«Apuntaciones sobre combinatoria»

Pedro Sánchez

Noviembre 2008.

Capítulo 1

n en k.

1.1. Subconjuntos

Nuestro objetivo será entender las distintas interpretaciones y propiedades puramente combinatorias de los coeficientes binomiales. Por ello, aunque existe una fórmula para calcular el valor exacto de los coeficientes binomiales, la remitiremos hasta el final para poner énfasis en la combinatoria.

1
El número de subconjuntos con k elementos que tiene un conjunto con n elementos se denota $\binom{n}{k}$.
Los números $\binom{n}{k}$ tienen varios nombres: «combinaciones de n en k», «coeficiente binomial de n en k» o simplemente «n en k».

Un conjunto con n elementos se denomina un n-conjunto. De la misma definición ya es posible obtener algunas propiedades:

- Dado que sólo hay una forma de escoger todo el conjunto, $\binom{n}{n} = 1$.
- De manera similar, dado que sólo hay una forma de escoger 0 elementos (el conjunto vacío) entonces $\binom{n}{0} = 1$.
- Cuando se escoge un subconjunto, automáticamente se está determinando su complemento. Por ello, el número de subconjuntos con k elementos es igual al de subconjuntos con $n-k$ elementos. Así:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

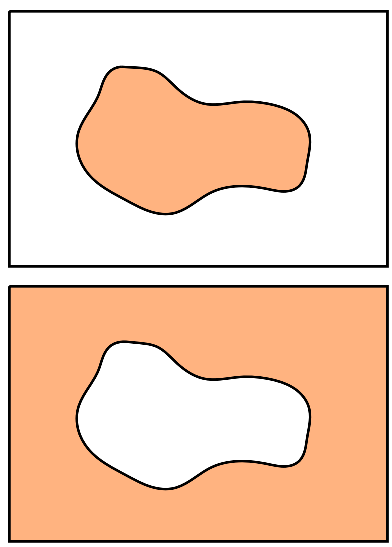


Figura 1.1: Elegir un conjunto de k elementos equivale a elegir un subconjunto de $n-k$ elementos.

La última prueba, aunque corta y sencilla, encapsula la idea de toda la combinatoria enumerativa: para demostrar que dos conjuntos tienen el mismo número de elementos, lo que hay que hacer es construir una correspondencia «uno a uno» entre ambos conjuntos, es decir una biyección.

Cada subconjunto con k elementos corresponde a uno y sólo uno de los conjuntos con $n-k$ elementos y al revés, cada subconjunto con $n-k$ elementos corresponde a uno y sólo uno de los conjuntos con k: hay una biyección entre conjuntos de un tipo y los del otro, lo que garantiza que hay la misma cantidad de ambos. Puede parecer un ejemplo muy trivial y soso, pero realmente esa es la idea fundamental que se repetirá una y otra vez bajo diversas variaciones.

Un resultado más interesante es la identidad de Pascal:

Teorema 1 (Identidad de Pascal)
Para $n \geq k \geq 1$ se cumple

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Prueba. Para demostrar el teorema, fijemos un elemento especial a del conjunto. Al escoger un subconjunto con k elementos, existen dos opciones: que el elemento a quede escogido o que no. El número total de formas de tomar el subconjunto será entonces la suma de las formas en cada caso.

En el primer caso, si el elemento a no fue escogido se tiene que tomar k elementos de los $n-1$ restantes posibles. El número de formas de hacerlo es por definición, $\binom{n-1}{k-1}$.

En el segundo caso, como ya está escogido el elemento a, sólo falta completar $k-1$ elementos tomados de los $n-1$ restantes. El número de formas de hacerlo es $\binom{n-1}{k}$.

Como el número *total* de formas de escoger k elementos de un conjunto con n es $\binom{n}{k}$, concluimos que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

□

La prueba anterior es una variante del mismo principio mencionado: para probar que dos cantidades son iguales se muestra que enumeran lo mismo en dos formas diferentes por lo que el resultado debe coincidir.

También hay que notar que no se necesitó saber el valor real de las cantidades que se están comparando, lo único que necesitamos fue la definición combinatoria para establecer la correspondencia.[1] Veamos otro ejemplo.

Ejercicio
Para cualquier n, m, k se cumple

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Prueba. En el lado derecho tenemos $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ que puede interpretarse como primero escoger m elementos de un conjunto que tiene n y luego de esos m escogidos seleccionar k.

Otra forma de hacer la selección, es escoger directamente los k elementos del final y luego los $m-k$ restantes de la primera selección entre los $n-k$ elementos que sobran, lo que se puede hacer en $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ formas. Como se está contando lo mismo, ambas dan el mismo resultado.

[1] El *contar de dos formas* es el mismo principio de biyección, sólo que está disfrazado pues la biyección es del conjunto en sí mismo.

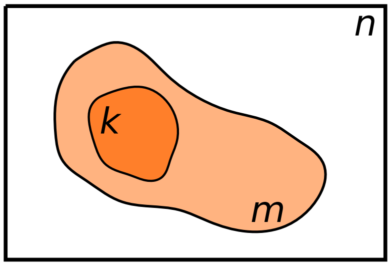


Figura 1.2: Eligiendo m elementos del total n, y luego k de los m.

Por ejemplo, en una rifa participan 20 personas de las cuales serán premiadas 7, pero de esas premiadas cuatro tendrán un premio doble. El número de formas de seleccionar las 7 premiadas es $\binom{20}{7}$ formas y luego seleccionar a las cuatro que tienen el premio doble es $\binom{7}{4}$ formas.

Pero también se puede seleccionar primero a las cuatro personas con premio doble de $\binom{20}{4}$ formas y luego escoger a las tres que tendrán premio sencillo entre las 17 restantes: $\binom{17}{3}$. $\square$

El esquema se repite de nuevo, cada parte de la identidad se interpreta de acuerdo a la definición combinatoria y luego se prueba que las dos están contando lo mismo.

Cuando $k < 0$ o $n < k$, definimos $\binom{n}{k} = 0$ motivados por el hecho de que no podemos elegir más elementos que los que tiene el conjunto original ni tampoco podemos elegir una cantidad negativa de elementos. Esta convención nos permite expresar varios resultados de forma compacta.

Teorema 2 (Identidad de Vandermonde)
Para cualquiera a, b, n enteros no negativos se verifica

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{n-2} + \cdots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}.$$

En notación de sumatoria:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

Algunos términos de la suma son cero, debido a la convención mencionada. Por ejemplo, si $a = 4, b = 2$ y $n = 3$ entonces

$$\binom{4}{3}\binom{2}{0} + \binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{2} + \binom{4}{0}\binom{2}{3}$$

se simplifica a

$$\binom{4}{3}\binom{2}{0} + \binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{2}{2}$$

porque $\binom{2}{3} = 0$ dado que $3 > 2$.

