	D) $\frac{24}{36}$	

Solución:
Los 36 números son todos los elementos del espacio muestral o números posibles de ser extraídos. Entonces, #E = 36.
Sean los eventos: A ≡ sale un número impar; entonces: $P(A) = \frac{18}{36}$
B ≡ sale un número pintado de color rojo, entonces: $P(B) = \frac{12}{36}$
$A\cap B \equiv$ números impares y de color rojo $= \{1,3,5,7,9,11\} \Rightarrow \#(A\cap B) = 6 \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{6}{36}$
Se solicita:
$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &= \frac{18}{36}+\frac{12}{36}-\frac{6}{36}\\ &= \frac{24}{36}\end{aligned}$$
Alternativa D).

VI. Probabilidad en eventos mutuamente excluyentes

87. Si A y B son dos sucesos mutuamente excluyentes y la probabilidad de A es 0,2 y la de B es 0,5. Entonces, la probabilidad de que ocurran ambos sucesos es:

A) 0,7 C) 0,3 E) 0
B) 0,01 D) 0,1

Solución:
Luego, la probabilidad pedida P(A∩C). Como los eventos son mutuamente excluyentes, P(A∩C) = 0.
Alternativa E).

88. Se tienen cinco libros de distintas materias: Matemática, Biología, Química, Física y Lenguaje. Si se toma uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que este sea de matemática o de física?

A) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$
B) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{4}{5}$

Solución:
Sean los eventos A ≡ Tomar el libro de Matemáticas.
B ≡ Tomar el libro de Física.
Los eventos son excluyentes, $P(A\cap B) = 0$.

Por lo tanto: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - 0 = \frac{2}{5}$

Alternativa B).

89. En la tabla adjunta, X representa el número de hijos por familia en un grupo de 20 familias seleccionadas al azar.
Si de este grupo se elige al azar una familia, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga uno o dos hijos?

A) 0,15
B) 0,3
C) 0,45
D) 0,5
E) 0,9

x	nº de casos
0	9
1	6
2	3
3	2

Solución:
El total de familias con uno o dos hijos son 6 + 3 = 9.

La probabilidad pedida es $p = \frac{9}{20} = 0{,}45$ Alternativa C).

90. En una bolsa se tienen 3 bolitas rojas, 2 blancas y 4 azules. Se saca una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja o azul?

A) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{1}{9}$ E) $\frac{2}{9}$
B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{7}{18}$

Solución:

$$P(\text{roja o azul}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\text{cantidad de bolas rojas} + \text{cantidad de bolas azules}}{\text{cantidad total de bolas en la bolsa}} = \frac{3+4}{3+2+4} = \frac{7}{9}$$

Alternativa A).

91. En una caja hay tarjetas numeradas correlativamente del 10 al 30 (es decir 10, 11, 12,…, 27, 28, 29, 30). La probabilidad de que al sacar una tarjeta al azar la suma de los dígitos sea 3 ó 4 es:

A) $\frac{5}{21}$
B) $\frac{1}{7}$
C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{4}$
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Hay 21 tarjetas numeradas (se incluye la tarjeta 10).
Las tarjetas cuya suma de dígitos da 3 ó 4 son: 12, 13, 21, 22 y 30.
Cinco casos favorables en total.
La probabilidad pedida es $p = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{5}{21}$
Alternativa A).

92. Una caja contiene 8 bolitas rojas, 5 amarillas y 7 verdes. Se extraer una al azar. Determinar la probabilidad de que la bolita extraída sea roja o verde.

A) $P(A\cup B) = 0{,}5$.
B) $P(A\cup B) = 0{,}1$
C) $P(A\cup B) = 0{,}75$
D) $P(A\cup B) = 0{,}35$
E) $P(A\cup B) = 0{,}65$

Solución:
Sea **R** ≡ extraer una bolita **r**oja. **V** ≡ extraer una bolita verde. ⇒ #R=8; #V=7; #E=20.

$$P(R \cup V) = P(R) + P(V) - \underbrace{P(R \cap V)}_{=0}$$

pues no hay bolas que sean rojas y verdes a la vez.

$$= \frac{\#R}{\#E} + \frac{\#V}{\#E} - 0$$
$$= \frac{8}{20} + \frac{7}{15}$$
$$= \frac{15}{20}$$
$$= \frac{3}{4}$$
$$= 0{,}75$$

Alternativa C).

93. Si escojo una carta de un mazo de 52, ¿cuál es la probabilidad de escoger un corazón o un diamante?

A) 0,3
B) 0,4
C) 0,5
D) 0,75
E) 0,8

Solución:
Sean A ≡ extraer una carta corazón.
B ≡ extraer un diamante.

Hay 13 cartas de cada pinta, luego:

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad \text{y} \quad P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25$$

La probabilidad de escoger un corazón o un diamante corresponderá a:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0,25 + 0,25 - P(A \cap B) \\ &= 0,5 - P(A \cap B) \qquad (*) \end{aligned}$$

Mientras que $A \cap B \equiv$ {extraer una carta que sea corazón y diamante} = $\varnothing$, entonces
$P(A \cap B) = 0$
Luego, la expresión (*) queda únicamente en 0,5.
Alternativa C).

94. En una bolsa hay 5 bolas azules, 7 blancas, 3 rojas. Se mete la mano una sola vez. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una azul o una blanca?

A) 1/12
B) 4/5
C) 8/11
D) 7/45
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Sea A ≡ Obtener una bola azul. B ≡ Obtener una bola blanca ⇒ #A=5; #B=7; #E=15.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\substack{0 \\ \text{pues no hay bolas azules} \\ \text{y blancas a la vez}}} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} - 0 = \frac{5}{15} + \frac{7}{15} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Alternativa B).

95. Se tiene una tómbola con bolitas numeradas del 10 al 25. ¿Cuál es la probabilidad de extraer dos bolitas, sin reposición, de modo que la suma de los números obtenidos sea par?

A) $\frac{1}{16}$ C) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{7}{15}$

B) $\frac{2}{16}$ D) $\frac{7}{30}$

Solución:

Se tienen 16 números en total, de los cuáles 8 son pares y 8 impares.

Los modos de obtener números cuya suma sea par, solo puede ocurrir de dos formas:

i) $A \equiv$ que los dos números sean pares.

ii) $B \equiv$ que los dos números sean impares.

Aparte de ser cada uno de los eventos sin reposición, son también mutuamente excluyentes entre sí. (No pueden ocurrir simultáneamente, así que $P(A \cap B) = 0$)

Por lo tanto, la probabilidad pedida, que puede ocurrir de dos formas por separado, es:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \text{donde } P(A \cap B) = 0$$

$$= \frac{8}{16} \bullet \frac{7}{15} + \frac{8}{16} \bullet \frac{7}{15}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \bullet \frac{7}{15}\right)$$

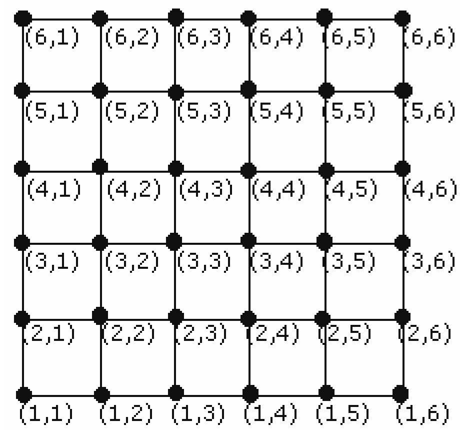
$$= \frac{7}{15}$$

Alternativa E).

En este ejercicio, un prestigioso Preuniversitario da como respuesta correcta la D), lo cuál es un error y carece de la respuesta correcta entre sus alternativas.

96. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la suma de 5 ó 7 al lanzar simultáneamente dos dados?
    A) 5/18
    B) 5/36
    C) 4/9
    D) 2/9
    E) 1/3

Solución:
La base del espacio muestral son los resultados otorgados por el lanzamiento de un dado.
$E' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow \#E' = 6$
Para n dados, $\#E = (\#E')^n$.
Y para n = 2 dados: $\#E = (\#E')^2 = 6^2 = 36$.
El espacio muestral está formado por 36 elementos, a los que hemos asociado un par ordenado de números, que indican los resultados del primer y segundo dado.
Sea S la variable aleatoria que indique la suma de los puntos en una sola tirada.
La probabilidad pedida viene dada por: P(S = 5) + P(S = 7)



Veamos el número de casos favorables para obtener cada suma y su respectiva probabilidad.

$S = 5 = \{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ $\qquad \#E_{S=5} = 4;$ $\qquad P(S = 5) = \frac{4}{36}$

$S = 7 = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$ $\qquad \#E_{S=7} = 6;$ $\qquad P(S = 7) = \frac{6}{36}$

Finalmente,
$$P(S = 5) + P(S = 7) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$
Alternativa A).

