

Also haben wir

4
$$G(x, y, z, \dots) = \sum C_{\mu, \nu, \dots} (u, v, w, \dots)$$

nun ist die Frage, unter welcher Bedingung sich $\sum C_{\mu, \nu, \dots}$ in eine Potenzreihe von u, v, w, \dots entwickeln kann. Dies ^{entscheiden} unterscheiden wir nach dem Satze auf der Seite 196., wenn sich eine zweckmässige Function $C_{\mu, \nu, \dots}(u, v, w, \dots)$ habe, in welcher die Coefficienten positive Zahlen sind, die grösser oder gleich sind den absoluten Beträgen der entsprechenden den Coefficienten $C_{\mu, \nu, \dots}$ im $\sum C_{\mu, \nu, \dots}(u, v, w, \dots)$. Ich bilde zunächst aus den Reihen

$$g_1(u, v, \dots)$$

$$g_2(u, v, \dots)$$
 folgende

$$\bar{g}_1 = \bar{g}_1(u, v, \dots)$$

$$\bar{g}_2 = \bar{g}_2(u, v, w, \dots)$$

5

..... welche aus den ursprünglichen entstehen wenn ich dort statt der Coefficienten positive Zahlen setze, die gleich oder grösser sind, als die absoluten Beträge der entsprechenden Coefficienten. Ich bezeichne nun die Functionen $C_{\mu, \nu, \dots}$ durch die Gleichung

6

$$|C_{\mu, \nu, \dots}| \bar{g}_1^{\mu} \bar{g}_2^{\nu} \bar{g}_3^{\dots} = C_{\mu, \nu, \dots}(u, v, w, \dots)$$

Abstrahiren erfüllen die $C_{\mu, \nu, \dots}$ die Bedingung, dass jeder Coefficient darin eine positive Zahl ist, die grösser oder gleich ist dem absoluten Betrage des entsprechenden Gliedes im $\sum C_{\mu, \nu, \dots}(u, v, w, \dots)$; ^{und} dass das letztere nachzuweisen

wird ist folgenden Hilfsatz an. Wenn man mit absoluten Größen $a, b, c \dots$ rechnet und nur Addition und Multiplikation vornimmt, dann mit anderen positiven Größen $a' b' c' \dots$, für welche $|a| \leq a', |b| \leq b' \dots$ ist dieselben Operationen vornimmt, so wird das Resultat der letzteren Rechnung positiv und nie kleiner als der absolute Betrag von dem Resultate der Rechnung mit den Zahlen $a, b, c \dots$. Denn das Resultat der Rechnung im 1ten Falle lässt sich stets auf die Form bringen einer Summe von Gliedern der Gestalt:

St₁ p₁ $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots$ wo $\alpha, \beta, \gamma \dots$ positiv sind.

Im 2ten Falle wird den Größen $a' b' c'$ wird sich das Resultat als Summe von Gliedern darstellen.

St₂ p₂ $a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma} \dots$

und zwar so dass jedes Glied der 1ten Summe ein entsprechendes mit demselben Coefficient St₁ p₁ behaftetes Glied in der 2ten Summe hat. Nun ist

$|\sum \text{St}_1 p_1 a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots| \leq \sum \text{St}_1 p_1 |a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots|$ da nun allgemein $\text{St}_1 p_1 |a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots| \leq \text{St}_1 p_1 a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma} \dots$

so ist $|\sum \text{St}_1 p_1 a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots| \leq \sum \text{St}_1 p_1 a'^{\alpha} b'^{\beta} c'^{\gamma} \dots$

Wenden wir nun dies auf die Bildung der Function $F_{\mu, \nu, \omega} \dots$ an. Wenn ich die Rechnung mit $x, y, z \dots$ ausführe, so ist jeder Coefficient von

$$a_{\mu, \nu, \omega} \dots x^{\mu} y^{\nu} z^{\omega} \dots = F_{\mu, \nu, \omega} \dots (x, y, z, \dots)$$

durch Addition und Multiplication zusammen gesetzt aus den Coefficienten $\alpha_{\mu, \nu}$ und den Coefficienten $\alpha_{\mu, \nu}$, $g_1, g_2 \dots$ Man habe sich, um $\mathcal{F}_{\mu, \nu}(u, v, \dots)$ zu bilden, die selbe Operation mit den Coefficienten von g_1, g_2 und dem absoluten Betrage von $\alpha_{\mu, \nu}$ vorgenommen.

Da nun die Coefficienten in g_1, g_2 nie kleiner sein sollen als die absoluten Beträge der entsprechenden g_1, g_2, \dots , so wird der absolute Betrag eines jeden der Coefficienten in $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$ nie größer sein können, als der entsprechende Coefficient von $\mathcal{F}_{\mu, \nu}$. Es stehen also die g 's und die \mathcal{F} 's in dem verlangten Zusammenhang. Wenn ich nun nachweisen kann, daß es ein Wertesystem, u_0, v_0, w_0, \dots gibt, [welches nicht null ist] für welches stets

$$4 \quad \sum \mathcal{F}_{\mu, \nu}(u_0, v_0, \dots) < \infty$$

wie viel ich auch der Functionen \mathcal{F} nehmen mag, so sind die Bedingungen des Satzes (196) erfüllt und dann kann ich schließen, daß für alle Wertesysteme $|x| \leq x_0, |y| \leq y_0, \dots$ die Reihe $\sum \mathcal{F}_{\mu, \nu}(u, v, \dots)$ transformirt werden kann in Gruppen.

Um die Existenz der positiven Zahlen u_0, v_0, \dots nachzuweisen, betrachten wir die Reihe $\mathcal{G}(x, y, z, \dots)$, welche aus der Reihe $\mathcal{G}(x, y, z, \dots)$ entsteht, indem man, jeden Coeff. in der letzteren auf seinen absoluten Betrag reducirt. Die Reihe $\mathcal{G}(x, y, z, \dots)$ hat sicher denselben Convergenzbereich, wie die Reihe $\mathcal{G}(x, y, z, \dots)$, da für je 2 Glieder derselben denselben

absoluten Betrag haben. Wenn ich nun $\sum \mu_n v_n \dots$ bilden will, so kann ich dies auch so machen, daß ich in $f(x, y, z)$ statt x, y, z der Reihe $f_1(u, v, \dots)$, $f_2(u, v, \dots)$ einsetze, denn dies ist ja die Bedingung zur Bildung des μ 's. Wir haben somit

$$\sum \mu_n v_n \dots = f \left\{ f_1(u, v, \dots), f_2(u, v, \dots), \dots \right\} \quad 8$$

Es wird offenbar die Bedingung 4 erfüllt, wenn man die u, v, \dots so wählen kann, daß jeder Wert f nach der Substitution erhaltlich ist. Nun ist

$$\begin{aligned} f_1(u, v, \dots) &= |a| + f_1'(u, v, \dots) \\ f_2(u, v, \dots) &= |b| + f_2'(u, v, \dots) \end{aligned} \quad 9$$

Ferner haben wir vorausgesetzt, daß die ^{die} (Werte ^{a, b, c, \dots} innerhalb des Konvergenzkreises von $f(x, y, z)$ liegen, und die Reihen f_1, f_2, \dots selbst konvergent sind, d. h. es muß ein Wertesystem u, v, \dots geben, für welches jedes Glied jeder der Reihe kleiner ist, als eine angebbare endliche positive Zahl h .

Es sei dies der Fall für $u_1 = u, v_1 = v, \dots$ so daß jedes Glied der Reihe $f_1 < h$. Also dann ist die Summe aller Glieder der Reihe für $|u| < u_1, |v| < v_1, \dots$

$$f_1(u, v, \dots) \text{ kleiner als höchstens gleich } \frac{h_1}{1 - \frac{u_1}{a_1}} \left(1 - \frac{v_1}{a_1} \right) \dots \text{ und die größte } \frac{h_1}{(1 - \frac{u_1}{a_1})(1 - \frac{v_1}{a_1})} \dots - h_1$$

~~$\frac{h_1}{1 - \frac{u_1}{a_1}} \left(1 - \frac{v_1}{a_1} \right) \dots$~~ h_1 wird eine Potenzreihe liefern, in welcher jedes Glied dem absoluten Betrage nach nie kleiner ist, als das entsprechende in $f_1'(u, v, \dots)$. Folglich haben wir sicher

10. $\bar{f}_1'(u_0, v_0, w_0, \dots) \leq \frac{h_1}{(1 - \frac{u_0}{u_1})(1 - \frac{v_0}{v_1}) \dots} - h_1$
 wofür nur $u_0 < u_1, v_0 < v_1, \dots$

Dann sei der kleinste unter den Nennern

$$\frac{u_0}{u_1} + \frac{v_0}{v_1} \dots \text{ mit } s \text{ bezeichnet, dann haben}$$

wir, wenn die Anzahl der Variablen u, v, w, \dots gleich
 m ist, offenbar

$$\frac{h_1}{(1 - \frac{u_0}{u_1})(1 - \frac{v_0}{v_1}) \dots} - h_1 < \frac{h_1}{(1-s)^m} - h_1 = \frac{s(1-s)^{m-1}}{(1-s)^m} h_1$$

Diese Größe kann offenbar durch Verkleinerung des s be-
 liebig klein gemacht werden. Ich kann also die u_0, v_0, w_0, \dots
 stets so wählen, daß

12. $\bar{f}_1'(u_0, v_0, \dots) < \epsilon$ dasselbe gilt für

$$\bar{f}_2', \bar{f}_3', \dots$$

Damit \bar{f} in δ einen endlichen Werth hat, hat man
 nur die Umgebung von $|a|, |b|, \dots$ zu bestimmen,
 und wenn dieses resp. $\delta_1, \delta_2, \dots$ ist, so braucht man nur
 u_0, v_0, \dots so klein zu wählen daß

$$\bar{f}_1' < \delta_1, \bar{f}_2' < \delta_2, \dots$$

was immer möglich ist, als dann gehört jeder Werth
 $\bar{f}_1(u_0, v_0, \dots), \bar{f}_2(u_0, v_0, \dots), \dots$ ^{nach} dem Konvergenzbereiche
 von $\bar{f}(x, y, z)$. Dazu, daß die $\bar{f}_i(u_0, \dots)$ ^{nach} in dem Kon-
 vergenzbereiche liegen, ist wie wir gesehen, nur nöthig,
 daß a, b, c, \dots innerhalb des Konvergenzbereiches liegt, und
 die Reihen g, \dots convergent sind. Für solche Werthe von u_0, v_0, \dots
 die den obigen Bedingungen genügen haben ^{wir} ~~will~~

$$\sum' C_{\mu, \nu, \xi} (u_0, v_0, \dots) < \infty$$

wie ich auch die $C_{\mu, \nu, \xi}$ wählen möge. Wenn wir nun den Satz Seite 196 anwenden, so sehen wir, daß für alle Wertesysteme von u, v, w , für welche $|u| \leq u_0, |v| \leq v_0, \dots$ ist, man die Gleichung hat:

$$\sum C_{\mu, \nu, \xi} (u, v, w) = \sum C_{\mu, \nu, \xi} c_{\mu} c_{\nu} c_{\xi} u^{\mu} v^{\nu} w^{\xi} \dots$$

Also

$$G(x, y, z) = \sum_{\mu, \nu, \xi} C_{\mu, \nu, \xi} u^{\mu} v^{\nu} w^{\xi} \dots$$

15

Hiermit ist unser Satz vollständig nachgewiesen.

Folgerung. Angenommen die Reihe $G(x, y, z)$ sei überall konvergent, dann ist die Bedingung daß

$$x_0 = \overline{x}_1 (u_0, v_0, \dots)$$

$$y_0 = \overline{y}_2 (u_0, v_0, \dots)$$

dem Konvergenzbereich von $G(x, y, z)$ gehören, stets erfüllt, also die Transformation stets möglich.

Das Wesentliche bei der obigen Untersuchung ist, daß die transformierten Reihen stets einen Konvergenzbereich haben, und daß sie innerhalb eines bestimmten gemeinschaftlichen Konvergenzbereiches identische Werte liefern.

Wie weit sich diese Übereinstimmung erstreckt, können wir mittelst des obigen Satzes nicht entscheiden; darauf kommen wir später zurück. Als eine Anwendung des obigen Satzes ergibt sich ein interessanter und wichtiger Satz der Functionentheorie.

a_2, b_2, c_2, \dots und dann ist für jedes xyz innerhalb des
 kleinen Kreises $|x_2| < |a_2|, |y_2| < |b_2|, \dots$. Und die Überein-
 stimmung beider Reihen noch weiter stattfindet, ~~sonst~~
 entscheidet der obige Satz nicht, er zeigt nur, daß für alle diese
 Werte die Übereinstimmung sicher Statt hat. Um eine
 bequeme Schreibweise zu haben, bezeichnen wir eine
 Reihe die nach Potenzen von $x-a, y-b, \dots$ steigt, mit
 $G(x, y, z; a, b, c, \dots)$. Wir haben also auch

$G(x, y, z; a, b, c, \dots)$ hergeleitet $G_1(x, y, z; a, b, c, \dots)$ und
 für bestimmte Werte von xyz ist

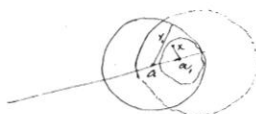
7 $G(x, y, z, \dots) = G_1(x, y, z, \dots; a, b, c, \dots)$

Mit der Reihe $G_1(x, y, z, \dots; a, b, c, \dots)$ können wir das selbe
 vornehmen, indem wir setzen

8
$$\begin{aligned} x-a &= |a_1 - a| + |x - a_1| = |a_1 - a| + u \\ y-b &= |b_1 - b| + |y - b_1| = |b_1 - b| + v \\ &\dots \end{aligned}$$

und dann haben wir

9 $G_1(x-a, y-b, \dots) = G_2(a_1 - a + u, b_1 - b + v, \dots)$



für alle Werte von u, v, \dots welche
 innerhalb des Konvergenzkrei-
 ses von a, b, c, \dots liegen. Wenn

wir annehmen, daß die Reihe
 $G_2(x-a, y-b, \dots)$ konvergent ist für alle Wertesysteme, für
 welche

$$|x-a| < \sqrt{x}, |y-b| < \sqrt{x} \dots \text{sommas}$$

$$|a_1 - a| + |x - a_1| < \sqrt{x}$$

$$|b_1 - b| + |y - b_1| < \sqrt{x}$$

..... diese Bedingungen sind aber erfüllt
wenn ich annehme $a_1 = a + \delta a, \sqrt{x}$ u. s. w.

D. h. innerhalb eines um a, b, c, \dots beschriebenen Kreises, welcher vollständig in dem Convergenzbereiche von $f_1(x, y, \dots | a, b, c, \dots)$ liegt, ist:

$$\begin{aligned} f_1(x-a, y-b, \dots) &= f_1(a_1 - a_1 + u, b_1 - b_1 + v, \dots) \\ &= f_2(u, v, w, \dots) = f_2(x-a_1, y-b_1, \dots) \text{ oder} \\ f_1(x, y, z, \dots | a, b, c, \dots) &= f_2(x-a_1, y-b_1, z-c_1, \dots) \end{aligned} \quad 10$$

Das Resultat ist also. Wenn ich eine in der Umgebung einer Stelle definierte Function $f_1(x, y, \dots | a, b, c, \dots)$ habe, und nehme innerhalb dieser Umgebung eine Stelle a_1, b_1, c_1, \dots so kann ich die ursprüngliche Potenzreihe in eine andere ^{umwandeln} ~~umwandeln~~, welche mit der ersteren übereinstimmt für eine gewisse Umgebung von a_1, b_1, c_1, \dots

Diese Sache kann man nun nach zwei Richtungen hin verfolgen. Nach der einen Richtung hin werden sie uns zu den Begriffen und Principien der Differential- und Integralrechnung führen, nach der andern werden sie uns den Begriff einer analytischen Function erweitern.

Es sei die Potenzreihe $G(x, y, z)$ und wir machen die einfache Substitution

$$\begin{aligned}
 & x = a + u \\
 1 \quad & y = b + v \\
 & z = c + w
 \end{aligned}$$

wo a, b, c, \dots innerhalb des Konvergenzbereiches von $G(x, y, z, \dots)$ $G(x, y, z)$ liegen soll. In diesem Falle ist also

$$\begin{aligned}
 2 \quad & G_1 = a + u \\
 & G_2 = b + v \\
 & G_3 = c + w \text{ und}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad & \bar{G}_1 = |a| + u \\
 & \bar{G}_2 = |b| + v \text{ und} \\
 & \alpha_0 = \bar{G}_1 |u_0 v_0 \dots| = |a| + u_0 \\
 & \gamma_0 = \bar{G}_2 |u_0 v_0 \dots| = |b| + v_0
 \end{aligned}$$

wo u_0 positive Zahlen bezeichnen. Unter der Bedingung dass $a + u, b + v, \dots$ noch zu dem Bereiche von $G(x, y, z)$ gehören welche Bedingung sicher erfüllt ist ^{man} ~~ist~~ $|a| + |u|, |b| + |v|, \dots$

dem Konvergenzbereich angehören, lässt sich also $G(x, y, z)$ transformieren in eine Potenzreihe von u, v, w , und innerhalb eines bestimmten Bereiches ist

$$\begin{aligned}
 4 \quad & G(x, y, z) = G_1(u, v, w, \dots) \\
 & \text{Setze ich nun } u = x - a
 \end{aligned}$$

$$x = x - a, y = y - b$$

$$G(x, y, z) = G_1(x-a, y-b, z-c)$$

Wenn also a, b, c, \dots den Längergrenzkreis gehört von $G(x, y, z)$, so läßt sich $G(x, y, z)$ transformiren in eine Potenzenreihe von $x-a, y-b, z-c, \dots$ wenn

$$|a| + |x-a|, |b| + |y-b|, |z| + |z-c|, \dots$$

Dem Längergrenzkreis von $G(x, y, z)$ gehören.

Die Transformation $G(x, y, z) \xrightarrow[\text{man hat eine neue Kreis}]{\text{geschicht sindem}}$

$$x = a + (x-a)$$

$$y = b + (y-b)$$

setzt und

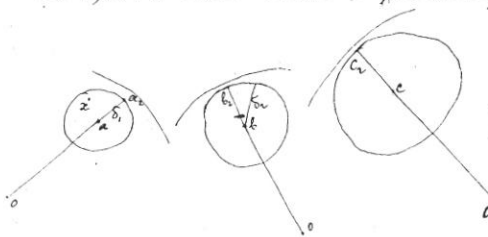
stellt man nach den Potenzen von $(x-a), (y-b), \dots$ ordnet.

Wenn die Bedingung erfüllt ist, so stimmen bei Potenzenreihen für alle solche Werthe überein, für welche die Bedingung erfüllt ist. Alle Werthe z , welche die Bedingung erfüllen werden geometrisch representirt, durch Kreise um die Punkte.

Se a, b, c, \dots mit Radien $\delta_1, \delta_2, \dots$ welche Kreise vollständig

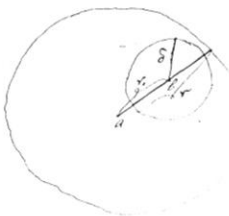
dem Längergrenzkreis von $G(x, y, z)$ gehören. In allen Punkten dieser Kreise die Bedingung erfüllen, folgt aus folgender Betrachtung.

Da a, b, c, \dots innerhalb des Längergrenzbereiches $G(x, y, z)$ liegen, so kann man noch $\delta_a, \delta_b, \delta_c, \dots$ vergrößern bis nach



Principien der Differentialrechnung.

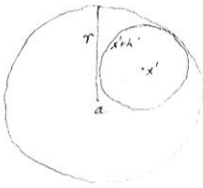
Wenn wir im Folgenden von ganzen Functionen sprechen, so verstehen wir auch darunter unendliche Potenzreihen. Es sei $f(x|a)$ eine ganze Function, so hat sie innerhalb eines um a beschriebenen Kreises, innerhalb des Convergencekreises ρ ihren Sinn. Man wähle wir innerhalb des Convergencebereiches einen Punkt b , so können wir die Function $f(x|a)$ umwandeln in eine andere $f_1(x|b)$. Beide Reihen stimmen innerhalb eines bestimmten Bereiches überein, und zwar ha-



ben wir gefunden, dass diese Uebereinstimmung stattfindet für alle Werthe von x in der Umgebung von b , für welche $|x-b| < \frac{\rho}{2}$. In diesem Bereiche werden beide Reihen identisch dieselben Werthe liefern, d. h. es

ist die eine Reihe $f_1(x|b)$ nur eine andere Darstellung von $f(x|a)$, für die betreffende Umgebung. Das selbe gilt für beliebig viele Variablen x, y, z, \dots . Es wird sich später zeigen, dass die neue abgeleitete Reihe einen Convergencekreis hat, der im Allgemeinen auch solche Werthe von x, y, z enthält, für welche die erste Reihe divergent ist, also überhaupt keinen Sinn hat. Man wird also manche

2te Reihe als Fortsetzung der durch die 1te Reihe definierten Function ansetzen können. Um nun die Principien der Differentialrechnung zu entwickeln, bleiben wir bei einer Variablen stehen. Es sei $f(x|a)$ eine beliebige ganze Function und wir legen dem x einen bestimmten im Convergencekreise liegenden, sonst beliebigen Werth bei, und bringen x auf die Form $x = a + h$, wobei h so gewählt werde,



den wir annehmen, daß $a+h$ innerhalb des Convergencekreises von $f(x|a)$ liegt, was ja immer möglich ist. Alsdann läßt $f(x|a)$ umwandeln in eine Reihe $f(x|a)$ d. h. in eine Reihe, die nach Potenzen von $x - a$ =

$|x - a| + |h|$ x werden beide Reihen übereinstimmen.

Wir erhalten somit unter der obigen Bedingung, $f(x|a) = f(a+h|a) =$ einer Potenzreihe von h . Denn wenn das allgemeine Glied von $f(x|a)$ gleich ist $c_n x^n$, so haben wir hier für $x = a+h$ zu setzen und bekommen $c_n (a+h)^n$; dies wird sich aber nach den allgemeinen Multiplicationsätzen darstellen lassen als Potenzreihe von h , d. h. $\sum_{k=0}^n c_n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k$. Wenn wir nun alle Glieder in $\sum_{k=0}^n c_n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k$ die dasselbe h haben, so bekommen wir eine Potenzreihe von h , wobei jeder Coefficient von h wiederum eine Potenzreihe von a sein wird. Wir können also setzen

$$f(a+h|a) = f_0(a) + f_1(a)h + f_2(a)h^2 + f_3(a)h^3 + \dots$$

Es handelt sich nun um die Bedeutung des Coefficienten
 der G_1, G_2, \dots ; zunächst ist klar, daß sich jeder derselben
 wirklich darstellen. So erhalten wir z. B. für das allgemei-
 ne Glied von $G_1(x/a)$, $c_n (x/a)^n$ also

$$2 \quad G_1(x/a) = \sum c_n (x/a)^n = \sum (n+1) c_{n+1} (x/a)^n$$

Da dies für jedes x innerhalb des Convergenz-Bereiches gilt, so
 haben wir für jedes x innerhalb des C. Bereiches

$$3 \quad G_1(x/a) = \sum (n+1) c_{n+1} (x/a)^n$$

Nun können wir die Formel auch so schreiben

$$4 \quad G(x+h/a) - G(x/a) = G_1(x/a)h + G_2(x/a)h^2 + \dots$$

$$= G_1(x/a)h + h \{ G_2(x/a)h + G_3(x/a)h^2 + \dots \}$$

Nun stellt die linke Seite von 4 die Werthänderung von
 $G(x/a)$ wenn man von x zu $x+h$ übergeht, die rechte
 Seite, welche die obige Änderung darstellt, ist in 2 Theile
 getheilt, deren einer, welcher proportional dem h wächst, und
 einem andern der gleich ist h multiplicirt mit einer von
 h unabhängigen q . Function. Diese Änderung, auf die obige
 Weise in 2 Theile zu sondern, wird man schon dann
 veranlaßt, wenn man die Werthänderung der ganzen
 Function $G(x/a)$ für kleine Werthe von h bezeichnen
 will, wobei es sich zeigt, daß besonders das 1^{te} Glied in 4,
 nämlich $G_1(x/a)h$ dem Werthe nach überwiegt. Um das
 letztere zu zeigen, betrachten wir die ganze Formation

$$5 \quad b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 + \dots = h (b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \dots)$$

Wenn es nun einen Wert für h , einen positiven reellen Wert h_0 gibt, wofür alle Glieder der Reihe endlich sind, was wegen der Convergenz von S richtig ist, so ist die Reihe für alle h , deren absoluter Betrag kleiner ist, als h_0 , sicher convergent, und dann haben wir, wenn wir mit Hilfe positiver Grenze bezeichnen im Verhalt welcher alle Glieder der Reihe, ihrem absoluten Betrage nach für h_0 h , liegen, so haben wir für jedes h wofür $|h| < h_0$ ist

$$|h| (|b_1 + b_2 h + b_3 h^2 + \dots|) < \frac{B}{1 - \frac{h}{h_0}} \cdot h \quad 6$$

Wenn ich nun den absoluten Betrag der Summe kleiner machen will, als eine beliebig kleine positive Größe ϵ , so kann ich für $|h|$ eine Grenze δ bestimmen, so daß für jedes h , dessen absoluter Betrag kleiner ist als δ , die Summe ihrem absoluten Betrage nach ϵ . Dann setzen wir

$$\frac{B}{1 - \frac{h}{h_0}} \cdot |h| < \epsilon \quad \text{so folgt hieraus} \quad 7$$

$$|h| < \frac{\epsilon}{B + \frac{\epsilon}{h_0}} \quad \text{Ich kann also dann setzen} \quad 8$$

$$\delta \equiv \frac{\epsilon}{B + \frac{\epsilon}{h_0}} \quad \text{und für alle } h \text{ wofür} \quad 9$$

$$|h| < \delta \text{ ist die Bedingung erfüllt, daß } |h| (|b_1 + b_2 h + \dots|) < \epsilon.$$

28.

Kehren wir zu der Reihe 4 zurück, so können wir nachdem wir eine beliebige positive Größe ϵ angenommen haben, das h so bestimmen, daß für h wofür $|h| < \delta$,

$$|G_2(\alpha/\rho) + G_3(\alpha/\rho) h^2 + \dots| < \epsilon \quad 10$$

Man ist möglich, dass auch unendlich klein wird.
 gleichzeitig mit h , dann wird auch $\frac{h}{h} = 1$ gleichzeitig mit
 h unendlich klein, also dann sagen wir, es wird h un-
 endlich klein im Verhältniß zu h . Und den nothwen-
 digen Begriff des unendlich kleinen im Verhältniß
 zum unendlich kleinen zu entwickeln ist der Hauptsatz
 bei der Definition des unendlich kleinen wichtig. Denn
 wären alle Werte von h deren absoluter Betrag kleiner ist
 als δ ein und dieselbe Null, so könnten wir von dem Verhält-
 niß $\frac{h}{h}$ gar nicht sprechen. Bei der Reihe $\frac{1}{2^n}$ ist $\frac{1}{2^n}$
 abgesonderte Theil

12

$h \{ G_2(x|a) + h + \dots \}$ ein unendlich kleines G_2
 im Verhältniß zu h .

Auch hieraus sehen wir die Nothwendigkeit der Thei-
 lung der Aenderung $G(x+h|a) - G(x|a)$ in 2 Theile, von
 denen erster unendlich klein ist, so daß es gleich ist $c \cdot h$
 wo c nicht mehr unendlich klein ist und deren 2 der
 unendlich klein ist im Verhältniß zu h . Wenn wol-
 len wir zeigen, daß die Trennung einer Größe h in
 2 Theile von denen einer unendlich klein wird im
 Verhältniß zu h , nur auf eine einzige Weise mög-
 lich ist. Nehmen wir überhaupt an

13

$h = c \cdot h + h_1$, h_1 wo c nicht mehr unend-
 lich klein h , aber gleichzeitig mit h unendlich

klein wird. Nehmen wir nun für h ein, es sei eine an-
dere Zerlegung möglich

$$h = c' \cdot h_1 + h_2' \cdot h \quad \text{wo } c' \text{ nicht unendlich klein, 14}$$

h_2' aber mit h unendlich klein ist. Durch Subtraction
erhalten wir nun

$$(c - c') \cdot h = (h_2 - h_2') \cdot h \quad 15$$

Nun kann ich $|h| \neq 0$ nehmen, ohne daß es Null ist, ich
kann somit durch h dividieren und erhalte

$$c - c' = h_2 - h_2' \quad 16$$

Nun kann ich $|h|$ so klein annehmen, daß

$$|h_2 - h_2'| < c \text{ ist.}$$

Also kann ich das h so klein wählen, daß

$$|c - c'| < c \quad 17$$

Nun ist das c u c' von h unabhängig, da ja alle f_i u g_i ,
welche noch von h abhängig waren, in h_1 u h_2' zusammen-
gefasst sind. Da sich also das c u c' mit h nicht ändert, so
kann die Ungleichung 17 nur dann bestehen, wenn

$$c - c' = 0 \text{ ist, d. h. es muß}$$

$$c = c' \quad 18$$

Es ist also die Zerlegung der Aenderung von $G(x|a)$
auf die obige Weise, nur auf eine einzige Art möglich,
so daß $G_1(x|a) \cdot h$ fest definit ist. Der Bedeutung von
 $G_1(x|a) \cdot h$ wegen, scheidet man diesen Theil von der gan-
zen Reihe, in 4 ab und unterzieht ihn einer genaueren

Hieraus ist ersichtlich, dass man bei der ^{Berechnung} Bestimmung (von $f(x)$)
 $g(x|a) - g(x'|a)$
auf das Glied $g(x'|a)$ zu achten hat. Um unsere Begriffe
präziser auszumitteln, wollen wir zunächst die Definition
der unendlich kleinen Größen festsetzen. Eine veränderliche
Größe heisst unendlich klein, wenn es unter den Werten,
die sie annehmen kann, solche gibt, die kleiner sind,
als eine beliebig kleine Größe ϵ , ohne dass sie Null sind.
Der letzte Zusatz ist sehr wesentlich, eine veränderliche
Größe z. B. die alle Werte bis zu ϵ annimmt, was beliebig
endliche Größe sein mag, deren alle andern unendlich
kleinen Werten Null sind, ist keine unendlich kleine
Größe. Mit dem Begriff des unendlich Kleinen ist streng
verbunden die Continuität des Abnehmens durch alle
möglichen Stufen bis zu Null herab. Diese Definition
der unendlich kleinen Größen ist jeder metaphysischen
Form entkleidet und sie reicht vollständig aus, um
die Begriffe der Differentialrechnung mathematisch zu
präzisieren. Bei unserm Reiten $g(x|a)$ ist x keine un-
endlich kleine Größe, da sie ja unbeschränkt veränder-
lich ist, also durch alle Stufen abnehmen kann.
Man steht mit einer jeden unendlich kleinen Größe
 ϵ eine andere η im Zusammenhang, so dass, wenn man
für η eine beliebig kleine, positive Größe ϵ annimmt,

so daß $|h| < \epsilon$, es immer Werte von h gibt, für welche $|h| < \delta$, und δ ebenfalls eine beliebige kleine positive Größe bedeutet. In diesem Falle sagen wir von den Größen h u. ϵ , sie werden gleichzeitig unendlich klein. Dies ist der ^{wesentlichste} ~~wesentlichste~~ Begriff der Differentialrechnung. Es wird sich später zeigen, daß bei dieser Forderung die Beziehung von ϵ u. h wechselseitig ist, so daß nicht nur ϵ gleichzeitig mit h , aber auch umgekehrt h gleichzeitig mit ϵ unendlich klein wird. Wir haben bis jetzt angenommen, daß mit h ein Wert ϵ in welchem Zusammenhang steht, so daß, wenn ϵ ^{IKLE} ~~IKLE~~ angenommen wird, es möglich ist für h eine Grenze δ so zu finden, daß $|h| < \delta$ ist, wenn $|h| < \epsilon$. Es kann aber auch der Fall vorkommen, daß mit einem h mehrere ϵ in dem obigen Zusammenhang stehen, wie z. B. $h = \frac{1}{2}$ ~~IKLE~~ ^{= 1/2} beide Größen werden aber gleichzeitig unendlich klein.