Prueba. El lado derecho $\binom{a+b}{n}$ sugiere que escogemos n elementos de un conjunto con a elementos de un tipo y b elementos de otro. Por ejemplo, podemos escoger n estudiantes de un salón con a hombres y b mujeres.

El lado izquierdo también cuenta el número de formas de escoger los n elementos, pero dividido en casos. Así, $\binom{a}{n}\binom{b}{0}$ cuenta el número de formas de escoger todos los n elementos del primer tipo, $\binom{a}{n-1}\binom{b}{1}$ cuenta el número de formas de escoger uno del segundo tipo y el resto del primer tipo. En general, $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ es el número de formas de escoger k elementos del primer tipo y $n-k$ del segundo.

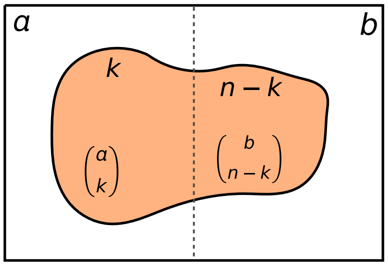


Figura 1.3: El número de formas de escoger k elementos del primer tipo y $n-k$ del segundo es $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Dado que todo conjunto de n elementos debe aparecer en algún sumando, ambas expresiones cuentan lo mismo y por tanto son iguales. □

Aunque no podemos calcular por ahora de forma explícita el número de k-subconjuntos, sí es posible calcular el número total de subconjuntos.

Teorema 3
Un conjunto con n elementos tiene 2^n *subconjuntos. Esto es:*

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

Prueba. Primero, notemos que la expresión de la izquierda efectivamente es igual al número total de subconjuntos, ya que está sumando la cantidad de subconjuntos con 0 elementos, con 1 elemento, con 2 elementos, y así hasta llegara n elementos y cualquier subconjunto queda comprendido en uno de los sumandos.

Ahora, comencemos con un ejemplo. Si los elementos del conjunto son a, b, c, d, e (ordenados), a cada subconjunto, pongamos $\{b, d, e\}$, le hacemos corresponder una palabra (en este caso le toca `NSNSS`) donde la j-ésima letra de la palabra indica si el j-ésimo elemento fue o no escogido: ya que a no está en el subconjunto, la primera letra de la palabra es `N`; como la b sí se eligió, la segunda letra es `S`; la tercera letra es `N` porque c no está en el subconjunto, etc.

En general, si el conjunto tiene n elementos y se listan ordenadamente, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, a cada subconjunto le corresponde una palabra en las letras `N` y `S` de modo que la j-ésima letra es `S` si a_j fue escogido y es `N` en caso contrario. Además, esa correspondencia es «uno a uno»: cada subconjunto corresponde a una palabra y cada palabra corresponde a un subconjunto: hay una *biyección* entre subconjuntos y palabras. Esto significa que la cantidad de subconjuntos es la misma que la cantidad de palabras.

Ahora, la primera letra tiene 2 posibilidades, la segunda tiene también 2 posibilidades, y así sucesivamente hasta la última letra que tiene 2 posibilidades. Un principio de conteo nos dice que el número de palabras es $2\times 2\times\cdots\times 2 = 2^n$, de modo que el número de subconjuntos es también 2^n. □

En la prueba realmente no importaba que las letras fueran `N` y `S`, se pudo haber tomado cualquiera dos símbolos (por ejemplo, `A` para marcar los elementos que sí se escogen y `B` para los que no). Una selección usual para marcar dos opciones es tomar los símbolos `1` y `0`; de esta forma a cada subconjunto T del conjunto $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ le corresponde una sucesión de unos y ceros

$$\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$$

de forma que

$$\epsilon_j = \begin{cases} 1 & \text{si } a_j \in T, \\ 0 & \text{si } a_j \notin T. \end{cases}$$

Por ejemplo, el subconjunto $\{a, b, c, e\}$ del conjunto $\{a, b, c, d, e, f\}$ corresponde a la sucesión $1, 1, 1, 0, 1, 0$. Esta correspondencia entre subconjuntos y palabras se resume en la siguiente interpretación combinatoria de los coeficientes binomiales.

2
El número $\binom{n}{k}$ es el número de sucesiones de longitud n de unos y ceros con exactamente k unos.
De forma alterna, $\binom{n}{k}$ es el número de palabras de longitud n en dos símbolos con exactamente k posiciones iguales al primer símbolo.

1.2. Caminos

Consideremos una cuadrícula de (m, n) y coloquemos coordenadas de modo que la esquina inferior izquierda sea $(0, 0)$ y la superior derecha sea (m, n). Nos interesa el número de formas de viajar de $(0, 0)$ a (m, n) siguiendo la cuadrícula y permitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha.

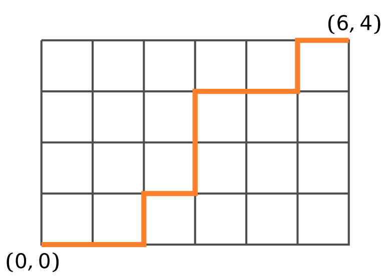


Figura 1.4: Ejemplo de camino entre $(0, 0)$ y $(6, 4)$.

Observemos primero que todos los caminos tienen la misma longitud: $m + n$. Además todo camino tiene exactamente m pasos horizontales y n verticales, lo único que cambia es el orden en que aparecen.

Así, podemos identificar cada camino con una palabra en las letras `H` y `V` que indican el orden de los pasos a seguir. Por ejemplo, el camino de la figura corresponde a la palabra `HHVHVVHHVH`; caminos diferentes corresponden a palabras diferentes. Y también se cumple que cualquier palabra con m entradas `H` y n entradas `V` corresponde a un único camino. Hay entonces la misma cantidad de caminos que de palabras, y esta cantidad ya la sabemos calcular: $\binom{m+n}{m}$.

Teorema 4
El número de caminos sobre una cuadrícula de tamaño $m \times n$ es $\binom{m+n}{m}$.

Un pequeño reajuste nos da la tercera interpretación de los coeficientes binomiales:

3
El número $\binom{n}{k}$ es el número de caminos en una cuadrícula de tamaño $k \times (n - k)$.

El hecho de que las interpretaciones combinatorias de $\binom{n}{k}$ sean equivalentes significa que se podrían definir los coeficientes binomiales como número de caminos en una cuadrícula de $k \times (n - k)$ y luego probar todas las demás propiedades.