97. Se lanzan simultáneamente dos dados. La probabilidad de obtener dos números cuya suma sea 5 ó 12 es
    A) $\frac{5}{36}$ C) $\frac{3}{36}$ E) $\frac{1}{36}$
    B) $\frac{4}{16}$ D) $\frac{2}{36}$

Solución:
Se trata de la probabilidad de una unión de eventos mutuamente excluyentes, pues no hay dos números cuya suma sea 5 y 12 a la vez. Por lo tanto, se utiliza la expresión:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\qquad$ (*)
Donde:
$A \equiv$ obtener dos números cuya suma sea 5;
$B \equiv$ obtener dos números cuya suma sea 12;

Los casos favorables a obtener suma 5 son: $A = \{(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)\}$. Así, $P(A) = \frac{4}{36}$.

Mientras que el evento B solo puede suceder con $\{(6,6)\}$. Así, $P(B) = \frac{1}{36}$.

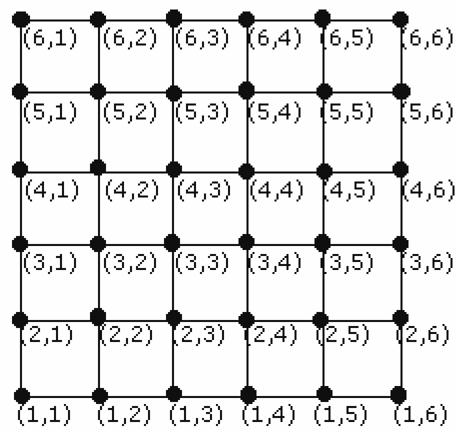
Finalmente, reemplazamos los valores de P(A) y P(B) en (*), obteniendo:
$$P(A \cup B) = \frac{4}{36} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$
Alternativa A).

98. Al lanzar dos dados comunes, ¿cuál es la probabilidad de obtener 10, como mínimo, en la suma de los puntos de una sola tirada?

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{6}$

Solución:
Consideremos los resultados posibles tras lanzar un par de dados. Asociando un par ordenado de valores que represente los resultados posibles del primero y segundo dado respectivamente.
El espacio muestral o todos los casos posibles tras lanzar dos dados viene dado por:



En este caso el espacio muestral está formado por 36 elementos.
Sea S la variable aleatoria que indique la suma de los puntos en una sola tirada.

$$P(S \geq 10) = P(S = 10) + P(S = 11) + P(S = 12)$$

Veamos el número de casos favorables para cada suma.

S=10 = {(4,6), (5,5), (6,4) }, $\#E_{S=10} = 3$; $P(S = 10) = \frac{3}{36}$

S=11 = {(5,6), (6,5)}, $\#E_{S=11} = 2$; $P(S = 11) = \frac{2}{36}$

S=12 = {(6,6)}, $\#E_{S=10} = 3$; $P(S = 12) = \frac{1}{36}$

Finalmente,

$$P(S \geq 12) = \frac{3+2+1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Alternativa D).

99. En una carrera de 100 metros planos, compiten cuatro atletas: A, B, C y D. Si A tiene el doble de probabilidad de ganar que B; C tiene la mitad que B de ganar y la probabilidad de D es igual a la de A. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I) La probabilidad de ganar C es $\frac{2}{11}$

II) La probabilidad de que A no gane es de $\frac{7}{11}$

III) La probabilidad de que A o C ganen es de $\frac{5}{11}$

A) Sólo I
B) Sólo II
C) Sólo III
D) Sólo I y II
E) Sólo II y III

Solución:
La menor probabilidad de ganar la tiene C.
Sea $P(C) = x \Rightarrow P(B) = 2x \Rightarrow P(A) = 4x \Rightarrow P(D) = 4x$.
Los eventos A, B, C y D son mutuamente excluyentes.

$$\sum P_i = 1$$
$$\Rightarrow x + 2x + 4x + 4x = 1$$
$$\Rightarrow 11x = 1$$
$$\Rightarrow x = \frac{1}{11}$$
$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{11};\ P(B) = \frac{2}{11};\ P(A) = \frac{4}{11};\ P(D) = \frac{4}{11}$$

I) Es falsa.

II) La probabilidad de que A no gane es: $1 - P(A) = 1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$. II) es verdadera.

III) La probabilidad de que A o C gane es: $P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)$
Como los eventos son mutuamente excluyentes, $P(A \cap C) = 0$.
Por lo tanto, la probabilidad de la unión de eventos queda:
$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = \frac{4}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$.
III) es verdadera.

Finalmente, sólo II) y III) son verdaderas.
Alternativa E).

VII. Probabilidad con eventos complementarios

100. Se calcula que la probabilidad de que un futbolista convierta un penal es de 0,89. ¿Cuál es la probabilidad de que no convierta el penal?

A) -0,89	C) 0,11	E) 0,89
B) -0,11	D) 0,21	

Solución:
Sea A el evento de convertir un penal, entonces, P(A) = 0,89.
La probabilidad de no convertir un penal viene dada por:
$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}89 = 0{,}11$.
Alternativa C).

101. En un contenedor hay 1.000 ampolletas, de las cuáles $\frac{1}{40}$ son defectuosas. Si se saca una ampolleta al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar una ampolleta no defectuosa?

A) $\frac{1}{40}$	C) $\frac{1}{39}$	E) 1
B) $\frac{39}{40}$	D) $\left(\frac{1}{40}\right)^{1.000}$	

Solución:
Sea el evento A ≡ Obtener una ampolleta defectuosa.
No importa la cantidad de ampolletas, pues ya se conoce la probabilidad del evento contrario o complementario a la pedida, así que usamos:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - \frac{1}{40} = \frac{40}{40} - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$$

Alternativa B).

102. Un avión de guerra sale con 2 misiles con la misión de destruir un objetivo enemigo. La probabilidad de que cada misil haga blanco en el objetivo es de 4/5, independiente uno del otro. Si el avión lanza ambos misiles en el ataque, ¿Cuál es la probabilidad de que no dé en el blanco?

A) 0,04	C) 0,16	E) 0,40
B) 0,20	D) 0,32	

Solución:
Que un proyectil no dé en el blanco constituye un evento complementario que la que indica el enunciado.

Por lo tanto, tal probabilidad es $1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Que ello ocurra dos veces sucesivas es $\frac{1}{5} \bullet \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0{,}04$

Alternativa A).

103. Si se lanzan dos monedas al aire, ¿Cuál es la probabilidad de que salga por lo menos una cara?

A) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{8}$

B) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{2}{3}$

Solución:
El evento es "Obtener al menos una cara".
Este evento significa y equivale a que debemos obtener una cara por lo menos tras dos lanzamientos de una moneda. Sin embargo, ¿que pasaría si no obtuviésemos ninguna cara? Es decir,
P(ningún cara) = P(todos sellos)
= P(sello 1° lanzamiento) • P(sello 2° lanzamiento)

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pues que esta es la probabilidad contraria a la pedida, esto es, que es la probabilidad de su evento complementario. Por lo tanto,
P(Obtener al menos una cara) = 1 – P(ninguna cara)

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$

Alternativa B).

Otra forma:
Vamos a efectuar una tabla de doble entrada que describa los resultados posibles para cada lanzamiento. Luego contaremos los casos dentro de tal tabla, en que hay por lo menos una cara.

Cara (C)	CC	CS
Sello (S)	SC	SS
	Cara (C)	Sello (S)

Dentro de la tabla hay cuatro casos posibles al combinar los resultados de ambas monedas. Los que tienen por lo menos una cara son 3. Por lo tanto, la probabilidad pedida es:

$$\text{P(Obtener al menos una cara)} = \frac{\text{combinaciones favorables}}{\text{combinaciones totales}} = \frac{3}{4}$$

Alternativa B).

104. Se lanza 3 veces una moneda. ¿Cuál es la probabilidad de que salga al menos un sello?

A) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{7}{3}$

B) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$

Solución:
El evento es "Obtener al menos un sello" significa que debemos obtener 1, 2 ó 3 sellos tras las tres tiradas. No se trata necesariamente de obtener un sello tras cada tirada, es decir, no se trata de obtener 3 sellos en total.
Así las cosas, es mejor preguntarse, ¿que pasaría si no obtuviésemos ningún sello?
Es decir,
P(ningún sello) = P(todas caras)
= P(cara 1° lanzamiento) • P(cara 2° lanzamiento) • P(cara 3° lanzamiento)

$$= \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Esta es la probabilidad contraria a la pedida, es decir, es la probabilidad del evento complementario a lo solicitado. Por lo tanto, aprovechando tal valor, la probabilidad pedida se obtiene de:
P(Obtener al menos un sello) = 1 – P(ningún sello)

$$= 1 - \frac{1}{8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

Alternativa A).

105. En un curso de 50 alumnos, las notas de la asignatura de inglés tienen la siguiente distribución:

Notas	Hasta 2,9	Entre 3,0 y 3,9	Entre 4,0 y 7,0
Número de alumnos	15	10	25

Al elegir un alumno del curso al azar, la probabilidad de que **no** tenga una nota entre 3,0 y 3,9 es

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{2}{10}$

B) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{3}{10}$

Solución:
La probabilidad pedida es el complemento de la siguiente probabilidad:

$$P(3,0 < x < 3,9) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} \qquad \text{Por lo tanto, } P(\text{pedida}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Alternativa C).

106. Según un informe del tiempo, se pronostica para mañana una probabilidad de lluvia de 0,4, así como 0,7 de que haga frío. Si ambos sucesos son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que mañana NO llueva ni tampoco haga frío?