Unsere Function $f(x|a)$ hat nun die Eigenschaft, daß die Veränderung

$f(x|a+h) - f(x|a) = \epsilon$ gleichzeitig mit h , unendlich klein wird. Wir sagen dann, eine unendliche kleinen Änderung des Argumentes entspricht eine unendliche kleine Änderung der Function.

Wenn eine Größe h gleichzeitig mit ϵ unendlich klein wird, so läßt sie sich auf die Form bringen

$$h = \epsilon \cdot \xi$$

„und für $x = 0$ den Werth 0 annimmt, da ja $\sin x$ stets ger.
„schen $x + 1$ enthalten ist, hat für die Stelle $x = 0$ keinen
„Differentialquotient. Denn nehme ich h , so bekomme ich
„
$$\frac{h \cdot \sin h}{h} = \sin h$$
 wenn h unendl.
„lich klein wird, nähert sich diese Function keinem
„bestimmten Werthe. Die Function $x \sin x$ ist überall
„stetig, hat überall einen Differentialquotienten mit
„Ausnahme $x = 0$. Darauf beruhend hat man den Satz
„aufgestellt, daß jede stetige eindeutige Function von
„ x stets einen Differentialquotienten hat mit Aus.
„nahme einiger Stellen.
„Den Beweis dieses Satzes hat man mittelst der Vor.
„aussetzung geliefert, daß jede Curve eine Tangente hat;
„die Voraussetzung schließt aber ^{schon} die Existenz des
„Differentialquotienten in sich. Man kann sogar stetige
„Curven angeben, die unendlich vielen Punkten die
„alle sogar in einem endlichen Intervalle liegen hin.
„nen) die Eigenschaft hat, daß an diesem Punkte keine
„Tangente möglich ist, das heißt, daß es unbestimmt ist,
„welche Linie die Tangente ist. Hiermit würde also die
„Falschheit des Beweises vollständig dargethan. Man
„hat auch aus der Mechanik Beweise für die Existenz
„des Diff. quotienten hergeholt, indem man so rai-
„sonirte. Denkt man sich x als die Zeit, y als den

Weg, so stellt $\frac{dy}{dx}$ die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt auf der Bahn bewegt, da nun die Geschwindigkeit des Punktes immer bestimmt ist, so ist auch hiermit die Existenz des Diff. quotienten nachgewiesen. Es ist aber nun Frage, ob wirklich der Punkt in jeder Stelle seiner Bahn eine bestimmte Geschwindigkeit hat, wenn die Bahn beliebig ist?

Später hat ^{zuerst} Ampère einen analytischen Beweis dafür gegeben; Duhamel und Bertrand haben ihn mit einigen Modificationen aufgenommen. Alle diese Beweise sind aber fehlerhaft, denn sie setzen voraus, daß man das Intervall für das Argument so theilen kann, daß in jedem Theile des Intervalles die Function nur wächst oder fällt. Man kann aber solche Functionen bilden, die in jedem beliebig kleinen Intervalle wachsen und fallen, obgleich sie vollständig stetig sind. Riemann hat in seinen Vorlesungen eine Function angegeben, die obgleich sie stetig ist, doch keinen Differentialquotienten haben soll.

Diese Function ist

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

Riemann gab aber dafür keinen Beweis, und es ist nicht sicher, ob die Function überhaupt keine Differentialquotienten zulasse, oder ob es nur unendlich vielen Stellen,

Veränderung; und so kann wie die linke Seite die voll-
ständige Änderung von $f(x/a)$ darstellt, stellt uns dieser
Theil den für kleines h vor allem h ^{berwiegenden} Theil der
ganzen Änderung. Man ^{nennt} ~~bestimmt~~ nun diesen Theil der ganzen
Änderung $f_1(x/a)h$, die Differentialänderung oder das
Differential. Man ^{nimmt} ~~setzt~~ dann ^{die} Änderung von x
anzudeuten $h = dx$ und so wie man die vollständige
Änderung $f(x+h/a) - f(x/a) = \Delta f(x/a)$ setzt,
setzt man auch ^{das} Differential zu bezeichnen

19
$$df(x/a) = f_1(x/a) dx.$$

Nun war die Größe x vollständig willkürlich. Wir
können also allgemein innerhalb des h ^{verwendbaren}
Reiches von $f(x/a)$ setzen

20
$$df(x/a) = f_1(x/a) dx$$

Die Größe $f_1(x/a)$ nennt man den Differentialcoef-
ficienten. Nun ist wegen 20 auch

21
$$\frac{df(x/a)}{dx} = f_1(x/a)$$

Umgekehrt sieht man der Coefficient zweier Diffe-
rentialen, $df(x/a)$, und dx (da ja dx selbst die Ände-
rung von x und sogar die vollständige Änderung g),
aus diesem Grunde nennt man $f_1(x/a) = \frac{df(x/a)}{dx}$ auch
den Differentialquotienten.

Wir haben also hier den Begriff der Differentialbede-
utung aus ganzen Functionen entwickelt und nun mit

Erweiterung
der ~~Tomontierung~~ des Begriffes der Functionen worden sich die
ferneren Begriffe der Differentialrechnung entwickeln.
Dies ist nach Prof. Weierstrafs so klein nichtige Wäg. Dann
der Begriff des Differentialquotienten lässt sich am besten
nur an speziellen Beispielen zeigen; man kann sie nach-
weisen, dass allgemein die Grenze, die man als Differen-
tialquotienten definiert, existirt. Auch kann man nicht
ohne weiteres auf die Existenz der höheren Differen-
tialquotienten einer Function kommen, da man ja
noch nicht die Existenz des 1ten Differentialquotienten
nachweisen kann. Man wollte die Existenz
desselben aus dem Begriffe der Stetigkeit der Functio-
nen herleiten, man kann aber schon längst Bei-
spiele für welche es sich ergab, dass obgleich die Functio-
nen vollständig stetig ist, sie an bestimmten Stellen
entweder einen ∞ Differentialquotienten, oder auch
keinen haben. So ist z. B. die Function \sqrt{x} für alle
reellen Wërthe stetig, und für $x = 0$ liefert sie den
ganz bestimmten Wërth 0, der Differentialquotient
aber ist für diese Stelle ∞ , denn lassen wir $x = \epsilon$ wach-
sen ∞ ϵ $\rightarrow 0$, so bekommen wir als den Diff. Quotienten
$$\frac{\sqrt{\epsilon}}{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$$
 und dies kann gross gemacht
werden, als jede beliebig grosse angebbare Zahl. Die Functio-
nen ferner $x \sin \frac{1}{x}$ welche für alle Wërthe von x stetig ist

„der Fall $\alpha < 1$ ist.

Weierstrass hat nun eine ^{sehr} einfache stetige Funktion aufgestellt, die überhaupt keinen Differentialquotienten hat. Diese Funktion ist die unendliche Reihe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos(a^n x), \text{ wo } b < 1 \text{ vorausgesetzt wird}$$

a eine positive ganze (au. ungerade) Zahl. Diese Reihe ist eine stetige Funktion von x , sie ist unendlich, da für jedes Glied kleiner oder höchstens gleich ist, dem entsprechenden aus der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b^n$, welche letztere wegen $b < 1$ convergent ist. Im dem Falle wenn man

$$a \text{ } b > 1 \text{ annimmt,}$$

hat die obige Reihe keinen Differentialquotienten.

Man kann nämlich von ihr leicht nachweisen,

dass wenn ich für ein beliebiges $x_0 = x_0$, den Ausdruck

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

bilde und ihn für unendlich kleine

Werte h bezeichnen will, so zeigt es sich dass ich

1/h δ so finden kann, dass der Differentialquotient

sich der Grenze $+\infty$ und solche Werte 1/h δ für welche

er sich der Grenze $-\infty$ beliebig sehr nähert. Die Grenze

für $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ ist aus keiner Stelle bestimmt, d. h. die

Funktion hat keinen Differentialquotienten. Auf den

Beweis des Obigen kommen wir noch später. Hier möge

„es ausreichen das Beispiel erwähnt zu haben, woraus es

„klar ist, dass alle Beweise für die Existenz des Differen.

„differentialquotienten, die auf der Richtigkeit beruhen ^{folglich sind}; Die
„logischen Fehler derselben stechen, aber manchmal sehr tief,
„so dass man sie auf dem ersten Blick nicht herausfinden kann.
„Es bleibt somit nur der Weg der Induction, um die Existenz
„des Differentialquotienten nachzuweisen. Man muss
„mit den einfachsten Functionen anfangen, für welche Differe-
„ntialquotienten bilden und mit der Erweiterung des Be-
„griffes einer Function, ^{muss} man die Begriffe der Differen-
„tialrechnung erweitern. Dies ist der pädagogische und wissen-
„schaftlich allein richtige Weg.

„Wir wollen nun zeigen, dass die oben erwähnte Function

$$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{n!} \cos^2 \alpha x^n$$

eine stetige Function ist, die keinen Differentialquoti-
ent hat. Wir setzen von ihr voraus, dass α eine positive
Zahl ist, die kleiner ist als 1, a eine ganze positive ungera-
de Zahl ist. Um die Existenz einer Function nachzuweisen
die keinen Differentialcoefficienten hat, reicht es aus,
wenn man zeigt, dass sie für reelle Werthe von x keinen
hat. Wenn wir nur reelle Werthe für x zulassen, ha-
ben wir nur die geometrische Definition von $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$,
 $\cos \alpha$ nöthig, wobei bekannt ist, dass $\sin \alpha$ in $\cos \alpha$ nur
die Werthe zwischen -1 und $+1$ annehmen kann, und dass
ferner stets der Bogen α größer ist als $\sin \alpha$.
Nun ist zunächst klar, dass die Function $f(x)$ unter

kleiner Änderungen von x oder y entsprechen unendlich kleine Änderungen von $f(x)$.

Man gehen wir dazu über, zu zeigen, dass die Function $f(x)$ trotz ihrer Stetigkeit keinen Differentialkoeffizienten hat. Wenn eine Function für einen Werth $x = x_0$ den Diff. Coefficienten haben soll, so heißt dies, es muss eine von h unabhängige Grösse c geben, so dass man hat.

31

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + kh, \text{ wo}$$

kh , gleichzeitig mit h unendlich klein wird, oder in andern Worten es muss für jedes $x = x_0$ eine ganz bestimmte von h unabhängige Grösse c geben, so dass die Differenz zwischen der totalen Zunahme der Function und der Grösse ch beliebig klein gemacht werden können, wenn man mit h hinreichend klein nimmt. Oder auch wenn ich $x_0 + h = x'$ nehme, so muss.

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = c + kh, \text{ wo } c \text{ eine bestimmte Grösse}$$

ist, die sich von dem Quotienten ^{um} kh eine unendlich kleine Grösse unterscheidet, wenn ich x' hinreichend nahe an x_0 annehme. Wenn ich nun von ^{unserer Function} kh nachweisen kann, dass es in der Nähe eines jeden x_0 Werthe x' gibt, für welche der Quotient beliebig groß positiv und solche x' , für welche er beliebig groß negativ gemacht werden kann, so wird die Function $f(x)$ keinen Diff. Coef.

efficienten haben, denn es wird keine bestimmte von x unabhängige Größe ε geben, für welche die Gleichung 31 bestände.

Wir haben wegen 27

$$f(x') - f(x_0) = \sum_0^{m-1} b^n [\cos(\alpha^n x') \pi - \cos(\alpha^n x_0) \pi] + \sum_0^{\infty} b^{m+n} [\cos(\alpha^{m+n} x') \pi - \cos(\alpha^{m+n} x_0) \pi] \quad 32$$

Denken wir uns nun die positive ganze Zahl α als Grundzahl eines Zahlensystems, so kann sich jedes x_0 auf die Form bringen

$$x_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \dots$$

$$x_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \dots \quad 33$$

wo die α 's ganze positive oder negative Zahlen sind, deren absoluten Beträge nicht höchstens $-\frac{1}{2}(\alpha-1)$.

Denn setzen wir

$$\alpha^n x_0 = \beta_n + \alpha_n \quad 34$$

wo β_n die größte in $\alpha^n x_0$ enthaltene ganze Zahl ist, und $\alpha_n < 1$. Da wir können dies so einrichten, daß $|\alpha_n| < \frac{1}{2}$, denn wäre $|\alpha_n| > \frac{1}{2}$, so können wir doch setzen

$$\alpha^n x_0 = \beta_n + 1 + (\alpha_n - 1), \text{ wo dann } |(\alpha_n - 1)| < \frac{1}{2}.$$

Wir können aber stets die Zerlegung so bewirken, daß α_n zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegt. Bestimme ich nun die Zahl β_{n+1} so daß

$$\alpha^{n+1} x_0 = \beta_{n+1} + \alpha_{n+1}, \text{ wo } |\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2} \quad 35$$

multiplizieren wir 34 mit α und vergleichen mit 35, so

$$\text{folgt } \beta_{n+1} + \alpha_{n+1} = \alpha \alpha_n + \alpha \beta_n \quad 36$$

Setzen wir nun

unter Voraussetzung, dass $b < 1$ ist, einen endlichen Werth hat. Denn betrachten wir das allgemeine Glied der Reihe, so ist

$b^n \cos\{a^n x\} / \pi$ dem absoluten Betrage nach kleiner oder höchstens gleich zur b^n , also sicher

23.
$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\{a^n x\} / \pi \leq \sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

Man convergirt aber letztere Reihe, da ja $b < 1$, folglich hat auch $f(x)$ für jeden Werth von x einen endlichen Werth.

Man zeigen wir, dass diese Function eine stetige Function ist; d. h. dass man, nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ϵ , für h stets eine Grenze δ angeben kann, so dass für Werthe von $h < \delta$, für jedes beliebige x die Differenz

24.
$$f(x+h) - f(x) < \epsilon$$

wobei wir immer den absoluten Betrag verstehen wollen.

Wir theilen das ϵ in 2 Theile

25.
$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

Man haben wir für die Differenz

26.
$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \{ \cos\{a^n(x+h)\} / \pi - \cos\{a^n x\} / \pi \}$$

Diese Differenz können wir aber so in 2 Theile theilen, dass der 2^{te} Theil für jeden Werth von x kleiner ist als ϵ_2 .

Wir setzen nämlich

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b^n [\cos\{a^n(x+h)\} / \pi - \cos\{a^n x\} / \pi]$$

27.
$$+ \sum_{n=m}^{\infty} b^n [\cos\{a^n(x+h)\} / \pi - \cos\{a^n x\} / \pi]$$

$$= \sum_{n=0}^{m-1} b^n [\cos\{a^n(x+h)\} / \pi - \cos\{a^n x\} / \pi]$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} [\cos \{ a^{m+n} (x+h) \} \pi - \cos \{ a^{m+n} x \} \pi]$$

Man ist dem absoluten Betrage nach

$$\left. \begin{array}{l} \cos \{ a^{m+n} (x+h) \} \pi \\ \cos \{ a^{m+n} x \} \pi \end{array} \right\} \leq 1, \text{ also die Differenz}$$

$|\cos \{ a^{m+n} (x+h) \} \pi - \cos \{ a^{m+n} x \} \pi| \leq 2$, folglich ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} [\cos \{ a^{m+n} (x+h) \} \pi - \cos \{ a^{m+n} x \} \pi] &< 2b^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \\ \sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} [\cos \{ a^{m+n} (x+h) \} \pi - \cos \{ a^{m+n} x \} \pi] &< \frac{2b^m}{1-b} \end{aligned} \quad 28$$

Man nimmt b^m mit wachsendem m stets ab, so dass ist immer, das m so groß nehmen kann, dass

$$\frac{2b^m}{1-b} < \epsilon_2 \quad 29$$

d. h. der 2^{te} Theil kann für beliebiges ϵ kleiner gemacht werden als ϵ_2 , wenn man nur m hinreichend groß annimmt. Man betrachtet wir den 2^{ten} Theil von 27, welches aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht. Das also, jedes Glied kann auf die Form gebracht werden

$$2b^n a^{n \frac{h}{2}} \pi, \quad 30$$

also die Summe von $n=0$ bis $m-1$ kleiner als

$$h \pi \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n \text{ iniddest } \sum_{n=0}^{m-1} a^n b^n \text{ einen endlichen}$$

Werkheit, so kann ich immer das $h < \delta$ so annehmen, dass die Summe kleiner wird als ϵ . Man kann also wirklich für δ eine Größe δ so bestimmen, dass für $h < \delta$ die Differenz

$$f(x+h) - f(x) \text{ kleiner ist als } \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ oder als } \epsilon.$$

Dennach ist $f(x)$ eine stetige Function, denn unendlich

$-2b^n \sin \{ a^n (x + \frac{h}{2}) \} \pi \cdot \sin (a^n \frac{h}{2} \pi)$. Man ist jedes dieser Glieder seinem absoluten Betrage nach kleiner als

37 $\beta_{m+1} - \alpha \beta_m = \alpha_m$ suchen wir zunächst, dass α_m eine ganze Zahl ist, man folgt aber weiter ^{aus} 36,

$$\beta_m = \frac{\alpha_m + \beta_{m+1}}{\alpha}$$

und $\alpha_m = \alpha \beta_m - \beta_{m+1}$, man erhält offenbar β_m seinen größten Werth, wenn α_m den möglichst großen, β_{m+1} aber den möglichst kleinen Werth hat, d. h. für

$$\beta_{m+1} = \frac{1}{2}$$

$\beta_{m+1} = -\frac{1}{2}$, dann ist aber

38 $\alpha_m = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$, der möglichst niedrige Werth von α_m ergibt sich $\alpha_m = -\frac{1}{2}(\alpha - 1)$. Also die α 's sind ganze positive oder negative Zahlen ihrem absoluten Betrage nicht nie größer als $\frac{1}{2}(\alpha - 1)$.

Durch diese Formeln kann man das α_m und dann β_m berechnen. Wenden wir diese Formeln wiederholt an, so kommen wir zu der Formel

39
$$\beta_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\alpha_2}{\alpha^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha^3} + \dots$$

Man sei

40
$$\beta_0 = \frac{\beta_m + \alpha_m}{\alpha^m} \text{ und}$$

41
$$\alpha' = \frac{\beta_m + 1}{\alpha^m}, \text{ dann ist}$$

42
$$\alpha' - \beta_0 = \frac{1 - \alpha_m}{\alpha^m} \text{ also } \alpha' - \beta_0 \text{ eine positive Größe.}$$

Der möglichst große Werth der rechten Seite ist, man für $\alpha_m = -\frac{1}{2}$, dann ist der möglichst große Werth von $\alpha' - \beta_0 = \frac{3}{2\alpha^m}$, man kann $\frac{3}{2\alpha^m}$ durch Vergrößerung von m beliebig klein gemacht werden, so dass die links

Formeln 40, 41, eine solche ist, daß das α' dem α_0 beliebig nahe gebracht werden kann. Nun kann man den $\frac{1}{2}\pi$ Teil von 3α auf die Form bringen:

$$-2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} b^n \sin\left(\alpha^n \frac{\alpha_0 + \alpha_0}{2}\right) \sin\left(\alpha^n \frac{\alpha' - \alpha_0}{2}\right) \quad 43$$

Nun machen wir die Voraussetzung, daß α eine ungerade Zahl ist, es ist wegen $\neq 1$

$$a^{m+n} x = a^n \beta_m + a^n \quad 44$$

Die rechte Seite hiervon, $a^n \beta_m + a^n$, ist gerade oder ungerade je nachdem $\beta_m + 1$ gerade oder ungerade ist, d. h.

$$a^{m+n} x \equiv \beta_m + 1 \pmod{2} \quad 45$$

Es wird somit $\cos\left(\alpha^{m+n} x'\right) \pi$, da $\alpha^{m+n} x'$ eine ganze Zahl ist, $+1$ oder -1 , sein, je nachdem $\beta_m + 1$ gerade oder ungerade ist. Es ist also $\cos\left(\alpha^{m+n} x'\right) \pi = -(-1)^{\beta_m}$

46

Ferner ist

$$a^{m+n} \alpha_0 = a^n \beta_m + a^n \alpha_m, \text{ also}$$

$$\cos\left(\alpha^{m+n} \alpha_0\right) \pi = \cos\left(\alpha^n \beta_m + a^n \alpha_m\right) \pi = (-1)^{\beta_m} \cos\left(\alpha^n \alpha_m\right) \pi \quad 47$$

Wir erhalten also

$$\sum_{\alpha=0}^{\frac{2}{\alpha}} b^{m+n} \left[\cos\left(\alpha^{m+n} x'\right) \pi - \cos\left(\alpha^{m+n} \alpha_0\right) \pi \right] \quad 48$$

$$= -(-1)^{\beta_m} b^m \sum_{\alpha=0}^{\frac{2}{\alpha}} b^n \left\{ 1 + \cos\left(\alpha^n \alpha_m\right) \pi \right\}$$

Demnach haben wir

$$f(\alpha') - f(\alpha_0) = -2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} b^n \sin\left(\alpha^n \frac{\alpha_0 + \alpha_0}{2}\right) \sin\left(\alpha^n \frac{\alpha' - \alpha_0}{2}\right) \quad 49$$

$$+ (-1)^{\beta_m+1} b^m \sum_{\alpha=0}^{\frac{2}{\alpha}} b^n \left\{ 1 + \cos\left(\alpha^n \alpha_m\right) \pi \right\}$$

Nun muß auf den dens Druck für $\frac{f(\alpha') - f(\alpha_0)}{x' - \alpha_0}$ zuhören,

dividieren wir das allgemeine Glied in der ersten Reihe von 49 durch $x' - x_0$ und schreiben es in der Form

50
$$T(ab)^n \frac{\sin(a^n \frac{x' - x_0 T}{2})}{(a^n \frac{x' - x_0 T}{2})} \sin(a^n \frac{x_0 + x_0 T}{2})$$

der absolute Betrag von diesem Gliede ist kleiner (oder für einige x', x_0 höchstens gleich) als $T(ab)^n$, so daß die ganze 1te Summe ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist

als $T \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n = T \cdot \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < T \frac{(ab)^m}{ab - 1}$

Wir können also setzen

$$-\frac{2}{x' - x_0} \sum_{n=0}^{m-1} b^n \sin(a^n \frac{x_0 + x_0 T}{2}) \sin(a^n \frac{x' - x_0 T}{2}) = \eta_m \frac{T(ab)^m}{ab - 1}$$
 wobei $-1 < \eta_m < 1$ und η_m nicht null ist.

In der 2ten Summe ist nun jedes Glied positiv, also die Summe sicher größer als das 1te Glied für $m=0$.

Dannum $x' - x_0 = \frac{1 - \epsilon_m}{a^m} < \frac{3}{2a^m}$ so wird das 2te Glied von 49 dividirt durch $x' - x_0$ dem absoluten Betrage nach größer sein.

als $\frac{2}{3} (ab)^m$, wir können also setzen

$$\frac{(-1)^{\beta_m+1} b^m}{x' - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} b^n \{1 + \cos(a^n \epsilon_m) T\} = (-1)^{\beta_m+1} (1 + \epsilon_m) \frac{2}{3} (ab)^m$$

Also haben wir

$$f \frac{(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \eta_m \frac{T(ab)^m}{ab - 1} + (-1)^{\beta_m+1} (1 + \epsilon_m) \frac{2}{3} (ab)^m$$

 $-1 < \eta_m < +1, \quad \eta_m \leq 0.$

$0 < \epsilon_m < 1$ oder auch

51
$$f \frac{(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = (1 + \epsilon_m) (-1)^{\beta_m+1} (ab)^m \left[\frac{2}{3} + \frac{T \eta'_m}{ab - 1} \right]$$

wo nun $\eta'_m = \frac{\eta_m}{1 + \epsilon_m} (-1)^{\beta_m+1}$ also ebenfalls

zwischen -1 u $+1$ liegt. Wählen wir nun das ab. so, daß

$$\frac{2}{3} > \frac{p}{ab-1} \text{ ist, oder } ab > 1 + \frac{3}{2} p$$

52

was immer möglich ist, so wird die Rechte von ab mit wachsendem m stets wachsen und das Zeichen von $(-1)^{p+m}$ haben. Mit wachsendem m nähert sich aber se dem se_0 . Wir können somit das se so nahe an se_0 wählen, daß der Quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ mit ab größer wird, als jede noch so große Zahl mit dem Vorzeichen $(-1)^{p+m+1}$. Daraus sieht man aber, daß sich $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ kleiner machen läßt, als jede beliebige Zahl. Wenn wir nun für $se - se_0 = -\frac{1 + x_{0m}}{a^m}$ setzen und dieselbe Rechnung anführen, so erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -(1 + \epsilon_m) (-1)^{p+m+1} (ab)^m \left[\frac{2}{3} + \frac{p}{ab-1} \right] \quad 53$$

und unter der obigen Voraussetzung $ab > 1 + \frac{3}{2} p$, wird die Rechte mit wachsendem m ohne Ende wachsen und das Vorzeichen $(-1)^{p+m+1}$ haben. Man kann somit das se an se_0 so nahe bringen, daß der Quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ größer wird als jede beliebig große Zahl mit dem Vorzeichen $(-1)^{p+m+1}$. Das Resultat ist aber, man kann stets in der Nähe eines jeden se_0 solche Werte se finden, daß der Quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für hinreichend kleines $x - x_0$ größer ist, als jede positive noch so große Zahl und ebenfalls größer wird als jede negative noch so große Zahl. Es nähert sich somit der Quotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (an keiner Stelle) einem bestimmten Werte, das heißt unsere Function $f(x)$ hat für reelle Werte keinen Differentialcoefficienten.

Hieraus sehen wir, daß wir die Existenz des Differentialquotienten nicht voraussetzen dürfen, und die Beweise der Existenz desselben, die auf der Stetigkeit der Functionen beruhen, sind falsch. Denn unsere Function ist wohl ständig stetig, und doch hat sie keinen Diff. coefficienten. Ferner folgt aus dem Vorigen, daß man in jeder noch so kleinen Entfernung von x_0 Werte finden kann x', x'' , für welche

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} \quad \text{und} \quad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

das selbe Zeichen haben. Wenn wir uns $x' > x_0$, $x'' < x_0$ annehmen, so muß

$$\left. \begin{array}{l} f(x') \\ f(x'') \end{array} \right\} > f(x_0) \text{ oder auf auch}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x') \\ f(x'') \end{array} \right\} < f(x_0) \text{ sein.}$$

D. h. wie klein man auch das Intervall $x' - x_0, x_0 - x''$ nimmt, so gibt es darin Werte, für welche die Function $f(x)$ stetig, als auch fällt. Dies zeigt uns die Unzulässigkeit der Beweise, die ^{auf} einer solchen Theilung des Intervalls beruhen, daß zu demselben die Function entweder nur abnimmt, oder nur zunimmt. $f(x)$

Wenn $f(x)$ eine eindeutig definierte Function ist, die

einen Diff. coefficienten haben soll, so mu \ddot{u} ss es f \ddot{u} r jedes x_0 ein h in der Umgebung von x_0 geben, so da \ddot{u} ss man selbst w \ddot{a} hlen

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ch + kh_2, \text{ wo } c \text{ von } h \text{ 54}$$

unabh \ddot{a} ngig, h_2 aber gleichzeitig mit h unendlich klein wird. Oder wenn wir x in der N \ddot{a} he von x_0 nehmen, ist

$$f(x) - f(x_0) = c(x - x_0) + (x - x_0)f'(x_0, x_0) \text{ wo 55}$$

$f'(x, x_0)$ gleichzeitig mit $x - x_0$ unendlich klein wird. Setzen wir 55 in folg. in der Form:

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)f'(x_0, x_0) \text{ 56}$$

so sehen wir, da \ddot{u} ss in der N \ddot{a} he von x_0 die beiden ersten Glieder haupts \ddot{a} chlich \ddot{u} berwiegen, d. h. in der N \ddot{a} he von x_0 ist die Function $f(x)$ verglichen mit einer linearen Function

$$f_1(x) = f(x_0) + c(x - x_0), \text{ so da \ddot{u} ss letztere 57$$

die W \ddot{e} rthe von $f(x)$ desto genauer darstellt, je kleiner wir $x - x_0$ nehmen. Die Function 57 ist unter den linearen Functionen von x die einzige, welche sich am meisten in der N \ddot{a} he von x_0 an die Function $f(x)$ anschliesst, d. h. welche in der N \ddot{a} he von x_0 genauer die W \ddot{e} rthe von $f(x)$ angibt, als jede andere lineare Function von x .

Dann nehmen wir an eine andere lineare Function $f_2(x) = f(x_0) + c'(x - x_0)$ so haben wir gem \ddot{a} ssnet

$$f(x) - f_1(x) = (x - x_0)f'(x_0, x_0) \text{ und dann 58}$$

$$f(x) - f_2(x) = [(c - c') + f'(x_0, x_0)](x - x_0) \text{ 59}$$

das Verh \ddot{a} ltniss beider Differenz ist aber beider Differenzen

$f(x_0, x_0)$ d. h. die erste Differenz ist un-
 endlich klein im Verhältnis zu der anderen d. h. $f(x_0)$
 stellt $f(x)$ genauer dar, als $f_2(x)$ sobald c von c' ver-
 schieden ist.

Denken wir uns x_0 als Abscisse und $f(x_0)$ als Ordinate
 einer Curve, so stellt uns

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + (x - x_0)^2 f(x_0)$$

die Curve dar in der Nähe von x_0 und

$$f_1(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$$

ist die Tangente an dem
 Punkt x_0 . Die Tangente schneidet sich aber genauer an die
 Curve in der Nähe des Berührungspunktes, als jede andere
 durch denselben gehende Gerade. Kehren wir nun zu un-
 seren ganzen Functionen zurück, und betrachten speziell
 ganze Function einer Veränderlichen x . Diese sei

61
$$f(x) = \sum c_n (x - a)^n$$
 und sie möge für

eine bestimmte Umgebung von a ihre Gültigkeit haben.