Por ejemplo, la propiedad de simetría dice que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. En términos de caminos, quiere decir que hay el mismo número de caminos en una cuadrícula de tamaño $a \times b$ que en una de tamaño $b \times a$.

La identidad de Pascal se deriva del hecho que para llegar a la posición (a, b), primero hay que llegar a la casilla $(a - 1, b)$ o a la casilla $(a, b - 1)$, de donde se obtienen los dos sumandos de la identidad.

El teorema sobre el total de subconjuntos de un conjunto con n elementos, en caminos corresponde al hecho de que hay 2^n formas de avanzar n pasos (con cualquier proporción de horizontales y verticales) porque en cada cruce siempre hay 2 opciones a elegir.

1.3. Pascal

Con un poco de curiosidad, es natural considerar el *arreglo* de coeficientes binomiales donde la fila i y la columna j es $\binom{i}{j}$:

$$\begin{array}{lllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\
 & & \cdots
\end{array}$$

El arreglo así definido recibe el nombre de *Triángulo de Pascal*.

Si bien, no tenemos aún una fórmula para calcular directamente los valores de cada entrada, sí es posible llenarla. Primero notamos que todos los elementos de la primera columna y los de la diagonal son iguales a cero, y luego hacemos uso de la identidad de Pascal para llenar las demás filas en orden.

$$\begin{array}{lllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 & & \cdots
\end{array}$$

En el fondo, el triángulo de Pascal esconde la misma información que la interpretación por caminos. Esto quizás se aprecia mejor cuando disponemos los elementos como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

El triángulo de Pascal corresponde entonces a una cuadrícula «rotada», en donde las direcciones permitidas son las dos diagonales hacia abajo. Cada entrada $\binom{a}{b}$ corresponde al número de formas de recorrer caminos partiendo de la entrada superior, siguiendo las flechas, hasta la posición b de la fila a.

En el triángulo de Pascal podemos visualizar ciertas identidades. Por ejemplo, la identidad que establece

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

corresponde a que la suma de la n-ésima fila del triángulo es igual a 2^n, y nuevamente se relaciona con el hecho de que un camino que legue a la fila n-ésima tiene que haber dado n pasos y cada uno con dos opciones.

Si comenzamos en una entrada del borde izquierdo y nos movemos siempre en diagonal bajando hacia la derecha, la suma de las entradas por las que pasemos será nuevamente un coeficiente binomial:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

En la figura, se tiene que

$$\binom{2}{0} + \binom{3}{1} + \binom{4}{2} = \binom{5}{2}$$

La relación general es la siguiente:

Ejercicio
Para todos $m, n \geq 0$ se cumple

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n},$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

La prueba se deja para práctica.

1.4. Multiconjuntos

Podemos pensar en multiconjuntos como «conjuntos en los que se permite repetición». Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$, los *multiconjuntos de tamaño 4* que se pueden formar con los elementos de A son:

$$\{1,1,1,1\}, \{1,1,1,2\}, \{1,1,1,3\}, \{1,1,2,2\}, \{1,1,2,3\}, \{1,1,3,3\}, \{1,2,2,2\}, \{1,2,2,3\}, \{1,2,3,3\}, \{1,3,3,3\}, \{2,2,2,2\}, \{2,2,2,3\}, \{2,2,3,3\}, \{2,3,3,3\}, \{3,3,3,3\}$$

4
El número de formas de tomar un multisubconjunto de tamaño k a partir de un conjunto con n elementos se denota $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$.

Así $\left(\!\binom{3}{4}\!\right) = 15$.

No hay una forma estándar de nombrar a tales coeficientes en español, usaremos «n multi k» para referirnos a ellos. Nota además que en multiconjuntos sí es posible tener $k > n$.

Existen una interpretación particularmente útil de estos números:

5
El número $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$ es el número de formas de dar k karamelos a n niños.

Por ejemplo, el multiconjunto $\{1,2,3,3\}$ indica que el primer niño recibió un karamelo, el segundo recibió un karamelo y el tercero recibió dos. El multiconjunto $\{2,2,2,3\}$ indica que el primer niño no recibió karamelo, el segundo recibió tres y el tercero uno. Cada forma de repartir los karamelos corresponde a un multisubconjunto y cada multisubconjunto corresponde a una forma de repartir.

Podemos visualizar la la interpretación anterior colocando los k karamelos en fila y hacer n grupos, donde el j-ésimo grupo corresponde a los karamelos del j-ésimo niño:

$$\begin{aligned} \{1,2,3,3\} &= \bowtie \mid \bowtie \mid \bowtie\bowtie \\ \{1,1,3,3\} &= \bowtie\bowtie \mid \quad \mid \bowtie\bowtie \\ \{2,2,2,3\} &= \quad \mid \bowtie\bowtie\bowtie \mid \bowtie \end{aligned}$$

Notemos ahora que cada multiconjunto corresponde a una lista de k caramelos y $n-1$ separadores. Podemos incluso denotar cada arreglo de dulces y separadores como una palabra `D` para dulce y `S` para separador:

$$\begin{aligned} \{1,2,3,3\} &= \texttt{DSDSDD} \\ \{1,1,3,3\} &= \texttt{DDSSDD} \\ \{2,2,2,3\} &= \texttt{SDDDSD} \end{aligned}$$

Cada multisubconjunto corresponde a una palabra con k posiciones `D` y $n-1$ posiciones `S` y al revés, cada palabra de ese tipo corresponde a un multisubconjunto.

La biyección entre los multisubconjuntos y las palabras nos dice que para contar multisubconjuntos basta contar las palabras, pero la segunda interpretación de los coeficientes binomiales nos dice que el número de tales palabras es precisamente $\binom{k+n-1}{k}$.

Teorema 5
El número de k-multisubconjuntos de un conjunto con n elementos es

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

De esta manera, calcular multisubconjuntos se reduce a calcular coeficientes binomiales.

1.5. Newton

Hemos hablado mucho de coeficientes binomiales, pero nunca dijimos algo sobre binomios, por lo que esa denominación puede parecer extraña. Las combinaciones reciben el nombre de coeficientes binomiales porque aparecen en un teorema muy importante de álgebra que indica cómo elevar un binomio a una potencia, esto es, permiten calcular $(a+b)^n$ cuando $n \geq 0$ es un entero. Este teorema conocido como *Teorema de Newton* o *Teorema binomial* establece:

Teorema 6
Si $n \geq 0$ es un entero, entonces

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Por ejemplo, si $n = 3$ se tiene

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} b^3 + \binom{3}{1} ab^2 + \binom{3}{2} a^2 b + \binom{3}{3} b^3.$$

Es común que este teorema se enuncie sin demostración y cuando sí se da una, suele ser por inducción, aunque la prueba combinatoria es más directa y simple.