A) 0,28
B) 0,90
C) 0,18
D) 0,12
E) 0,72

Solución:
Sea A ≡ mañana llueve; con P(A) = 0,4. B ≡ haga frío mañana; con P(B) = 0,7
La probabilidad pedida es $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \bullet P(B^c) = 0,6 \bullet 0,3 = 0,18$. Alternativa C).

107. José fue al hipódromo. En una de las carreras le gustan dos caballos; el primero tiene probabilidad de perder igual a 5/8 y la del segundo es de 2/3. ¿Qué probabilidad tiene de ganar si apuesta a los dos caballos?
   A) 17/24
   B) 1/8
   C) 31/24
   D) 5/12
   E) no se puede determinar.

   Solución:
   La probabilidad pedida es $P(A \cup B)$, donde:
   $A \equiv$ El primer caballo gana; $B \equiv$ El segundo caballo gana.
   Con los modernos mecanismos existentes actualmente para dirimir desempates, es prácticamente improbable que ambos ganen a la vez. Por lo tanto, los eventos son mutuamente excluyentes.
   Entonces, del enunciado tenemos que los eventos de perder son:
   $P(A^C) = \frac{5}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$;
   $P(B^C) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
   Usando el teorema de la unión de eventos:
   $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ con $P(A \cap B) = 0$, pues ambos caballos no ganarán simultáneamente.
   Tenemos que la probabilidad pedida es $P(A \cup B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{3} = \frac{9+8}{24} = \frac{17}{24}$
   Alternativa A).

108. Tengo que escoger una veta de un total de diez que existen en un yacimiento. Hay dos vetas que tienen oro y con probabilidad de 1/3 de derrumbarse. ¿Qué probabilidad tengo de hacerme millonario?
   A) 1/15
   B) 6/10
   C) 2/15
   D) 1/30
   E) Ninguna de las anteriores.

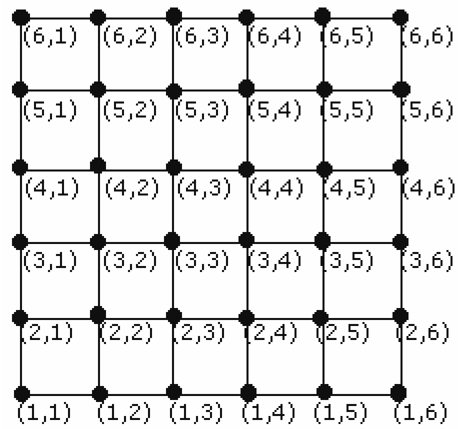
   Solución:
   Hay dos eventos. $A \equiv$ Escoger una veta con oro. $B \equiv$ La veta se derrumba.
   La probabilidad de hacerme millonario viene dada por:
   $$P(A) \bullet P(B^C) = \frac{\text{cantidad de vetas de oro}}{\text{cantidad total de vetas}} \bullet [1 - P(A)] = \frac{2}{10}\underbrace{\left[1 - \frac{1}{3}\right]}_{2/3} = \frac{2}{10} \bullet \frac{2}{3} = \frac{1}{5} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$
   Alternativa C).

109. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados, no se obtenga una suma igual a 10?

A) $\frac{3}{36}$ C) $\frac{18}{36}$ E) $\frac{34}{36}$

B) $\frac{6}{36}$ D) $\frac{33}{36}$

Solución:
Consideremos los resultados posibles tras lanzar un par de dados. Asociando un par ordenado de valores que represente los resultados posibles del primero y segundo dado respectivamente.
El espacio muestral o todos los casos posibles tras lanzar dos dados viene dado por:



En este caso el espacio muestral está formado por 36 elementos.
Es más fácil primero calcular la probabilidad de obtener 10 en la suma de sus caras porque los resultado o elementos del espacio muestral cuyas caras suman 10 son apenas tres casos: (6, 4), (5,5) y (4, 6).

Así, sea P(S=10) la probabilidad de que la suma de las caras sumen 10. Entonces,

$$P(S = 10) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{3}{36}$$

La probabilidad pedida (de que no sume 10), es la probabilidad del evento complementario $P(S^C)$, y por lo tanto

$$P(S^c) = 1 - P(S)$$

$$P(S^c) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{36-3}{36} = \frac{33}{36}$$

La respuesta es D).

110. Si la probabilidad de que llueva en Santiago durante abril es 1/30 y la probabilidad de que caigan 100 cc. durante seis meses anteriores es 1/40. ¿Cuál es la probabilidad de que no llueva en Santiago en abril y que no caigan 100 cc. durante seis meses previos a dicho mes?
   A) 1/1.200
   B) 1/70
   C) 29 • 39/1.200
   D) 69/70
   E) 1.199/1.200

Solución (Un conocido preuniversitario presenta una solución análoga e insastifactoria para un ejercicio con eventos dependientes. En nuestro caso, no tenemos este problema, pues los eventos son independientes).

Sea A ≡ Llueva en Santiago durante Abril. B ≡ Caigan 100 cc de agua durante seis meses previos a Abril.

$P(A^C)$: probabilidad que no llueva $= 1 - \frac{1}{30} = \frac{29}{30}$

$P(B^C)$: probabilidad que no caigan 100 cc $= 1 - \frac{1}{40} = \frac{39}{40}$

$P(A^C) \bullet P(B^C) = \frac{29}{30} \bullet \frac{39}{40} = \frac{29 \bullet 39}{1200}$

Alternativa C).

111. Si la probabilidad de trabajar en Diciembre es 2/7 y de que me vaya de vacaciones en Enero es 1/5. ¿Cuál es la probabilidad de no trabajar en Diciembre e irme de vacaciones en Enero?
   A) 2/35
   B) 8/35
   C) 1/7
   D) 6/7
   E) 32/35

Solución: (Un conocido preuniversitario capitalino presenta una solución análoga e insastifactoria para un ejercicio con eventos dependientes. En nuestro ejercicio, los eventos son independientes).

Sea A ≡ Trabajar en Diciembre. B ≡ Ir de vacaciones en Enero.
La probabilidad pedida es $P(A^C \cap B) = P(A^C) \bullet P(B)$ (*)

La probabilidad de no trabajar es $P(A^C) = 1 - P(A) = 5/7$, reemplazando este valor en (*).

$P(A^C) \bullet P(B) = \frac{5}{7} \bullet \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$

Alternativa C).

112. La probabilidad de iniciar un noviazgo es $\frac{2}{5}$ y la probabilidad de llegar a tiempo al registro civil el día de mi matrimonio es $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es la probabilidad de no casarme?

A) 70%
B) 30%
C) 60%
D) 25%
E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Sean los eventos:
$A \equiv$ iniciar un noviazgo. $B \equiv$ llegar a tiempo al registro civil.

Vamos a calcular primero la probabilidad de casarme y por defecto, la probabilidad del evento complementario, no casarme.
El evento de casarme viene dado por $A \cap B$, con A y B eventos independientes.
Y la probabilidad de casarme es:

$$P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B) = \frac{2}{5} \bullet \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

Luego, la probabilidad de no casarme es:

$$P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

En porcentajes es

$$P((A \cap B)^c) \bullet 100\% = \frac{7}{10} \bullet 100\% = 7 \bullet 10\% = 70\%$$

Alternativa A).

113. Si se saca al azar sólo uno de los primeros 20 números naturales, ¿cuál es la probabilidad de que el no sea par ni múltiplo de 3, ni de 5?
   A) 0,2
   B) 0,3
   C) 0,4
   D) 0,7
   E) 0,8

   Solución:
   Vamos a obtener la probabilidad de que el número sea par, o múltiplo de 3 o de 5 y luego obtendremos el complemento de tal probabilidad, que es la pedida.
   Como son 20 números, la cantidad de elementos del espacio muestral es $\# E = 20$.
   Sean los eventos:
   $A \equiv$ Obtener un número par. $B \equiv$ Obtener un número múltiplos de 3.
   $C \equiv$ Obtener un número múltiplos de 5.
   Vamos a ver el espacio muestral de $A \cup B \cup C$.
   $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20\} \Rightarrow \# A \cup B \cup C = 14$
   $$\Rightarrow P(A \cup B \cup C) = \frac{\#(A \cup B \cup C)}{\#E} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

   Esto nos dice que la probabilidad de obtener un número par o múltiplo de 3 ó 5 es 0,7.
   Luego, la probabilidad de obtener un número que NO sea par ni múltiplo de 3 ó 5 es:
   $1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.
   Alternativa B).