Nehmen wir x in dem Convergencebereiche und dann
 wählen h , so daß $x+h$ noch immer in dem Convergencebe-
 reiches liegt, so können wir

62
$$f(x+h) = \sum c_n (x+h-a)^n$$
 nach Potenzen

von h ordnen, da ja die Reihe $f(x+h)$ convergent ist, also
 beliebig in Gruppen getheilt werden kann, u. suchen dann
 den Coefficienten von h auf, so ist dieser nach der Defi-
 nition des Differentialcoefficienten, den ^{wir} ~~man~~ mit

$\frac{d f(x)}{dx}$ oder $f'(x)$ bequidem, um δ darzustellen
 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-a)^{n-1}$

63.

welche Gleichung auch für $\delta = 0$ richtig ist, da ja sich die negative Potenz von $x-a$, wegholt. Dieser Diff. coeff. ^{ist} ~~hat~~ wiederum eine ganze Function von x , hat also ^{seine} innerhalb eines bestimmten Convergencebereiches die Gültigkeit. Sein Convergencebereich stimmt aber offenbar mit dem von $f(x)$ überein. Denn sobald x so gewählt wird, daß $f(x)$ convergirt ist, d. h. solange x innerhalb des Convergencebereiches liegt, kann man h stets so klein annehmen, daß auch $x+h$ innerhalb desselben liegt, das heißt, die Reihe für b für alle $x+h$ die der Bedingung gemäßen ihre Gültigkeit hat. Da nun die Reihe b , also innerhalb desselben Convergencebereiches convergent ist, so wird die neue Reihe, die wir durch Gruppentheilung erhalten, ebenfalls innerhalb desselben Convergencebereiches convergent sein, also wird die Summe von einigen Gliedern von b , gerade derjenigen, welche $f'(x)$ ausmachten innerhalb desselben Convergencebereiches endlich sein, das heißt also $f'(x)$ ist eine ganze Function, die innerhalb desselben Convergencebereiches convergent ist, wie $f(x)$.

Daß dies auch umgekehrt gilt, folgt ohne Weiteres daraus, daß jedes Glied von $f(x)$ kleiner ist als das entsprechende

von $f'(x)$. Wir nennen auch $f'(x)$ die Ableitung der Function $f(x)$.

Wir haben also den Satz: Jede in einer gewissen Umgebung von a definierte ganze Function hat an jeder Stelle des konvergenzbereiches einen Differentialquotienten, der selbst eine ganze Function, ist gültig für den selben Convergencebereich wie $f(x)$.

Daraus schließen wir sofort, daß $f'(x)$ selbst eine Ableitung hat, welche mit $f''(x)$ bezeichnet wird und die 2te Ableitung von $f(x)$ heißt. Man hätte wir nach der Erklärung

$$d f'(x) = f''(x) dx, \text{ also analog}$$

$$d f''(x) = f'''(x) dx$$

Es ist nun $d f'(x)$ eine Function von x , und dx , welche letztere Größe als Constante zu betrachten ist.

Wir können also auch so schließen

$$d(d f'(x)) = d(f''(x) dx) = dx \cdot d f''(x) \text{ also}$$

$$d(d f''(x)) = f'''(x) dx^2.$$

Man schreibt nun der Kürze wegen

$$d(d f'(x)) = d^2 f'(x) \text{ und dann haben wir}$$

$$\frac{d^2 f'(x)}{dx^2} = f'''(x)$$

Nun wird ebenso $f''(x)$ eine ganze Function sein mit demselben C. bereiche wie $f'(x)$ also auch wie $f(x)$. Sie hat also selbst einen Differentialcoefficienten, den wir mit $f'''(x)$ bezeichnen und die 3te Ableitung von $f(x)$ nennen. Es ist

Dann

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = f'''(x) \text{ u. s. w.}$$

Jede ganze Function von x , hat also Differentialcoeffizienten aller Ordnungen, welche selbst ganze Functionen sind mit dem Convergenzbereiche der ursprünglichen Function $f(x)$.

Was die Bezeichnung der Ableitungen anbelieft, ist nach die Cauchy'sche Bezeichnung zu erwidern; Cauchy setzt nämlich

$$Df(x) = f'(x)$$

$$D^2 f(x) = f''(x)$$

Diese Bezeichnung hat ihren Vortheil bei Functionen mehrerer Argumente.

Man gehe wie zu der Entwicklung der Coeffizienten für mehrere Variablen. Wir wollen es für 2 Variablen x, y thun.

Wir wählen innerhalb des Convergenzbereiches der Function $f(x, y)$ eine beliebige Stelle und bestimmen h, k so daß auch noch $x+h, y+k$, innerhalb desselben liegt

und bilden die totale Aenderung von $f(x, y)$

$$f(x+h, y+k) - f(x, y)$$

Da nun $f(x+h, y+k)$ eine convergente Reihe ist, so läßt sie sich nach Potenzen von h u. k in Gruppen theilen, so daß wir setzen können.

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = ch + c'h + (h^2 k^2, k^2/h^2) k$$

wo c u c' von h u h' unabhängig, (h h_1), (h' h'_1) aber gleichzeitig mit h , und h' unendlich klein werden. Nun nennen wir den 1ten Theil, worin h u h' linear vorkommen, das totale Differential von $f(x, y)$ u. setzen

$$df(x, y) = ch + c'h', \text{ oder für } h, h' \text{ für } h, h' \text{ gleich}$$

$$df(x, y) = c dx + c' dy.$$

Um die Bedeutung von c u c' zu erfahren bemerken wir, daß die Gleichung 64 für jedes h , u h' gelten muß. Für h gleich Null erhalten wir aber

64 $f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) = ch + (h' \cdot 0), h'$

Nach der Definition ist aber c nicht weiter als die Ableitung von $f(x, y)$, wenn man y als constant betrachtet, wir nennen dies die partielle Ableitung von $f(x, y)$ nach x und bezeichnen mit $D_x f(x, y)$

$$c = D_x f(x, y) \text{ ebenso folgt für } h = 0$$

$$c' = D_y f(x, y)$$

Also haben wir

65 $df(x, y) = D_x f(x, y) dx + D_y f(x, y) dy.$

d. h. das totale Differential ist gleich der Summe der partiellen Differentialen. Die Bedeutung des Differential als $f(x, y)$ zeigt sich zunächst bei der Berechnung der Änderung, von $f(x, y)$ für kleine Wërthe von h , h' , wo dann das Differential dem Wërthe nach ^{überwiegt} überwiegt.

Setzen wir in 64 $x = x_0$, $y = y_0$, $x_0 + h = x$, $y_0 + h' = y$, so erhalten wir

$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) D_x f(x_0, y_0) + (y - y_0) D_y f(x_0, y_0) \dots$ 66
 wo der Rest unendlich klein wird im Verhältnisse zu $x - x_0$,
 $y - y_0$. Setzen wir

$f_1(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0) D_x f(x_0, y_0) + (y - y_0) D_y f(x_0, y_0)$ 67
 so stellt die Function $f_1(x, y)$ in der Nähe von x_0, y_0 die Werte
 der Function $f(x, y)$ genauer als jede andere lineare Function
 von x, y . Geometrisch bedeutet f_1 eine Ebene, 68 die Tangen-
 gente im Punkte x_0, y_0 .

Die Definitionen bleiben dieselben bei Functionen von
mehrerer Veränderlichen.

Für die hier betrachteten ganzen Functionen gestal-
 ten sich die Sätze der Differentialrechnung sehr einfach.
 Es existiren hier Ableitungen aller Ordnungen, die in
 demselben Bereiche gültig sind, wie die ursprüngliche
 Function. Haben wir die Ableitung von der Function
 $f(x, y, z)$ gebildet nach x , so ist die Ableitung wiederum
 eine ganze Function von x, y, z , wir können von ihr die
 Ableitung nach y z. B. suchen u. s. w. Wir bezeichnen
 dies durch folgende Gleichung

$$D_x D_x D_y D_x f = D_x [D_x \{D_y \{D_x f\}\}] \quad 68$$

wobei die Operationen vorgenommen werden, wie die Ord-
^{nung} ~~nung~~ ^{wie bei} ~~den~~ ^{Reihen} es angeben, von rechts nach links.

Satz. Um die Ableitung von $f(x) = \sum c_n (x-a)^n$
 zu finden, vermindere man in der Summe jeden Coefficienten

um ^{ein} Einheit ~~und~~ multipliziere das Glied mit x , d. h. ist

$$D_x f(x) = \sum_{\mu} c_{\mu} (x-a)^{\mu-1}$$

Dies ist ohne Weiteres aus dem Vorigen ^{erichtlich} entwickelt.

Bei Funktionen mehrerer Veränderlichen gilt dieselbe Regel. Haben wir nämlich

$$f(x,y,z) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu, \nu} (x-a)^{\mu} (y-b)^{\nu} (z-c)^{\nu}$$

so ist dies eine ganze Funktion der ^{in Beziehung} ~~Rechnung~~ ^{auf x} ~~auf x~~ die wir gleich setzen

$$\sum_{\mu} c_{\mu} (x-a)^{\mu}, \text{ wo } c_{\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu, \nu} (y-b)^{\nu} (z-c)^{\nu}$$

welche Gruppierung wegen der Convergence erlaubt ist.

Nun nach dem obigen ist

$$\begin{aligned} D_x f(x,y,z) &= \sum_{\mu} \mu c_{\mu} (x-a)^{\mu-1} \\ &= \sum_{\mu, \nu} \mu c_{\mu, \nu} (x-a)^{\mu-1} (y-b)^{\nu} (z-c)^{\nu} \end{aligned}$$

denn auch diese Gruppierung ist erlaubt. Diese letztere Reihe hat denselben Convergencebereich wie $f(x,y,z)$.

Man sieht also, daß man die Operation an jedem einzelnen Gliede vornehmen kann. Man sieht man sofort, daß

$$D_y D_x f(x,y,z) = \sum_{\mu, \nu} \mu \nu c_{\mu, \nu} (x-a)^{\mu-1} (y-b)^{\nu-1} (z-c)^{\nu}$$

Nimmt man die Operation der umgekehrten Reihenfolge ^{erhält} vor, so hat man

$$D_x D_y f(x,y,z) = \sum_{\mu, \nu} \mu \nu c_{\mu, \nu} (x-a)^{\mu-1} (y-b)^{\nu-1} (z-c)^{\nu}$$

Daraus ziehen wir den Schluss, daß

69
$$D_y D_x f(x,y) = D_x D_y f(x,y)$$

Man kann also die Operation in einer beliebigen Reihenfolge

vornehmen. Auf dieselbe Weise würde man sich leicht ~~über~~ überzeugen können, daß dies allgemein für beliebig viele Operationen gilt.

Lehrsatz Wenn eine beliebige Function von beliebig vielen Variablen innerhalb eines Bereiches stetig und eindeutig ist, und in Bezug auf jede der Veränderlichen Ableitung hat, die in demselben Bereiche stetig und eindeutig sind, so hat die Function ein, aber auch nur ein Differential.

Die obigen Bedingungen sind hinreichend und eindeutig. Sufsig, denn nur solche Functionen überhaupt bilden den Gegenstand der Differentialrechnung.

Da die Function in Bezug auf jede der Variablen eine Ableitung hat, so können wir setzen

$$f(x+h, y, z) - f(x, y, z) = h \cdot D_x f(x, y, z) + o(h) \quad 10$$

wof $o(h)$ gleichzeitig mit h unendlich klein wird, was für alle Werthe des Convergencesbereiches gelten muß.

Dies ist so zu verstehen: Wir denken uns innerhalb des Bereiches $xyz \dots B_1$ einen um $xyz \dots$ liegenden Bereich B_2 , der vollständig innerhalb des Bereiches B_1 liegt, so muß es innerhalb des Bereiches B_2 Werthe für h geben, für welche $f(x+h, y, z)$ beliebig klein gemacht werden kann. Es muß B_2 vollständig innerhalb B_1 nicht an der Grenze liegen, da ja es sonst in B_1 Werthe geben würde, für wel

die die Function für $x+h$ nicht mehr existirt.

Nachdem wir nun den Bereich B_2 gewählt haben, ^{damit} können wir setzen für alle Werte dieses Bereiches

$$41 \quad f(x+h, y, z) = f(x, y, z) + h D_x f(x, y, z) + h f_1(x, y, z, h)$$

Esien erhalten wir hieraus

$$42 \quad f(x+h, y+h, z) = f(x+h, y, z) + h D_y f(x+h, y, z) + h f_2(x+h, y, z, h)$$

wofür gleichzeitig mit h unendlich klein wird.

Wegen 41, erhalten wir aber $f(x+h, y+h, z) =$

$$\begin{aligned} &= f(x, y, z) + h D_x f(x, y, z) + h f_1(x, y, z, h) + \\ &+ h D_y f(x+h, y, z) + h f_2(x+h, y, z, h) \\ &= f(x, y, z) + h D_x f(x, y, z) + h f_1(x, y, z, h) \\ &+ h D_y f(x, y, z) + h [D_y f(x+h, y, z) - D_y f(x, y, z)] \\ &+ h f_2(x+h, y, z, h) \end{aligned}$$

Man wird aber wegen der Voraussetzung der Stetigkeit der Ableitungen

$D_y f(x+h, y, z) - D_y f(x, y, z)$ gleichzeitig mit h unend-

lich klein. Wir können also ansetzen

$$43 \quad f(x+h, y+h, z) = f(x, y, z) + h D_x f(x, y, z) + h D_y f(x, y, z) + h f_1(x, y, z, h) + h f_2(x, y, z, h)$$

wofür f_1, f_2 gleichzeitig mit h, h unendlich klein wird.

Verändern wir nun noch z ^{um} l , so erhalten wir zunächst

$$f(x+h, y+h, z+l) = f(x+h, y+h, z) + h D_z f(x+h, y+h, z) + h f_3(x+h, y+h, z, l)$$

und wegen 43

$f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = h D_x f(x, y, z) + k D_y f(x, y, z) + l D_z f(x, y, z)$
 $+ h^2 D_x^2 f(x, y, z) + k^2 D_y^2 f(x, y, z) + l^2 D_z^2 f(x, y, z) + 2hk D_{xy} f(x, y, z) + 2kl D_{xz} f(x, y, z) + 2lk D_{yz} f(x, y, z)$
 $+ h^3 D_x^3 f(x, y, z) + k^3 D_y^3 f(x, y, z) + l^3 D_z^3 f(x, y, z) + \dots$

wo f_4 gleichzeitig mit h, k, l unendlich klein wird. Wir können dies auch so schreiben.

$$\begin{aligned}
 & f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = h D_x f(x, y, z) + k D_y f(x, y, z) + l D_z f(x, y, z) \\
 & + h^2 D_x^2 f(x, y, z) + k^2 D_y^2 f(x, y, z) + l^2 D_z^2 f(x, y, z) \\
 & + l [D_z f(x+h, y+k, z) - D_z f(x, y, z)] + h [D_x f(x, y, z) - D_x f(x, y, z)] + k [D_y f(x, y, z) - D_y f(x, y, z)] \\
 & + l^2 f_4(x+h, y+k, z).
 \end{aligned}$$

Nun ist wegen der Stetigkeit der Differentialquotienten

$D_z f(x+h, y+k, z) - D_z f(x, y, z)$ gleichzeitig mit h, k unendlich klein. Bezeichnen wir nun kurzweg mit $(h, k, l)_1, (h, k, l)_2, (h, k, l)_3$ Größen die gleichzeitig mit h, k, l unendlich klein werden, so haben wir

$$\begin{aligned}
 & f(x+h, y+k, z+l) - f(x, y, z) = \\
 & h D_x f(x, y, z) + k D_y f(x, y, z) + l D_z f(x, y, z) \\
 & + h(h, k, l)_1 + k(h, k, l)_2 + l(h, k, l)_3.
 \end{aligned}$$

Die Differenz ist also: der 1te Theil eine lineare Function von h, k, l , der zweite Theil besteht aus Größen, die unendlich klein werden mit h, k, l , jede multipliziert noch mit h, k, l . Nach der Definition des Differential, ist

also

$$df(x, y, z) = dx D_x f(x, y, z) + dy D_y f(x, y, z) + dz D_z f(x, y, z)$$

75

Wir sehen dass alle Voraussetzungen nöthig waren u. dass unter denselben ^{die} Function $f(x, y, z)$ ein Differential in der That ^{existirt} besteht. Gleichzeitig ist durch die Formel 75 bewiesen, dass das totale Differential aus der Summe der partiellen Differentialen besteht. Es ist noch zu beweisen, dass es nur ein Differential gibt, d. h. dass die Darstellung 74 nur auf eine einzige Weise möglich ist.

Angenommen die eine Darstellung sei

$$c_1 h + c_2 h^2 + \dots + h g_1 + h g_2 + \dots$$

wodurch c_1, c_2 von h, k, \dots unabhängig ^{g, g, \dots} aber gleichzeitig mit h k unendlich klein werden.

Nehmen wir an, wir hätten noch eine 2te Darstellung

$$c'_1 h + c'_2 h^2 + \dots + h g'_1 + h g'_2 + \dots$$

Die Differenz beider muss identisch null sein. Also ist

$$(c'_1 - c_1 + g'_1 - g_1) h + (c'_2 - c_2 + g'_2 - g_2) h^2 + \dots = 0.$$

Dies gilt für beliebige Wërthe h, k, \dots also auch für $h > 0, h = 0, \dots$, dann bekommen wir

$$h / (c'_1 - c_1 + g'_1 - g_1) = 0$$

Dies gilt für alle hinreichend kleinen Wërthe von h , die von Null verschieden sind. Demnach ist

$$c'_1 - c_1 + g'_1 - g_1 = 0$$

oder $c'_1 - c_1 = g_1 - g'_1$. Nun kann ich h so klein annehmen dass $g_1 - g'_1 < \epsilon$ also muss auch

$c'_1 - c_1 < \epsilon$ sein, wo ϵ eine beliebig kleine Größe ist. Daraus schließen wir, dass

$$c'_1 - c_1 = 0 \text{ oder } c'_1 = c_1.$$

Dasselbe gilt für die übrigen $c'_2 = c_2$ u. s. w.

Hiermit ist unser Satz mit aller Strenge nachgewiesen. Die Deductionen sind so ange stellt, dass sie auf alle Functionen, mit den vorausgesetzten Eigenschaften passen.

Wenn es sich bei einer beliebigen Function $f(x, y, z)$ zeigt, dass sie auch höhere Differentialquotienten in Bezug auf jede der Variablen hat, und man die Vertauschbarkeit der Operation

$D_x D_y f$, $D_x D_y f$ für 2 Zeichen nachweisen kann, so ist allgemein die Anordnung der Operation beliebig. Wählen wir z. B.

$D_x D_y D_x D_x D_y D_y D_y f$, so können wir zunächst die beiden äussersten vertauschen und ~~erhalten~~

$$D_y D_x D_x D_x D_y D_y D_y f.$$

Man kann man je zwei innere vertauschen.

$$D_x \{ D_y [D_x D_y f] \} =$$

$$D_x \{ D_y [D_y D_x f] \} =$$

$$D_y \{ D_x D_x D_y f \} \text{ u. s. w.}$$

Durch Vertauschung von je 2 Elementen eines Systems kann man jede Anordnung erreichen. Also ist

die Vertauschung der Operationszeichen erlaubt, sobald sie für 2 erlaubt ist. Für ganze Functionen haben wir es direct nachgewiesen.

Der Taylor'sche Satz.

Der Taylorsche Satz stellt uns die Entwicklung einer Function mittelst des Differentialquotienten.

Um ihn zu entwickeln zunächst für ganze Functionen sei

$f(x|a)$ eine ganze Function von x , die für die Umgebung der Stelle a definit ist. Nehmen wir innerhalb der Umgebung von a einen beliebigen Punkt x_0 an, und setzen

$x = x_0 + (x - x_0)$ so können wir sobald $x_0 + |x - x_0|$ noch innerhalb des Convergenzbereiches liegt, die Function $f(x|a)$ ^{umwandeln} in eine nach Potenzen von $x - x_0$ fortschreitende Reihe:

1
$$f(x|a) = \sum_u C_u (x - x_0)^u$$

welche convergent ist, innerhalb einer bestimmten Umgebung von x_0 , und darin mit $f(x|a)$ übereinstimmt. Diese neue Function hat Ableitungen aller Ordnungen, die ich erhalte, indem ich für x , $x + h$ setze und dann nach Potenzen von h ordne. Bezeichnen wir die Ableitungen mit $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ so haben wir

2
$$f^{(u)}(x) = \sum_u u! C_u (x - x_0)^{u-1}$$

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\alpha} n(n-1) \dots (n-\alpha+1) c_{\alpha} (x-x_0)^{n-\alpha}$$

2.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{\alpha} n(n-1) \dots (n-\alpha+1) c_{\alpha} (x-x_0)^{n-\alpha}$$

Setzen wir in der letzten Formel $x = x_0$, so verschwinden alle Glieder der Summe mit Ausnahme des konstanten, welches sich ergibt für $\alpha = n$. Wir haben also

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 c_n \tag{3}$$

Wenn wir das Product der ganzen Zahlen von 1 bis n mit $n!$ bezeichnen, und festsetzen, daß $0! = 1$ ist, und $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ so haben wir zunächst aus 3

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \text{ also die Reihe hat die}$$

$$\text{Gestalt } f(x) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0) (x-x_0)^{\alpha} = f(x|x_0) \tag{4}$$

Wenn wir nun hierin $x = x_0 + h$ setzen, so folgt

$$f(x_0 + h) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x_0) h^{\alpha}$$

und dies ist der Taylorsche Satz, welcher angibt den Zusammenhang zwischen der Aenderung der ganzen Function und ihren Ableitungen. Die Formel 4 gibt uns die Regel zur Umwandlung von $f(x|x)$ in $f(x|x_0)$

Wenn wir nun festsetzen, daß wir unter der Umgebung einer Stelle diejenige Umgebung verstehen, welche ganz innerhalb des Convergenzbereiches liegt, so sehen wir, daß für alle Werte x_0 und solche h , für welche h in der Umgebung von x_0 liegt, die Formel 4 gilt.

6

$$f(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n$$

Dazu ist also nur nöthig, daß x in dem Convergenz-Bereiche, h in der Umgebung von x liegt.

Dieser Satz gilt auch für ganze Functionen mehrerer Veränderlichen in analoger Weise.

In der obigen Entwicklung bemerken wir, daß die hier bei angewandte, sogenannte Methode der unbestimmten Coefficienten hier vollständig berechtigt ist, da wir schon im Voraus die Existenz einer solchen Reihe wissen.

Dieser Satz, der für ganze Functionen gilt, läßt sich nicht ohne Weiteres auf beliebige Functionen übertragen; ja es gibt sogar ganze Functionen, auf die er gar nicht anwendbar ist. Wenn wir nun eine beliebige, stetige Function $f(x)$ haben, von der wir wissen, daß sie alle Ableitungen bis zu der $(n+1)^{te}$ inclusive besitzt, so können wir vermuthungsweise annehmen, daß sie sich auf ähnliche Weise ^{wie} die ganze Function darstellen wird, durch die Ableitungen. In dem Ende betrachten wir die Differenz

7

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x-x_0)^n + \varphi(x, x_0)$$

Da $f(x)$ ^{und ihre} Differentialquotienten bis zum n^{ten} stetig sind, so wird auch $\varphi(x, x_0)$ eine stetige Function sein. Weiter wissen wir davon nichts. Jedenfalls ist die Form φ annehmbar. Nun werden wir zeigen eine

merkwürdige Eigenschaft von $\varphi(x|x_0)$, nämlich, daß sie in Bezug auf x_0 eine Ableitung hat. In dem Endes setzen wir für x_0 $x_0 + h$, so erhalten wir für jedes einzelne Glied

$$f^{(u)}(x_0 + h) / (x - x_0 - h)^{-u} = (f^{(u)}(x_0) + h f^{(u+1)}(x_0) + h^2 h_2) / (x - x_0)^{-u} - h h_1 (x - x_0)^{-u-1} + h^2 h_2$$

wobei h , h_1 gleichzeitig mit h unendlich klein werden.

Dieses giebt nach der Multiplikation

$$h f^{(u+1)}(x_0) / (x - x_0)^{-u} - h h_1 (x - x_0)^{-u-1} + h^2 h_2$$

Wir erhalten somit

$$\varphi(x, x_0 + h) - \varphi(x, x_0) = - \sum_{u=1}^{n-1} \frac{1}{u!} \left\{ f^{(u+1)}(x_0) / (x - x_0)^{-u} - h f^{(u)}(x_0) / (x - x_0)^{-u-1} + h^2 h_2 \right\} h + h^3$$

wo h^3 gleichzeitig mit h unendlich klein wird.

Es ist also nach der Definition der Ableitung

$$D_{x_0} \varphi(x, x_0) = - \sum_{u=1}^{n-1} \frac{1}{u!} \left\{ f^{(u+1)}(x_0) / (x - x_0)^{-u} - \frac{1}{(u-1)!} f^{(u)}(x_0) / (x - x_0)^{-u-1} \right\} \quad 9$$

Die Reihe hat aber nun die Eigenschaft, daß sich in ihr alle Glieder wegheben mit Ausnahme des letzten, so daß es folgt

$$D_{x_0} \varphi(x, x_0) = - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0) / (x - x_0)^{n-1} \quad 10$$

Wir wissen also, daß die Function $\varphi(x, x_0)$ nur dann ^{von} stetig ist und in Bezug auf x_0 eine Ableitung ^{besitzt} besitzt.

Wir werden später dazu kommen, daß man für jede Function mit den vorausgesetzten Eigenschaften haben wird:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

$$\text{oder auch}$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!} f''(x_0)h^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0)h^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0+h)h^n$$

und von der Function F_n wird man zeigen können, daß sie für unendlich kleines h unendlich klein wird: im Verhältnis zu h^{n-1} , d. h. sie wird unendlich klein von höherer als der $(n-1)$ ten Ordnung. Wir sagen von einer Größe, sie wird unendlich klein von der n ten Ordnung, wenn sie durch h^{n-1} dividirt noch immer endlich klein wird, und durch h^{n-1} dividirt endlich von Null verschwindet.

Hauptsatz der Differentialrechnung.

Angenommen es sei $F(y_1, \dots, y_m)$ eine Function von m Variablen y_1, \dots, y_m , die innerhalb eines Bereichs definiert ist, so daß jedem Wertesysteme y_1, \dots, y_m innerhalb desselben ein Werth von F gehört; ferner möge sie stetig sein, und das Differential haben, so daß wir setzen können:

$$\Delta F = D_{y_1} F \Delta y_1 + D_{y_2} F \Delta y_2 + \dots + D_{y_m} F \Delta y_m + \delta_1 \Delta y_1 + \dots + \delta_m \Delta y_m$$

wo $\delta_1, \dots, \delta_m$ gleichzeitig mit $\Delta y_1, \dots, \Delta y_m$ verschwindet.

Denken wir uns nun gesetzt:

$$y_1 = f_1(x)$$

$$y_2 = f_2(x)$$

$$y_m = f_m(x)$$

wobei f_1, f_2, \dots, f_m ebenfalls definierte, stetige und differenzierbare stetig

tere Functionen bedenkend, welche für die betrachteten
 Werthe von x Werthsysteme für y_1, \dots, y_m geben, die dem
 Com. bereich von F gehören. Setzen wir nun in
 $F(y_1, \dots, y_m)$ die Werthe ξ , so erhalten wir

$$F(f_1(\xi), f_2(\xi), \dots, f_m(\xi)) = \varphi(\xi) \text{ und wenn wir } 3$$

in das Differential von $\varphi(\xi)$ suchen, so erhalten wir
 dasselbe, wenn wir die partiellen Ableitungen von
 $F(y_1, \dots, y_m)$ nach y_1, \dots, y_m , bilden, in dem Resultate y_1, \dots, y_m
 durch die Werthe ξ ersetzen, jede Ableitung mit dem
 Differential von derjenigen der f 's multiplicieren, wel-
 che x dem y entspricht, nach welchem die Ableitung von
 F gebildet wurde und die Summe aller dieser ^{ausdrücke} ξ
 bilden. Oder kürzer gesprochen: Das Differential

von $\varphi(\xi)$ erhalten wir, indem wir in dem totalen Differen-
 tial von $F(y_1, \dots, y_m)$ jedes y durch $f(\xi)$, und dy durch das
 Differential von $f(\xi)$ ersetzen: In Formel lautet der Satz:
 Wenn $dF(y_1, \dots, y_m) = \sum_{i=1}^m F_i dy_i$
 ist, so ist

$$d[F(f_1(\xi), \dots, f_m(\xi))] = d\varphi(\xi) =$$

$$\left[\sum_{i=1}^m F_i(y_1, \dots, y_m) \right] df_1(\xi) + \dots + \left[\sum_{i=1}^m F_i(y_1, \dots, y_m) \right] df_m(\xi)$$

$$y_1 = f_1(\xi) \dots y_m = f_m(\xi) \quad y_i = f_i(\xi) \dots y_m = f_m(\xi)$$

Bezeichnen wir der Kürze wegen
 $\sum_{i=1}^m F_i(y_1, \dots, y_m) = F(y_1, \dots, y_m)$ in den heu wir uns
 für y_1, \dots, y_m die Werthe aus ξ gesetzt, so erhalten wir

$$F \left\{ f_1(x) + \Delta f_1(x), \dots, f_m(x) + \Delta f_m(x) \right\} =$$

$$4 \quad \varphi(x) + \sum_{\alpha}^m F \left\{ f_1(x), \dots, f_m(x) \right\} \cdot \Delta f_{\alpha}(x) + \delta_1 \Delta f_1(x) + \dots + \delta_m \Delta f_m(x)$$

$$\delta_1, \dots, \delta_m \text{ werden gleichzeitig mit } \Delta f_1, \dots, \Delta f_m \text{ unendlich klein.}$$

Nun ist der Annahme nach

$$\Delta f_{\alpha}(x) = D_{\alpha} f_{\alpha}(x) \Delta x + \delta_{\alpha}' \cdot \Delta x$$
 setze ich die in 4 ein so bekomme ich

$$5 \quad \Delta \varphi(x) = \sum_{\alpha}^m F \left\{ f_1(x), \dots, f_m(x) \right\} \cdot D_{\alpha} f_{\alpha}(x) \Delta x + \Delta x (\Delta x)$$

$$\text{wo } (\Delta x) \text{ eine mit } \Delta x \text{ gleichzeitige unendlich kleine Größe}$$

bedeutet. Daraus geht hervor, dass $\varphi(x)$ differenzierbar ist, und zwar ist

$$6 \quad d\varphi(x) = \sum_{\alpha}^m F \left\{ f_1(x), \dots, f_m(x) \right\} \cdot D_{\alpha} f_{\alpha}(x) dx.$$

Und hierin ist der Satz ausgesprochen. Um das Differential von $\varphi(x)$ zu bilden, bilde man das Differential von $F(f_1, \dots, f_m)$; ersetze in dem Resultate jedes f_j durch das entsprechende $f_j(x)$ und df_j durch $D_{\alpha} f_j(x) dx$.