Prueba. Supongamos que queremos calcular el coeficiente de $a^k b^{n-k}$ en el desarrollo de $(a+b)^n$. Expandimos $(a+b)^n$ añadiendo subíndices para diferenciar cada uno de los factores:

$$(a+b)^n = (a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n).$$

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)(a+b)\\ &= aaa + aab + aba + abb\\ &\quad + baa + bab + bba + bbb\end{aligned}$$

Figura 1.5: Desarrollo de $(a+b)^3$.

Es decir, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ pero suponemos por un momento que son diferentes entre sí (y de forma similar para b). El coeficiente de $a^k b^{n-k}$ es entonces el número de formas en que podemos tomar k factores de la forma a_i y $n-k$ factores de la forma b_j.

Por ejemplo, si $n = 3$, el coeficiente de ab^2 es 3 porque hay exactamente tres formas de escoger un par de a y el otro como b:

$$3ab^2 = a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 a_3 + b_1 a_2 a_3.$$

Pero el número de formas de escoger k factores a_i y $n-k$ factores b_j es $\binom{n}{k}$ pues estamos simplemente seleccionando k de los n factores para usar a y el resto serán b, esto concluye la prueba. □

Problemas

En los siguientes problemas, todas las pruebas deben realizarse usando argumentos combinatorios.

1 *Si* $n \geq k$ *entonces:* $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$.

2 *Demuestra que* $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

3 *Una variación: si* $n \geq 2$ *entonces* $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

4 *Sabemos que* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, *¿a qué es igual* $\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{k}$*?*

5 *Si* $n \geq 1$, *demuestra que* $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

6 *Prueba que:* $\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$.

7 *Da una prueba de la identidad de Vandermonde usando la interpretación de caminos.*

8 *Demuestra que* $\sum_{j=k}^{m}\binom{j}{k} = \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{m}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.
¿Cual es la relación de esta identidad con la del ejercicio 4?

9 *Demuestra que* $\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$.

10 (Aigner) *Sea* $f(n,k)$ *el número de k-subconjuntos de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *que no contiene algún par de enteros consecutivos. Prueba que* $f(n,k) = \binom{n-k+1}{k}$.

11 *Encuentra una prueba combinatoria de que* $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{7} + \cdots$.

12 *Demuestra que el valor de* $\binom{n}{k}$ *es* $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Capítulo 2

Recurrencias

Una de las técnicas más fuertes disponibles en problemas de matemáticas discretas es el uso de *recurrencia*.[1] Con frecuencia no es posible enumerar una clase de objetos directamente, pero sí es posible enumerarla en función de las partes que la componen y aunque tampoco podamos calcular las partes de forma directa (por ser usualmente un problema equivalente al inicial), el sólo hecho de establecer la relación entre el todo y sus partes nos permite extraer mucha información del proceso. Esta es la idea de recurrencia: expresar una cantidad en función de sus partes, o expresar los términos de una sucesión en función de los términos anteriores.

Ya en el capítulo anterior nos cruzamos con esta idea, aunque no de forma explícita. La identidad de Pascal establece una relación entre todos los subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que tienen k elementos y las dos clases en que los separamos: los que contienen a n y los que no.

Recordamos que la cantidad total de k-subconjuntos es $\binom{n}{k}$ y por otro lado, aquellos que contienen a n son en total $\binom{n-1}{k-1}$ y los que no lo contienen son $\binom{n-1}{k}$, concluyendo

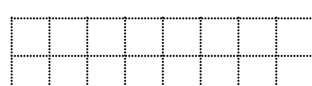
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Y aunque en un principio no podíamos calcular ni los valores del total o de las partes (pues no habíamos encontrado aún la fórmula para calcular un coeficiente binomial), la relación misma «todo = suma de sus partes» nos permitió deducir muchos resultados y nos proporcionó ideas (separar casos, partir conjuntos, etc.) que nos ayudaron en otros problemas.

2.1. Dominós

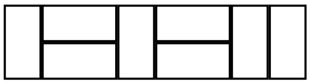
Consideremos una cuadrícula de $2 \times n$. Nos preguntamos el número de formas $d(n)$ en que la podemos llenar con dominós (piezas de tamaño $2 \times n$).

A continuación se muestra la cuadrícula para $n = 8$

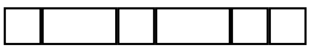


y un ejemplo de llenado:

[1]Ver capítulo 2.



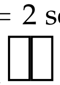
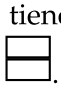
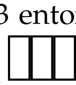
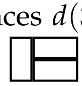
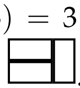
Existen diferentes formas equivalentes de interpretar $d(n)$. Por ejemplo, y dado que la mitad superior es exactamente igual a la parte inferior, $d(n)$ también cuenta el número de formas de llenar una cuadrícula de $1 \times n$ con cuadros y dominós:



Es también el número de formas en que se puede escoger un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ sin que se tome un par de elementos consecutivos. El ejemplo anterior corresponde al subconjunto $\{2, 5\}$; analizaremos éstas y otras diferentes interpretaciones más adelante.

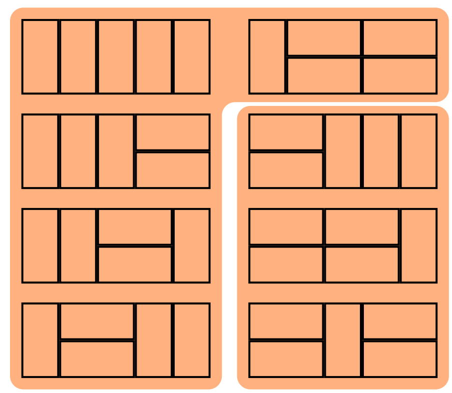
Regresando al problema de calcular $d(n)$, no es evidente una forma de calcular directamente (a partir de n) su valor. Si queremos aplicar recurrencia, necesitamos encontrar una división apropiada de los casos para poder establecer una relación.

Un primer acercamiento consiste en calcular los valores de $d(n)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Si procedemos así encontraremos:

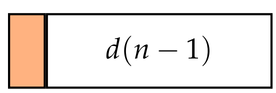
- Para $n = 1$, $d(1) = 1$ pues el único arreglo es .
- Para $n = 2$ se tiene $d(2) = 2$ pues los arreglos son  .
- Si $n = 3$ entonces $d(3) = 3$ pues los arreglos son   .