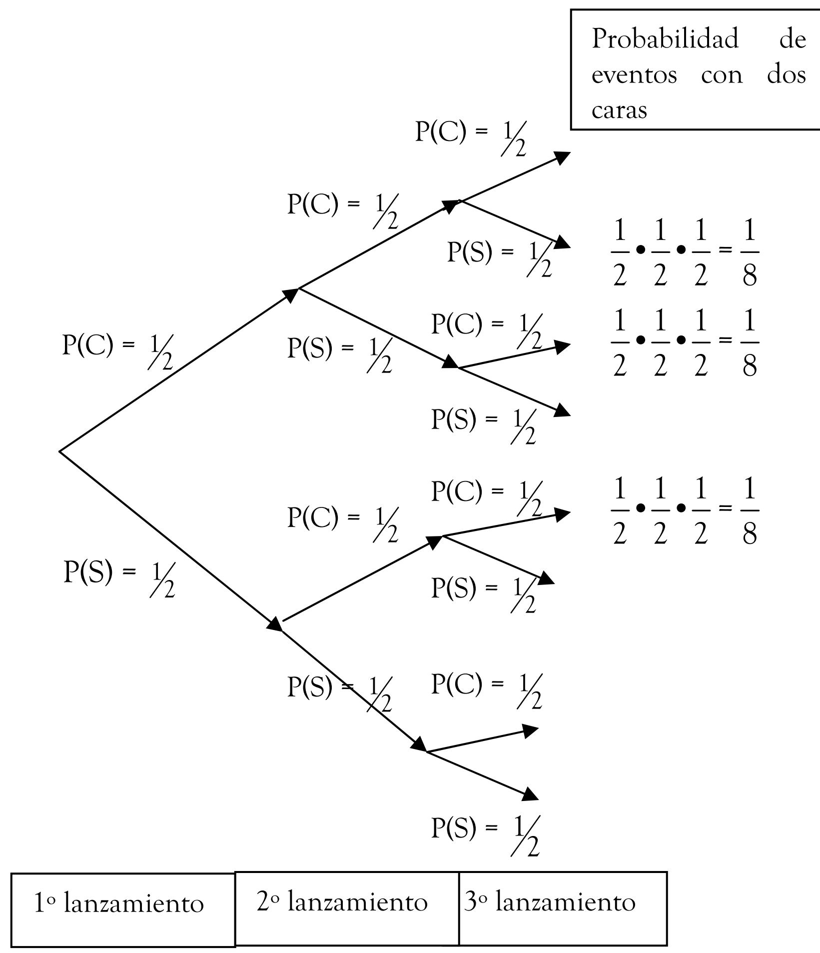
VIII. Empleo de diagramas de árbol

114. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar tres veces una moneda, se obtengan 2 caras?

A) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{4}{7}$

Solución:
Si solucionamos el ejercicio a través de un diagrama de árbol, obtendremos:



Hay 3 casos con 1/8 de probabilidad cada uno, de obtener 2 caras.
Por lo tanto, la probabilidad pedida es:
P(x =2 caras) = 3 · (1/8)
= 3/8.
Alternativa E).

115. Se lanza un dado honesto -no cargado. Si se obtiene un número par, entonces se lanza una moneda honesta. Si se obtiene un número impar, entonces se lanza un moneda con probabilidad de cara igual a $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la probabilidad total de obtener sello?

A) $\frac{3}{12}$

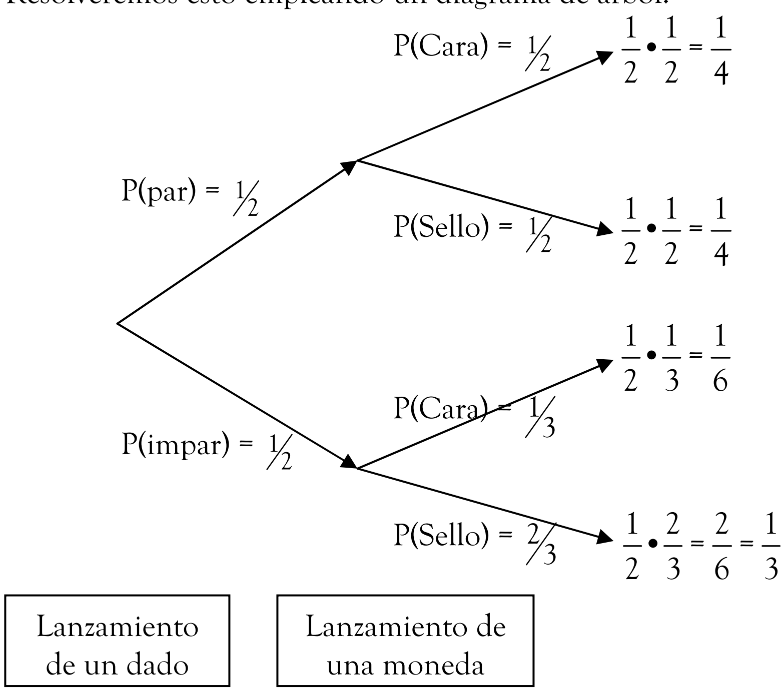
B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{5}{12}$

E) $\frac{7}{12}$

Solución:
Resolveremos esto empleando un diagrama de árbol.



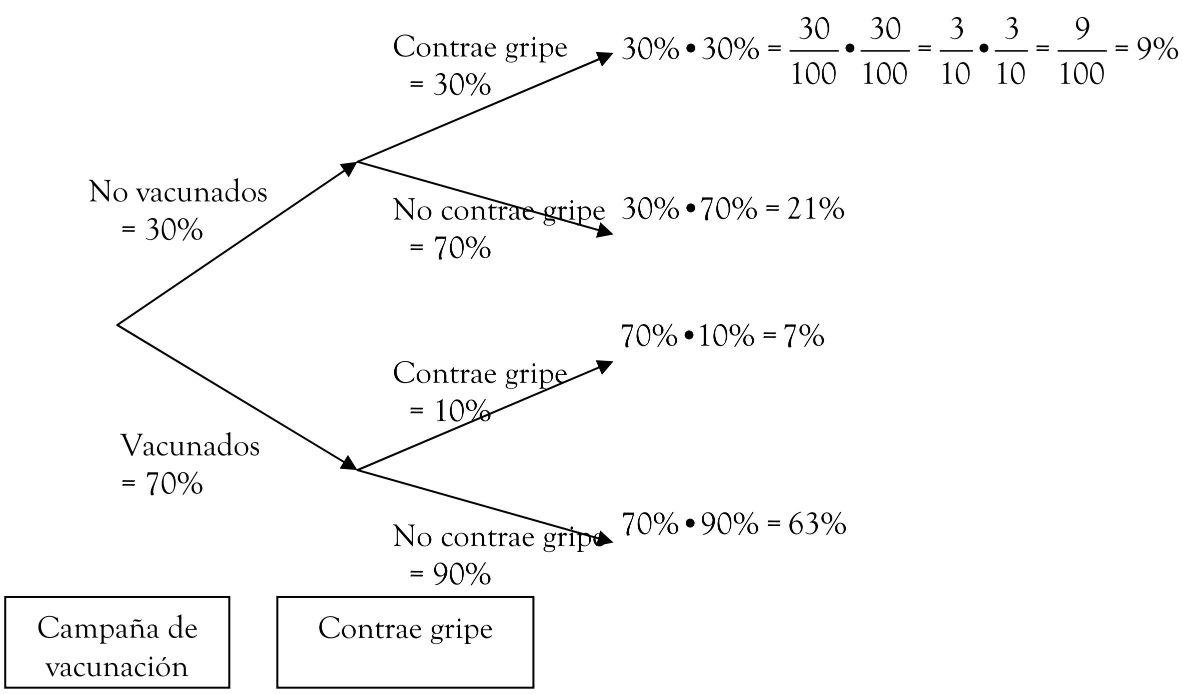
La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de aquellas ramas (flechas de la derecha) del árbol que tienen Sello. Esto es, de la suma que arroja la segunda y cuarta rama (flecha a la derecha) del árbol.

$$P(\text{Sello}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3+4}{12}=\frac{7}{12}$$

Alternativa E).

116. Se sabe que en determinado periodo invernal el 30% de la población escolar contrae gripe. Una campaña de vacunación alcanza una cobertura del 70% de esta población. Si de los vacunados, solo el 10% contrae gripe, ¿Cuál es la probabilidad de que un escolar contraiga gripe?
   A) 28%
   B) 21%
   C) 16%
   D) 30%
   E) 63%

Solución:
Con la información entregada es posible trazar el siguiente árbol:



Al seleccionar un alumno existen dos posibilidades:
- que no se halla vacunado, con un 9% de probabilidad de contraer gripe.
- que se halla vacunado, con un 7% de probabilidad de contraer gripe.

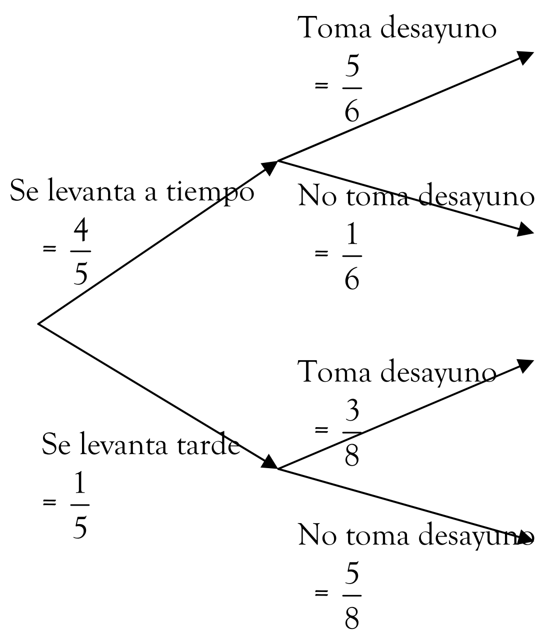
De entre los que no se vacunaron, la probabilidad de que un alumno contrae gripe.
Por lo tanto, la probabilidad pedida es $9\% + 7\% = 16\%$

Alternativa C).