Dieser Satz bleibt unter denselben Voraussetzungen noch dann bestehen, wenn wir statt f_1, \dots, f_m Functionen von beliebig vielen Variablen x_1, \dots, x_n einsetzen, welche in Bezug auf jede der Variablen, die oben ausgesprochenen Eigenschaften besitzen. Betrachte wir nun $F(f_1, \dots, f_m)$ und setze hierin

$$f_1 = f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f_m = f(x_1, \dots, x_n) \text{ so verwandelt sich}$$

$F(f_1, \dots, f_m)$ in $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Nun haben wir nach dem Obigen

für die partiellen Differentialen von φ folgende Gleichungen
 $d_x \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cdot D_{x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) / f_i, \dots$
 $d_x \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cdot D_{x_i} \varphi(x_1, \dots, x_n) / f_i, \dots$
 und somit ist der allgemeine Satz bewiesen.

Dieser Hauptsatz enthält alle Regeln des Differenzierens, wie wir es an Beispielen zeigen wollen.

1) Das Differential der Summe von Functionen.

Es sei $F = f_1 + f_2 + f_3 + \dots$ wir denken uns gesetzt.

$$y_1 = f_1(x)$$

$$y_2 = f_2(x) \text{ und haben nach dem obigen Satze}$$

$$d(F(x)) = df_1(x) + df_2(x) + \dots$$

2) Es sei $F(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots$ Dann ist

$$d\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots\} = c_1 d f_1(x) + c_2 d f_2(x) + \dots$$

3) $F = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n$

$$d(f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n) = d(y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n)$$

$$y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n \cdot dy_1 + y_1 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_n \cdot dy_2 + \dots + y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{n-1} \cdot dy_n, \text{ oder}$$

$$d f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n = f_2 \cdot \dots \cdot f_n \cdot d f_1 + f_1 \cdot f_3 \cdot \dots \cdot f_n \cdot d f_2 + \dots$$

4) Man wendet den obigen Satz auch manchmal, wo es nicht erlaubt ist. Wenn z. B. zwischen y u. x eine algebraische Gleichung gegeben ist $G(x, y) = 0$.

Denken wir uns hieraus y dargestellt in der Form

$$y = \varphi(x), \text{ sodass}$$

$$G(x, \varphi(x)) = 0. \text{ Dann schließt man so}$$

Wenn man die Gleichung differenziert, so folgt

$$d G(x, \varphi(x)) = G_x(x, \varphi(x)) \cdot dx + G_y(x, \varphi(x)) \cdot d \varphi(x) = 0$$

+ und nach dem schon früher bewiesenen Satze ist

$$d \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n dx_i \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ also}$$

$$d \varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n F_i \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\} \cdot d f_i(x_1, \dots, x_n)$$

und hieraus

$$8 \quad d \varphi(x) = - \frac{G(x, \varphi(x))}{G(x, \varphi(x))_2} dx$$

Dieser Schluss ist richtig aber nicht erlaubt, da man ja die Existenz des Differential von $\varphi(x)$ nicht nachgewiesen hat. Man kann zwar einen Bereich finden, wenn $\varphi(x)$ stetig ist, aber man sieht nicht, ob auch differenzierbar ist. Wir müssen nun um die Richtigkeit der Formel 8 zu zeigen, nachweisen dass $\varphi(x)$ differenzierbar ist. Nun zeigt uns schon die Formel 8 selbst dass zur Existenz der Differentialcoefficienten von $\varphi(x)$ nötig ist, dass nicht

$G(x, \varphi(x))_2$ gleichzeitig mit $G(x, \varphi(x))$ verschwindet, da für ^{nein} alle Werte es keinen Differentialcoefficienten hat. Dies erfordert also dass $G(x, \varphi(x))_1$ u. $G(x, \varphi(x))_2$ keinen gemeinsamen Theiler haben.

Dies kann aber nur für spezielle Werte von x der Fall sein, denn wir können stets 2 Functionen $H_1(x)$ u. $H_2(x)$ finden, so dass

$$H_1(x) G(x, \varphi(x)) + H_2(x) G(x, \varphi(x))_2 = 1$$

Oder indem man sich H_1 u. H_2 auf den gemeinschaftlichen Nenner bringt, der in Folge der gebrochenen Coefficienten in H_1 u. H_2 erscheint, so ist

$$9 \quad h_1(x) G(x, \varphi(x)) + h_2(x) G(x, \varphi(x))_2 = R(x)$$

Soll nun $G(x, \varphi(x))$ u. $G(x, \varphi(x))_2$ gleichzeitig verschwinden,

so muß $R(x) = 0$ sein; dies gilt aber nur für spezielle Werte von x , die wir singuläre Werte von x nennen wollen. Wir sehen also, daß wir das x umbe-
 dingt auf einen Bereich einschränken müssen, der keine sin-
 gulären Stellen enthält. Als dann existiert stets eine stetige
 Function $y = \varphi(x)$, welche die Gleichung $G(x, y) = 0$ identisch be-
 friedigt, und die einen Differentialcoefficienten hat. Um
 das letztere nachzuweisen, denken wir uns in $G(x, y)$ statt
 y vorläufig eine beliebige Function $\varphi(x)$ eingesetzt. Dann haben
 wir, da $G(x, y)$ eine ganze Function von xy ist

$$G(x+h, y+h) = G(x, y) + G_1(x, y) \cdot h + G_2(x, y) \cdot h^2 + G_3(x, y) \cdot h^3 + \dots$$

wobei G_1, G_2 ganze Functionen sind, die gleichzeitig mit h un-
 endlich klein werden. Denken wir uns nun $y = \varphi(x)$
 gesetzt, so daß

$$G(x, \varphi(x)) = 0 \text{ so ist auch}$$

$$G(x + \Delta x, \varphi(x) + \Delta \varphi(x)) = 0 \text{ wo } \Delta \varphi(x)$$

wegen der Stetigkeit von $\varphi(x)$ gleichzeitig mit Δx unend-
 lich klein wird. Es folgt dann aus 11

$$0 = G(x, \varphi(x)) + \Delta x \cdot G_1(x, \varphi(x)) + \frac{1}{2} \Delta x^2 \cdot G_2(x, \varphi(x)) + \dots$$

wo $\Delta x_1, \Delta x_2$ gleichzeitig mit Δx unendlich
 klein werden. Daraus folgt nun

$$\Delta \varphi(x) = - \frac{G_1(x, \varphi(x)) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot G_2(x, \varphi(x)) + \dots}{G(x, \varphi(x)) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot G_1(x, \varphi(x)) + \dots}$$

Nun ist, sobald b von Null verschieden ist

$$13 \quad \frac{a+\alpha}{b+\beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b(b+\beta)}$$

Wenden wir dies auf 12 an, indem wir

$$a = f(x), \alpha = f(x_1), \Delta = (\Delta x)_1$$

$$b = f(x), \beta = f(x_2), \Delta = (\Delta x)_2 \text{ setzen}$$

und das x auf den Bereich beschränken, worin

$f(x), f(x_1), f(x_2) \neq 0$ so haben wir

$$14 \quad \Delta f(x) = - \frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x)^2} \Delta x_1 + \Delta x_2 \Delta x \text{ wo}$$

$\Delta x_1, \Delta x_2$ mit Δx unendlich klein wird.

Nach der Definition ist also

$$15 \quad d f(x) = - \frac{f(x_1)f(x_2)}{f(x)^2} dx$$

somit ist $f(x)$ differenzierbar und das Differential hat diese Form.

3) Es sei ferner $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ wo

$f(x)$ und $g(x)$ differenzierbare Functionen sind.

Auch hierbei müssen wir das Intervall von x beschränken auf das Bereich wofür $g(x) \neq 0$.

Als dann schließen wir so:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{g(x) \{ f(x) + \Delta f(x) \} - f(x) \{ g(x) + \Delta g(x) \}}{g(x) \{ g(x) + \Delta g(x) \}}$$

$$= \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)}{g(x) \{ g(x) + \Delta g(x) \}}$$

$$= \frac{g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)}{g^2(x)} - \frac{\Delta g(x) [g(x) \Delta f(x) - f(x) \Delta g(x)]}{g^2(x) \{ g(x) + \Delta g(x) \}}$$

Wenn wir nun setzen

$$\Delta f(x) = f'(x) \Delta x + \Delta x / \Delta x$$

$$\Delta g(x) = g'(x) \Delta x + \Delta x / \Delta x$$

so erhalten wir leicht für das Differential

$$d p(x) = \frac{g'(x) d f(x) - f'(x) d g(x)}{g^2(x)}$$

16

Hiermit verlassen wir die Principien der Differentialrechnung, die wir auf systematischem Wege haben streng entwickeln können, indem wir einige noch wichtige Punkte, für die spätere Untersuchung aufbewahren. Besonders wird es der Taylorsche Satz sein, den wir später noch näher ins Auge zu fassen haben.

Rationale Functionen.

Nach den ganzen Functionen sind die einfachsten diejenigen, welche in Form eines Quotienten zweier ganzen Functionen/Potenzreihen erscheinen. Wenn der Quotient dieselben Eigenschaften haben soll, welche den ganzen Functionen zukommen, so müssen wir ^{der} Variablen unbedingt Beschränkungen auferlegen. Die Beschränkung ist nun diejenige, daß die Variable keinen Werth annehmen soll, für welchen der Nenner des Quotienten Null ist; denn sonst könnte die Function in der Form erscheinen $\frac{a}{0}$, $\frac{0}{0}$. Im 1.ten Falle ist der Werth unendlich groß, im 2.ten ^{den} unbestimmt; Wir wollen also die Stellen für welche der Nenner zu Null wird, ausschließen.

Es sei die gegebene Function

$$\frac{F(x, y, \dots | a, b, \dots)}{G(x, y, \dots | a, b, \dots)}$$

wo F und G ganze Functionen sind von x, y, \dots
In dem gemeinschaftlichen Lonvergenzbereich der
Reihen F u. G , nehme ich eine Stelle x_0, y_0, \dots an,
aber so, das für sie der Nenner nicht verschwindet.
Wir können alsdann sowohl den Zähler, als auch
den Nenner transformiren für Potenzreihen von
 $x - x_0, y - y_0, \dots$ nämlich in:

$$\frac{F_1(x, y, \dots | x_0, y_0, \dots)}{G_1(x, y, \dots | x_0, y_0, \dots)}$$

Wenn sondern wir sowohl im Zähler als auch im
Nenner das ^{constante} ~~constante~~ Glied, und wir haben

2
$$\frac{F_1(x, y, \dots | x_0, y_0)}{G_1(x, y, \dots | x_0, y_0)} = \frac{F(x_0, y_0, \dots | a, b, \dots) + \varphi}{G(x_0, y_0, \dots | a, b, \dots) + \psi} = \frac{F_0 + \varphi}{G_0 + \psi}$$

wo φ u. ψ Potenzreihen von $x - x_0, y - y_0$ sind, und G_0 der
Annahme nach von Null verschieden ist.

Die obige Umwandlung hat aber nur solange einen
Sinn, wenn $G_0 + \psi$ nicht Null ist. Wir können aber stets
das x, y so bestimmen, das $|G_0 + \psi| > |\varphi|$. Wir denken uns
also welche ^{welche} Werthe für x, y bestimmt, und dann y_0 berech-
net, welches die Eigenschaft hat, das $|G_0 + \psi| > |\varphi|$. Wenn wir
nun die Umgebung von x_0, y_0 so wählen, das alle Wer-
the von x, y in der Umgebung die Bedingung erfüllen, das

$|4| \equiv |4_0|$, (welche Werte immerhalb eines bestimmten Intervalles um x_0, y_0 liegen werden), so haben wir

$$\frac{1}{f_0+4} = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u \frac{y^u}{f_0^{u+1}}$$

3

$$\frac{f_0+4}{f_0+4} = \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u f_0 \frac{y^u}{f_0^{u+1}} + \sum_{u=0}^{\infty} (-1)^u 4 \frac{y^u}{f_0^{u+1}}$$

4

und jedes einzelne Glied der Summe ist eine Potenzreihe von $x-x_0, y-y_0, \dots$. Denken wir uns für den Augenblick gesetzt $x-x_0 = u, y-y_0 = v, \dots$, so haben wir in jedes Glied in eine Potenzreihe von u, v, \dots . Inridenken wir uns aus Φ eine neue Reihe gebildet, indem wir hierin jedes Coeff.: cienten auf seinen absoluten Betrag reduciren und bezeichnen diese mit $\bar{\Phi}$ ebenes statt Φ führen wir eine anal. Loge Function $\bar{\Phi}$ ein. Nun können wir für

$x-x_0 = u \dots$ solche Grenzen angeben
dafs für alle Werthsysteme u, v, \dots deren absolute Wer-
thräge kleiner sind als die Grenzen
 $\bar{\Phi} < |4_0|$ ist.

Nun betrachten wir die Reihe, deren allgemeines Glied ist
 $\frac{y^u}{f_0^{u+1}}$; diese Reihe hat die Eigenschaft,
dafs die Summe von beliebig vielen Gliedern derselben
stets unterhalb einer festen Grenze liegt. Dasselbe gilt von
der Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{4^u}{f_0^{u+1}}$$

Die Reihen in 4 sind also nach dem Satz v. Reihe 196 endlich

und lassen sich beliebig in Gruppen theilen. Wir können sie in Gruppen nach Potenzen von x, y, z, \dots theilen und erhalten somit für alle Wirthssysteme x, y, \dots welche den obigen Bedingungen genügen $\frac{f_0 + \varphi}{f_0 + \psi}$, dargestellt als eine Potenzreihe von x, y, z, \dots

Hieraus folgt nun ohne Weiteres, dass sich $\frac{f(x+h_1, y+h_2, \dots) - f(x, y, \dots)}{f(x+h_1, y+h_2, \dots) - f(x, y, \dots)}$ als Potenzreihe von h_1, h_2, \dots darstellbar lässt. Hierdurch ist auch nachgewiesen, dass die Functionen der betrachteten Art Differentiabilien besitzen. Nachdem wir die Existenz des Differentiabilia nachgewiesen, können wir sagen, uns auf die vorigen Regeln stützend, dass z. B. bei Functionen einer Veränderlichen die Ableitung eine Function derselben Art ist. Denn wir hatten

$$d\varphi = \frac{f' \varphi' - \varphi f''}{g^2} dx,$$

also die Ableitung ist wiederum eine gebrochene Function derselben Art, gültig in demselben Convergenzbereich wie f, g gleichzeitig, sie besitzt also wiederum eine Ableitung. Dasselbe gilt so weiter und lässt sich leicht auf Functionen mehrerer Veränderlichen übertragen. Wir erhalten auf diese Weise den Satz: Jede Function, die als Quotient zweier ganzen Functionen darstellbar ist, die innerhalb eines bestimmten Bereiches definiert sind, ist differenzierbar und hat Ableitungen aller Ordnungen, welche innerhalb eines bei den ganzen Functionen gemeinsamen

Convergenz bereiches gültig sind: hat solche in diesen hier solche Stellen aus geschlossen werden, für welche der Nenner gleich Null wird.

Wenn man nun eine solche Function, mehrerer Variablen hat, so kann man durch wirkliches Ausführen der Operation zeigen, dass auch bei diesen Functionen die Differentiation nach der einen und ^{dann} nach der andern Variablen umgetauscht werden kann, also dass z. B.

$$D_x D_y f = D_y D_x f$$

Daraus folgt nach dem allgemeinen Satze, dass die Reihenfolge der Operationen des Differenzirens überhaupt willkürlich ist. Es zeigt sich allgemein, dass bei der Beschränkung der Variablen auf einen Bereich, in welchem es keine Stellen giebt, für die der Nenner Null ist, genau dieselben Regeln des Differenzirens bei diesen Functionen bestehen, welche bei ganzen Functionen stattfinden.

Ueber die Zeichen der Diff. rechnung.

Wie wir schon früher bemerkt haben, bezeichnet man das n^{te} Differential, das heisst das Resultat der n^{maligen} Differentiation einer Function bei einer Veränderlichen, durch das Zeichen $d^n f(x)$, so dass man hat

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n,$$

wobei $f^{(n)}(x)$ die n^{te} Ableitung der Function bedeutet.

Man setzt dann auch $\frac{d^n f(x)}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ welches seinen
unzweideutigen Sinn hat. Bei Functionen mehrerer
Veränderlichen behält man dieselbe Bezeichnung,
indem man also

$$\frac{d f(x, y)}{dx}, \frac{d f(x, y)}{dy}$$

setzt und darunter die partiellen Ableitungen von
 $f(x, y)$ nach x , und nach y bezeichnet. Diese Bezeich-
nung ist un- und für sich sinnlos, da ja man durch
 $d f(x, y)$ das totale Differential bezeichnet und des-
halb auch in manchen Fällen zweideutig.

So lange man mit vollständig unabhängigen
Größen zu thun hat, geht es noch aus.

Denkt man sich aber $x = \varphi(z)$

$y = \psi(z)$ so würde

$$\frac{d f(x, y)}{dz}$$

einerseits das totale Differential der
Function dividirt durch dz bezeichnen können, denn
es ist ja x, y selbst eine Function von z , andererseits die par-
tielle Ableitung von $f(x, y)$ nach z , y als constant ange-
sehen. Diese Zweideutigkeit hebt man auf, sobald man
sich der von Jacobi vorgeschriebenen Bezeichnung bedient.
Jacobi bezeichnet nämlich die partielle Differential-
änderung einer Function durch das russche D , so
daß man hat

$$\frac{D f(x, y)}{D z} = \frac{D_x f(x, y) dx + D_y f(x, y) dy}{D z} = D_x f(x, y)$$

. 1

Ebenso $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

Allgemein $\frac{\partial^{\mu+\nu} f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$

man könnte auch die landwärtische Bezeichnungweise einsetzen durch folgende

$$\frac{\partial^{\mu+\nu} f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} = \frac{\partial^\mu \partial^\nu f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$$

Auch wendet man oft die Schreibart $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ im Sinne

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$

Auch wendet man gern die Bezeichnung der Function mit Indices wie bei einer Veränderlichen

$$f', f'', \dots, f^{(n)}$$

welche Bezeichnung besonders dann einen Vortheil gewährt, wenn man nach der Ausführung der Operation für die Variablen specielle Wörthe einsetzen soll. So ist z.B.

$$\left[\frac{\partial^{\mu+\nu} f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \right]_{x=a, y=b} = f^{(\mu, \nu)}(a, b)$$

während $\frac{\partial^{\mu+\nu} f(x, y)}{\partial x^\mu \partial y^\nu}$ keinen Sinn haben würde

Es gibt noch andere Bezeichnungen, mit diesen hier überhört man vollständig aus, und es entsteht hierbei keine Zweideutigkeit.

Sätze über Convergenzbereiche der Reihen.

Wenn wir zunächst eine ganze Function von x , eine Potenzreihe betrachten, so hat die Potenzreihe entweder

einen unbeschränkten Convergenzbereich dann ist sie be-
 ständig convergirend, oder auch, sie hat einen beschränk-
 ten Conv. Bereich, so daß sie außerhalb des selben als ganze
 Function nicht mehr existirt. Im letzteren Falle muß
 es an der Grenze des Conv. Bereiches irgend eine Stelle geben
 wo die Function ein Verhalten zeigt, das von dem einer
 ganzen Function verschieden ist. Dieses Verhalten der
 Functionen an der Grenze des Conv. Bereiches zu unter-
 suchen, wird die Aufgabe dieses Kapitels sein. Die Re-
 sultate werden uns sehr wichtige Kriterien der
 Convergenz der Reihen abgeben, wonach wir im Stan-
 de sein werden den Conv. Bereich der Function, ohne
 etwas über die Coefficienten der Reihe voranzus-
 setzen, a priori aus der Definition derselben herzuleiten.
 Um ein Beispiel zu haben, betrachten wir eine
 Function $\frac{f(x)}{g(x)}$ wo $f(x)$ u. $g(x)$ in einem bestimmten
 Bereiche definiert sind. Denken wir uns den Quotienten
 in eine Potenzreihe entwickelt, so wird der Quotient
 innerhalb eines bestimmten, beiden Functionen
 $f(x), g(x)$ gemeinschaftlichen Conv. Bereiches, conver-
 gent sein, und es wird sich zeigen, daß der Conv. Kreis
 des Quotienten dadurch definiert sein wird, daß an der
 Grenze desselben es wenigstens eine Stelle x_0 gibt, wo
 für $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \infty$ und $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \infty$ wird.

Es wird also auf der Grenze des Conv. Kreises eine Stelle geben, für deren Umgebung $\frac{f(x)}{g(x)}$ beliebig großgemacht werden kann, wenn man nur x hinreichend nahe an x_0 wählt. An dieser Stelle verliert der Quotient den Charakter einer ganzen Function. Im speciellen Falle wo $f(x)$ u. $g(x)$ ganze Functionen sind, suche man diejenigen Stellen, wo für $g(x) = 0$ wird. Nimmt man nun diejenige heraus, für welche x seinem absoluten Betrage nach am kleinsten ist, so wird der Conv. Kreis für $\frac{f(x)}{g(x)}$ durch diese Stelle gehen. Hieraus werden sich sehr interessante und wichtige Folgerungen ziehen lassen. (So wird man mittelst dessen beweisen können, daß jede ganze Function wenigstens für einen Werth der Variablen x verschwinden muß.)

Satz: Es sei $F(x)$ eine beliebige ganze Function von x , eine Potenzreihe von x , innerhalb eines bestimmten Bereiches definiert. Wählen wir innerhalb des Conv. Bereiches desselben irgend eine Stelle x_0 , dessen absoluter Betrag r sein möge und geben dem x alle möglichen Werthe bei, welche denselben absoluten Betrag r haben oder was das selbe ist, lassen wir das x einen Kreis mit dem Radius r durchlaufen, so wird die Function $F(x)$ an irgend einer Stelle dieses Kreises einen dem absoluten Betrage nach größeren Werth erhalten. Wenn nun die

Funktion $F(x)$ die Gestalt hat

$$F(x) = \sum_{v=0}^n a_v x^v \text{ so wird}$$

$$|a_0| \leq q \text{ und allgemein}$$

$$|a_v| \leq q \cdot r^{-v} \text{ sein.}$$

Um diesen iiberaus wichtigen Satz elementar nachzuweisen, verfahren wir schrittweise.

1) Es sei zunächst $F(x)$ eine ganze rationale Funktion von x , n ten Grades, also

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Nehmen wir nun irgend einen Werth x_0 an, und geben dem x alle möglichen Werthe, deren absolute Beträge gleich ξ sind ($|x_0| = \xi$). Zu dem Ende sei ξ eine gewisse Größe, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, dann ist auch $|\xi^2| = 1$ u. s. w. Wir wollen nun unter x_0 einen positiven, reellen Werth verstehen, der gleich 1 ist.

Legen wir nun dem x die Werthe bei

$$x_0, x_0 \xi, x_0 \xi^2, \dots, x_0 \xi^{n-1}$$

so haben alle Werthe denselben absoluten Betrag x_0 .

Setzen wir dies in F ein, und summiren die daraus entspringenden Gleichungen, so erhalten wir nach Division durch n ,

$$\frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} F(x_0 \xi^v) = a_0 + \frac{1}{n} a_1 x_0 \frac{1-\xi^n}{1-\xi} + \frac{1}{n} a_2 x_0^2 \frac{1-\xi^{2n}}{1-\xi^2} + \dots + \frac{1}{n} a_n x_0^n \frac{1-\xi^{nm}}{1-\xi^n}$$

Wählen wir nun das ξ so, daß keine der Größen

ξ, ξ^2, \dots, ξ^n gleich ist, was doch immer zu er-
 schehen ist, auf unendlich viele Arten, da man nur z. B. für
 ξ eine Wurzel einer Gleichung $1 - \xi^n = 0$ zu nehmen hat, wo
 $n > 1$. Daraus folgt, daß die Nenner in 3 stets endlich von
 n unabhängig und ^{nur} ~~die~~ Null sind. Lassen wir nun das
 n wachsen, so wird jedes Glied auf der Rechten, mit
 Ausnahme von a_0 , beliebig klein gemacht werden können,
 wenn man nur das n hinreichend groß nimmt.

Wir erhalten somit aus 3

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^{n-1} F(\alpha, \xi^\alpha) + S_n$$
 wo S_n dem absoluten Betrage 4
 nach beliebig klein gemacht werden kann. Nun ist $F(x)$
 eine stetige Function von x . Wenn also x den Kreis
 durchläuft, der durch α_0 hindurchgeht, so muß für
 irgend eine Stelle des Kreises $F(x)$ einen dem absolu-
 ten Betrage nach größten, endlichen Werth bekom-
 men. Diesen größten absoluten Betrag von $F(x)$ bezeich-
 nen wir mit g . Daß g endlich ist, folgt unmittelbar
 daraus, daß $F(x)$ für endliche Werthe von x nicht be-
 liebig groß gemacht werden können kann.

Setzen wir dies in 4 ein, so haben wir zunächst

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^{n-1} F(\alpha, \xi^\alpha) \right| \leq \frac{1}{n} n g \leq g$$

Also ist $|a_0| \leq g + |S_n|$ da nun die Gleichung 4 3
 für beliebig großes n gilt, und S_n beliebig klein gemacht
 werden kann, wenn man das n hinreichend groß nimmt,

so sehen wir, daß wie wenig ich auch g ändere, die Gleichung 5 stets lösbar ist, das heißt die obere Grenze von $|a_0|$ ist g , also haben wir

6 $|a_0| \leq g.$

2) Es sei ferner

7
$$F(x) = a_0 + a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \dots + a_n x^{m_n}$$

wo m_1, m_2, \dots ganze positive oder negative Zahlen bedeuten mögen. Wenn ich dem x wiederum die Werte ξ_0, ξ_1, \dots beilege und die Gleichung sumiere, so erhalte ich ebenfalls

7
$$\frac{1}{n} \sum_{\xi} F(x_0, \xi^u) = a_0 + \frac{1}{n} a_1 x_0^{m_1} \frac{1 - \xi^{m_1 n}}{1 - \xi^{m_1}} + \frac{1}{n} a_2 x_0^{m_2} \frac{1 - \xi^{m_2 n}}{1 - \xi^{m_2}} + \dots$$

und wenn ich für ξ einen solchen Werth wähle daß mir $\xi^{m_1 n}, \xi^{m_2 n}, \dots$ gleich 1 ist, so erhalte ich durch dieselbe Schlussweise auch hier

$|a_0| \leq g.$

3) Nun sei $F(x)$ eine beliebige Potenzreihe von x , in der auch negative Potenzen von x in endlicher Anzahl vorkommen können, also

8
$$F(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} x^{\nu}$$

Es sei nun α_0 ein positiver Werth von α , ^{innerhalb} innerhalb des Convergencekreises von $F(x)$ und gebe dem x alle möglichen Werthe, deren absoluter Betrag gleich α_0 ist, und wird $F(x)$, da sie eine stetige Function von x ist, an irgend einer Stelle des Kreises, einen größten absoluten

ten Betrag ρ bekommen. Alle Wertke von x deren absoluter Betrag gleich x_0 ist, liegen innerhalb des Konvergenzkreises von $F(x)$, d. h. es gibt noch Wertke von $x_0/|x_0| > x_0$, für welche noch die Konvergenz der Reihe besteht. Aus der Konvergenz folgt unmittelbar

$|a_n x_0^n| < h$, für jedes n , wo h eine feste positive Zahl ist. Es ist also

$|a_n x_0^n| < \frac{h}{|x_0|^n}$ also auch für alle Wertke von x deren absoluter Betrag gleich $x_0 < |x_0|$ ist,

$|a_n x^n| < h \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ und wenn wir dies von $n = m$ bis $n = \infty$ summieren, erhalten wir

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n \right| \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n x^n| < h \left| \frac{x}{x_0} \right|^m \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{x_0} \right|} \tag{9}$$

Für alle Wertke von x , deren absoluter Betrag gleich x_0 haben wir aber $\left| \frac{x}{x_0} \right| = \frac{x_0}{|x_0|} < 1$, ich kann also für alle diese Wertke von x die Summe beliebig klein machen, wenn ich nur das m hinreichend groß gewählt habe, oder anders gesagt, nach dem Satz mit einer beliebigen kleinen Größe δ , kann ich m stets so bestimmen, daß

$$h \left| \frac{x}{x_0} \right|^m \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{x_0} \right|} < \delta \text{ ist.}$$

Nun teilen wir $F(x)$ in 2 Theile nämlich

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n = F(x) - \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n = F(x) - F_m(x) \tag{10}$$

Nun ist demnach

$$\left| F(x) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{m-1} a_n x^n \right| + \left| F_m(x) \right| \tag{11}$$

12

oder $|F(x)| \leq \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right| + \delta_m$
 wo δ_m beliebig klein gemacht werden kann. Wenn wir
 nun mit g' die obere Grenze von der Function $\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k \right|$
 für den Umfang des Kreises, der durch α_0 geht bezeichnen,
 und wenden wir auf die linke Seite den Satz 12, so folgt
 $|a_0| \leq g'$ und wenn g das Maximum von $|F(x)|$
 bezeichnet, so ist

$$g \leq g' + \delta_m, \text{ also ist auch}$$

$|a_0| \leq g - \delta_m$. da ich nun δ_m beliebig klein
 machen kann, so ist

13

$$|a_0| \leq g.$$

Um nun die analoge Relation für einen beliebigen Coef-
 fizienten herzuleiten, betrachten wir ein

$$F(x) = \sum a_k x^k \text{ einen Coefficienten } g \text{ bzw. } \alpha_0.$$

Multiplizieren wir diese Reihe mit α_0^{-k} , so erhalten wir

14

$$F(x)/\alpha_0^{-k} = a_k + \dots$$

wo a_k , das von α_0 unabhängige Glied bedeutet.

Bezeichnen wir mit g' das Maximum des absoluten
 Betrages von $F(x)/\alpha_0^{-k}$, den diese Function auf dem Kreise
 erreichen kann, so haben wir:

$$g' = \text{Max. } |F(x)/\alpha_0^{-k}| = \alpha_0^{-k} \text{Max. } |F(x)| \\ = \alpha_0^{-k} g$$

Wenden wir nun auf 14 den Satz 3 an, so folgt

14

$$|a_k| \leq g \cdot \alpha_0^{-k}$$

Es ist also der Satz in voller Allgemeinheit nachgewiesen. Wenn wir also in einer beliebigen Function, die als eine Potenzreihe von x gegeben ist, in welcher negative Potenzen von x nur in endlicher Anzahl vorkommen, die Variablen x einen Kreis innerhalb des Convergenzkreises durchlaufen lassen, mit dem Radius ρ_0 und das Maximum des absoluten Betrages von $F(x)$ bestimmen, das diese Function auf dem Kreise erhalten kann, so findet dann zwischen diesem Maximum und den Coefficienten die Relation 14 statt.

Folgerung Wir hatten früher den Satz gehabt, daß wenn $|a_n| \leq h \cdot n!$, daß dann die Reihe $\sum a_n x^n$ convergirt für alle Werthe von x , für welche $|x| \leq 1/e$.

Nun erhalten wir aus 14

$|a_n x^n| \leq g / \rho_0^n$, so daß wir hier die Bedeutung der Größe h klar ersehen.