Si continuamos dibujando los arreglos, notaremos que hay de dos tipos: los que inician con un dominó vertical y los que inician con dos horizontales. Afirmamos que estas son las dos clases en las que debemos separar las formas de llenar la cuadrícula

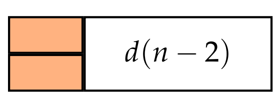
Por ejemplo, en el siguiente listado para $n = 5$, hemos separado los dos grupos



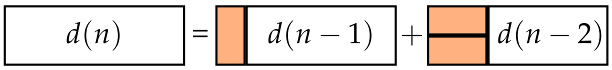
Ya tenemos los dos tipos de arreglos, lo que necesitamos ahora es expresar la cantidad en cada uno de ellos. En el primer caso, cuando iniciamos con un dominó vertical, el número total de arreglos es el número de formas de llenar la cuadrícula de $2 \times (n-1)$ restante, por definición igual a $d(n-1)$:



Si empezamos con dos horizontales, entonces lo que resta por llenar es una zona de $2 \times (n-2)$ y por definición el número de formas de hacerlo es $d(n-2)$:



Hemos encontrado entonces la recurrencia buscada:



De esta forma, las expresiones

$$d(n) = d(n-1) + d(n-2),$$
$$d(1) = 1, \qquad d(2) = 2,$$

nos permiten calcular *de forma recursiva* cualquier valor de $d(n)$, calculando primero los valores anteriores. Así, los primeros valores de la sucesión $d(n)$ son

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Los números $d(n)$ forman parte de una sucesión famosa de números, comentada en la sección siguiente.

2.2. Fibonacci

En 1202 aparece en Italia el *Liber Abaci* o *Libro de las cuentas*, escrito por Leonardo de Pisa. Con el libro, Leonardo quería dar a conocer los números arábigos porque realizar operaciones con ellos era mucho más simple que con la numeración romana todavía usada en la época, dedicando parte del libro a resolver problemas aritméticos con el nuevo sistema. Ciertamente los números arábigos no se hicieron populares hasta tres siglos después con la invención de la imprenta, pero el libro se hizo muy popular en la época, sobre todo entre comerciantes a quienes el nuevo sistema les beneficiaba mucho.

Entre los problemas del libro, uno relativo a la cantidad de descendencia que engendraría un par de conejos tiene por solución la serie de números $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ en la que cada término es la suma de los dos anteriores. Como Leonardo tenía el apodo Fibonacci (hijo de Bonacci), tal sucesión se conoce hoy como *sucesión de Fibonacci*.

Esta sucesión es quizá la ecuación de recurrencia más famosa y se define como:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$
$$F_0 = 0,$$
$$F_1 = 1,$$

es decir:

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	$\cdots$
0	1	1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$

Al describir una ecuación de recurrencia es muy importante indicar también las *condiciones iniciales* a partir de las cuales se calculan todos los demás términos. Es común que se indique sólo la regla, mas ésta no basta para determinar la sucesión. Por ejemplo, la sucesión $5, 2, 7, 9, 16, \ldots$ tiene exactamente la misma regla (cada término es la suma de los dos anteriores) pero obviamente se trata de una sucesión diferente.

La sucesión $d(n)$ de la sección anterior tiene la misma regla, pero los términos están desplazados una posición:

$$d(n) = F_{n+1}$$

y esa es la primera interpretación de los números de Fibonacci.

6
El número de formas $d(n)$ de llenar una cuadrícula de $2 \times n$ con dominós es el número de Fibonacci F_{n+1}.
De forma equivalente, el número $d(n)$ de formas de llenar una cuadrícula de $1 \times n$ con cuadritos y dominós es F_{n+1}.

Al igual que para los coeficientes binomiales, existe una gran cantidad de identidades para números de Fibonacci que pueden probar utilizando las interpretaciones combinatorias.

Teorema 7
Si F_n es el n-ésimo número de Fibonacci, entonces

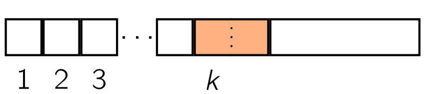
$$F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Prueba. Usando la interpretación de cuadritos y dominós, notando que $F_0 = 0$, tenemos que probar

$$d(0) + d(1) + \cdots + d(n-1) = d(n+1) - 1.$$

El $d(n+1)$ sugiere que estamos tomando una cuadrícula de $1 \times n+1$ para llenar con cuadritos y dominós, pero una configuración la estamos descartando. Si tenemos que escoger una para descartar, la «natural» (en cierto modo la diferente a todas las demás) es la que sólo tiene cuadritos y ningún dominó. De esta manera, $d(n+1) - 1$ lo podemos interpretar como el número de formas de llenar la cuadrícula de $1 \times (n+1)$ usando *al menos* un dominó.

Si hay al menos un dominó, todo arreglo tiene un primer dominó (recorriendo de izquierda a derecha) y todos las piezas a la izquierda de este dominó tienen que ser cuadritos. Supongamos que el primer dominó aparece en la posición k:



Para contar el número de configuraciones donde el primer dominó aparece en la posición k, notemos que sólo hay una forma de llenar la izquierda (sólo cuadritos) pero que a la derecha hay que llenar $(n+1) - (k+1) = n-k$ espacios con cualquier ficha pues ya usamos al menos un dominó). Sin embargo, el número de formas de llenar un espacio de tamaño $n-k$ con cuadros y dominós es por definición $d(n-k)$.

Finalmente, k puede variar entre 1 y n porque no puede ser que un dominó empiece en la última casilla. Cuando k varía entre 1 y n, los valores de $d(n-k)$ varían entre $d(0)$ y $d(n-1)$. Concluimos así, contando de dos formas diferentes, que

$$d(0) + d(1) + \cdots + d(n-1) = d(n+1) + 1$$

y por tanto

$$F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} + 1.$$

□

Mencionamos anteriormente que existen otras formas de interpretar combinatoriamente los números de Fibonacci. Una interpretación directa obtenida de la de cuadritos y dominós es la siguiente:

7
El número de Fibonacci F_n cuenta el número de sumas iguales a $n-1$ cuyos sumandos son 1 y 2.

Por ejemplo, $F_5 = 5$ porque hay 5 formas de descomponer 4 en sumas de unos y doses:

$$1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2.$$

Otra interpretación menos evidente es:

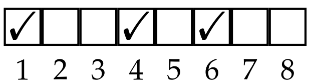
8
El número de Fibonacci F_n es el número de subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n-2\}$ en los que no aparece ningún par de enteros consecutivos.