Un destacado preuniversitario nacional calcula erróneamente el porcentaje de alumnos que no contrae gripe, de entre los que no se vacunaron, con un 21% en lugar de un 63%. Pero tal cálculo afortunadamente para ellos, se halla en una rama del árbol que no tiene ninguna incidencia con lo pedido, teniendo el resto del desarrollo y la alternativa, finalmente, correcta.

117. La probabilidad de que Andrea se levante a tiempo es 4/5 y la probabilidad de que alcance a tomar desayuno es 5/6. Mientras que si no se levanta a tiempo, la probabilidad de que alcance a tomar desayuno es 3/8.
Aproximadamente, la probabilidad de que en un día al azar, Andrea tome desayuno es:
   A) 80%
   B) 76%
   C) 50%
   D) 75%
   E) 74%.

Solución:
Utilizaremos diagrama de árbol siempre que halla una sucesión de distintas clases de eventos, dependientes entre sí.



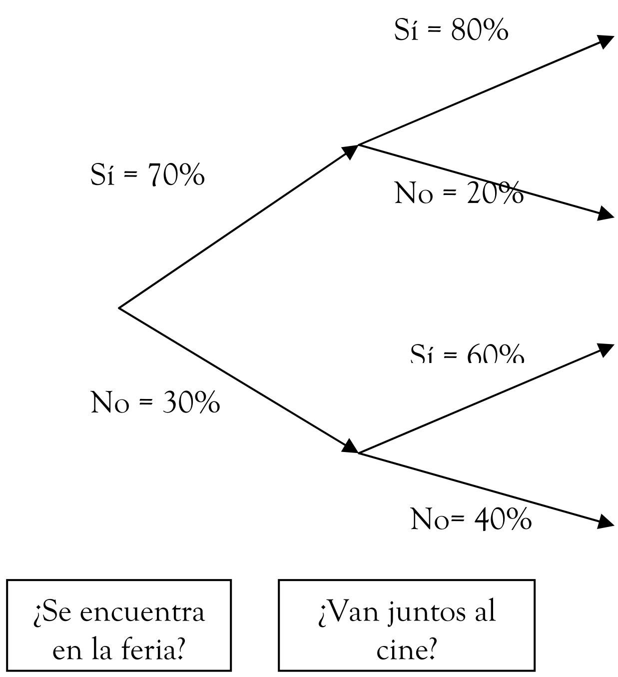
$$\frac{4}{5}\bullet\frac{5}{6}\bullet 100\% = \frac{4}{6}\bullet 100\% = \frac{2}{3}\bullet 100\% = 66,\overline{6}\%$$

$$\frac{1}{5}\bullet\frac{3}{8}\bullet 100\% = \frac{3\bullet 20\%}{8} = \frac{3\bullet 5}{2}\% = 7,5\%$$

La probabilidad de que tome desayuno es $66,\overline{6}\% + 7,5\% = 74,\overline{1}\% \approx 74\%$.
Alternativa E).

118. La probabilidad de que dos jóvenes se encuentren en la feria es del 70%. Y que después vayan al cine junto es del 80%. Cuando no se encuentran, se llaman por teléfono y en ese caso, la probabilidad de que vayan al cine juntos ese día, es del 60%. ¿Cuál es la probabilidad de que en un sábado cualquiera, no vayan juntos al cine?
   A) 6%
   B) 12%
   C) 26%
   D) 74%
   E) ninguna de las anteriores.

Solución:
Utilizaremos diagrama de árbol siempre que halla una sucesión de distintas clases de eventos, dependientes entre sí.



$$70\% \bullet 20\% = \frac{70}{100} \bullet \frac{20}{100} = \frac{7}{10} \bullet \frac{2}{10} = \frac{14}{100} = 14\%$$

$$30\% \bullet 40\% = 12\%$$

La probabilidad de que no vayan al cine juntos es la suma de probabilidades de aquellas ramas en las que se señala que no irán al cine.
En este caso, la 2º y 4º rama:
   14% + 12% = 26%
Alternativa C).

Una editorial que presenta contenidos a nivel de preparación preuniversitaria consideró como correcta la probabilidad del evento complementario, alternativa D). Ello es un error muy frecuente, pero en alumnos que no prestan la debida atención a lo que se pide en el enunciado. En este caso, que NO vayan al cine en un sábado, no su complemento, que SI vayan al cine un sábado.

IX. Probabilidad con enunciados en común

Los siguientes dos ejercicios, comparten el mismo enunciado.
Se extrae una bola de una caja que contiene 1 bola roja, 3 azules y 6 blancas.

119. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja o blanca?
   A) 10%
   B) 60%
   C) 70%
   D) 50%
   E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Hay 1 roja y 6 blancas, que son nuestros casos favorables, de un total de 10 bolas.
Es decir, la probabilidad pedida es
$$p = \frac{6+1}{10} = \frac{7}{10} \Rightarrow p \equiv \frac{7}{10} \bullet 100\% = 7 \bullet 10\% = 70\%$$
Alternativa C).

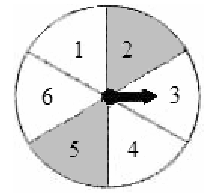
120. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar una bola roja?
   A) 0,9
   B) 0,1
   C) 9%
   D) 30%
   E) 60%

Solución:
Se solicita la probabilidad de la negación de un evento. Calcularemos la probabilidad de extraer una bola roja y posteriormente, la del evento complementario o negación del evento anterior. Veamos:
Hay 1 bola roja de un total de 10. Por lo tanto, $P(\text{roja}) = \frac{1}{10} = 0{,}1$
La probabilidad pedida es la del evento complementario, es decir:
$P(\text{roja})^C = 1 - P(\text{roja}) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$
Alternativa A).

Los siguientes dos ejercicios, comparten el mismo enunciado.
Una ruleta está dividida en seis sectores de igual medida (dos grises y 4 blancas). Se hace girar la ruleta dos veces consecutivas y se registra los colores al detenerse.

121. La probabilidad del suceso "caer gris en la 1º tirada y blanco en la 2º tirada" es

A) 4/9
B) 1/9
C) 5/9
D) 7/9
E) 2/9



Solución:
Las tiradas son independientes entre sí. Por lo tanto la probabilidad pedida es el producto de las probabilidades de cada uno de tales eventos.

La probabilidad de caer gris en la 1º tirada es $P(\text{gris}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

La probabilidad de caer blanco en la 2º tirada es $P(\text{blanco}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

La probabilidad pedida es $P(\text{gris}) \bullet P(\text{blanco}) = \frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Alternativa E).

122. En referencia a la figura anterior. ¿Cuál es la probabilidad de caer una vez en gris y una vez en blanco?

A) 4/9
B) 1/9
C) 5/9
D) 7/9
E) 2/9

Solución:
Esta vez, caer una vez en gris y una vez en blanco puede suceder de dos maneras distintas, pues no importa el orden en que ello suceda:
i) En el primer lanzamiento sale gris y en el segundo, blanco.

$$P(\text{gris}) \bullet P(\text{blanco}) = \frac{1}{3} \bullet \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

ii) En el primer lanzamiento sale blanco y en el segundo gris.

$$P(\text{blanco}) \bullet P(\text{gris}) = \frac{2}{3} \bullet \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

La probabilidad pedida incluye ambos casos, siendo la suma de ambas probabilidades:

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$$

Alternativa A).

Los siguientes dos ejercicios, comparten el mismo enunciado.
Una urna o caja contiene 4 bolas negras y 3 blancas.

123. La probabilidad de extraer dos bolas blancas con reposición es:

A) 4/7 C) 12/49 E) 1/7
B) 3/7 D) 9/49

Solución:
Las extracciones con reposición indican que la probabilidad de la segunda extracción no se ve afectada por la primera.
Es decir, cada vez que se extraiga una bola blanca habrá 3 casos favorables de un total de 7 bolas. La probabilidad de su extracción es $\frac{3}{7}$.
La probabilidad pedida será el producto de la probabilidad de dos extracciones independientes:
$$p = \frac{3}{7} \bullet \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$$
Alternativa D).

124. En referencia al enunciado anterior. La probabilidad de extraer dos bolas blancas sin reposición es:

A) 4/7 C) 12/49 E) 1/7
B) 3/7 D) 9/49

Solución:
- En la $1^{\underline{era}}$ extracción hay 3 casos favorables de un total de 7. La probabilidad para tal extracción es $p_{1^{\underline{era}}\text{ extracción}} = \frac{3}{7}$
- En la $2^{\underline{da}}$ extracción hay 2 bolas blancas de un total de 6. La probabilidad para esta extracción es $p_{2^{\underline{da}}\text{ extracción}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

La probabilidad pedida es el producto de ambas probabilidades: $\frac{3}{7} \bullet \frac{1}{3} = \frac{1}{7}$
Alternativa E).

Los siguientes dos ejercicios, comparten el mismo enunciado.
Una urna contiene 5 bolas, 3 negras y 2 grises. Se extrae, sin mirar, una bola.