Den vorigen Satz kann man erweitern auf Functionen mehrerer Veränderlichen

Lehrsatz. Es sei $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Function, die gegeben ist in der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{m_1, \dots, m_n} c_{m_1, \dots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

wo die m_i positive und negative Zahlen bedeuten können, die negativen aber in einer endlichen Anzahl, und man wählt in dem Convi. bereich eine Stelle x_1, x_2, \dots, x_n wofür die absoluten Beträge resp. r_1, r_2, \dots, r_n sein mögen,

gibt dann den x_1, x_2, \dots, x_k alle möglichen Wertecombinationen, wobei jedes x_i nur Werte annehmen soll, die auf dem entsprechenden Kreise mit dem Radius r_i liegen, indem man setzt

$$x_i = r_i \xi_i^{r_i}, \text{ und } |\xi_i| = 1$$

so wird die Function $F(x_1, x_2, \dots, x_k)$ für irgend eine Combination der Werthsysteme x_1, \dots, x_k dem absoluten Betrage nach einengrößten Werth q erhalten.

Als dann gibt der Satz, daß

$$|C_0 x^{\dots}| \leq q r_1^{-m_1} r_2^{-m_2} \dots$$

Auch hier beweisen wir den Satz für endliche Anzahl von Gliedern. Es sei

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k) = C_0 \sum \xi_1^{m_1} \xi_2^{m_2} \dots \xi_k^{m_k}$$

wo die m_1, m_2, \dots beliebige endliche Werthannahmen kann, nur dürfen nicht alle gleichzeitig Null sein, denn C_0 soll alle Glieder zusammenfassen, welche kein α enthalten.

Man geben wir jedem x_i die Werthe $x_i = r_i \xi_i^{r_i}$ und bilden die Summe

$$\sum_{\substack{\xi_i = 0 \dots s-1 \\ x_i = 0 \dots s-1}} F(x_1, \xi_1^{r_1}, \dots, x_k, \xi_k^{r_k}) \text{ und dividiren dies durch } s^k$$

Betrachten wir nun

$$15 \quad \sum_{\substack{\xi_i = 0 \dots s-1 \\ x_i = 0 \dots s-1}} C_0 x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k} \xi_1^{r_1 m_1} \xi_2^{r_2 m_2} \dots \xi_k^{r_k m_k} = C_0 x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k} \sum \xi_1^{r_1 m_1} \sum \xi_2^{r_2 m_2} \dots \sum \xi_k^{r_k m_k}$$

Für jeden Factor auf der Rechten erhalten wir nun

$$\frac{1}{s} \sum_{v=1}^{\infty} \xi^v r^m = \frac{1}{s} \cdot \frac{1 - \xi^{ms}}{1 - \xi^m}$$

16

Man unterscheidet hier 2 Fälle, ξ^m ist von Null verschieden.
 Wenn wir ξ so wählen, daß ξ^m nicht gleich 1 ist, so wird das
 Glied 16 mit wachsendem s sich der Grenze Null nähern.
 Alle Glieder in 15 rechts werden sich also der Null nähern
 mit wachsendem s , wenn die m 's von Null verschieden
 sind. 2^{tes} sei $m = 0$ so erhalten wir

$$\frac{1}{s} \sum_{v=1}^{\infty} \xi^v r^0 = \frac{1}{s} s = 1$$

da nun in 15 nie alle m 's auf einmal Null sein können,
 so wird ^{sich} stets das Product in 15 der Grenze Null nähern
 wenn man das s wachsen läßt. Wenn ich nun den ab-
 soluten Betrag der oberen Grenze von F mit g bezeichne, so
 habe ich

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left| \sum_{v=1}^{\infty} F(\xi^v, \xi^{2v}, \dots, \xi^{rv}, \xi^{sv}) \right| \leq g$$

Da sich aber die Größe rechts von ∞ und eine beliebig kleine
 Größe von ∞ unterscheidet, so haben wir

$$|c_0| \leq g$$

17

Um diesen Satz für beliebige Potenzreihen von a_1, \dots, a_n in
 welchen auch negative Potenzen von a_1, \dots in endlicher Anzahl
 vorkommen können, nachzuweisen, ist es nur nöthig zu
 zeigen, daß man von einer solchen Potenzreihe stets eine endliche
 Anzahl von Gliedern in vollständiger Summe der Exponen-
 enten kleiner ist als n , so abzusondern, daß der Rest
 der Reihe beliebig klein gemacht werden kann, wenn

man nur das n hinstehend klein annimmt. In dem Ende sei das allgemeine Glied der Potenzreihe

$$c x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

Man ist der absolute Betrag der Summe kleiner oder höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge. Wenn wir also nachgewiesen haben, dass dies bei der Summe der absoluten Beträge möglich ist, so wird es möglich sein von der ursprünglichen Reihe den Rest so zu bestimmen, dass er den absoluten Betrag nach kleiner ist als δ .

Die Wërthe, welche x_1, \dots, x_n annehmen können, haben alle die absoluten Beträge r_1, \dots, r_n , welche nicht innerhalb des Cono. Bereiches liegen. Es ist somit möglich, Größen $\rho_1, \dots, \rho_n > r_1, \dots, r_n$ so zu bestimmen, dass nach ρ_1, \dots, ρ_n innerhalb des Cono. Bereiches liegen. Wegen der Endlichkeit der Reihe ist der absolute Betrag jedes Gliedes für $x_1, \dots, x_n = \rho_1, \dots, \rho_n$ kleiner als eine feste endliche Grenze k , also kleiner als

$$k \left(\frac{x_1}{\rho_1} \right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{\rho_2} \right)^{a_2} \dots \left(\frac{x_n}{\rho_n} \right)^{a_n}$$

für alle Wërthcombinationen von x_1, \dots, x_n , welche den absoluten Beträge nach kleiner sind als $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Man durchläuft im unserem Falle jedes x_1, \dots, x_n einen Kreis mit den Radien $r_1 < \rho_1, r_2 < \rho_2, \dots$ also ist der absolute Betrag eines jeden Gliedes unserer Reihe für beliebige Wërthcombinationen der

18 x_1, \dots, x_n auf den Kreisen kleiner als $k \left(\frac{r_1}{\rho_1} \right)^{a_1} \left(\frac{r_2}{\rho_2} \right)^{a_2} \dots \left(\frac{r_n}{\rho_n} \right)^{a_n}$.
Man ist die Reihe, deren allgemeines Glied 18 ist, convergent

und ihre Summe gleich

$$k \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_1}{s_1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r_2}{s_2}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{r_n}{s_n}}$$

Wenn nun ϵ den grössten der Ausdrücke $\frac{r_i}{s_i}$ bedeutet, so ist

$$k \cdot \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{s_1}} \cdots \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{s_n}} < k \cdot \frac{1}{(1 - \epsilon)^n}$$

19

Wenn ich nun nur diejenigen Glieder betrachten will in welchen $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n < n$ ist, so habe ich von

$k \cdot \frac{1}{(1 - \epsilon)^n}$ abzugiehen, alle Glieder für welche

$\epsilon_1 + \dots + \epsilon_n < n$ ist. Für den Rest folgt

$$k \cdot \frac{1}{(1 - \epsilon)^n} - k \cdot (\epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon_{n-1}, \epsilon^{n-1})$$

Dieser veränderte Rest kann aber beliebig klein gemacht werden und der Rest der Reihe

$$\sum k \cdot \left(\frac{r_1}{s_1}\right)^{\epsilon_1} \cdots \left(\frac{r_n}{s_n}\right)^{\epsilon_n}$$

20

kleiner ist, als der veränderte Rest, so wird der Rest von 20 klein auch beliebig klein gemacht werden können

Daraus schliessen wir folgendes:

Wenn wir eine Potenzreihe $\sum c \cdot x_1^{\epsilon_1} \cdots x_n^{\epsilon_n}$ haben, worin negative Potenzen in endlicher Anzahl vorkommen, und eine beliebige, kleine Grösse δ festsetzen, so kann ich n stets so bestimmen, dass die Summe der Glieder für welche

$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_n < n$, deren absoluten Beträge nach

kleiner ist als δ für alle Wërthe von x_1, \dots, x_n innerhalb des Conv. Bereiches der Reihe.

Nun gelangen wir durch dieselben Schliüsse, wie bei dem 1ten Satze, dass, wenn δ das Max. des absoluten Betrages von $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n}$

ist für irgend eine Wertkombination auf den Kreisen r_1, \dots, r_n , stets ist

21

$$|C_1 x_1 + \dots + C_n x_n| \leq g_1 x_1 + \dots + g_n x_n$$

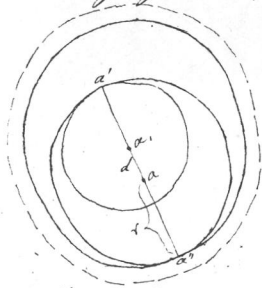
Diese beiden Sätze werden gewöhnlich mittelst der Totaldifferentialrechnung nachgewiesen; hier sind sie ganz elementar bewiesen. Nun wollen wir uns zunächst mit Potenzreihen einer Variablen beschäftigen.

Lehrsatz: Es sei $f(x|a)$ eine ganze Potenzreihe innerhalb eines bestimmten um a liegenden l.u. Bereiches definiert.

Wähle nun innerhalb des Konvergenzbereiches einen Punkt α , beliebig aus, und wandle die Reihe $f(x|a)$ in eine neue $f_1(x|\alpha)$. Wenn nun der Konvergenzradius der 1^{ten} Reihe gleich r ist, und der Abstand der Punkte a, α gleich d , so ist der Konvergenzradius der 2^{ten} Reihe $f_1(x|\alpha)$ sicher nicht kleiner als $r-d$ und nicht größer als $r+d$.

Es sei der Kreis um a mit dem Radius r der l.u. Kreis der Reihe $f(x|a)$. Wähle α , innerhalb desselben und wandle $f(x|a)$ in $f_1(x|\alpha)$ um. Diese 2^{te} Reihe stimmt, wie wir es nachgewiesen haben, mit der ursprünglichen Reihe überein für alle Werte von x , für welche

$$|x-a|, |\alpha-a| < r \text{ ist,}$$



d. h. die zweite Reihe $G_1(x/a)$ hat Sinn für alle Werte von x welche innerhalb eines um a , mit dem Radius $r-d$ beschriebenen Kreises liegen, also ihr Convergenzradius ist wenigstens $r-d$. Und den 2^{ten} Theil nachzuweisen, beschreiben um a , einen Kreis mit dem Radius $a, a' = r+d$ und einen zweiten mit einem Radius $r+d$. Nehmen wir an, die zweite Reihe $G_1(x/a)$ convergire nicht innerhalb dieses größeren Kreises, alsdann wird x innerhalb des Convergenzkreises mit einem Radius $r+d$ liegen. Man können wir aus $G_1(x/a)$ eine neue Reihe herleiten $G_2(x/a)$.

Nehme ich nun a innerhalb des Kreises um a , mit dem Radius $r-d$, so haben wir für alle diese Punkte

$$G(x/a) = G_1(x/a), \quad 1$$

Dieselben Punkte liegen aber auch in dem Conv. Kreise von $G_1(x/a)$ und $G_2(x/a)$ unserer Annahme nach, d. h. der ganze Conv. Kreis von $G_2(x/a)$ liegt innerhalb des Conv. Kreises von $G_1(x/a)$, also haben wir sicher für alle diese Punkte

$$G_1(x/a) = G_2(x/a) \quad 2$$

Für die Punkte des Kreises um a gilt aber auch die Reihe $G(x/a)$, also haben wir innerhalb des um a beschriebenen Kreises

$$G(x/a) = G_1(x/a) = G_2(x/a) \text{ d. h.}$$

$$G(x/a) = G_2(x/a) \quad 3$$

Diese Potenzreihen von $(x-a)$ stimmen innerhalb eines

Reihen überein, was nur dann möglich ist, wenn sie in den Coefficienten übereinstimmen. Daraus für alle diese Werte

$$G_1(x/a) - G_2(x/a) = 0 \text{ sein muß, wie}$$

$$(c_p - c'_p)(x/a)^p + (c_{p+1} - c'_{p+1})(x/a)^{p+1} + \dots = 0$$

Daraus folgt, da ich $x - a$ beliebig klein und von Null verschieden annehmen kann

$$4 \quad (c_p - c'_p) + (c_{p+1} - c'_{p+1})(x/a) + \dots = 0$$

Man kann sich, wenn ich $x - a$ hinlänglich klein mache

$$|(c_{p+1} - c'_{p+1})(x/a) + \dots| < \delta, \text{ also muß stets}$$

$$|c_p - c'_p| < \delta \text{ da aber } c_p \text{ u. } c'_p \text{ von } x - a \text{ unabh.}$$

hängig ist, so muß $c_p = c'_p$ sein u. s. w.

Wenn wir nun mit r_1 den Convergencradius der Reihe $G_1(x/a)$ bezeichnen, so wissen wir, daß der Convergencradius von $G_2(x/a)$ oder, was dasselbe ist, von $G(x/a)$ nie kleiner ist als $r_1 - d$, oder $r \geq r_1 - d$ und daraus folgt

$$r_1 \leq r + d \text{ u. z. B. w.}$$

Folgerungen

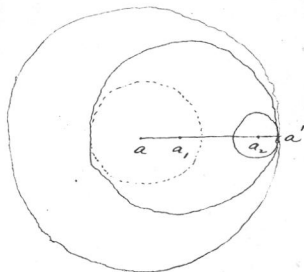
1) Wenn wir von a zu dem unendlich nahen Punkte a_1 übergehen, und $G(x/a)$ in $G_1(x/a_1)$ umwandeln, so wird sich der Convergencradius von $G_1(x/a_1)$ unendlich wenig von dem der Reihe $G(x/a)$ unterscheiden. Wir sehen also, daß der Radius der abgeleiteten Reihe eine Function von a ist, und zwar eine stetige Function. Haben wir

oder eine Reihe $f(x)$ und wählen $x' - u$ ist beliebig im dem Convergencebereich, so wird die Reihe $f_1(x/x')$ einen neuen Radius r' haben, der sich abh. v. x' ändert, also ist $r' = f(u, x')$. Zu jedem Werthe von x' oder zu jeder Werthcombination von x, x' gehört ein r' . Die Diagonalisirung führt uns also auf Local Functionen, von denen wir nichts weiter wissen als die Stetigkeit.

Es ist wahrscheinlich, dass r' nicht immer ein Differential hat.

2) Wenn wir aus einer Reihe mit bestimmtem Convergencebereich neue Reihen herleiten, so können wir nie zu einer beständig convergirenden Reihe gelangen. Aus beständig convergirenden Reihen hergeleitete Reihen, werden auch beständig convergent sein.

3. Wenn wir innerhalb des linc. Kreises von $f(x/a)$ einen Punkt wählen a_1 , so dass $a_1 a$, kleiner ist als r Radius des linc. Kreises von $f(x/a)$ und dann eine Reihe $f_1(x/a_1)$ herleitet, so kann ich umgekehrt aus $f_1(x/a_1)$ direct $f(x/a)$ herleiten. Wir können nämlich die Reihen bilden $f_1(x/a_1), f_2(x/a_1), f_3(x/a_1)$.



Nun stimmt $f_1(x/a_1)$ mit $f(x/a)$ innerhalb des Kreises um a_1 überein und $f_2(x/a_1)$ mit $f_1(x/a_1)$ innerhalb im Kreise um a_1 über.

ein, daraus folgt, daß innerhalb des Kreises von a

$$G(x/a) = G_1(x/a) = G_2(x/a) \text{ also}$$

$$G(x/a) \equiv G_2(x/a).$$

Wenn ich aber a_x näher an die Peripherie nehme, so daß $a_x > \frac{1}{2} r$, so ist dies nicht möglich und auch aus

$G(x/a_x)$ kann ich nur durch Vermittelung neuer Punkte $G(x/a)$ herleiten.

Alle diese Sätze bleiben bestehen bei Potenzreihen mehrerer Veränderlichen, was wir aber erst später zeigen werden.

Wie wir schon in der Folgerung gesehen haben, ist der Convergenzradius r eine stetige Function der Wärdhe a innerhalb des Conv. Kreises der ursprünglichen Reihe; es wird also eine untere Grenze g haben.

Lehrsatz: Es sei $G(x/a)$ eine ganze Function von x mit dem Convergenzradius r . Wenn r der wahre Conv. Radius ist, so ist die untere Grenze von r $g = 0$.

Angenommen es sei $G(x/a)$ eine ganze Function, von der wir wissen, daß sie convergent ist für alle Wärdhe von x für welche $|x/a| < r$, wissen aber nicht ob r der wahre Conv. Radius der Reihe $G(x/a)$ ist. Leiden wir aus $G(x/a)$ eine Reihe $G(x/a')$, wo a' innerhalb des Conv. Kreises von $G(x/a)$ liegt, und bestimmen den neuen Radius des Conv. Kreises von $G(x/a')$, r' . Wenn es sich zeigt, daß die untere Grenze

von x gleich q nicht Null ist, so kann man so weit gehen, daß die ursprüngliche Reihe $G(x)$ auch convergent ist für x ; dessen $|x| > r$ ist.

Nehmen wir an, es sei q von Null verschieden, alsdann können wir eine positive Größe d bestimmen, so daß $d < q$ ist.

Nun haben wir

$$G(x)/|x|^u = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} G^{(v)}(|x|/|x-d|)^v$$

Setzen wir $x = x+h$ so haben wir

$$G(x+h) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} G^{(v)}(|x|/h)^v$$

Nehmen wir nun an 2 Kreise um den Nullpunkt mit dem Radius r_1 u. r_2 , so daß

$$r_2 - r_1 < d \text{ ist und in gleicher Zeit will}$$

r_1 möglichst nahe an r liegen, damit r_2 außerhalb des Kreises mit dem Radius r zu liegen kommt. Dies gibt folgende Bedingung. Aus 3 folgt

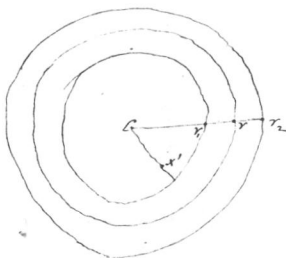
$$r_2 - r < d - (r - r_1) \text{ nun soll } r_2 \text{ hinaus}$$

d. h. $r_2 - r$ positiv sein, also muß

$$d + r_1 > r \text{ oder}$$

$$r_1 > r - d$$

Nun beschränken wir x auf das Innere und den Umfang des Kreises mit dem Radius r_1 , wenn ich nun h nicht größer annehme als d , so liegt $x+h$ innerhalb des



1

2

4

Conv. Bereiches von $f(x)$; denn es ist

$$|x+h| \leq |x| + |h|$$

Wenn also α' den Kreis r , durchläuft und $|h| = d$ gesetzt wird, so erhalten wir höchstens

$$|x+h| \leq r + d \text{ und ist}$$

$$r \leq r + d.$$

Da das Minimum von r gleich ϱ von Null verschieden ist, so wird

$f(x+h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x) h^n$ auch dann convergent sein, wenn man α' auf dem Kreis mit dem Radius r , annimmt, und dem h Werthe gibt, welche innerhalb des von α' beschriebenen Kreises liegen. Nun ist der Annahme nach, wie man auch das α' wählen mag, der Radius dieses Conv. Kreises gleich ϱ von Null verschieden. Da wir nun $d < \varrho$ angenommen haben, so wird also die Function $f(x+h)$ convergent sein für alle α' auf dem Kreise mit dem Radius r , und für alle h deren absoluten Beträge gleich sein d . Durchläuft nun h die Werthe auf dem Kreise, der von α' mit dem Radius h beschrieben ist, so wird $f(x+h)$ den absoluten Beträge nach eine endliche obere Grenze q haben, deren Existenz wir nachher nachweisen wollen. Nehmen wir nun an, daß die obere Grenze wirklich existirt, so haben wir nach dem Satze Seite 265

$$| \frac{1}{x!} G^{(n)}(x) | \leq g d^u$$

5

Jetzt will ich nachweisen, daß die Function $G(x)$ in welcher das allgemeine Glied mit ϵx^u bezeichnet werden möge, noch convergent für Werte von x , die dem absoluten Betrage nach größer sind als r . Dazu ist mir nöthig nachzuweisen, daß noch ϵx^u wo $x > r$ ist, stets endlich und unterhalb einer festen Grenze liegt. In dem Ende betrachte ich folgende Reihe

$$F(x) = G(x) + \frac{\epsilon x^1}{1} G'(x) + \frac{(\epsilon x^1)^2}{2!} G''(x) + \dots + \frac{(\epsilon x^1)^n}{n!} G^{(n)}(x)$$

6

wo ϵ eine positive Größe bedeutet. Geometrisch bedeutet dies, wenn man $\epsilon x^1 = h$ setzt, daß h ein Punkt ist, der in der Strecke $0 \leq x \leq r$ liegt. Diese Function F hat zu nächst einen endlichen Werth, weil sie doch ein Theil von $G(x + \epsilon x^1)$ ist, sobald $|\epsilon x^1| \leq d$ ist. Sie besteht ferner aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deshalb kann ich sie in eine Potenzreihe von x umwandeln. Um nun den Coefficienten von x^m zu bestimmen, bemerken wir, daß wir aus jedem $G^{(1)}, G^{(2)}, \dots$ alle Glieder weglassen können in denen die Potenzen von x höher sind als m . Bezeichnen wir für den Augenblick mit $\bar{G}^{(u)}(x)$ dasjenige was wir aus $G^{(u)}(x)$ erhalten nach Weglassung in \bar{G} der höheren Potenzen von x als die m te. Alsdann wird uns die Function

$$\bar{G}(x) + \frac{\epsilon x^1}{1} \bar{G}'(x) + \dots + \frac{(\epsilon x^1)^n}{n!} \bar{G}^{(n)}(x)$$

7

Koeffizienten von x^n liefern. Diese Funktion ist nun eine ganze Funktion n ten Grades, die ich aus $f(x) + \epsilon x'$ erhalte, wenn ich hierin alle Glieder weglasse, in denen höhere Potenzen von $x' + \epsilon x'$ vorkommen als n . Ich erhalte also:

$$8 \quad f(x' + \epsilon x') = f(x') + \frac{\epsilon x'}{1} f'(x') + \dots + \frac{(\epsilon x')^n}{n!} f^{(n)}(x')$$

Nun ist aber auf der linken Seite der Koeffizient von x^n gleich $c_n |1 + \epsilon|$. Also haben wir wenn wir mit $[f^{(n)}]_{x'}$ den Koeffizienten von $f^{(n)}$ bei x' bezeichnen:

$$9 \quad [f^{(n)}]_{x'} = c_n |1 + \epsilon|^n$$

Wenn ich nun dem x' in $f^{(n)}$ alle Werte beilege, welche $|x'| = r$, so wird $f^{(n)}$ eine obere Grenze erreichen, deren absoluter Betrag sei f . Wir haben demnach:

$$10 \quad |c_n| \cdot |1 + \epsilon|^n \leq f \cdot r^{-n}$$

Ich erhalte aber bei Anwendung der Formel 5 noch eine andere Bedingung der Grenze von $|c_n| r^{-n}$. Wir haben wegen 5

$$11 \quad |f(x)| \leq g |1 + \epsilon x'|^d + \dots + |c_n| |x'|^n$$

Wenn ich nun festsetze, dass

$$|c_n| |x'|^n < 1 \text{ sein soll, so ist sicher die obige}$$

Summe kleiner als

$$12 \quad g \frac{1 - \epsilon^d}{d}$$

Diese Bedingung für ϵ ist aber erfüllt, wenn ich

$$\epsilon = \frac{r^n - 1}{r^n} \text{ setze, dann es ist alsdann}$$

$$\frac{\epsilon r^n}{d} = \frac{r^n - 1}{d} < 1$$

Nun haben wir

$$f < g \cdot \frac{1-r_1}{d} = g \cdot \frac{d}{r_1+d-r_1} \text{ und dies in Mächtigk. } 13$$

$$\text{liefert } |c_n| \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n \leq g \cdot \frac{d}{r_1+d-r_1} r_1^{-n} \text{ also}$$

$$|c_n| r_2^n \leq g \frac{d}{r_1+d-r_1}$$

Die Größe g ist von n unabhängig, also haben wir das Resultat, dass die Reihe $f(n)$ die Eigenschaft hat, dass noch $|c_n| r_2^n$ unterhalb einer festen unveränderlichen Grenze liegt, obgleich $r_2 > r$. Demnach hat die Reihe $f(n)$ einen endlichen Werth für alle x , die den absoluten Betrag nicht kleiner sind als r_2 , und dies gilt, wie nahe sich auch r_2 an r annähert. Derke ich mir nun r_2 näher gerückt an r , so wird x aus $r_2 < r_2' < r_2$ und die vorigen Schlüsse gelten auch für r_2' , demnach wird die Reihe $f(n)$ noch einen endlichen Werth haben für Werthe dessen absoluter Betrag gleiche $r_2' > r$. Das heißt die Reihe $f(n)$ convergirt noch auferhalb des ursprünglichen Kreises mit dem Radius r . Sobald als die untere Grenze des $r' = g$ von Null verschieden ist, wie man auch so nahe an der Peripherie nimmt, oder genauer gesprochen, sobald g in dem \odot Kreise mit dem Radius r nicht unendlich klein wird, so ist r nicht der wahre \odot Radius von $f(n)$, da die Convergenz noch weiter geht. Darraus schließen wir unmittelbar, dass sobald r der wahre \odot Radius ist, g unendlich klein werden muß

für irgend eine Stelle. Denn angenommen, ϵ könnte
während unendlich klein werden, so wäre r nicht
der wahre Con. radius, was gegen die Voraussetzung ist.
Aber muß, wenn r der wahre Con. radius ist, ϵ irgend
unendlich klein werden können.

Man sieht man unmittelbar, daß wenn ϵ stets > 0 null
ist, der Con. vergrößerungsradius von $f(x)$ bis zu $r + \epsilon$ betrachtet wer-
den kann, wo $\epsilon > 0$ ist.

Hilfsätze.

Bei dem vorigen Satze haben wir vorausgesetzt, daß
die Function $f(x, y, z, \dots, h)$ welche für jede Combination von
 x, y, z, \dots, h die gewissen Bedingungen unterworfen sind
einen endlichen Werth hat, so daß für sie eine obere Grenze
existirt, die sich an irgend einer Stelle erreicht. Mit
anderen Worten, wir haben vorausgesetzt, daß die Func-
tion, welche für bestimmte Werthe von x, y, z, \dots, h definiert ist
an irgend einer Stelle einen Werth erreicht, der dem
absoluten Betrage nach der größte ist, unter allen die
die Function überhaupt annehmen kann. Diese Annahme
ist aber nicht selbst verständlich, denn in dem Begriff der
Grenze liegt gar nicht die Nothwendigkeit, daß die Grenze selbst
zu den Werthen der Variablen gehört, d. h. es ist gar nicht selbst
verständlich, daß eine variable Größe, für welche eine obere
(oder untere) Grenze stets existirt, diese Grenze selbst mal erreicht.

Um die obigen Annahme streng zu beweisen, wollen wir einige Hilfs-
sätze entwickeln, die uns auch bei den späteren Untersuchun-
gen von großem Nutzen sein werden.

I Satz: Im Gebiete einer reellen Größe x , sei eine Größe α
auf irgend eine Weise definiert; jedoch so, daß sie unendlich-
viele Werthe annehmen kann, die zwischen endlichen Grenzen
 a, b , liegen. Es soll bewiesen werden, daß es in dem Gebiete von a
wenigstens eine Stelle gibt α , von der Eigenschaft, daß in jeder
noch so kleinen Umgebung von α , es unendlich viele Werthe
von α gibt. Mit anderen Worten, es gibt in dem Gebiete von
 α sicher eine Stelle α , so daß nach Annahme einer beliebig
kleinen positiven Größe δ , es stets Werthe von α gibt, die
zwischen $\alpha + \delta$ und $\alpha - \delta$ liegen, und zwar unendlich viele
solche Werthe.

Hierbei wollen wir die Gesamtheit der Werthe von α zwischen
 a, b , die Grenze selbst ausgeschlossen, die Krethe nennen. Dau-
ren wir uns unter n eine beliebige ganze große Zahl, und
unter u eine ganze positive oder negative Zahl, so können
wir das ganze Intervall zwischen a, b theilen in Intervalle,
welche Werthe von α enthalten, die zwischen $\frac{u}{n}$ und $\frac{u+1}{n}$
liegen. Wir unterscheiden alsdann frühere und spätere
Bereiche nach folgender Definition; Wenn wir $\frac{u}{n}, \frac{u+1}{n}$;
 $\frac{u'}{n}, \frac{u'+1}{n}$ vergleichen und finden daß $u' - u$ positiv ist
so ist $\frac{u'}{n}$ der frühere Bereich als $\frac{u}{n}$... Wir bilden also die

Intervalle

$$\dots \left(-\frac{2}{n}, -\frac{1}{n} \right), \left(-\frac{1}{n}, 0 \right), \left(0, \frac{1}{n} \right), \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right) \dots$$

Aus allen diesen unendlich vielen Intervallen, in die wir das unendliche Gebiet von α theilen können, behalten wir nur diejenigen, in denen Wërthe von α' vorkommen. Da alle unendlich vielen Wërthe von α' zwischen 2 endlichen Wërthen a & b liegen, so wird die Anzahl der zu betrachtenden Bereiche endlich sein. Da nun alle unendlich vielen Wërthe α' in diesem in endlicher Anzahl vorhandenen Bereiche enthalten sind, so muß es wenigstens einen Bereich geben, in dem unendlich viele Wërthe α' liegen, noch mehr es muß einen ersten Bereich geben, in welchem zuerst unendlich viele Wërthe α' liegen. Dieser fest definite Bereich als das Intervall zwischen $\frac{v}{n}$ & $\frac{v+1}{n}$ auf diese Weise definiren wir zu jeder Zahl n eine ganz bestimmte Zahl v , so daß zu jedem n eine ganz bestimmte Zahl v begrifflich existirt. Nehmen wir nun irgend einen anderen Nenner h & m . so haben wir die Bereiche

$\frac{u}{m}, \frac{u+1}{m}$, was nichts weiter bedeutet, als daß wir jeden der Bereiche $\frac{u}{m}, \frac{u+1}{m}$ in m kleinere Bereiche theilen. Wenden wir das auf denselben Bereich

$\frac{v}{n}, \frac{v+1}{n}$ und bilden den Bereich

$$\left(\frac{v-202}{m \cdot n} \dots \frac{v-202}{m \cdot n} + \frac{1}{m \cdot n} \right), \left(\frac{v-201}{m \cdot n} + \frac{2}{m \cdot n} \dots \frac{v-201}{m \cdot n} + \frac{2}{m \cdot n} \right) \dots$$

$$\left(\frac{v-200}{m \cdot n} + \frac{200-1}{m \cdot n} \right), \dots \left(\frac{v-200}{m \cdot n} + \frac{200}{m \cdot n} \right)$$

so theilen wir hierdurch das Bereich $\frac{u}{h}$, $\frac{u+1}{h}$ in unendliche Bereiche. Da nun in diesem Bereiche $\frac{u}{h}$, $\frac{u+1}{h}$ unendlich viele Werthe von x liegen, und diese Bereiche in endliche Anzahl von neuen Bereichen getheilt wurde, so muß es unter allen diesen n Bereichen einen ersten Bereich $\frac{u}{m}$, $\frac{u+1}{m}$ geben, in welchem unendlich viele Werthe von x enthalten sind. Hierdurch fixiren wir wiederum eine Zahl n .