Por ejemplo, $F_5 = 5$ pues los únicos subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ que no tienen elementos consecutivos son:

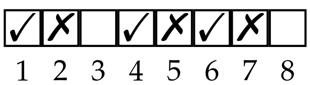
$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}.$$

Comencemos con un arreglo de $n-2$ casillas representando a los elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n-2\}$. Cada subconjunto sin enteros consecutivos corresponde a marcar ciertas casillas sin que aparezcan dos marcas en casillas vecinas:

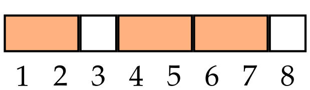
Por ejemplo, si $n-2=8$ entonces el subconjunto $\{1,4,6\}$ se representa como



Nos interesa entonces el número de formas en que podemos marcar una cantidad cualquiera de casillas siempre y cuando no aparezcan dos casillas vecinas marcadas. Para evitar que dos casillas vecinas tengan marca vamos a tachar la casilla inmediata derecha a cada marca:



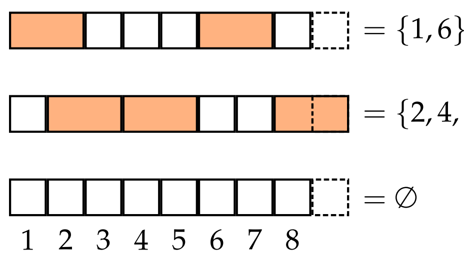
Esto nos sirve porque traducimos el problema de contar las formas de poner marcas ✓ que no sean vecinas al problema de escoger pares de casillas y colocar ✓✗ en ellas. Esto se hace más claro si en cada par de casillas ponemos un dominó en vez de las marcas (sabemos que en cada dominó la casilla de la izquierda será ✓ y la de la derecha será ✗). Así, el ejemplo $\{1,4,6\}$ que hemos estado considerando corresponde al siguiente arreglo:



Hemos convertido el problema de contar subconjuntos sin pares de enteros consecutivos a contar formas de llenar una cuadrícula con dominós, aunque aparece un pequeño detalle: si el subconjunto elegido contiene al último elemento, no hay espacio para poner ✗ o de forma equivalente, no podemos poner un dominó que empiece en esta posición.

Para solucionar el problema añadimos una casilla «fantasma» en la posición $n-1$. En esta casilla sólo permitimos que aparezca vacía o con la marca ✗ (porque en realidad no es un elemento del conjunto y no la podemos escoger).

Con este pequeño cambio ya tenemos finalmente la correspondencia deseada: cada subconjunto de $\{1,2,\ldots,n-2\}$ corresponde a un llenado con cuadritos y dominós de una cuadrícula de $1\times(n-1)$ en donde la regla de correspondencia indica que cada dominó empieza en los elementos elegidos para el subconjunto. Para aclarar la correspondencia damos algunos otros ejemplos con $n-2=8$:



Concluimos notando que el número de formas de llenar una cuadrícula de $1\times(n-1)$ con cuadros y dominós es, como establecimos anteriormente, F_n.

La interpretación anterior se usó en el ejercicio del capítulo 1 para pribar que el número de k-subconjuntos sin enteros consecutivos que tiene un conjunto con n elementos es $f(n,k)=\binom{n-k+1}{k}$. Reajustando índices podemos integrar ambos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 8
Para todo $n \geq 0$ se cumple

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots = F_{n+1}.$$

Compara esta suma con la del ejercicio al final de la sección 1.3. Dado que estamos hablando de coeficientes binomiales, acude al triángulo de Pascala para localizar los términos de la suma anterior, ¡te llevarás una sorpresa!

Problemas

13 *¿De cuántas formas se puede expresar n como suma de números impares? Por ejemplo,* 4 *puede escribirse de las siguientes formas:* $3+1, 1+3, 1+1+1+1$.

14 *¿De cuántas formas se puede expresar n como suma de términos mayores a* 1*? Por ejemplo,* 5 *se expresa como* $5, 3+2, 2+3$.

15 *Si* $n \geq 0$*, prueba que* $F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

16 *Demuestra que* $F_m F_n + F_{n-1} F_{m-1} = F_{m+n-1}$ *para* $m, n \geq 1$.

17 *Si* $n \geq 0$ *entonces* $F_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k$.

18 (Benjamin-Quinn) *Para* $n \geq 0$ *se cumple* $d(n) + d(n-1) + \sum_{k=0}^{n-2} d(k) 2^{n-2-k} = 2^n$.

19 *¿Cuántos caminos hay en la cuadrícula de* $(0,0)$ *a* (n,n) *que no cruzan la diagonal?*

20 *¿De cuántas formas puedes dividir un n-ágono en triángulos usando diagonales que no se toquen más que en los vértices?*

Apéndice A

Sugerencias

Capítulo 1

1 Cuenta el número de formas en que puedes hacer un comité de k personas con un secretario a partir de un grupo de n personas.

2 Cuenta el número de formas en que puedes hacer un comité de k personas con un secretario a partir de un grupo de n personas.

3 Piensa que estás formando un comité de k personas con un secretario y un tesorero.

4 Desarrollar la suma de la izquierda.

5 Considera el número de formas de hacer un comité con un secretario a partir de un grupo de n personas.

6 La expresión $\binom{n+1}{3}$ sugiere que se están escogiendo tres números (a, b, c) del conjunto $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Enumerar tales ternas de dos formas diferentes.

7 Cada sumando de la forma $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ cuenta el número de caminos que pasan por un cruce específico.

8 Clasifica los subconjuntos de tamaño $k+1$ escogidos de $\{1, 2, \ldots, m+1\}$ de acuerdo al mayor elemento.

10 Cada vez que se selecciona un elemento para el conjunto, «bloquea» al siguiente. Podemos pensar que tenemos los números del 1 al n y que estamos eligiendo varios pares de números consecutivos (uno para el subconjunto y otro para bloquearlo).

11 El lado izquierdo cuenta los subconjuntos de tamaño par que tiene un n-conjunto, el lado derecho cuenta los subconjuntos de tamaño impar. Como el total de subconjuntos es 2^n, prueba que las sumas son iguales a la mitad de 2^n.

Capítulo 2

13 Elabora una lista de casos pequeños para hacer una conjetura e interprétala combinatoriamente.

14 Mismo procedimiento que el ejercicio anterior.

15 Clasifica las formas de llenar una cuadrícula de $1 \times (2n-1)$ de acuerdo a la posición del último dominó.

16 Considera arreglos de cuadros y dominós, demostrando la identidad correspondiente para los números $d(n)$ dependiendo si en la posición m aparece un dominó o un cuadrito.