125. La probabilidad de sacar primero una negra, devolverla y enseguida sacar una gris es:
   A) 3/5
   B) 1/2
   C) 1/10
   D) 3/10
   E) 6/25

Solución:
Tenemos dos eventos: $N \equiv$ extraer una bola negra.
$G \equiv$ extraer una bola gris.
Los eventos son independientes, por lo tanto:

$$P(N \text{ y } G) = P(N) \bullet P(G)$$
$$= \frac{\text{nº bolas negras}}{\text{nº total de bolas posibles a extraer}} \bullet \frac{\text{nº bolas grises}}{\text{nº total de bolas posibles a extraer}}$$
$$= \frac{3}{5} \bullet \frac{2}{5}$$
$$= \frac{6}{25}$$

Alternativa E).

126. La probabilidad de sacar primero una negra, NO devolverla y enseguida sacar una gris es:
   A) 3/5
   B) 1/2
   C) 1/10
   D) 3/10
   E) 6/25

Solución:
Aquí el segundo evento, el de sacar una bola gris, está condicionado al primero, al de sacar una bola negra. Esto porque como la bola que se saca no se devuelve, el nº total de bolas posibles de sacar, en la segunda extracción, disminuye en una.
Así,

$$P(N) = \frac{\text{nº bolas negras}}{\text{nº total de bolas posibles}} = \frac{3}{5}$$
$$P(G) = \frac{\text{nº bolas grises}}{\text{nº total de bolas posibles que quedan después de la 1º extracción}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Luego, la probabilidad de extraer una gris, dado que ya se extrajo una negra es:

$$P(G/N) = \frac{1}{2} \bullet \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$ Alternativa D).

X. Distribución de Bernoulli

127. Una persona que participa en un concurso debe responder verdadero o falso a una afirmación que se le hace en cada una de seis etapas. Si la persona responde al azar, la probabilidad que acierte en las seis etapas es

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{1}{64}$

B) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{32}$

Solución:
Sea x la variable que indique el número de veces que acierta una etapa.
La probabilidad de acertar una afirmación es de ½. Como es una afirmación por etapa, se tiene la misma probabilidad de acertar una etapa es también ½.

$$P(x = 1) = \frac{1}{2}$$

Como todas las etapas son independientes, la probabilidad de acertar dos etapas es

$$P(x = 2) = \left(\frac{1}{2}\right)\bullet\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Así sucesivamente, para n etapas, la probabilidad de acertar en todas ellas es:

$$P(x = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

Para n = 6 etapas:

$$P(x = 6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$ Alternativa E).

Otra forma:
Como es un experimento con las características de una distribución binomial o de Bernoulli:

- En cada experimento, la variable aleatoria puede asumir solo uno de los 2 valores: éxito o fracaso.
- Los eventos del experimento son independientes. Lo que sucede en la primera prueba no afecta a lo que ocurre en la segunda y así sucesivamente.
- El valor de la probabilidad de un éxito, representado con p, es constante de una prueba a otra.

La solución para cierto número de éxitos en lo pedido viene dado por:

$$P(x;n,p) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \Rightarrow P\left(x = 6; n = 6, \frac{1}{2}\right) = \frac{6!}{(6-6)!\bullet 6!}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)^{6-6}$$

$$= \frac{1}{0!}\bullet\frac{1}{2^6}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= \frac{1}{64}$$

Alternativa E).

128. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar tres veces una moneda, se obtengan 2 caras?

A) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{3}{8}$

B) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{4}{7}$

Solución:
Sea x la variable aleatoria que indique el número de veces que se obtiene una cara.
La "base" del espacio muestral, llamémoslo E', se obtiene del número de casos que existen al hacer un solo lanzamiento. E' = {CARA, SELLO}, entonces,
#E' = 2. Donde # indica el número de casos que existen en E'.
Los casos totales del espacio muestral final E, tras lanzar n lanzamientos, viene dado por:
$E = (E')^n = (2)^n$.
Para n = 3 lanzamientos, el número de casos viene dado por:
$\#E = (2)^3 = 8$

Identificación de una distribución Binomial o de Bernoulli.

- En cada experimento, la variable aleatoria puede asumir solo uno de los 2 valores: éxito o fracaso.
- Los eventos del experimento son independientes. Lo que sucede en la primera prueba no afecta a lo que ocurre en la segunda y así sucesivamente.
- El valor de la probabilidad de un éxito, representado con p, es constante de una prueba a otra.

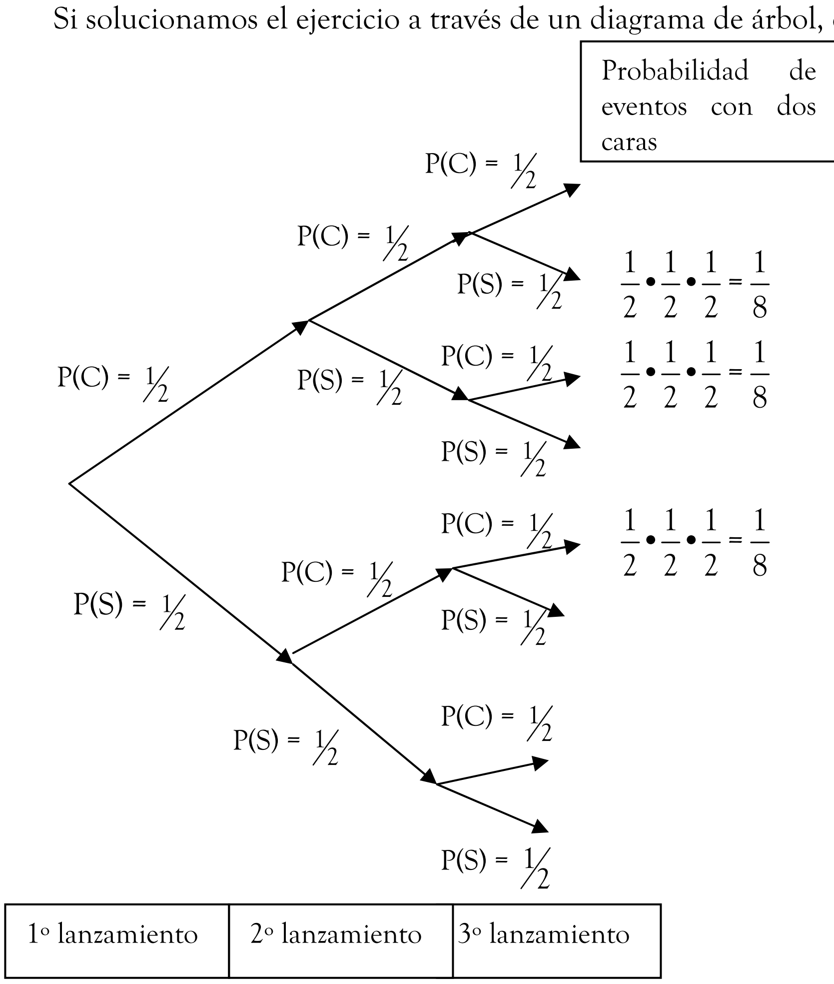
La solución para cierto número de éxitos en lo pedido viene dado por:

$$P(x;n,p) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \Rightarrow P\left(x=2;n=3,\frac{1}{2}\right) = \frac{3!}{(3-2)!\bullet 2!}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2} = \frac{3\bullet 2!}{1!\bullet 2!}\bullet\frac{1}{4}\bullet\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Alternativa E).

Si solucionamos el ejercicio a través de un diagrama de árbol, obtendremos:



Hay 3 casos con 1/8 de probabilidad cada uno, de obtener 2 caras.
Por lo tanto, la probabilidad pedida es:
P(x =2 caras) = 3 · (1/8)
= 3/8.
Alternativa E).

129. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar tres monedas, salga una cara y dos sellos?

A) $\frac{3}{8}$

B) $\left(\frac{1}{8}\right)^3$

C) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

D) $3 \bullet \frac{1}{2}$

E) Ninguna de las anteriores.

Solución:
Es un experimento con las características de una distribución binomial o de Bernoulli:

- En cada experimento, la variable aleatoria puede asumir solo uno de los 2 valores: éxito o fracaso. (cara o sello).
- Los eventos del experimento son independientes. Lo que sucede en la primera prueba no afecta a lo que ocurre en la segunda y así sucesivamente.
- El valor de la probabilidad de un éxito, representado con p, es constante de una prueba a otra.

Sea x la cantidad de caras que se obtiene tras tres lanzamientos.

Al lanzar el dado, solo hay dos posibilidades, cara o sello, con una probabilidad p = ½ para obtener cara de un de un lanzamiento a otro.

La solución, para x = 1 cara, con p = ½, tras n = 3 lanzamientos viene dado por:

$$P(x;n,p) = \frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x} \Rightarrow P\left(x=1;n=3,\frac{1}{2}\right) = \frac{3!}{(3-1)!\bullet 1!}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$= \frac{3!}{2!}\bullet\frac{1}{2}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= 3\bullet\frac{1}{2^3}$$

$$= \frac{3}{8}$$

Alternativa A).

130. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar 3 monedas, una de ellas muestre cara y las otras dos, sello?

A) $0,\overline{3}\,\%$ C) $0,\overline{6}\,\%$ E)12,5%

B) 0,25 % D) 37,5%

Solución:

Sea x la cantidad de caras que se obtiene tras tres lanzamientos.