Nach diesen Bemerkungen betrachten wir die Bereiche mit den heisseren n^0 , n^1 , n^2 , n^3 , ... Hier die Intervalle von der Form $\frac{u}{n^0}$, $\frac{u+1}{n^0}$ u. s. w. In der ersten Theilung wird sich nur ein Bereich $\frac{u}{n^0}$, $\frac{u+1}{n^0}$ als der 1^{te} ergeben, in dem unendlich viele Werthe von x liegen, dann betrachten wir die Bereiche $\frac{u}{n^1}$, $\frac{u+1}{n^1}$ welches nichts weiter bedeutet, als das wir den ursprünglichen Bereich $\frac{u}{n^0}$, $\frac{u+1}{n^0}$ in n Theile theilen. Unter diesen Theilen wird es den ersten $\frac{u}{n^1}$, $\frac{u+1}{n^1}$ geben, in welchem unendlich viele Werthe von x liegen. Dann betrachten wir die Intervalle $\frac{u}{n^2}$, $\frac{u+1}{n^2}$, d. h. die Theilbereiche von $\frac{u}{n^1}$, $\frac{u+1}{n^1}$ so gibt es hier wiederum einen ersten Bereich $\frac{u}{n^2}$, $\frac{u+1}{n^2}$ in welchem unendlich viele Werthe von x liegen u. s. w.

Auf diese Weise bestimmen wir begrifflich zu jeder der Zahlen n^0 , n^1 , n^2 , n^3 , ... eine bestimmte Zahl resp u_0 , u_1 , u_2 , u_3 , ... und nach der ganzen Herleitung sieht man, das in einem jeden Intervalle $\frac{u_0}{h}$, $\frac{u_0+1}{h}$

unendlich viele Werte von x liegen. Betrachten wir nun die Zahl $\frac{k_h+1}{n-k_h}$, so sehen wir zunächst daß sie zwischen

$$\frac{k_h}{n-k_h} \text{ u. } \frac{k_h+1}{n-k_h} \text{ liegen muß.}$$

Denn jedes neue aus dem Intervalle

$$\frac{k_h}{n-k_h} \quad \frac{k_h+1}{n-k_h}$$

entstehende Intervall $\frac{k_h}{n-k_h} \quad \frac{k_h+1}{n-k_h}$ ist doch kleiner als das ursprüngl.

Interv. Wenn wir nun das Intervall

$$\frac{k_h}{n-k_h} \quad \frac{k_h+1}{n-k_h} \text{ auf die Form bringen}$$
$$\frac{n-k_h}{n-k_h+1} \quad \frac{n-k_h+n}{n-k_h+1}$$

so muß jede der Zahlen $\frac{k_h}{n-k_h+1}$ dazwischen liegen, also auch

$$\frac{k_h+1}{n-k_h+1}, \text{ das heißt es muß sein}$$

$$k_{h+1} = n - k_h + p_{h+1}$$

wobei p_{h+1} die Zahlen $0, 1, \dots, n-1$ annehmen kann.

Daß p_{h+1} nicht n sein kann, folgt sogleich daraus, daß alsdann

$$\frac{k_h+1}{n-k_h+1} \dots \frac{k_{h+1}+1}{n-k_{h+1}}, \text{ oder}$$
$$\frac{k_h+1}{n-k_h} \dots \frac{k_h+1 + k_{h+1}}{n-k_h+1}$$

der erste Bereich sein würde, in welchem unendlich viele Werte von x vorkommen, was nicht möglich ist, da ja schon

$$\frac{k_h}{n-k_h}, \dots, \frac{k_h+1}{n-k_h} \text{ der erste Bereich ist}$$

Durch die Gleichung $k_{h+1} = n - k_h + p_{h+1}$

definieren wir nun ganz bestimmte ganze Zahlen p_{h+1} , welche $0, \dots, n-1$ sein können. Bilden wir nun die Zahl

$$a_1 = k_0 + \frac{p_1}{n} + \frac{p_2}{n^2} + \frac{p_3}{n^3} + \dots \text{ (bis inf...)} \quad |$$

so sehen wir zunächst, daß diese Zahl einen unendlichen Wert

hat. Ferner ist leicht zu zeigen, daß sie eine Zahl ist, die in dem festgesetzten Intervall α & β liegt.

Dann brechen wir die Reihe mit dem n -ten Gliede ab, so haben

$$\text{wir } \alpha' = 10 + \frac{1^2}{11} + \frac{1^2}{11^2} + \dots + \frac{1^2}{11^n}$$

Summe ist aber

$$11^1 = n \cdot 10 + 1^1$$

$$11^2 = n \cdot 10 + 1^2$$

$$\dots$$
$$11^n = n \cdot 10 + 1^n \text{ oder}$$

$$\frac{11^1}{11} = 10 + \frac{1^1}{11}$$

$$\frac{11^2}{11} = 10 + \frac{1^2}{11^2}$$

$$\frac{11^3}{11} = \frac{11^2}{11} + \frac{1^2}{11^2} \text{ und durch Summation folgt}$$

$$\frac{11^n}{11} = \alpha' \text{, Es ist somit}$$

$$\frac{11^n}{11} < \alpha_1 < \frac{11^{n+1}}{11} \text{ d. h. } \alpha_1 \text{ ist eine Zahl, von deren Ende wir}$$

es Werte von α' gibt. Nun können wir leicht zeigen, daß oben die Zahl α_1 eine gewisse Stelle ist, in deren nächster kleiner Umgebung es unendlich viele Werte von α' gibt. Nun gibt es in dem Intervalle $\frac{11^n}{11} \dots \frac{11^{n+1}}{11}$ unendlich viele Werte von α' . Das heißt, wie klein wir auch das Intervall nehmen, so kommen darin immer unendlich viele Werte von α' die sämtlich in der Nähe von α_1 liegen. Denn es ist leicht zu sehen, daß

$$\alpha_1 - \frac{11^n}{11} < \delta \text{ und}$$

$$\frac{11^{n+1}}{11} - \frac{11^n}{11} = \frac{1}{11} < \delta, \text{ Es kommen also in dem}$$

Intervalle

$$\alpha_1 - \delta, \text{ und } \alpha_1 + \delta \text{ unendlich viele Werte von } \alpha'$$

vor. Hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Anwendung: Es sei $f(x)$ eine eindeutige stetige Funktion von x mit reellen Coefficienten. Wenn wir die reelle Größe auf ein bestimmtes Intervall beschränken, das vollständig in ein Endliches liegt, z. zwischen a, b , so hat $f(x)$ eine obere und eine obere Grenze, die für einen bestimmten Werth von x erreicht wird.

Es sei die obere Grenze von f ungleich und substituere eine ganze positive Zahl. Theilen wir das ganze Intervall in Stücke von der Form $\frac{1}{n}, \frac{1+1}{n}$

In allen Intervallen hat $f(x)$ eine obere Grenze, es muß notwendig ein Intervall geben, in welchem $f(x)$ die obere Grenze g hat. Die Größe g beschränken wir nun auf diesen Intervall $\frac{1}{n}, \frac{1+1}{n}$. Hierdurch definiren wir die Größe $\frac{1}{n}$ so, daß sie stets zwischen a, b liegt, und unendlich viele Werthe annimmt, welche man alle erhält, wenn man x variiert läßt zwischen v und $v+1$. Nach dem allgemeinen Satze muß es in dem Intervalle $\frac{1}{n}, \frac{1+1}{n}$ wenigstens eine Stelle geben, in deren beliebig kleiner Umgebung es unendlich viele Werthe von $\frac{1}{n}$ gibt. Diese Stelle sei a . Wenn ich nun x beschränke auf das Intervall $\frac{1}{n}, \frac{1+1}{n} + \delta$ und $\frac{1}{n} < \delta$ annehme, so haben wir folgendes. Nehmen wir an $f(x)$ könne g nicht erreichen, sondern an einer Stelle dieses Intervalls sei $g + \delta$, wobei δ dem g beliebig nahe gebracht werden kann. Setzen wir

$f'(x) = g + g$, so können wir immer für jedes x innerhalb dieses Intervalls wegen der Stetigkeit von $f(x)$ eine h so bestimmen, daß

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = g$$

Nehmen wir nun an g wäre stets größer als g , so kann ich eine Größe ϵ bestimmen, so daß g in dem Intervalle $g - \epsilon$ u. $g + \epsilon$ nicht vorkommt. Also kann ich die Größe ϵ so klein wählen, daß wenn ich x auf das Intervall $\alpha_1 + \delta$, $\alpha_2 + \delta$ beschränke, $f(x)$ stets die Werte zwischen $g - \epsilon$ u. $g + \epsilon$ annimmt. Es könnte sonst $f'(x)$ nicht beliebig nahe an g gebracht werden, was gegen die Definition der Grenzwert. Es muß also $f(x)$ an irgend einer Stelle des Bereiches $\frac{x_1}{n}$ $\frac{x_2}{n}$ die untere Grenze erreichen. Ebenso kann man es von der oberen Grenze nachweisen.

Definition. Die Gesamtheit der Wertpaare von x unbeschränkt, veränderlicher Größen, nennen wir eine n -fache Mannigfaltigkeit. Irigend ein bestimmtes Wertpaar nennen wir die Stelle der Mannigfaltigkeit, die Stelle des Gebietes.

Satz. Angenommen, in einer von n unbeschränkt veränderlichen reellen Größen gebildeten Mannigfaltigkeit (x_1, \dots, x_n) , seien Stellen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ auf irgend eine Weise definiert, jedoch so, daß alle im Endlichen liegen und daß diese unendlich viele vorhanden sind; ergibt es in dem Gebiete von

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$, wenigstens eine Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in deren jeder noch so kleinen Umgebung es unendlich viele Wertesysteme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gibt.

Betrachten wir 2 Wertesysteme

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$$

$$c_1, c_2, \dots, c_n \text{ und sodann dasjenige } c \text{ auf,}$$

das zuerst von dem gleichstelligen b verschieden ist. Hat nun $c > b$, so sagen wir die Stelle

$$c_1, \dots, c_n \text{ folgt auf die Stelle}$$

$$b_1, \dots, b_n$$

Diese Art der Vergleichen ist willkürlich, wir brauchen sie nur zu unserem Beweise. Nun theilen wir das ganze Geb. biet von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in Intervalle von der Form

$$\alpha_1 = \frac{1st}{m}, \dots, \frac{1st-1}{m}$$

$$\alpha_n = \frac{1st}{m}, \dots, \frac{1st-1}{m}$$

wo m ganze positive Zahl bedeutet. Denken wir uns aus allen diesen Bereichen, diejenigen hervorgehoben, in denen Werth von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vorkommen, die Anzahl derselben muss eine endliche sein, da ja sämmtliche $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zwischen 2 endlichen Grenzen liegen sollen. Diese Bereiche denken wir uns in eine Reihe geordnet und zwar so, dass von je 2 zusammenstehenden, der eine auf den andern folgt in dem obigen Sinne. Unter diesen Bereichen muss es nun einen ersten geben, in dem unendlich viele Wertesysteme

se'_1, \dots, se'_n vorhanden sind.

Auf diese Weise erhalten wir zu jedem m ein System von Zahlen g . Nehmen wir nun statt der Bereiche mit dem Nenner m , andere mit dem Nenner $m \cdot n$, so erhalten wir ein 2^{tes} System der Zahlen g . Wir nehmen nun hier als Nenner der Bereiche der Zahlen

m^0, m^1, m^2, \dots und die hierzu gehörigen Wertsysteme der Zahlen g seien:

$$f_{0,1}^0, f_{0,1}^1, f_{0,2}^1, \dots, f_{0,1}^n$$

$$f_{0,n}^0, f_{1,n}^0, \dots, f_{n,n}^0$$

und man erhält wie durch dieselben Schritte wie bei einer Variablen

$$f_{k+1,e}^m = m \cdot f_{k,e}^m + v_{k+1,e}^m$$

wo $v_{k+1,e}^m$ gleich oder kann $0, 1, \dots, m-1$

Bilden wir nun die Zahlen

$$a_1 = f_{0,1}^0 + \frac{v_{0,1}^1}{m} + \frac{v_{1,1}^2}{m^2} + \frac{v_{2,1}^3}{m^3} + \dots$$

$$a_2 = f_{0,2}^0 + \frac{v_{0,2}^1}{m} + \frac{v_{1,2}^2}{m^2} + \frac{v_{2,2}^3}{m^3} + \dots$$

$$\dots$$

$$a_n = f_{0,n}^0 + \frac{v_{0,n}^1}{m} + \frac{v_{1,n}^2}{m^2} + \frac{v_{2,n}^3}{m^3} + \dots$$

Diese Stelle a_1, a_2, \dots, a_n ist nun eine Stelle im Gebiete a_1, \dots, a_n , so dass es in jeder Umgebung derselben unendlich viele Werte von se'_1, \dots, se'_n gibt, was man leicht nach derselben Art wie bei einer Variablen nachweisen kann.

Liege Größen lassen sich ohne weiteres auf complexe Größen
erweitern. Ersetze wir nämlich jede complexe Größe durch ihre
beiden Coordinaten, so behaupten wir eine einfache Mannig-
faltigkeit von reellen Größen; abdam ist die Erweiterung des
Satzes folgende. Wenn man in einer von vorn beschrankt
veränderlichen complexen Größe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gebildeten einfachen
Mannigfaltigkeit, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ auf beliebige Weise de-
finirt, jedoch so das alle Werthsysteme derselben im Endlichen
liegen, und das es derselben vor diesem endlichen Intervalle
unendlich viele gibt, so gibt es im dem Gebiete von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
wenigstens eine Stelle in deren Umgebung unendlich viele
Werthsysteme von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vorhanden sind, wie klein
man auch die Umgebung nimmt.

Lehrsatz. Mögen im Gebiete der unbeschränkten Verän-
derlichen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ definiert sein, so das
sie stets endlich bleiben. Mit diesen Größen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sei
eine andere reelle Größe ξ so verbunden, das zu jedem
Werthsysteme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ein Werth von ξ gehört, so das die
Größe ξ eine untere und eine obere Grenze. Abdam gibt
es im Gebiete $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wenigstens eine Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, die
so liegt, das wenn man diejenigen Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ be-
trachtet, die in der Umgebung der Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ liegen, die
angehörigen ξ 's dieselbe obere und untere Grenze haben.
Wenn für die Größe ξ , die mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ auf die obige Weise

so zusammenhängt, die obere Grenze gibt, und wenn ich dann eine beliebige Größe δ annehme und betrachte das Intervall $g - \delta, \dots, g$, so gibt es nach dem Begriff der Grenze Werthe von ξ , die in diesem Intervalle liegen, wie klein ich auch δ annehme, und diese Werthe von ξ gehören zu bestimmten Werthsystemen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Solcher Werthsysteme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ muß es aber unendlich viele geben, da ich dem δ unendlich viele Werthe beilegen kann. Denn denken wir uns $\delta = \delta_0$ gesetzt, so giebt es Werthe v , die zwischen $g - \delta_0$ und g liegen, also auch Werthsysteme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Setzen wir nun $\delta = \delta_1$, so daß $g - \delta_1 > 0$, so giebt es andere Werthe von ξ und andere Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ u. s. w.

Es muß also in dem Gebiete $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ wenigstens eine Stelle, die so liegt, daß in jeder Umgebung derselben es unendlich viele Werthe von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ giebt, und deren entsprechende Werthe von ξ dem g beliebig nahe gebracht werden können. Hiermit ist also eigentlich unser Satz bewiesen. Wir wollen dies noch auf andere Weise nachweisen, indem wir uns darauf beschränken, das Gebiet $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ abzuellen voranzusetzen, wo raus man dann leicht den Satz auf complexen Größen erweitern kann. In dem Ende sei m eine beliebige positive ganze Zahl und theile den ganzen Bereich im Intervalle von der Form $\frac{g_1}{m}, \dots, \frac{g_2}{m}$ und betrachte die Bereiche

$$x_1 = \frac{f_{11}}{m_1} \dots \frac{f_{1n}}{m_n}$$

$$x_n = \frac{f_{n1}}{m_1} \dots \frac{f_{nn}}{m_n}$$

Von allen diesen Bereichen betrachten wir nun diejenigen, in denen es Werte von x_1, \dots, x_n gibt, welche Bereiche natürlich in endlicher Zahl vorkommen müssen, wegen Endlichkeit der Wertesysteme x_1, \dots, x_n . Betrachten wir nun irgend einen Bereich, so wird es in jedem Bereiche Wertesysteme x_1, \dots, x_n geben, zu denen eine bestimmte obere Grenze von ξ gehört. Es muß nun einen Bereich geben, in welchem die obere Grenze von ξ gleich g ist. Für jedes n gibt es einen ganz bestimmten Bereich, in welchem Wertesysteme x_1, \dots, x_n liegen und für welche die obere Grenze von ξ gleich g ist. Es sei der Bereich $\frac{f_{11}}{m_1} \dots \frac{f_{nn}}{m_n}$. Fassen wir diesen Bereich in's Auge, so hat dieser unendlich viele Punkte die so definiert sind, daß in dem Gebiete x_1, \dots, x_n es unendlich viele Punkte gibt mit endlicher Wertesysteme. Es muß also in dem Gebiete x_1, \dots, x_n wenigstens eine Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ geben, in deren jeder Umgebung es unendlich viele solche Werte gibt. Betrachten wir die Wertesysteme

$$x_1 = \alpha_1 - \delta, \dots, \alpha_1 + \delta;$$

$$x_2 = \alpha_2 - \delta, \dots, \alpha_2 + \delta$$

$$x_n = \alpha_n - \delta, \dots, \alpha_n + \delta$$

so können wir innerhalb dieses Bereiches stets Punkte $\frac{f_{11}}{m_1}, \dots, \frac{f_{nn}}{m_n}$ finden. Wenn wir nun die Punkte in's Auge

fasse, für welche

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1^2}{111}, \dots, \frac{1^2+1}{111} \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{1^2}{111}, \dots, \frac{1^2+1}{111} \end{aligned}$$

so kann man das in so groß annehmen, daß jedes Wërthsystem x_1, \dots, x_n von a_1, \dots, a_n , so wenig verschieden ist, wie man will. Man kann also in so groß annehmen, daß $\frac{1^2}{111}, \dots, \frac{1^2+1}{111}$ zwischen $a_1 - \delta_1$ und $a_1 + \delta_1$, u. s. w. liegt. Unter diesen Bedingungen haben wir in

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1^2}{111}, \dots, \frac{1^2+1}{111} \\ x_n &= \frac{1^2}{111}, \dots, \frac{1^2+1}{111} \end{aligned}$$

einen Bereich innerhalb dessen es Wërthsysteme von x_1, \dots, x_n gibt, für welche die obere Grenze von ξ gleich q ist. Demnach gibt es in der Umgebung von a_1, \dots, a_n Werthe x_1, \dots, x_n , welche für ξ dieselbe obere Grenze q ergeben. Hiermit ist der Satz mit aller Strenge bewiesen. Man kann den Satz nicht so aussprechen, daß man in die Umgebung desselben gar nicht das Gebiet der Größen x_1, \dots, x_n hinführt. Stattdessen lautet der Satz folgendermaßen.

Wenn man mit den Variablen a_1, \dots, a_n die alle endliche bleiben sollen eine reelle Größe verbindet, so daß in jedem Wërthsysteme von a_1, \dots, a_n ein Werth von ξ existiert, so gibt es in dem Gebiete von a_1, \dots, a_n oder an dessen Grenze Wërthsysteme, welche für ξ dieselbe obere und untere Grenze liefern. Man kann nun die obige Umänderung

leicht auf complexe Größen erweitern, und dasselbe was man von der oberen Grenze nachgewiesen hat, kann man auch von der unteren Grenze zeigen. Auch ist es nicht nöthig voranzusetzen, das für jedes Werthsystem von x_1, \dots, x_n nur einen Werth erhält. Der Beweis bleibt derselbe, wenn auch mehrere, ja sogar unendlich viele Werthe annimmt.

Denken wir uns nunmal eine Function gemischt mehrerer reellen Veränderlichen x_1, \dots, x_n und zwar eine eindeutige Function $f(x_1, \dots, x_n)$ worunter wir eine Grenze verstehen, die zu jedem Werthsysteme innerhalb eines unlimitirten Gebietes oder an dessen Grenze einen Werth hat $y = f(x_1, \dots, x_n)$ das Gebiet der Größen x_1, \dots, x_n soll ein geschlossenes Continuum sein. Diese Werthsysteme sind also hier, das was wir im vorigen Satze mit x_1, \dots, x_n bezeichnet haben, und y entspricht der dortigen Größe z . Die Größe y hat eine obere und eine untere Grenze. Nach dem vorigen Satze muß es also in dem Gebiete x_1, \dots, x_n oder an dessen Grenze eine Stelle a_1, \dots, a_n geben, die so liegt das wenn sich x_1, \dots, x_n auf eine noch so kleine Umgebung von a_1, \dots, a_n beschränken für diese Werthsysteme von x_1, \dots, x_n y dieselbe obere Grenze hat. Wenn sich nun zeigen läßt, das diese obere Grenze nicht gehört zu einem Werthsysteme x_1, \dots, x_n das an der Grenze des Gebietes von x_1, \dots, x_n liegt und $f(x_1, \dots, x_n)$ stetig

ist, so gibt es in dem Gebiete $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Stelle wo g , die obere Grenze g wirklich erreicht, also Maximum hat. Denn es sei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Stelle in deren noch so kleiner Umgebung $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dieselbe obere Grenze g hat. Wenn diese Stelle nicht an der Grenze g des Gebietes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ liegt, so kann ich, wenn ich $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beschränke auf das Intervall

$$\alpha_1 - \delta, \dots, \alpha_1 + \delta,$$

$$\alpha_2 - \delta, \dots, \alpha_2 + \delta,$$

$$\alpha_n - \delta, \dots, \alpha_n + \delta,$$

$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ die Größe vernähe bringen, wie ich will. Nun ist dort sich $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ stetig, daraus folgt dass

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g$$

sein muss. Denn angenommen es wäre

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = g' \text{ wo } g' \text{ von } g \text{ verschieden ist,}$$

so kann ich ϵ so klein annehmen, dass das g in dem Intervall $g' - \epsilon, \dots, g' + \epsilon$ nicht liegt, man kann ich aber δ auch so klein annehmen, dass, wenn ich $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ beschränke auf das Intervall

$$\alpha_1 + \delta, \alpha_1 - \delta,$$

für alle diese Wertesysteme $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ wegen der Stetigkeit Werte enthält, welche zwischen

$$g' - \epsilon \text{ u. } g' + \epsilon \text{ liegen.}$$

D. h. man könnte eine solche Umgebung von $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ angeben, in welcher die Function $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dem Werte g

nicht beliebig nahe gebracht werden können, was gegen die Definition der Grenze ist.

Es muß also

$f(x_1, \dots, x_n) = g$ das Maximum sein.

Wie kann man nun entscheiden ob die Stelle a_1, \dots, a_n nicht an der Grenze liegt. Im Falle der oberen Grenze sucht man nachzuweisen, daß es im Innern des Bereiches noch Stellen gibt, für welche der zugehörige Werth von y noch größer ist als die obere Grenze des Wertes y für den Umfang des Bereiches. Im Falle der unteren Grenze sucht man zu zeigen, daß es im Innern des Bereiches Stellen gibt, für welche der zugehörige Werth von y kleiner ist als die untere Grenze für y , im Umfange des Bereiches von x_1, \dots, x_n .

Haben wir eine Function von mehreren complexen Größen x_1, \dots, x_n , so hat der Werth von y keine solche obere oder untere Grenze, aber wohl der absolute Betrag von y . Und wenn wir x_1, \dots, x_n durch die beiden Coordinaten ersetzen, so kommen wir leicht zu dem Satze, daß, wenn die Stelle a_1, \dots, a_n , in deren Umgebung die Werthe von y dem absoluten Betrage nach dieselbe obere (oder untere) Grenz haben im Innern des Gebietes x_1, \dots, x_n liegt und die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ stetig ist, sie das Maximum (oder Minimum) an einer Stelle wirklich erreicht.

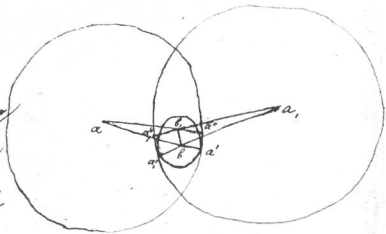
Bei unendlichen Funktionen braucht es nicht der Fall zu sein.

Weitere Theorie der Potenzreihen.

Lehrsatz Es seien 2 Potenzreihen $G(x/a)$, $G_1(x/a_1)$ gegeben, und ihre Konvergenzreise mögen theilweise auf einander liegen. Wenn es sich zeigen läßt, daß beide Reihen innerhalb einer bestimmten Umgebung eines im Innern des gemeinschaftlichen Konv. Bereiches gewählten Punktes b übereinstimmen, so stimmen sie innerhalb des ganzen gemeinschaftlichen Konvergenzbereiches überein.

Es seien die Konvergenzreise beider Reihen, die um a u. a_1 beschriebenen Kreise, die sich theilweise decken müssen. Innerhalb des beiden Reihen gemeinsamen Konv. Bereiches sei b gewählt, wenn es sich nun zeigen läßt, daß innerhalb einer gewissen Umgebung von b

$G(x/a) = G_1(x/a_1)$ ist, so muß für den ganzen gemeinsamen Bereich $G(x/a) = G_1(x/a_1)$ sein. Aus $G(x/a)$ leiten wir $G(x/b)$ in aus $G(x/a_1)$ $G_1(x/a_1)$ Ann wir machen wir nach einem der früheren Sätze, daß innerhalb einer bestimmten Umgebung von b



$$G(x/a) = G(x/b) \text{ u. } G_1(x/a_1) = G_1(x/b) \text{ ist.}$$

sind zwar wissen wir genau, dass die Übereinstimmung von $G(n/a)$ u. $G(n/b)$ innerhalb eines um b mit dem Radi-
us $b'a'$ beschriebenen Kreises übereinstimmt, und $G(n/a)$
mit $G_1(n/b)$ innerhalb des mit $b'a'$ beschriebenen Kreises
Übereinstimmt $G(n/a)$ mit $G_1(n/a)$ innerhalb einer bestim-
ten Umgebung um b übereinstimmt, so wird auch innerhalb
einer gewissen Umgebung von b die Gleichung stattfinden
müssen

$$\bar{G}(n/b) = \bar{G}_1(n/b)$$

d. h. beide Reihen müssen in den Coefficienten überein-
stimmen d. h. identisch sein. Um nun nachzuweisen,
dass $G(n/a) = G_1(n/a)$ für den ganzen Bereich dergemein-
schaftlich ist wählen wir b_1 in der Umgebung von b . Nun
haben wir aus $G(n/a)$ hergeleitet $G(n/b)$ und hieraus her-
leiten wir $\bar{G}(n/b)$

Unter welchen Umständen wird nun $\bar{G}(n/b)$ in $G(n/b)$
übereinstimmen? Wenn ich b, b_1 kleiner annehme als $b'a'$
und kleiner als $b'a'$, so wird $\bar{G}(n/b)$ sicher mit $G(n/b)$
übereinstimmen in einer gewissen Umgebung von b_1 .
Unter diesen Umständen haben wir die hergeleiteten
Reihen.

$$G_1(n/a), \bar{G}_1(n/b), \bar{G}'_1(n/b) \text{ und} \\ G(n/a), G(n/b), \bar{G}'(n/b)$$

Nun stimmt aber innerhalb einer gewissen Umgebung

Setz $b, \bar{G}(x|b)$ mit $\bar{G}'(x|b), \bar{G}(\alpha|b)$ überein. d. h.

$$\bar{G}(x|b) = \bar{G}'(x|b)$$

Man kann der Punkt b , so gewählt werden, dass die Umge-
bung von b , in der Umgebung von b liegt, wofür

$$\bar{G}(x|\alpha) = \bar{G}'(x|b) \text{ also wird für diese Umge-}$$

bung auch

$$\bar{G}(x|\alpha) = \bar{G}'(x|b)$$

Uebrig erhalten wir für die Nähe von b , welchen Punkt
wir auch so gewählt denken können, dass seine Umgebung
in derjenigen Umgebung von b liegt, wofür

$$\bar{G}_1(x|\alpha) = \bar{G}_1'(n|b), \text{ für dieselbe Umgebung ha-}$$

ben wir aber auch

$$\bar{G}_1'(n|b) = \bar{G}_1'(n|b), \text{ also auch}$$

$$\bar{G}_1(x|\alpha) = \bar{G}_1'(n|b)$$

Man ist der Voraussetzung gemäß, für eine gewisse
Umgebung von b

$$\bar{G}(n|\alpha) = \bar{G}_1'(n|\alpha) \text{ also muss auch}$$

$$\bar{G}'(x|\alpha) = \bar{G}'(n|b) \text{ d. h. beide Reihen müssen in}$$

den Coefficienten übereinstimmen, also ist

$$\bar{G}'(x|\alpha) = \bar{G}'(n|b)$$

Man denken wir uns aus $\bar{G}(n|\alpha)$ u. $\bar{G}_1'(n|\alpha)$ direct die Thei-
len $\bar{G}'(x|\alpha)$ und $\bar{G}_1'(n|b)$ hergeleitet. Und es ist innerhalb
eines Kreises um b , der ganz innerhalb des gemeinsamen
Bereiches liegt, sicher

$$G_j(x/a) = \bar{G}_j(x/b_j) \text{ sind}$$

$$G_{j_1}(x/a_1) = \bar{G}_{j_1}(x/b_{j_1})$$

Nun war innerhalb einer bestimmten Umgebung des b_j ,

$$G_j(x/a) = \bar{G}_j(x/b_j)$$

$$G_{j_1}(x/a_1) = \bar{G}_{j_1}(x/b_{j_1}) \text{ also ist auch innerhalb}$$

derselben Umgebung

$$\bar{G}_j(x/b_j) = \bar{G}_{j_1}(x/b_{j_1}) \text{ u.}$$

$$\bar{G}_{j_1}(x/b_{j_1}) = \bar{G}_{j_2}(x/b_{j_2}) \text{ also muss auch}$$

$$\bar{G}_j(x/b_j) = \bar{G}_{j_2}(x/b_{j_2}) \text{ und daraus folgt, dass}$$

innerhalb der bestimmten Umgebung von b_j

$$G_j(x/a) = G_{j_1}(x/a_1)$$

Dasselbe können wir für jeden neuen Punkt b_k zeigen, der nur so gewählt werden muss, dass er in der Umgebung von b_j liegt und durch Wiederholung der Schritte, kommen wir zu dem Satze dass

$$G_j(x/a) = G_{j_1}(x/a_1)$$

für alle Punkte des gemeinsamen Konv. Bereiches sein muss. W. z. b. u.

Nun kehren wir zu dem Beweise der Voraussetzung, die wir auf der Seite gemacht haben zurück, dass nämlich die Funktion $\Sigma_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, wenn man sie nicht häufig das dort erwähnte Gebiet beschreibt, an irgend einer Stelle einen Wert erreicht, der dem absoluten Betrage nach das Maximum ist. Dazu ist es nun

nötig, nach den Untersuchungen 1), nachzuweisen, daß die Function

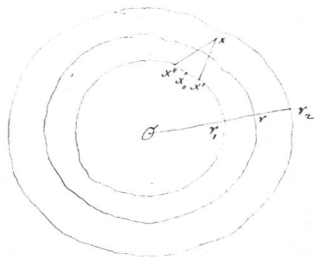
$$G(x', h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} G^{(n)}(x') h^n$$

sich stetig mit x' ändert. Außerdem muß es nach dem Vorigen irgend eine Stelle geben, wo für $G(x', h) = g$ Maximum ist. Da nun die Function an jeder Stelle endlich ist, so wird auch das Maximum endlich sein müssen.