17 Interpretando con cuarícula, cuenta dependiendo del número de cuadros que aparecen en las primeros n posiciones.

Apéndice B

Soluciones

Capítulo 1

1 Podemos pensar que de un conjunto con n personas escogemos un comité de k personas y entre ellas un secretario.

Si escogemos primero al secretario (n opciones), falta escoger el resto del comité, el cual consta de $k-1$ personas escogidas de las $n-1$ restantes. Así, el número total de formas de hacer la elección es $n\binom{n-1}{k-1}$.

Otra forma es escoger a los k integrantes del comité primero, lo cual se puede hacer de $\binom{n}{k}$ formas, y luego entre ellas seleccionar al secretario. El número de formas de hacer esta elección es $k\binom{n}{k}$.

2 Exactamente la misma idea que el anterior. Sólo que ahora escogemos k personas del comité y el secretario lo escogemos fuera del comité.

Así, la izquierda cuenta el número de formas de escoger el comité en $\binom{n}{k}$ formas y luego escoger al secretario de las $n-k$ personas que no están en el comité.

El lado derecho escoge primero al secretario (n opciones) y luego escoge al comité entre las $n-1$ personas restantes.

3 La misma idea que en el primer ejercicio, pero ahora hay dos elementos distinguidos (un secretario y un tesorero). Si escogemos primero al comité y luego a los oficiales obtenemos el lado izquierdo. Si escogemos primero a los oficiales y luego al resto del comité obtenemos el lado derecho.

4 Desarrollando $\sum_{n=0}^{k}\binom{n}{k}$:

$$\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{0}{k}+\binom{1}{k}+\binom{2}{k}+\cdots+\binom{k-1}{k}+\binom{k}{k}$$

notamos que todos salvo el último término tienen $n<k$ y por tanto son iguales a cero. El término final es el único que sobrevive y es $\binom{k}{k}=1$, valor total de la suma.

5 Ya sabemos que $k\binom{n}{k}$ es el número de formas de escoger un comité de k personas y entre ellas tomar un secretario. Cuando sumamos sobre todos los valores de k, lo que hacemos es *permitir cualquier tamaño*. Así:

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}$$

es el número de formas de hacer un comité (de cualquier tamaño) y nombrar un secretario dentro del comité.

La otra forma de contar es escoger primero al secretario de n formas diferentes y el resto del comité es cualquier subconjunto de los $n-1$ restantes (porque el comité puede tener cualquier tamaño). El número de formas de tomar un subconjunto de las $n-1$ personas restantes es 2^{n-1}.

6 Sabemos que $\binom{n+1}{3}$ equivale al número de formas de escoger tres elementos a,b,c del conjunto $\{1,2,3,\ldots,n+1\}$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a\le b\le c$ (porque reordenar elementos no cambia el subconjunto).

Si c es iguala 1 o 2, no hay elección posible. Cuando $c=3$ hay sólo una forma de escoger a y b del conjunto $\{1,2\}$. Si $c=4$, hay $\binom{3}{2}$ formas de escoger a,b del conjunto $\{1,2,3\}$. Para $c=5$ hay $\binom{4}{2}$ formas de escoger a,b. En general para cada $c>2$ hay $\binom{c-1}{2}$ formas de escoger a y b. Así, el número de ternas a,b,c es igual a

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n}{2}.$$

Haciendo $k=c-1$ concluimos entonces que

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}.$$

El conteo anterior enumera las ternas respecto a su elemento mayor. Si ahora enumeramos respecto al término medio, para cada b fijo, hay $b-1$ opciones para a y $n+1-b$ opciones para c. Concluimos que el número de ternas es

$$1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot 1.$$

Haciendo $k = b - 1$ reescribimos la suma anterior como

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}.$$

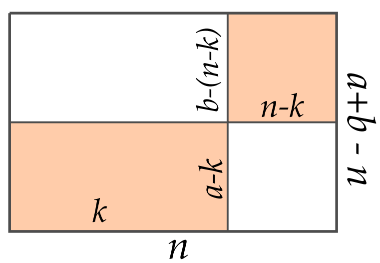
¿Qué pasaría si enumeramos respecto al elemento menor?

7 Queremos probar que

$$\binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \binom{a}{2}\binom{b}{n-2} + \cdots + \binom{a}{n}\binom{b}{0} = \binom{a+b}{n}$$

por medio de caminos.

El lado derecho, $\binom{a+b}{n}$ es el número de formas de recorrer una cuadrícula de $n \times (a+b-n)$.



Ahora analicemos uno de los sumandos $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$. El primer factor $\binom{a}{k}$ cuenta el número de formas de recorrer desde $(0,0)$ hasta $(k, a-k)$. Marcamos ese punto en la cuadrícula y vemos que determina un segundo rectángulo desde $(k, a-k)$ hasta la esquina superior derecha de la cuadrícula.

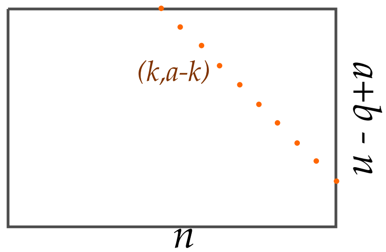
Este segundo rectángulo tiene base $n-k$ y altura $(a+b-n)-(a-k) = b-n+k$. El número de formas de recorrer este segundo rectángulo es, por la interpretación de los coeficientes binomiales en término de caminos:

$$\binom{(n-k)+(b-n+k)}{n-k} = \binom{b}{n-k}.$$

La conclusión es que $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ cuenta exactamente el número de caminos entre $(0,0)$ y $(a+b-n)$ que pasan por el cruce $(k, a-k)$.

Al variar k entre 0 y n obtenemos una «diagonal» de puntos de la forma $(k, a-k)$. Todo camino tiene que pasar por alguno de ellos, de modo que la suma de $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ con k desde cero hasta n es el número total de caminos.

Pedro Sánchez (drini@matmor.unam.mx)



Nota: Así como en la suma algunos términos se hacen cero (ya sea porque $k > a$ o $n-k > b$)), si dibujáramos todos los cruces obtendríamos puntos *fuera* de la cuadrícula. Estos puntos «imposibles» corresponden a los términos de la suma que se hacen cero.