Al lanzar el dado, solo hay dos posibilidades, cara o sello, con una probabilidad p = ½ para obtener cara de un de un lanzamiento a otro.

Es un experimento con las características de una distribución binomial o de Bernoulli:

- En cada experimento, la variable aleatoria puede asumir solo uno de los 2 valores: éxito o fracaso. (cara o sello).
- Los eventos del experimento son independientes. Lo que sucede en la primera prueba no afecta a lo que ocurre en la segunda y así sucesivamente.
- El valor de la probabilidad de un éxito, representado con p, es constante de una prueba a otra.

La solución, para x = 1 cara, con p = ½, tras n = 3 lanzamientos viene dado por:

$$P(x;n,p)=\frac{n!}{(n-x)!x!}p^{x}(1-p)^{n-x}\Rightarrow P\left(x=1;n=3,\frac{1}{2}\right)=\frac{3!}{(3-1)!\bullet 1!}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$=\frac{3!}{2!}\bullet\frac{1}{2}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$=3\bullet\frac{1}{2^{3}}$$

$$=\frac{3}{8}$$

Luego, la probabilidad pedida es $P(1\text{ cara, }2\text{ sellos})=\frac{3}{8}\equiv\frac{3}{8}\bullet 100\%=37,5\%$

Alternativa D).

131. Un alumno en un examen debe contestar verdadero o falso a cada una de seis preguntas. Si el alumno responde al azar, ¿cuál es la probabilidad que conteste correctamente las cinco últimas preguntas, si acertó en la primera?

A) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{64}$

B) $\frac{5}{6}$ D) $\frac{1}{32}$

<u>Solución</u>:
Sea x la variable que indique el número de veces que acierta una etapa.
Como es un experimento con las características de una distribución binomial o de Bernoulli:
- En cada experimento, la variable aleatoria puede asumir solo uno de los 2 valores: éxito o fracaso.
- Los eventos del experimento son independientes. Lo que sucede en la primera prueba no afecta a lo que ocurre en la segunda y así sucesivamente.
- El valor de la probabilidad de un éxito, representado con p, es constante de una prueba a otra.

La solución para cierto número de éxitos en lo pedido viene dado por:

$$P(x;n,p)=\frac{n!}{(n-x)!x!}p^x(1-p)^{n-x}\Rightarrow P\left(x=5;n=5,\frac{1}{2}\right)=\frac{5!}{(5-5)!\bullet 5!}\bullet\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-5}=\frac{1}{\underbrace{0!}_{1}}\bullet\frac{1}{2^5}\bullet\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^0}_{1}$$
$$=\frac{1}{32}$$

Alternativa D).

<u>Otra forma, (más sencilla)</u>:
Sea x la variable que indique el número de veces que acierta una etapa.
La probabilidad de acertar una pregunta es de ½.

$$P(x=1)=\frac{1}{2}$$

Como todas las etapas son independientes, la probabilidad de acertar dos preguntas es

$$P(x=2)=\left(\frac{1}{2}\right)\bullet\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Así sucesivamente, para n preguntas, la probabilidad de acertar en todas ellas es:

$$P(x=n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}$$

Para n = 5 preguntas (pues la primera pregunta es un hecho que ya la acertó, no es evento futuro y la probabilidad se calcula sobre eventos futuros, que aún no acontecen)

$$P(x=5)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$$

Alternativa D).

XI. Otros Ejercicios

132. Si **p** representa la probabilidad de que la bencina suba de precio, y **q** la probabilidad de que no sea así, entonces:
I: $p \geq 0$ II: $q \leq 0$ III: $p + q = 1$
Es (son) verdadera(s):
A) Sólo I.
B) Sólo I y II.
C) Sólo II y III.
D) Sólo I y III.
E) I, II y III.

Solución:
Por definición, toda probabilidad varía entre 0 y 1. Por lo tanto,
I) ES VERDADERA y II) ES FALSA.
Además, p y q representan probabilidades de eventos complementarios, por lo tanto,
$p + q = 1$ III) ES VERDADERA.

Así, sólo I) y III) son verdaderas.
Alternativa D).

133. La probabilidad que tiene un televisor, de fallar antes de 10 años está dada por la relación: $P(t) = \dfrac{t^2 - t}{100}$, donde t es el tiempo medido en años. ¿Cuál es la probabilidad de que el televisor falle a los 5 años?
A) 0,10
B) 0,15
C) 0,20
D) 0,25
E) 0,50

Solución:
Evaluamos en t = 5 –reemplazando t por 5 en la función dada–, pero antes notamos que podemos factorizar su numerador.

$$P(t) = \frac{t^2 - t}{100} = \frac{t(t-1)}{100} \Rightarrow P(5) = \frac{5(5-1)}{100} = \frac{5 \bullet 4}{100} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

Alternativa C).

134. De un lote de 3.000 ampolletas de una fábrica, se seleccionaron 100 al azar, hallándose 5 defectuosas. ¿Alrededor de cuántas ampolletas se espera que sean defectuosas en el lote completo?
A) 15 C) 150 E) 600
B) 60 D) 300

Solución:
Sea D ≡ obtener una ampolleta defectuosa.

$$P(D) = \frac{\text{casos favorables a que la ampolleta sea defectuosa}}{\text{casos totales de la muestra considerada}} = \frac{5}{100}$$

El valor esperado de hallar ampolletas defectuosas, de un total de 3.000 ampolletas, viene dado por

$$3.000 \bullet P(D) = 3.000 \bullet \frac{5}{100} = 30 \bullet 5 = 150$$

Alternativa C).

135. A cierta reunión asisten 40 mujeres y 70 hombres. Si la probabilidad de hallar a un hombre con celular es 0,4 y a una mujer con celular es 0,55. Entonces, ¿Cuántas personas en esta reunión, portan celular?
A) 104
B) 50
C) 52
D) 33
E) 32

Solución:
Sea x la cantidad de hombres con celular.
Por definición, la probabilidad de hallar un hombre con celular es:

$$0{,}4 \Rightarrow 0{,}4 = \frac{x}{70}$$
$$70 \bullet 0{,}4 = x$$
$$28 = x$$

Y sea y la cantidad de mujeres con celular.
Por definición, la probabilidad de hallar una mujer con celular es:

$$0{,}7 \Rightarrow 0{,}55 = \frac{y}{40}$$
$$40 \bullet 0{,}55 = y$$
$$22 = y$$

Luego, la cantidad de personas con celular son 28 + 22 = 50. Alternativa B).

136. La probabilidad que un caballo de un haras de 240 ejemplares sea mulato, es de $\frac{1}{4}$.
¿Cuántos caballos mulatos hay en el haras?
A) 120 C) 60 E) 20
B) 80 D) 40

Solución:
Sea m la cantidad de caballos mulatos. Pues bien, por definición de probabilidad:

$$p = \frac{m}{240} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{m}{240} \Rightarrow 240 \bullet \frac{1}{4} = m \Rightarrow 60 = m \quad \text{Alternativa C).}$$

137. En una urna hay 75 bolas entre blancas, rojas y azules, ¿Cuántas hay de cada color si la probabilidad de obtener una blanca es $\frac{3}{5}$ y la probabilidad de obtener una roja es $\frac{1}{15}$?

	Blancas	Rojas	Azules
A)	30	20	25
B)	35	15	20
C)	55	10	10
D)	45	5	25
E)	30	15	30

Solución:
Sean b, r, a, la cantidad de bolas blancas, rojas y azules respectivamente. Entonces, la cantidad de bolas de cada color se desprende de la definición de probabilidad:

- blancas es: $P(\text{blancas}) = \frac{b}{75} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{b}{75} \Rightarrow 75 \bullet \frac{3}{5} = b \Rightarrow 45 = b$
- rojas es: $P(\text{roja}) = \frac{r}{75} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{r}{75} \Rightarrow 75 \bullet \frac{1}{15} = r \Rightarrow 5 = r$
- azules es 75 – (#blancas + #rojas) = 75 – (45+5) = 25

Alternativa D).

138. En una caja hay un total de 25 monedas, entre las que hay 4 de \$500. Las demás son de \$50 y de \$100. Si la probabilidad de extraer una moneda de \$50 es 0,36, ¿Cuántas monedas de \$100 hay en la caja?
   A) 8
   B) 13
   C) 9
   D) 15
   E) 12

   Solución:
   Sea x la cantidad de monedas de \$50 y A ≡ el evento de extraer una de estas monedas. Entonces, por definición de probabilidad:
   $$P(A) = \frac{\text{n}^{\text{o}}\text{ de monedas de }\$100}{\text{n}^{\text{o}}\text{ total de monedas}}$$
   $$0,36 = \frac{x}{25}$$
   $$\Rightarrow 25 \bullet 0,36 = x$$
   $$\Rightarrow 9 = x$$
   La cantidad de monedas de \$50 son 9, las que sumadas a las 4 de \$500 suman 13 monedas. La cantidad faltante para llegar a las 25 monedas son las de \$100, esto es, son: 25 – 13 = 12.
   Alternativa E).