Wir haben also nur zu zeigen, daß es, sobald x' u. h innerhalb des Conv. Bereiches liegt, möglich ist, ϵ zu x' so zu wählen, daß

$$G(x' + \epsilon, h + h) - G(x', h)$$

beliebig klein wird. Mit Beibehaltung der auf der Seite erwähnten Bedingungen, wäh-



len wir auf dem Kreise mit dem Radius r' , irgend 2 Punkte x' u. x'' an und dann irgend einen 3ten Punkt x . Die Punkte müssen aber so gewählt werden, daß sowohl

$$r' - r \leq \epsilon \text{ also auch}$$

$$r' - r'' \leq \epsilon$$

Die Reihe $G^{(n)}$ soll innerhalb des Kreises mit r convergent sein. Wenn wir nun aus $G^{(n)}$ herleiten $G^{(n)}(x')$ und dann $G^{(n)}(x'')$, so werden beide Reihen für x convergent sein, da ja der Conv. Radius beider sicher nicht kleiner ist, als

g und $\bar{x} \bar{x}'$, $\bar{x} \bar{x}'' \leq d$, wo $d < \delta$ angenommen wurde.
 Man sehen wir, daß sobald man \bar{x} so wählt, daß
 $\bar{x} \bar{x}' < d$, $\bar{x} \bar{x}'' \leq d$ also $\bar{x}'' \bar{x}' \geq 2d$ ist, die Funktionen in
 der Nähe eines bestimmten Punktes \bar{x} zwischen \bar{x}' u. \bar{x}'' sicher
 einstimmig müssen, da sie für den Wert von $G(x)$ in der
 Nähe von \bar{x} darstellen. Sie müssen also sobald

$$\bar{x} \bar{x}', \bar{x} \bar{x}'' \leq d \text{ für den ganzen gemeinsamen}$$

Conv. Bereich übereinstimmen, d. h. es ist

$$G(x'/n) = G(x''/n)$$

Betrachten wir hiernach $G(x' + \xi, h + h) / \xi$ der zunächst

$$G(x'/n, h) = G(x' + h'/n, h)$$

$$G(x' + \xi, h + h) = G(x' + h + h + h + \xi, h + \xi)$$

Daraus folgt nun, wenn man für h setzt $-\xi$:

$$G(x' + \xi, h - \xi) = G(x' + h'/n + \xi, h)$$

$$G(x', h) = G(x' + h'/n) = G(x' + \xi + h + \xi + x')$$

$$= G(x' + \xi, h - \xi) \text{ Setzt man nun } h = h + \xi \text{ so folgt}$$

$$G(x' + \xi, h) = G(x', h + \xi) \text{ und } h \text{ nun } h$$

vermehrt gibt.

$$G(x' + \xi, h + h) = G(x', h + h + \xi)$$

$$= G(x' + h + h + h + \xi, h)$$

$G(x' + \xi, h + h)$ läßt sich darstellen als Potenzreihe

von $h + h + \xi$ und wenn h, h, ξ so gewählt wird, daß $|h + h + \xi| < \rho$ ist so ist die Potenzreihe endlich und convergierend. Jede Potenzreihe ist aber stetig, folglich ist auch möglich ξ u. h so klein zu wählen, daß

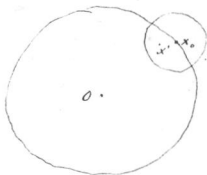
$G, n, \epsilon, h, k, l - G, n, h, l = G, n, h, k, r, h, \epsilon, l - G, n, h, l$
beliebig kleiner gemacht wird, das heißt

G, n, h, l ist in Bezug auf n, h, l stetig, und daraus folgt, daß es irgendwo im Bereiche von n, h, l , oder an dessen Grenze eine Stelle geben muß, für welche der absolute Betrag sein Maximum erreicht

Wir haben also den hieraus wichtigen Satz mit aller Strenge nachgewiesen, daß wenn die Größe g eine untere Grenze hat, die von Null verschieden ist, so ist nicht der wahre Limesgrenzwert, sondern die Reihe convergirt noch für Werten, welche dem absoluten Betrage nach größer sind als ϵ . Bei den vorigen Untersuchungen sind wir ausgegangen von einer Potenzreihe von x, G, n , derselben Schlußfolgerung unmittelbar für Reihen von $x - a, G, n, a$ und wenn wir in ähnlichen nur Potenzreihen von x, G, n betrachten, so gelten die Schlüsse ebenso für G, n, a .

Es folgt nun weiter, daß sobald x der wahre Limesgrenzwert ist, so muß die untere Grenze von g gleich Null sein.

Stellen wir uns nun einen Punkt a , im Umfange und betrachten eine kleine Umgebung von a . Beschränken wir nun x auf das Innere des gemeinschaftlichen Bereiches der beiden Kreise um o und a .



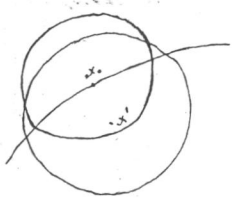
In jedem a' gehört ein bestimmtes h als Radius der Umge-
 bung von a' . Es sei nun möglich den Kreis um a' so klein
 zu wählen, daß die untere Grenze von h nicht Null ist. Wenn
 ich nun transformire $f(x)$ in $f(x/a')$, so wird die Reihe
 $f(x/a')$ convergent sein, sobald a', a', a' wo h die untere
 Grenze von h ist, innerhalb der Umgebung von a' . Möchte
 man nun a' hinreichend nahe an a , so wird der Kreis um
 a' den Punkt a umfassen. Man hat ein Potenzreihe inner-
 halb des Con- bereiches den Charakter einer ganzen Function.
 Wenn also a ein Punkt des Anfanges ist, für welchen
 eine Umgebung gibt, in welcher die untere Grenze von h
 nicht Null ist, so sagen wir die Function besitzt den Cha-
 rakter einer ganzen Function, wie nahe man auch an a
 kommen mag. Wenn x der wahre Convergenzradius
 ist, so muß es eine Stelle geben, wo die obige Vorausset-
 zung nicht stattfindet, d. h. es muß wenigstens eine
 Stelle geben, für deren jede noch so kleine Umgebung
 die untere Grenze von h Null ist. Es muß also entweder
 innerhalb, oder an der Grenze des Gebietes von a eine
 Stelle geben, für deren Umgebung die untere Grenze von
 h Null ist. Im Innern giebt es keinen solchen Punkt,
 denn wie man auch a im Innern annimmt, so hat
 stets die Reihe $f(x/a')$ einen von Null verschiedenen

L . radius. Demnach muß es an der Grenze des Gebietes von x d. h. im Umfange des L . Kreises einen Punkt wenigstens geben; für dessen Umgebung die andere Grenze von h' gleich Null ist. Nachdem man nun nicht aus $f(x)$ eine Reihe $f(x/n)$ herleiten in deren Konvergenzkreise sich der Punkt enthalten würde, so und da die andere Grenze von $h' = 0$, so kann man nicht das x so nahe an diesen Punkt wählen, daß der L . Kreis von $f(x/n)$ welcher gleich h' ist, den Punkt x faßt; da ja dazu nötig ist, daß x $\leq x_0$, als die andere Grenze von h' was offenbar nicht möglich ist. Wir sagen in diesem Falle die gegebene Function verliere den Charakter einer ganzen Function, wenn sich x dem erwähnten Punkte nähert. Das Resultat ist also: Wenn es möglich ist aus $f(x)$, $f(x/n)$ herzuleiten, wobei x im Innern des L . Kreises von $f(x)$ liegt, so daß der Punkt x des Umfanges in dem L . Bereiche der Reihe $f(x/n)$ liegt, so behält die Function $f(x)$ in der Nähe von x den Charakter einer ganzen Function, wenn es nicht möglich ist so verliert sie den Charakter einer ganzen Function.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen

Satz Der wahre L . radius einer Potenzreihe ist der, durch charakterisirt, daß es im Umfange des mit ihm beschriebenen Kreises, wenigstens eine Stelle gibt, in deren Nähe der Function den Charakter einer ganzen Function verliert. —

Wenn nun α_0 ein Punkt ist in dessen Nähe f/n den Charakter einer ganzen Function behält, so können wir aus f/n herleiten $f_1/\alpha_1/\alpha_1'$ und der Convergencekreis von $f_1/n/n'$ umfaßt den Punkt α_0 .



Ihr kann also aus $f_1/n/\alpha_1'$ herleiten $f_2/n/\alpha_2$. Nun ist mit f/n u $f_1/n/n'$ innerhalb des gemeinschaftlichen Bereiches von f/n in $f_1/n/n'$ überein, und $f_1/n/n'$ mit $f_2/n/\alpha_2$ innerhalb des der Kreise um α_0 u α_2 gemeinsamen Theiles. Innerhalb der allen 3 Kreisen gemeinsamen Fläche haben wir

$$f/n - f_1/n/\alpha_1' = f_2/n/\alpha_2 \text{ also}$$

$$f/n = f_2/n/\alpha_2$$

Innerhalb des der Convergencekreise von f/n u $f_2/n/\alpha_2$ gemeinsamen Theiles haben wir also

$$f/n = f_2/n/\alpha_2$$

Nun geht die Gültigkeit von $f_2/n/\alpha_2$ noch weiter, es kann somit $f_2/n/\alpha_2$ als Fortsetzung von f/n angesehen werden. An solchen Stellen in deren Nähe die Function f/n den Charakter einer ganzen Function behält, ist es also möglich eine Reihe $f_2/n/\alpha_2$ zu finden welche innerhalb des beiden Reihen f/n , $f_2/n/\alpha_2$ gemeinsamen bzw. Bereiches mit f/n übereinstimmt. Wenn α_0 ein Punkt ist, in dessen Nähe

$f(z)$ den Charakter einer ganzen Function verliert, so ist es nicht möglich aus $f(z)$ die Reihe $f(z/a_0)$ herzuleiten, die mit $f(z)$ in irgend einem Bereiche übereinstimmt. Wir können unserem Satze also auch folgende Fassung geben.

Lehrsatz. Wenn man nachweisen kann, daß für alle Punkte z_0 des l.u.w. Kreises einer Function $f(z)$ mit dem Radius r es möglich ist Reihen $f(z/a_0)$ herzuleiten, die innerhalb eines bestimmten Bereiches mit $f(z)$ übereinstimmen, so ist r nicht der wahre l.u.w. Radius, sondern die Convergenz der Reihe $f(z)$ erstreckt sich weiter, und umgekehrt, wenn der Kreis mit dem Radius r der wahre l.u.w. Kreis ist, so muß es in seinem Umfange wenigstens eine Stelle z_0 geben, so daß es nicht möglich ist aus $f(z)$ die Reihe $f(z/a_0)$ herzuleiten, die innerhalb eines Bereiches mit $f(z)$ übereinstimmen.

Die Sätze, die wir hier nur für Potenzreihen von $a_0 f(z)$ hergeleitet haben, gelten ohne Weiteres für Potenzreihen von $a - a_0 f(z/a)$.

Diese Stellen in deren Nähe die Function den Charakter einer ganzen Function verliert, nennen wir singuläre Stellen. Wir bemerken hierbei, daß die Anordnung der singulären Stellen sehr mannigfaltig ist. Es gibt Potenzreihen, bei denen es erstens) nur eine solche Stelle, 2) mehrere solche Stellen gibt 2) unendlich viele singuläre Stellen 3) ganze Strecken,

4) bei denen der ganze Umfang des Com. Kreises singularär ist.

Beispiele. Als erstes Beispiel wollen wir eine rationale Function nehmen, d. h. einen Quotienten zweier ganzer Functionen von x . Die rationalen Functionen waren diejenigen, welche zunächst auf Reichen geführt haben, nämlich die Function $f(x)$; die gegebene Function sei $\frac{F_1/n}{F_2/n}$ wo F_1 u. F_2 ganze rationale Functionen sind ohne gemeinschaftlichen Factor. Nehmen wir irgend einen Punkt α , für welchen der Nenner nicht verschwindet, so existirt, wie wir es schon bewiesen haben eine Reihe $g/n(\alpha)$ sodafs innerhalb eines bestimmten Bogenes

$$\frac{F_1/n}{F_2/n} = g/n(\alpha) \text{ ist}$$

Wenn für irgend einen Werth α , $F_2(\alpha) = 0$ wird, so besteht sicher die obige Gleichung nicht mehr.

Wenn man nun α einen Kreis beschreibt, sodafs innerhalb desselben die Function $\frac{F_1/n}{F_2/n}$ nicht unendlich groß wird, so gilt die obige Gleichung innerhalb dieses Kreises. Angenommen es sei r der wahre Com. radius von $g/n(\alpha)$, dann besteht für Punkte des Innern Kreises die obige Gleichung, denn es wird

$F_1/\alpha = F_2/\alpha \cdot g/n(\alpha)$ in den Coefficienten übereinstimmen. Nun muß es nach den Beweisen in dem Vorzuge wenigstens eine Stelle α_0 geben, in deren Nähe $g/n(\alpha)$ also auch $\frac{F_1}{F_2}$ den Charakter einer ganzen Function

verliert d. h. es ist nicht möglich aus $f_1(n/a)$ eine Funktion $f_1(n/a_0)$ herzuleiten, dass ihr Locus. bezeichnen Punkt a_0 umfasst. Daraus können wir schließen, dass an dieser Stelle $F_2(a_0) = 0$ wird. Denn setzen wir

$$F_2(x) = F_2(a_0) + F_2'(a_0)(x - a_0) + \dots$$

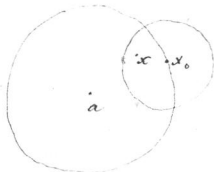
wird wäre $F_2'(a_0) \neq 0$, so könnte ich dies in F_1 setzen, und dann würde in der Nähe von a_0 die Gleichung gelten

$$\frac{F_1(n)}{F_2(n)} = \frac{f_1(n/a_0)}{f_2(n/a_0)}$$

Für Punkte beider Kreise gilt

$$f_1(n/a) = f_1(n/a_0)$$

Also verliert der Quotient in der Nähe von a_0 den Charakter einer ganzen Funktion nicht; es muss also $F_2'(a_0) = 0$ werden. Wenn $F_2'(a_0) = 0$



für b_1, b_2, \dots so geht unser Kreis durch einen Punkt b_1 , für welchen der absolute Betrag von $b_1 - a$ am kleinsten ist.

Als unmittelbare Anwendung dieses Resultates ergibt sich der Satz, dass eine algebraische Gleichung n ten Grades stets n Wurzeln hat, jede so oft gezählt, als es die Ordnungszahl angibt. Es sei $F(n)$ die algebraische Gleichung und

wir zeigen, dass $F(n)$ überhaupt einmal null werden muss.

Zu dem Ende betrachten wir die Funktion $\frac{F(n)}{F'(n)}$ und nehmen an, dass $F(n)$ für $x=0$ nicht verschwindet. Unter dieser Voraussetzung können wir setzen

$$\frac{F(n)}{F(n)} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

Verwandte $F(n)$ für keinen W'rk, so würde diese Reihe beständig convergent sein. Eine beständig convergirende Reihe hat nun folgende Eigenschaft. Denken wir uns um den Nullpunkt einen beliebig großen Kreis, so kann man außerhalb desselben noch immer W'rkth von x finden, für welche die Reihe convergirt. Wir hatten nun

$$|c_n| r^{n-1} \leq g \text{ oder}$$

$$|c_n| \leq g \cdot r^{-n}$$

Nun ist $|c_n|$ constant, und nun kann man r beliebig groß, also r^{-n} beliebig klein machen, folglich wenn g and. lich wäre, könnte man auch r^{-n} beliebig klein machen; daraus würde die Function obige Relation folgen, demnach muß es möglich sein durch Vergrößerung von r , den W'rkth der Reihe dem absoluten Betrage nach, d. h. das g so groß zu machen, wie man nur will. Wenn unsere Reihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ beständig convergent wäre, so müßte es also möglich sein durch Vergrößerung von x , den W'rkth von $\frac{F(n)}{F(n)}$ so groß zu machen, wie man nur will. Nun ist aber

$$F(n) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n \text{ und}$$

$$F(n+1) = n a_0 x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$\frac{F(n)}{F(n+1)} = \frac{n a_0 x^{-1} + (n-1) a_1 x^{-2} + \dots}{a_0 + a_1 x^{-1} + \dots}$$

Man kann also durch Vergrößerung von α den Wert von $\frac{F_1(n)}{F_1(n)}$ beliebig klein machen. Also muß unsere Voraussetzung falsch sein, d. h. es muß $F_1(n)$ für irgend einen Wert α Null sein. Wir wollen annehmen, daß $F_1(n)$ an einigen Stellen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ verschwindet und zwar mit den Ordnungszahlen ν_1, \dots, ν_r , sodann kann ich doch setzen:

$$F_1(n) = (\alpha - \alpha_1)^{\nu_1} (\alpha - \alpha_2)^{\nu_2} \dots (\alpha - \alpha_r)^{\nu_r} F_2(n) \text{ wo}$$

$F_2(n)$ nicht mehr verschwindet. Nun sind hier zwei Fälle möglich 1) $\sum \nu = n$, dann muß $F_2(n)$ constant sein, oder 2) $\sum \nu < n$, dann kann $F_2(n)$ wirkliche Function sein. Nun haben wir

$$\frac{F_1(n)}{F_1(n)} = \frac{\nu_1}{\alpha - \alpha_1} + \dots + \frac{\nu_r}{\alpha - \alpha_r} + \frac{F_2(n)}{F_2(n)}$$

Wenn $F_2(n)$ nicht verschwindet, so wird sich $\frac{F_2(n)}{F_2(n)}$ in eine beständige convergirende Reihe entwickeln lassen, daraus schließen wir, daß $\frac{F_2(n)}{F_2(n)}$ eine Constante sein muß. Nun können wir aber, sobald α eine Grenze nicht überschreitet, setzen

$$\frac{F_1(n)}{F_1(n)} = n \alpha^{-1} + \dots \text{ und auch}$$

$$\frac{F_1(n)}{F_1(n)} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r / \alpha^{-1} + \nu_1 \alpha_1 + \dots + \nu_r \alpha_r / \alpha^{-2} + \dots$$

und durch Vergleichung, folgt $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = n$.

d. h. eine ganze Function n ten Grades verschwindet genau für n Werten von α , wenn man die Ordnungszahlen, rücksichtigt!

Wenn ich statt einer wirklichen rationalen gebrochenen

Funktion, einen Quotienten der 2^{ten} Potenzreihenreihe, $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$ und wählen a so, daß es in dem gemeinschaftlichen Konv. Bereich von F_1 u. F_2 liegt, und $F_2(a) \neq 0$ ist, so können wir $\frac{F_1}{F_2}$ in eine Potenzreihe $G(x/a)$ entwickeln und der Konvergenz Kreis derselben geht durch die nächster an a liegende Stelle, wo die der Quotient 0 wird.

Allgemeiner Polynomialsatz Um nicht wollen wir die allgemeine Definition einer Potenz x^m geben, wo m beliebige reelle oder complexe Zahl bedeutet. Es ist bekannt, daß für jedes x man hat

$$e^x = 1 + \frac{x}{1,1} + \frac{x^2}{2,1} + \frac{x^3}{3,1} + \dots$$

Setzt man $e^u = z$ oder $u = \ln z$, so definiert man z^m durch folgende Gleichung

$$z^m = e^{m \ln z}$$

Betrachten wir nun die Reihe

$$z = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

und sie soll einen bestimmten Konv. Kreis besitzen, und wir wollen die Konvergenz jeder beliebigen Potenz von z untersuchen. Es ergibt sich alsdann der Lehrsatz: Wenn z innerhalb des Konvergenz Bereiches von Null verschieden ist, so konvergiert jede Potenz von z wenigstens so weit, wie z selbst; wenn dagegen für irgendeine Stelle des Konv. Bereiches von z , $z=0$ wird, so suche man denjenigen Werth von x für den $z=0$, dessen absoluter Betrag der kleinste ist; dann

convergiert z^n für alle Werte von x , für die der absolute Betrag kleiner ist als r . Um dies nachzuweisen, schreiben wir so. Es ist

$$\frac{d e^{z x}}{d x} = e^{z x} \text{ oder } \frac{d z}{d x} = z \text{ also}$$

$$d x = \frac{d z}{z} \text{ also ist}$$

$$\frac{d \ln z}{d z} = \frac{1}{z} \text{ und daraus folgt}$$

$$\frac{d \ln z}{d x} = \frac{c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2 + \dots}{1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Da nun für $x=0, z=1$ wird, so läßt sich $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ entwickeln in eine Potenzreihe von x und wir erhalten alsdann

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = c_1 + c_1' x + c_1'' x^2 + \dots$$

Wie nun z innerhalb des Lom. Bereiches nicht Null, so läßt sich $\frac{1}{1+c_1 x + \dots}$ entwickeln in eine Potenzreihe von x die wenigstens so weit convergirt als z , wird dagegen $z=0$ innerhalb des Lom. Bereiches, so convergirt die Reihe für $\frac{1}{1+c_1 x + \dots}$ bis an denjenigen Punkt, für welchen $z=0$ und dessen absoluter Betrag der kleinste ist r . Dasselbe gilt offenbar von der Reihe für $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, da ja φ und φ' denselben Lomvergenzbereich haben. Nun bestimmen wir folgende Function

$$\eta(x) = c_1 x + \frac{c_1' x^2}{2} + \frac{c_1'' x^3}{3} + \dots \text{ so convergirt die Reihe}$$

innerhalb desselben Lom. Bereiches, wie $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$

Wir haben nun die Gleichung

$$\frac{d \eta(x)}{d x} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

Die Function $\eta(x)$ läßt sich wiederum entwickeln in eine Potenzreihe von x , die wenigstens für dieselben Werte

von x convergirt, wie $\varphi(x)$ d. h. wie $\frac{\varphi(x)}{e^{2/x}}$. Man folgt weiter

$$\frac{d}{dx} \frac{e^{2/x}}{e^{2/x}} = e^{2/x} \varphi'(x) = e^{2/x} \frac{\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

Daraus folgt nun

$$- \varphi(x) \frac{d}{dx} e^{2/x} + e^{2/x} \varphi'(x) = 0$$

Dieses durch $\varphi(x)^2$ dividirt ergibt

$$\frac{d}{dx} \frac{\varphi(x)}{e^{2/x}} = 0$$

Da nun $e^{2/x}$ für keinen Werth des l. u. Bereiches von x Null wird, so läßt sich

$\frac{\varphi(x)}{e^{2/x}}$ entwickeln in Potenzreihen von x , da nun die Ableitung derselben gleich Null ist, so muß

$$\frac{\varphi(x)}{e^{2/x}} = C \text{ sein oder } \varphi(x) = C e^{2/x} \text{ da für } x=0 \text{ folgt } C=1, \text{ so ist also } \varphi(x) = e^{2/x}$$

Hieraus sehen wir, daß es eine ganz bestimmte Reihe gibt $\varphi(x)$, welche den einen Logarithmus von $\varphi(x)$ darstellt.

Ferner erhalten wir

$$\varphi(x)^m = e^{m \cdot 2/x} = 1 + g_1 x + g_2 x^2 + \dots$$

Es läßt sich also wirklich $\varphi(x)^m$ in Potenzreihen entwickeln und diese convergirt so weit wie $\varphi(x)$, wenn $\varphi(x)$ innerhalb des l. u. Bereiches nicht Null wird.

Wenn dagegen $\varphi(x)$ innerhalb des Bereiches für $|x| = x$ Null wird, wo x der kleinste Werth ist, so convergirt die Reihe sicher für alle von x für die $|x| > x$. Wir sehen also

dass einer der Wërthe von $\varphi^{(n)}$ durch eine convergirende Reihe dargestellt lãsst.

Im speciellen Fall $\varphi^{(n)} = 1 + x$, erhalten wir den Satz, dass $|1 + x|^m$ convergent ist für alle Wërthe von x für welche der absolute Betrag kleiner ist als 1. Denn $a = -1$ ist der dem absoluten Betrage nach kleinste Wërth für welchen $1 + x = 0$ ist.

Die Coefficienten von $\varphi^{(n)}$ kann man auf folgende Weise bestimmen, setzen wir

$$y = e^{m \varphi^{(n)}} \text{ so ist}$$

$$\frac{dy}{dx} = m y \frac{\varphi^{(n)'}}{\varphi^{(n)}} \text{ oder}$$

$$\varphi^{(n)} \frac{dy}{dx} - m y \varphi^{(n)'} = 0$$

Da wir nun einmal die Existenz der Reihe für y nachgewiesen und ihre Convergenz gefunden, so bekommen wir nun der Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen, indem wir für y eine Potenzreihe ansetzen und dies in die letzte Gleichung setzen, dann erhalten wir zur Bestimmung des Coefficienten von y ein recurirendes Gesetz.

Die vorigen Beispiele mögen ausreichen, um anzusehen zu sehen, wie man aus der Definition der Function, ohne Kenntniss der Coefficienten desselben a ihre Gültigkeit finden kann. Nachdem man sich nach den vorigen Methoden über die Existenz einer Potenzreihe überzeugt hat, kann man zur Bestimmung desselben irgend eine Methode anwenden.

Dieser Weg ist der eigentliche bei der Untersuchung der Functionen.

Die Sätze, die wir in diesem Abschnitte für Functionen einer Variablen nachgewiesen haben, lassen sich leicht mit einigen Beschränkungen auf Functionen beliebig vielen Variablen ausdehnen. Vorher wollen wir einige Begriffe entwickeln, die uns die Beweise der Sätze erleichtern.

Wenn x eine complexe Größe $a + a't$ ebenfalls und t eine reelle Variable bedeutet, so wird die Gerade dargestellt durch die Gleichung $x = a + a't$ und diese Gerade geht offenbar durch die Punkte a , $a + a'$. Durchläuft t die Werte von 0 bis ∞ , so bedeutet x eine Gerade. Wenn ich eine Grenze haben will, die durch die Punkte a und a' geht, so ist sie offenbar

$$x = a + (a' - a)t$$

und wenn man das t beschränkt auf die Werte von 0 bis 1 , so stellt uns $x = a + (a' - a)t$ die Strecke zwischen a und a' . Hierdurch definieren wir die Gerade ganz arithmetisch, indem wir sie auffassen als die einfachste Function lineare zwischen der complexen Größe x und der reellen t . Nehmen wir mehrere und mehrere Variablen x, y, z und bilden die Functionen $x = a + a't$

$$y = b + b't$$

$$z = c + c't$$

.....

indem wir das t von -1 bis $+1$ durchlaufen lassen in reellen Werten, so nehmen wir die Gesamtheit der Wertesysteme von x, y, z, \dots die sich zu einem und demselben t ergeben eine Gerade in diesem Gebiete. Und die Gerade von a, b, c, \dots bis a', b', c', \dots wird in diesem Gebiete repräsentiert durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a(1-t) + a', t \\ y &= b(1-t) + b', t \quad | t=0, \dots, 1 | \\ z &= c(1-t) + c', t \end{aligned}$$

Allgemeiner, wenn wir in der $\varphi(t) (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots)$ ein den φ stetige Funktionen der reellen t verstehen irgendeiner Art, stellen die Wertesysteme von x, y, z, \dots die sich für die selben Werte von t ergeben aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= a + \varphi_1(t) \\ y &= b + \varphi_2(t) \\ z &= c + \varphi_3(t) \end{aligned}$$

eine Linie in diesem Gebiete überhaupt.

Wenn nun gesagt wird, ein bestimmter Bereich, in welchem x, y, z, \dots enthalten ist, bilde ein Continuum, so bedeutet diese durchsichsweise folgendes: Wenn a, b, c, \dots irgend eine Stelle des Bereiches a', b', c', \dots irgend eine andere, so bildet der Bereich ein Continuum, wenn man von der Stelle a, b, c, \dots zu der Stelle a', b', c', \dots auf irgend einer geraden gebrochenen oder krummen Linie dieses Gebietes

es gelangen kann. Diese Definition des Kontinuum stimmt überein mit der auf der Seite geg. neben. Bei einer Variablen ist der Abstand des Punktes a von einem anderen Punkte a gleich dem absoluten Betrage von $|x-a|$, bei mehreren Variablen definieren wir den Abstand einer Stelle x, y, z von einer anderen auf folgende Weise. Es sei

$$\alpha^2 = |x-a|^2$$

$$\beta^2 = |y-b|^2$$

$$\gamma^2 = |z-c|^2 \text{ so ist der Abstand von } x, y, z$$

$$\text{zu } a, b, c \dots \text{ gleich } \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \dots}$$

Wir haben schon früher gesehen, daß wenn wir eine Potenzreihe von $x, y, z \dots$ $f(x, y, z)$ haben und im Innern des Kontinuumsbereiches einen Punkt a, b, c wählen, so können wir die vorgelegte Reihe umwandeln in eine andere $f(x, y, z \dots | a, b, c)$ und wir wissen, daß diese neue Reihe einen bestimmten Konvergenzbereich hat. Wir haben gesehen, daß es sich eine Größe δ angeben läßt, daß für alle Werte von x, y, z für welche

$$|x-a| < \delta, |y-b| < \delta, |z-c| < \delta \text{ ist, die Reihe}$$

konvergent ist. Die Größe δ ist nun eine obere Grenze, die wir mit δ allein bezeichnen wollen. Hiermit ist die Reihe $f(x, y, z | a, b, c)$ konvergent sobald $|x-a| < \delta, |y-b| < \delta, |z-c| < \delta, \dots$ ist. Die Größe δ hat also die Eigenschaft,

dafs die Reihe aufhört zu convergiren, sobald wir alle $|x-a|, |y-b|, \dots$ über δ wählen. Wir wollen nun unter Umgebung der Stelle a, b, c, \dots alle Wertsysteme von x, y, z verstehen, für welche

$$|x-a| < \delta, |y-b| < \delta',$$

Diese Umgebung der Stelle a, b, c, \dots nennt Weierstrafs den engeren Convergencebezirk.