8 El lado derecho, $\binom{m+1}{k+1}$ sugiere que estamos eligiendo $k+1$ elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, k+1\}$. Vamos a usar nuevamente la idea de clasificar de acuerdo al mayor elementos del subconjunto: si el mayor elemento es t entonces los k restantes se tienen que escoger entre $\{1, 2, \ldots, t-1\}$, de $\binom{t-1}{k}$ formas. El menor valor que puede tomar t es $k+1$ (de lo contrario no habría suficientes elementos anteriores para elegir los k necesarios) y el mayor valor es $t = n+1$. Sumando los valores de $\binom{t}{k}$ en el rango entre $k+1$ y $n+1$ tenemos que el número total de formas de hacer la elección es

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k}.$$

Concluimos entonces que

$$\sum_{j=k}^{m} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Se relaciona con el problema 4 en que los términos de ésta suma son los que continúan la suma de los términos de aquella. Recordemos que ahí todos los términos salvo el primero son iguales a cero, y el último término de esa suma es el primero aquí, por lo que podemos simplemente reescribir

$$\binom{0}{k} + \binom{1}{k} + \binom{2}{k} + \cdots + \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + + \cdots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

En notación de sumatoria:

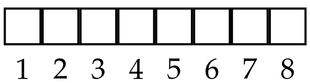
$$\sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

9 Notemos que $\binom{m+k}{k} = \binom{m+k}{m}$. Reescribiendo la suma como

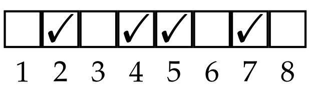
$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \cdots + \binom{m+n}{n} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \cdots + \binom{m+n}{m}$$

reducimos el problema a la interpretación del ejercicio 8.

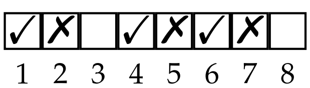
10 La interpretación combinatoria usada para este problema también se usará en el segundo capítulo para dar una de los números de Fibonacci. Vamos a pensar que tenemos n casillas que corresponden a los números $\{1, 2, \ldots, n\}$. Para propósitos de ejemplo, supongamos que $n = 8$



Es natural pensar que el elegir un subconjunto corresponde a marcar ciertas casillas. Por ejemplo, $\{2, 4, 5, 7\}$ corresponde a marcar las casillas

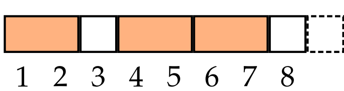


El detalle es que no queremos considerar que aparezcan dos marcas juntas (como la 4 y la 5 del ejemplo). Esto lo podemos visualizar bloqueando las casillas que siguen a una marca. De esta forma, el conjunto $\{1, 4, 6\}$ corresponde a

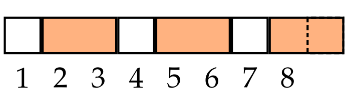


Así, contar el número de formas de escoger subconjuntos con k elementos sin que aparezcan consecutivos es contar el número de formas en que podemos escoger k pares de casillas consecutivas (para marcarlos con ✓✗)... con el detalle de que si el conjunto contiene a n (la casilla final), no aparece ninguna marca. Esto lo solucionamos creando una casilla «fantasma» $n + 1$ en la que podremos poner ✗cuando el subconjunto contenga a n. Esta casilla fantasma no causará problema (ya que nunca la podemos realmente escoger y sólo sirve para poner ✗).

Otra forma de visualizar los pares de casillas consecutivas es «fusionándolas» (sabemos que en la primera mitad va ✓y en la segunda ✗, así que simplemente los omitimos y nos concentramos en la pareja). Nuevamente, como ejemplo tomamos el conjunto $\{1, 4, 6\}$:



Si el conjunto fuera $\{2, 5, 8\}$ entonces obtendríamos:



Ahora queda claro el motivo de añadir la casilla fantasma, pues con ella, cada elemento del subconjunto corresponde a un «dominó» y cada elemento no elegido corresponde a un «cuadrito». Contar los k-subconjuntos equivale al número de formas de colocar k-dominós en una cuadrícula de $1 \times (n+1)$.

Además, siempre habrá $n+1-k$ piezas (porque hay $n-1$ casillas pero k quedan canceladas por los dominós) y de esas piezas, k son dominós y el resto cuadritos.

De manera alterna, podemos «codificar» cada arreglo como una palabra en las letras `C` (cuadrito) y `D` (dominó). El arreglo mostrado para $\{2,5,8\}$ corresponde a la palabra `CDCDCD` y el de $\{1,4,6\}$ corresponde a `DCDDCC`.

Concluimos entonces:

- Cada k-subconjunto sin consecutivos corresponde un arreglo de $n+1-k$ piezas.
- De las $n+1-k$ piezas, k de ellas son dominós.
- El número de formas de escoger cuales de las $n+1-k$ piezas son los dominós, es $\binom{n+1-k}{k}$.

11 Vamos a dar dos formas diferentes de probar la identidad. Como sabemos que la suma total de subconjuntos es 2^n, una forma de demostrar lo que se pide es verificar que uno de los lados es igual a $2^n/2 = 2^{n-1}$.

Para contar la cantidad de subconjuntos de tamaño par, recurrimos a la interpretación con palabras. Cada subconjunto corresponde a una palabra de longitud n en las letras `S` y `N` en donde la posición k es igual a `S` si el elemento k fue elegido para el subconjunto y `N` en caso contrario.

Contar los subconjuntos de tamaño par equivale a contar las palabras que tienen un número par de posiciones iguales a `S`. Ahora, las primeras $n-1$ posiciones de la palabra pueden tomar cualquiera de los dos valores `N` o `S`, pero la letra del último elemento queda automáticamente fija: si se han usado un número par de `S` en las primeras posiciones sólo puede aparecer `N` al final, y si en las primeras posiciones se usó una cantidad impar de `S` entonces la última necesariamente es `S`.

Concluimos entonces que hay sólo 2^{n-1} palabras con un número impar de `S` y por tanto la cantidad de subconjuntos de tamaño impar es $2^{n-1} = 2^n/2$.

12 El número de formas de escoger k elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ y colocarlos *en orden* es

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

puesto que el primer elemento puede ser cualquiera de los n; el siguiente sólo tiene $n-1$ opciones ya que no puede repetir el primero; el tercer elemento tiene $n-2$ opciones pues ya se usaron 2 anteriormente, y así sucesivamente hasta el k-ésimo, el cual tiene $n-(k-1) = n-k+1$ opciones.

Otra forma de contar estos arreglos consiste en primero escoger los k elementos que se van a ordenar, lo cual se puede hacer de $\binom{n}{k}$ formas, y luego se cuenta el total de formas en que se pueden revolver esos k elementos entre sí: $k!$.

Observando que

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

y dado que contar de dos formas tiene que arrojar el mismo valor, obtenemos

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$$

de donde terminamos la prueba al dividir ambos lados por $k!$.

Índice general