139. Tenemos un total de 24 fichas entre rojas y negras. La probabilidad de extraer una ficha roja es 0,375. Entonces, la cantidad de fichas negras es:
   A) 9
   B) 12
   C) 15
   D) 18
   E) 20

   Solución:
   La probabilidad de extraer una ficha roja es
   $$P(R) = \frac{r}{24}$$ donde r es la cantidad de fichas rojas
   $$\Rightarrow 0,375 = \frac{r}{24}$$
   $$\Rightarrow 24 \bullet 0,375 = r$$
   $$\Rightarrow 24 \bullet \frac{375}{1000} = r$$ vamos ahora a simplificar por 5
   $$\Rightarrow 24 \bullet \frac{75}{200} = r$$ vamos a volver simplificar nuevamente por 5
   $$\Rightarrow 24 \bullet \frac{15}{40} = r$$ vamos ahora a simplificar por 4
   $$\Rightarrow 6 \bullet \frac{15}{10} = r$$ ahora vamos a simplificar por 5
   $$\Rightarrow 6 \bullet \frac{3}{2} = r$$ ahora vamos a simplificar por 2
   $$\Rightarrow 3 \bullet 3 = r$$
   $$\Rightarrow 9 = r$$

   Si la cantidad de fichas rojas es 9, la cantidad faltante de fichas para llegar a 24 son las negras. Estas son 15.
   Alternativa C).

140. Se sabe que un libro esta dividido en 6 capítulos y que la cantidad de páginas de cada uno de ellos es siempre equivalente a la cantidad de páginas del capítulo anterior a la que se le suman 10 páginas. ¿Cuál es la probabilidad de que al abrir el libro de 750 páginas y encontrar una página al azar, esta pertenezca al capítulo 6 del libro?
   A) 0,06
   B) 0,10
   C) 0,15
   D) 0,20
   E) 0,25

Solución:
Sea x la cantidad de páginas del primer capítulo. Entonces, la cantidad de páginas de todos los capítulos son: x, x + 10, x + 20, x + 30, x + 40, x + 50. (*)

Podemos hallar el valor de x, pues la suma de las páginas de todos los capítulos es 750.
Así,
$x + x + 10 + x + 20 + x + 30 + x + 40 + x + 50 = 750$
Ahora sumamos términos semejantes.
$6x + 150 = 750$

Cancelamos 150 a ambos lados.
$6x = 600$
Simplificamos por seis.
$x = 100$

Reemplazando este valor en la expresión (*) para obtener que la cantidad de páginas del sexto capítulo es:
$x + 50 = 100 + 50 = 150$

Sea A ≡ abrir una página al azar y que esta pertenezca al sexto capítulo.
Entonces,
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\text{nº de páginas que tiene el sexto capítulo}}{\text{nº de páginas de todo el libro}} = \frac{150}{750} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} = 0,20$$
Alternativa D).

141. Un niño tiene una bolsa llena de bolitas de cristal y de piedra. Si en total son n + 2 bolitas y n - 3 son de piedra, entonces ¿cuál es la probabilidad de que al sacar una bolita de la bolsa, ésta sea de cristal?
   A) $\frac{5}{n+2}$
   B) 4n
   C) $\frac{sn+1}{6}$
   D) sn
   E) Ninguno de los valores anteriores

Solución:
Hay que obtener la cardinalidad o número de casos favorables a obtener una bolita de cristal.
⇒ **nº bolitas de cristal** = total de bolitas – nº bolitas de piedra
= n +2 – (n –3) = n+2 – n+3
= 5
$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{\text{nº bolitas de cristal}}{\text{nº total de bolitas}} = \frac{5}{n+2}$$
Alternativa B).

142. En una muestra de empleados que trabajan en el sector comercial, la probabilidad de que tengan X tarjetas de crédito se distribuye según la tabla adjunta.

X (nº de tarjetas)	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,20	0,40	0,25	0,10	0,05

Entonces, es **falso** que:

A) El 20% de los empleados del sector no tiene tarjeta de crédito.
B) La probabilidad de que un empleado tenga más de una tarjeta de crédito es 0,40.
C) El 65% de los empleados del sector tienen una o dos tarjetas de crédito.
D) Hay una probabilidad 0,8 de encontrar en el sector un empleado con tarjeta de crédito.
E) El 15% de los empleados del sector tienen más de 3 tarjetas de crédito.

Solución:
Analicemos cada una de las alternativas.

- La tabla indica que el 20% de los empleados del sector no tienen tarjeta de crédito.

A) ES VERDADERA.

- La probabilidad de que un empleado tenga más de una tarjeta es:

$0,25 + 0,10 + 0,05 = 0,40$
B) ES VERDADERA.

- Según la tabla, la suma de las probabilidades que tienen una o dos tarjetas de créditos es $0,40 + 0,25 = 0,65$. Es decir, 65%.

C) ES VERDADERA.

- Como sólo el 20% de los empleados del sector no tienen tarjeta, entonces el 80% del sector sí tienen. Esto es, en su equivalencia fraccionaria, un 0,80%.

D) ES VERDADERA.

- La probabilidad de que un empleado del sector tenga más de 3 tarjetas de créditos es 0.05, lo que equivale al $0.05 \bullet 100\% = 5\%$. Por lo tanto,

E) ES FALSA.
Alternativa E).

143. Para estimar la probabilidad de que una ampolleta salga defectuosa, se realiza el experimento de probar 1.000 en grupos o lotes de 200 y los resultados se consignan en la siguiente tabla.

Lotes	ampolletas defectuosas	frecuencia acumulada
1º	10	10
2º	11	21
3º	7	28
4º	4	32
5º	12	44

De acuerdo al experimento, la probabilidad de que al sacar al azar una ampolleta esta sea defectuosa, es

A) 3% C) 2,2% E) 22%
B) 4,6% D) 44%

Solución:
Lo único que interesa es la cantidad de ampolletas defectuosas del total de ampolletas pedidas. Lo que se observa al final de la frecuencia acumulada. Lo demás, es para despistar o distraer. La probabilidad pedida es $p = \frac{44}{2000} = \frac{22}{1000} = \frac{2,2}{100} = 2,2\%$.

Alternativa C).

144. Se hace una simulación computacional de un dado trucado (cargado) de caras numeradas del 1 al 6. Después de 1200 lanzamientos virtuales la frecuencia de aparición de cada número es consignado en la siguiente tabla:

Números	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	166	163	152	416	149	154

¿La probabilidad de obtener 4 con el dado trucado, respecto de un dado normal es, aproximadamente:

A) el doble.
B) la mitad.
C) el triple.
D) igual.
E) no se puede determinar.

Solución:

La probabilidad con el dado trucado es $p_{\text{trucado}} = \frac{416}{1200} \approx \frac{400}{1200} = \frac{1}{3}$.

La probabilidad de obtener 4 con un dado normal es un caso favorable de seis en total, es decir, $p_{\text{normal}} = \frac{1}{6}$.

Vamos a determinar en que razón se hallan ambas probabilidades.

$$\frac{p_{\text{trucado}}}{p_{\text{normal}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3} : \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \bullet \frac{6}{1} = 2 \Rightarrow \frac{p_{\text{trucado}}}{p_{\text{normal}}} = 2$$

$$\Rightarrow p_{\text{trucado}} = 2p_{\text{normal}}$$

La probabilidad de obtener 4 con el dado trucado es, aproximadamente, el doble que la de un dado normal.
Alternativa A).

145. Se hace rodar dos dados cúbicos (de seis caras) no trucados y se registra el producto de los números obtenidos. Si P(*a*) indica la probabilidad de la ocurrencia de *a*, entonces P(12) vale:

A) $\frac{1}{12}$
B) 12
C) $\frac{1}{36}$
D) $\frac{1}{18}$
E) $\frac{1}{9}$

Solución:

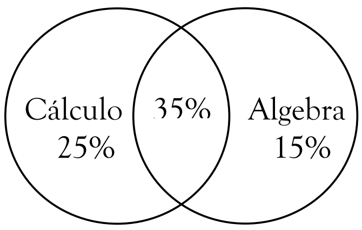
P(12) indica la probabilidad de ocurrencia de obtener 12. Se logra obtener 12 en los casos en que la pareja de dados arroja los resultados (3,4), (4,3), (6,2), (2,6) de un total de 36 parejas de resultados posibles.

$$P(12) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}} = \frac{4}{36} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

Alternativa E).

146. En cierta universidad, en la carrera de Ingeniería, el 60% de los estudiantes aprueban Cálculo, el 50% aprueba Álgebra, mientras que el 35% aprueba ambas materias. ¿Qué % aprueba sólo una de ellas?
   A) 10%
   B) 25%
   C) 30%
   D) 35%
   E) 40%

Solución:



Usaremos diagrama de Venn o de conjuntos para graficar la información proporcionada:

Noten que si el 35% aprueba ambas asignaturas, entonces se rellena con 25% dentro de la circunferencia de Cálculo, pues 35% + 25% = 60% es el porcentaje de alumnos que aprueba tal asignatura.
Análogamente se indica con 15% la circunferencia de Algebra.
El porcentaje de alumnos que aprueba solo una de las asignaturas resulta de la suma de las cantidades que están afuera de la intersección de estos círculos: 25% + 15% = 40%
Alternativa E).

Ojo, esta vez no sirve $P(A \cup C) = P(A) + P(B) - P(A \cap C)$.