Lehrsatz. Es seien 2 Potenzreihen $f(x, y, z, \dots)$ (a, b, c) und $g(x, y, z, \dots)$ (a, b, c) gegeben, die bestimmte Convergencekreise besitzen. Angenommen dafs in der Umgebung einer bestimmten Stelle a_2, b_2, c_2, \dots die innerhalb des gemeinschaftlichen Convergencebereiches beider Reihen $f(x, y, z, \dots)$ und $g(x, y, z, a, b, c)$ liegt, beide Reihen übereinstimmen, so findet die Übereinstimmung statt für alle Wertsysteme x, y, z , welche in dem gemeinschaftlichen Convergencebereich beider Reihen liegen, vorausgesetzt, dafs von der Stelle a_2, b_2, c_2, \dots in der Umgebung von a, b, c, \dots an der Stelle x, y, z, \dots des gemeinsamen Convergencebereiches ein stetiger Uebergang möglich ist. [Der letzte Zusatz war bei den Potenzreihen einer Variablen nicht nöthig, da man ja von jeder Stelle des Convergencekreises zu jeder andern stetig gelangen kann. Hier bei Potenzreihen mehrerer Variablen ist der Zusatz nothwendig, da es bis jetzt noch nicht festgestellt ist, ob der Convergencebereich einer Potenzreihe

von mehreren Variablen ein Continuum bildet. [Diese Untersuchung, die auf für sich nicht wesentlich ist, wohl aber interessant, wurde von Weierstrass empfohlen.] In dieser Fassung wird dieser Satz mit Hinzunahme der oben entwickelten Begriffe, auf dieselbe Weise nachgewiesen, wie bei einer Variablen.

Es sei a, b, c die eine Stelle α, β, γ , die $\sqrt{2}$ $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die 2te. Die Stelle $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$... soll in dem gemeinsamen Conv. Bereiche von $G_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, $G_2, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ liegen, und nun beschränken wir uns auf Wirthssysteme von α, β, γ von denen ein kontinuierlicher Uebergang nach $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ möglich ist, d. h. wir beschränken uns auf die Linie welche von der Stelle $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ nach der betrachteten Stelle geht. Die Wirthssysteme von α, β, γ , welche auf diese Linie beschränkt sind, bezeichnen wir mit x, y, z ... Nehmen wir nun irgend einen Punkt der Uebergangslinie und verbinden ihn mit der Grenze des Conv. bezirktes, so ist der Abstand beider Punkte nicht Null, da ja die ganze Linie innerhalb des gemeinsamen Conv. Bereiches liegt. Dieser Abstand muß für den betrachteten Punkt eine untere Grenze haben, die wir mit ξ bezeichnen. Diese untere Grenze kann nicht Null sein; denn bezeichnen wir diesen Punkt mit α', β', γ' und setzen

$|x-x'|^2 = \alpha^2 / |y-y'|^2 = \beta^2, \dots$ wo x, y, \dots die Punkte der Grenze des Conv. Bereiches sind, so müsste $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \dots}$ irgendwo die untere Grenze Null haben, dies ist aber nur dann möglich wenn

$$\alpha = |x-x'| = 0, \beta = |y-y'| = 0 \dots \text{ist, d. h.}$$

es müsste x, y an der Grenze des Conv. Bereiches liegen, was gegen die Voraussetzung ist. Lassen wir nun das x, y die Linie durchlaufen, so wird ξ sich auch ξ_0 ändern, und es muss ebenfalls irgendwo eine untere Grenze ξ_0 haben, die ebenfalls von Null verschieden ist. Denn wäre ξ_0 gleich Null, so müsste das x, y, z auf eine endliche Strecke beschränkt ist, irgendwo eine Stelle der Strecke vorhanden sein, für deren Umgebung die untere Grenze von ξ gleich Null wäre, was nicht der Fall ist.

Es ist also ξ_0 von Null verschieden.

Setzen wir nun aus $G(x, y, \dots | a, b, c)$ die Reihe $G(x, y, \dots | \alpha_2, b, c)$ und aus $G_1(x, y, \dots | a, b, c, \dots)$ die Reihe $G_1(x, y, \dots | \alpha_2, b, c)$ so inif. sen, da in der Umgebung von α_2, b, c, \dots der Annahme nach $G(x, y, \dots | a, b, c) = G_1(x, y, \dots | a, b, c)$ und ebenfalls

$$G(x, y, \dots | a, b, c) = G(x, y, \dots | \alpha_2, b, c)$$

$$G_1(x, y, \dots | a, b, c, \dots) = G_1(x, y, \dots | \alpha_2, b, c, \dots), \text{ die beiden Reihen}$$

$$G(x, y, \dots | \alpha_2, b, c, \dots) = G_1(x, y, \dots | \alpha_2, b, c, \dots)$$

d. h. sie müssen identisch sein. Nun nehmen wir auf der Linie von a, b, c, \dots eine Stelle x, y, z , sodass sie in Bezug

auf diese Conv. bereiche von $G/a_1 \dots a_n$ u. $G_1/m_1 \dots m_n$, von a_1, b_1 einen Abstand hat, der kleiner ist, als ϵ_0 .

Nun können wir aus $G/a_1, b_1 \dots$ u. $G_1/m_1, b_1 \dots$ diese Reihen herleiten.

$$G/a_1, b_1 \dots, G_1/m_1, b_1 \dots$$

welche in einer bestimmten Umgebung von $a_1, b_1 \dots$ übereinstimmen, folglich identisch sein müssen.

Leiten wir nun aus $G/a_1, b_1 \dots$ u. $G_1/m_1, b_1 \dots$ die Reihe

$$\bar{G}/a_1, b_1 \dots, G_1/m_1, b_1 \dots$$

her, so ist leicht zu zeigen, dass diese beiden Reihen übereinstimmen mit $G/a_1, b_1 \dots$ u. $G_1/m_1, b_1 \dots$, und hieraus folgt, dass in der Umgebung von $a_1, b_1 \dots$

$$G/a_1, b_1 \dots = G_1/m_1, b_1 \dots$$

Offenbar können wir fortfahren, indem wir auf jeder Linie einen neuen Punkt a_2, b_2 wählen, so dass sein Abstand von $a_1, b_1 \dots$ kleiner ist als ϵ_0 , und können auf diese Weise zu jeder beliebigen Stelle der Linie von a_1, b_1, c_1 gelangen und die Übereinstimmung von $G/a_1, b_1 \dots$ u. $G_1/m_1, b_1 \dots$ hierfür nachweisen. Auf dieselbe Weise können wir die Übereinstimmung von $G/a_1 \dots a_n$ u. $G_1/m_1 \dots m_n$ für alle diejenigen Stellen des gemeinsamen Conv. bereiches von G u. G_1 zeigen, zu denen ein kontinuierlicher Uebergang von a_1, b_1, c_1 möglich ist. Hiermit ist der Satz vollständig nachgewiesen, und

der Beweis ist ganz analog dem für eine Variable.

Satz. Es sei $G(x, y, \dots | a, b, \dots)$ gegeben, und wir gehen von a, b, c zu einer andern Stelle des Konvergenzgebietes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ über. Wenn der kleinste Abstand des Punktes a, b, c von der Grenze des Konv. Gebietes d ist, und $d' < \xi, 0$, so kann man, wenn man den Punkt $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ so wählt, daß sein Abstand von a, b, c kleiner ist als ξ , aus $G(x, y, \dots | a, b, \dots)$ der Reihe $G(x, y, \dots | \alpha, \beta, \gamma, \dots)$ und aus $G(x, y, \dots | \alpha, \beta, \gamma, \dots)$ die Reihe $G(x, y, \dots | a, b, \dots)$ herleiten.

Der Beweis ist ganz analog dem bei einer Veränderlichen. Aus diesem Satze folgen leicht folgende Folgerungen

1) Es sei für die Reihe $G(x, y, \dots | a, b, \dots)$ der engere Konv. radius gleich δ , für die aus $G(x, y, \dots | a, b, \dots)$ hergeleitete Reihe $G(x, y, \dots | \alpha, \beta, \gamma, \dots)$ sei δ' der engere Konvergenzradius, und d der Abstand von $a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma, \dots$, so ist sicher δ' nicht kleiner als die Differenz $\delta - d$, und nicht größer als $\delta + d$.

2) Wenn die ursprüngliche Reihe bedingt konvergent ist, so ist jede aus ihr hergeleitete ebenfalls bedingt konvergent.

3) Die Größe δ der engere Konvergenzradius der aus $G(x, y, \dots)$ hergeleiteten Reihe $G(x, y, \dots | a, \dots)$ ändert sich stetig mit der Stelle a, b, \dots

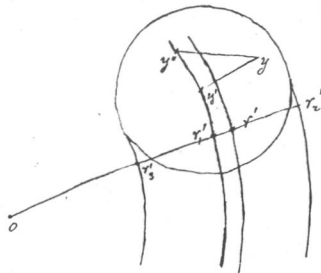
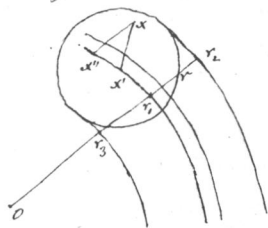
Hauptsatz. Wir nehmen an, es sei eine Potenzreihe von $x, y, z, \dots, G(x, y, z, \dots)$ gegeben, und man wisse, daß

... sie sicher convergent ist für Wertesysteme von x, y, z, \dots deren absolute Beträge kleiner sind als resp. r_1, r_2, r_3, \dots , wissen aber nicht, ob r_1, r_2, r_3, \dots die wahren Convergenzradien sind. Es sei nun x, y, z, \dots irgend eine Stelle im Innern des Convergenzbezirktes, die aber an die Bedingung geknüpft ist, daß $|x| < r_1, |y| < r_2, |z| < r_3, \dots$ alsdann gehört zu jedem x, y, z, \dots ein engerer Convergenzradius δ . Dieser hat nun eine andere Grenze ϱ . Wenn nun die andere Grenze von δ , gleich ϱ von Null verschieden ist, so erstreckt sich der Conv. Bereich der ursprünglichen Reihe noch weiter, indem sie noch für solche Wertesysteme von x, y, z, \dots convergent ist; für die

$$|x| > r_1, |y| > r_2, |z| > r_3$$

Diesen Satz beweist man mit einigen Modificos bonen, so wie bei einer Variablen, und wir wollen, so weit dieser Beweis verschieden ist von dem erwähnten, ihn für 2 Variablen führen, welches Verfahren sich sofort auf beliebig viele Variablen ausdehnen läßt. Es sei also $f(x, y)$ die gegebene Potenzreihe von x, y , und sie sei sicher convergent für alle Wërth-combinationen von x, y , für die $|x| < r_1, |y| < r_2$ d. h. für alle Punkte in den Kreisen mit den Radien r_1 und r_2 . Wenn man innerhalb beider Kreise die Stelle x, y beliebig wählt, so kann man $f(x, y)$ entwickeln nach Potenzen von $x - x', y - y'$ oder man behält eine Entwicklung von $f(x, y)$ nach $P.$

zeigen von h, h_1



Diese Fortsetzreihe von h, h_1 hat einen engeren convergence radius ρ , da sich in jeder Stelle $z = y$ ändert, also eine andere Grenze ρ haben muss. Wenn nun $\rho > 0$ ist, so kann man α vergrößern und die Reihe $G(x, y)$ wird auch dann convergent sein. Nehmen wir $d < \rho$ an, und dann beschreiben wir um die Nullpunkte Kreise, mit den Radien r_1, r_2, r_3 , so dass die Differenz $r_1 - r_2 \leq d$ und wählen α , so aus, dass $r_2 > r_1^2$ ist, das selbe machen wir für den 2ten Kreis. Hieran beschränken wir x auf den Kreis r_1 und y auf r_2 . Wir erhalten nun

$$G(x+h, y+k) = \sum_{\mu, \nu} G^{(\mu, \nu)}(x, y) \frac{h^\mu}{\mu!} \frac{k^\nu}{\nu!}$$

und diese Reihe ist sicher convergent für alle h, h_1 , für welche $|h| < \rho, |h_1| < \rho$. Es handelt sich nun darum für $G^{(\mu, \nu)}(x, y)$ eine Grenze zu finden. Wir umschreiben nach einem Kreis, der durch r_3 geht, so dass $r_1, r_2 = r_1, r_3$ und oben einen durch r_3' $r_1, r_2' = r_1, r_3'$. Nun beschränken wir die Variablen auf den Bereich zwischen den Kreisen r_3 und r_2, r_3' und ihre Grenzen. Wir nehmen in diesem Gebiete einen Punkt xy , wählen und definieren eine Function $F(x, y)$, so dass sie Form hat für alle Paare h, k

des Konvergenzbereiches von $f(x, y)$ und außerhalb desselben ist im
 Innern des konv. Bereiches von $f(x, y)$ aber nicht $f(x, y)$ übereinstimmend.
 Haben wir den Punkt x, y gewählt, so können wir x', y' auf
 dem Kreise mit dem Radius r , $r < r_0$ so wählen, daß $x' x'' < r_0$,
 $y' y'' < r_0$. Hiermit hat die Reihe

$$\sum_{\mu} f^{(\mu)}(x', y') \frac{|x - x'|^{\mu}}{r^{\mu}} \frac{|y - y'|^{\mu}}{r^{\mu}}$$

einen endlichen Wert. Der Wert der Reihe ist von x', y'
 unabhängig, denn nehmen wir irgend einen andern
 Punkt $x'' y''$ auf dem Kreise r, r an, so daß

$$x' x'' < r_0, y' y'' < r_0$$

$$\sum_{\mu} f^{(\mu)}(x'', y'') \frac{|x - x''|^{\mu}}{r^{\mu}} \frac{|y - y''|^{\mu}}{r^{\mu}}$$

Da nun beide Reihen konvergent sind für alle Werte
 von x , wofür $|x - x'| = x' x'' < r_0$, $|y - y'| = y' y'' < r_0$

$$|x - x''| = x' x'' < r_0, |y - y''| = y' y'' < r_0$$

d. h. für alle Punkte die in den Kreisen resp. in x', y' , x'', y''
 liegen, welche vollständig zwischen den Kreisen r_1, r_1 , r_2, r_2
 liegen und wegen $x' x'' < r_0$, $x' x'' < r_0$, $x' x'' < r_0$ im

$$y' y'' < r_0, y' y'' < r_0, y' y'' < r_0$$

wobei denn die Konvergenzbereiche beider Reihen notwendig
 die Kreise aufeinander fallen. Nehmen wir nun einen
 Punkt x, y an, der innerhalb des gemeinsamen konv. Bereiches
 des von beiden Reihen, und gleichzeitig in dem konv. Bereich
 von $f(x, y)$ liegt, so werden die beiden Reihen hier überein-
 stimmen müssen, da sie hier den Wert von $f(x, y)$ darstellen.

den, sie müssen also innerhalb der ganzen, gemeinsamen Con-
 bereiches denselben Werth darstellen. Man liegt offenbar sey inner-
 halb des gemeinsamen Bereiches, aber stellen beide Reihen den-
 selben Werth vor für xy unabhängig von x, y . Setzen wir

$$f(x, y) = \sum_{\mu, \nu} f_{\mu, \nu}(x, y) \frac{(x-x')^\mu (y-y')^\nu}{\mu! \nu!}$$

so sehen wir daß sich diese Function stetig mit x, y ver-
 ändert, aber auch ihr absoluter Betrag ändert sich stetig, denn
 nach muß es irgendwo im Innern, oder an der Grenze sein
 Maximum erreichen. Dieses Maximum sei g . Lassen wir
 nun x den Kreis um x' , y den um y' beschreiben, und
 zwar mit dem Radius d , so wird $|f(x, y)|$ sein Maximum
 erreichen, das nicht größer sein kann als g . Wir haben
 nun nach dem allgemeinen Satz

$$\int \frac{f_{\mu, \nu}(x, y)}{\mu! \nu!} dx dy = g d^{-\mu-\nu}$$

Der weitere Beweis ist ganz derselbe wie bei einer Variablen
 und man kommt zu dem Resultate, daß die Reihe $f(x, y)$
 auch noch convergent ist für $|x-x'| < r, |y-y'| < r'$ und zwar kann
 man den Convergenzradius bis an $\frac{r}{2}, \frac{r'}{2}$ bringen.

Hieraus folgt, daß sobald $r < r'$ die wahren Convergenz-
 radien sind, es nothwendig für g die Grenze hultgeben
 muß.

Dieses Verfahren läßt sich auf beliebig viele Variablen an-
 wenden.

Hieraus schließen wir wiederum folgendes. Nehmen wir nun

irgendeine Stelle der Grenze des Conv. Bereiches x_0, y_0, z_0 ...
und zwar möge die Grenze von ξ für die Umgebung von
 x_0, y_0, z_0 von Null verschieden sein. Alsdann kann man
der Nähe von x_0, y_0, z_0 ... innerhalb des Conv. Bereiches von ξ
(s. § 2.) einen Punkt x_0', y_0', z_0' wählen und die Reihe her-
leiten $\xi(x, y, z) = \xi(x', y', z')$. Der Convergenz Bereich dieser Reihe
wird den Punkt x_0, y_0, z_0 umfassen. Sodann sagen wir
die Function $\xi(x, y, z)$ behält in der Nähe von x_0, y_0 den
Charakter einer ganzen Function. Man kann dann
auch die Reihe $\xi(x, y, z) = \xi(x_0, y_0, z_0)$ herleiten. Wenn x_0, y_0 ein
Punkt ist für dessen Umgebung die Grenze ξ gleich Null
ist, so wird es nicht möglich sein, eine solche Reihe
herzuleiten; dann sagen wir die Function $\xi(x, y, z)$ ver-
liere in der Nähe von x_0, y_0 ... den Charakter einer gan-
zen Function. Wir können hiernach den Satz aussprechen
Satz Wenn der gegebene Conv. Bereich einer Potenz-
reihe, der wahre Conv. Bereich ist, so muß es an dessen
Grenze wenigstens eine Stelle geben, in deren Nähe die
Function den Charakter einer ganzen Function verliert.
Umgekehrt kann man aus dem Vorigen den Schluß
ziehen: Wenn man für jede Stelle der Grenze des
Conv. Bereiches $\xi(x, y, z)$ eine Reihe $\xi(x', y', z')$ her-
leiten kann, so geht die Convergenz noch weiter von
 $\xi(x, y, z)$.

Wir haben hier die Sätze nachgewiesen für eine Potenzreihe von x, y, z, \dots , man kann ihn aber sofort übertragen auf Potenzreihen von $x - x_0, y - y_0, \dots$

Man kann nach den vorigen Sätzen den Gültigkeitsbereich einer Reihe direct aus der hinreichenden Definition der Function herleiten, ohne das Coefficientengesetz zu kennen. Als unmittelbare Anwendung des Satzes nehmen wir das Beispiel eines Quadranten zweier Potenzreihen von x, y, z, \dots . Es sei die gegebene Function

$$\frac{G_1(x, y, z)}{G_2(x, y, z)}$$

wobei $G_2(x, y, z)$ für $x = y = z = \dots = 0$ nicht verschwinden soll. Wählen wir nun innerhalb der beiden Potenzreihen des gemeinsamen Convergencebereiches eine Stelle x_0, y_0, z_0, \dots für welche der Nenner nicht verschwindet, so können wir eine Reihe finden, so daß

$$\frac{G_1(x, y, z)}{G_2(x, y, z)} = G(x, y, z) \cdot (x, y, z)$$

und die Behauptung wird gelten innerhalb eines um x_0, y_0, z_0, \dots beschriebenen Bereiches von Kreisen, die mit Radien beschrieben sind, welche die absoluten Beträge von $|x_0 - x|, |y_0 - y|, \dots$ sind, wobei x_0, y_0, \dots die nächsten an x_0, y_0, \dots liegende Stelle ist, wofür $G_2(x, y, z) = 0$ ist

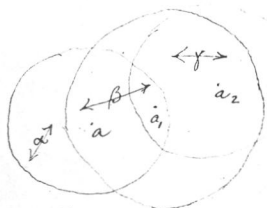
Begriff einer analytischen Function!

So wie wir in der allgemeinen Größenlehre zunächst

Zahlen betrachten, die aus endlicher Anzahl von Elementen
bestanden und dann zu unendlichen Reihen von Zahlen-
elementen übergingen; so lag es nahe, nach Betrachtung
der ganzen Functionen, die aus endlicher Anzahl von Gliedern
bestanden, unendliche Reihen von Gliedern zu betrachten,
von denen jedes eine ganze Function ist und multipl.irt
mit einer Constante. Diese neuen Functionen stehen
nahe den ganzen Functionen, indem sie für best. Werte
die analogen Eigenschaften besitzen, wie die ganzen rationa-
len Functionen. Diese Potenzreihen, können nun
beständig convergent sein, alsdann stehen sie den gan-
zen Functionen am nächsten, sie haben aber eine
Eigenthümlichkeit, die sie vor den ganzen rationalen
Functionen kennzeichnet, nämlich, daß sie im Unend-
lichen eine Stelle haben für die sie unbest. bleibt,
und auf keine Weise definit werden können.

Der Quotient zweier solcher beständig convergirenden
Reihen, steht den gebrochenen, rationalen Functionen
am nächsten. Um die neuen Begriffe zu entwickeln,
wollen wir bei Functionen einer Variablen stehen bleiben.
Wenn die gegebene Reihe $f(x/a)$ einen beschränkten
Convergenzbereich hat, so können wir aus ihr eine neue Reihe
ableiten. Indem Convergenzbereich von $f(x/a)$ nehmen wir
einen Punkt α , an, und wandeln $f(x/a)$ in $f(x/a + \alpha)$ um.

Diese neue durch die Reihe definierte Funktion hat einen
 neuen Conv. Bereich. Der Conv. Bereich dieser neuen Reihe $f(x)$
 kann entweder vollständig innerhalb des Conv. Bereiches von
 $f(x)$ liegen und dann ist $f(x)$, da wo sie existiert, iden-
 tisch mit $f(x)$, sie ist eine andere Darstellung von $f(x)$
 die innerhalb eines bestimmten Bereiches gültig ist. Inwoll-
 gemeinen wird aber der Conv. Bereich der neuen Reihe $f(x)$
 über den Conv. Bereich von $f(x)$ hinausragen. Innerhalb
 des beiden Reihen gemeinsamen Conv. Kreises sind beide
 Reihen dem Werte nach identisch. Bezeichnen wir den



gemeinschaftlichen Convergencekreis
 von $f(x)$ / $f(x)$ mit dem übrigen
 Theil des Conv. Kreises von $f(x)$ mit
 α , und den von $f(x)$ mit α_2 , so sehen
 wir, daß $f(x)$ definiert ist für α u. β ,
 $f(x)$ dagegen für β u. α_2 .

Innerhalb β stimmen beide Reihen überein, die Con-
 vergenz der z . weiter geht aber noch über β hinaus bis zu α .
 Ebenso wie die von $f(x)$ über β hinaus nach α_2 . Wir könn-
 nen somit die 2^{te} Reihe als die Fortsetzung der 1^{ten} Reihe
 ansehen und wir sagen auch $f(x)$ ist die Fortsetzung
 von $f(x)$ Nur können wir innerhalb des Conv. Krei-
 ses von $f(x)$ einen Punkt α_2 wählen und die Reihe her-
 leiten $f(x)$ so wird man wiederum $f(x)$ als die Fort-

setzung von $G(p/a)$ pauschen können. u. s. w. In demselben
Leiten der Ketten kann man so fort fahren u. kann zu
letzt zu einer Potenz gelangen, deren Lini. Bezirk vollstän-
dig außerhalb des Lini. Bereiches der ursprünglichen Reihe
liegt und die doch in der ersten Reihe ihren Ursprung
hat.

Wenn nun $G(p/a)$ aus $G(p/a)$ hergeleitet ist, so könnte dies
entweder direct geschehen, indem man direct $G(p/a)$ for-
mell in $G(p/a)$ umwandelt, wozu natürlich nöthig ist,
dass a , innerhalb des Lini. Bereiches von $G(p/a)$ liegt, oder auch
indirect, da durch dass man zunächst aus $G(p/a)$ direct
eine Reihe $G(p/a')$, dann aus dieser $G(p/a'')$ u. s. w. herleitet
und schließlich zu $G(p/a)$ gelangt.

Lehrsatz Wenn man aus $G(p/a)$ unmittelbar $G(p/a)$
herleitet, so kann man auch aus $G(p/a)$ entweder un-
mittelbar oder durch Vermittelung mehrerer Punkte $G(p/a)$
wieder herleiten.

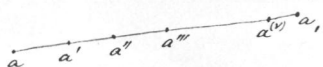
Es sei a der Mittelpunkt des Lini. Kreises, und $G(p/a)$
ein Punkt im Innern des Lini. Kreises. Wenn
nun die Strecke $a a$, kleiner ist
als die Hälfte des Lini. Radius von
 $G(p/a)$, so wird nicht nur a ,
innerhalb des Lini. Kreises von $G(p/a)$, sondern auch
 a innerhalb des Lini. Kreises von $G(p/a)$ sicher liegen.

Hierdenn können wir aus $G(n/a)$ herleiten $G(n/a_1)$ und dann unmittelbar aus $G(n/a_1)$ wiederum $G(n/a_2)$. Denn wählen wir innerhalb des luv. Kreises von $G(n/a_1)$ den Punkt a_2 , so können wir aus $G(n/a_1)$ jedenfalls eine Reihe herleiten $G(x/a_1)$. Die Reihe stimmt innerhalb einer bestimmten Umgebung von a_1 sicher mit $G(n/a_1)$ überein, aber auch $G(x/a_1)$ mit $G(n/a_1)$ innerhalb einer bestimmten Umgebung von a_1 ; es muß also innerhalb einer Umgebung von a_1 sicher sein.

$$G(n/a) = G(n/a)$$

d. h. beide Reihen müssen identisch sein. Also läßt sich in diesem Falle aus $G(n/a_1)$ unmittelbar $G(n/a)$ herleiten.

Um den Satz aber allgemein nachzuweisen sei a_1 beliebig innerhalb des luv. Kreises von a gewählt, und man leite unmittelbar aus $G(n/a)$, $G(n/a_1)$ her. Man wähle sich auf der Linie von a nach a_1 Punkte



$a', a'', a''', a'''' \dots a^{(n)}$ die aber so liegen sollen, daß der Abstand von je zweier kleiner ist als d , wo d der kleinste Abstand der Punkte der Linie von der Grenze des luv. Bereiches von $G(n/a)$ ist. (Im Falle daß a, a_1 eine Gerade ist, ist d der Abstand von a_1 von der Peripherie) es ist aber nicht möglich, a, a_1 als eine Gerade anzusehen; man muß immer die Linie vollständig innerhalb des luv. Kreises von $G(n/a)$ liegen. Man können wir aus $G(n/a)$ herleiten $G(n/a_1)$ daraus dann $G(n/a_2)$

...

u. s. w. Auf diese Weise erhalten wir die Reihe der Funktionen

$$f(x/a), f(x/a^2), f(x/a^3), \dots, f(x/a^{10}), \overline{f(x/a)},$$

Nun ist klar, dass die aus $f(x/a^{10})$ hergeleitete Reihe $f(x/a)$ identisch sein muss mit $f(x/a)$, welche direct aus $f(x/a)$ hergeleitet wird. Denn zunächst stimmt $f(x/a)$ mit $f(x/a^2)$ innerhalb einer bestimmten Umgebung von a überein, eben so stimmt $f(x/a^2)$ mit $f(x/a^3)$ für einer gewissen Umgebung um a^2 überein, daraus folgt dass $f(x/a)$ mit $f(x/a^3)$ innerhalb einer bestimmten Umgebung um a übereinstimmen, sie müssen somit in dem ganzen gemeinsamen Conv. Bereiche übereinstimmen. Nun ist der Conv. B von $f(x/a^3)$ sicher nicht kleiner als d . Also liegt a^{10} innerhalb des Conv. Bereiches von $f(x/a^3)$ und gleichzeitig des Conv. Bereiches von $f(x/a)$. Es ist nun zunächst für die Umgebung von a^3 $f(x/a^3) = f(x/a^{10})$ und ebenfalls

$f(x/a) = f(x/a^3)$ also nun innerhalb der Umgebung von a^3 $f(x/a) = f(x/a^{10})$. Auf diese Weise weiter schließ. und gelangt man, dass innerhalb einer bestimmten Umgebung von a^{10}

$$f(x/a) = \overline{f(x/a)}$$

Nun liegt a^2 oder auch in dem Conv. Bereiche von $f(x/a)$, da ja $\overline{a^2} < d$ ist, also muss für die Umgebung von a^2 auch $f(x/a) = \overline{f(x/a)}$ also auch

$$f(x/a) = \overline{f(x/a)}$$
 d. h. beide Reihen sind

identisch. Nun haben wir zwei der Ketten

$$G(n/a) G(n/a') \dots G(n/a^{(1)}) G(n/a^{(2)})$$

die aufeinander der folgende Eigenschaft, daß sie gegenseitig unmittelbar auseinander ableitbar sind, und daraus folgt daß man rückwärts aus $G(n/a)$ oder, was dasselbe ist aus $G(n/a_2)$ durch Vermittelung der Punkte $a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(k)}$ die Reihe $G(n/a)$ ableiten kann, was zu beweisen war.

Dieser Satz wie auch der folgende ist eine unmittelbare Folge des auf Seite bewiesenen Satzes.

Lehrsatz. Denken wir ∞ Ketten, die aus einer gegebenen Reihe $G(n/a)$ hergeleitet sind, so bildet das ganze Meer dieser Ketten ein in sich abgeschlossenes Ganze, d. h. daß alle Ketten durch eine einzige beliebige von ihnen bestimmt sind.

Greifen wir nämlich von allen den Ketten 2 beliebige heraus z. B. $G(n/a_1)$ u. $G(n/a_2)$ heraus und es sei $G(n/a_1)$ aus $G(n/a)$ u. $G(n/a_2)$ aus $G(n/a_1)$ mittelbar oder unmittelbar hergeleitet.

Nach dem vorigen Satze können wir aber unmittelbar oder mittelbar aus $G(n/a_2)$ auch $G(n/a_1)$ und hieraus $G(n/a)$ herleiten und dieses gilt von jeder beliebigen Reihe $G(x/a)$. Wir können somit von jeder beliebigen Reihe ausgehen und aus ihr die ursprüngliche $G(n/a)$ und daraus alle übrigen herleiten. Jede Reihe des ganzen Meeres kann somit als die ursprüngliche Reihe angesehen werden, und durch sie sind alle Ketten bestimmt. Wir sehen also wirklich, daß alle aus der

gegebenen Reihe $f(x)$ hergeleiteten Reihen ein sich geschlossenes Ganze bilden. Eine Reihe, die aus keiner der Reihen dieses Systems hergeleitet werden kann, kann nicht zu diesem Ganzen mitgerechnet werden. Dies ist auch der inneren Grund, weshalb man die eine Reihe als Fortsetzung der andern ansehen kann.

Definition. Wir gehen von $f(x)$ aus und leiten hieraus neue Reihen ab. Angenommen, daß x' irgend ein bestimmter Werth von x , innerhalb des l -ten Bereiches irgend einer der Reihen liegt, so hat die Reihe für $x = x'$ einen ganz bestimmten Werth. Betrachten wir diese Reihe als die Urbildung der ursprünglichen, so sagen wir, der Werth der Reihe für $x = x'$ sei ein Werth, der durch die ursprüngliche Reihendefinitionen Function. Von der Potenzreihe sagen wir, sie sei ein Functionen element, Element der Function, da die Function in ihr den Ursprung hat. Hiermit ist der Begriff einer analytischen Function gegeben, er ist aber noch nicht erschöpft. Eine aus einem Functionelement ableitbare Function nennt Weierstrass eine monogene Function, da sie in einer einzigen Quelle ihren Ursprung hat, und wir sehen, daß eine monogene Function durch ein Element vollständig definiert ist.

Man sehen wir, daß man aus einem Element unendlich viele neue Elemente (Reihen) herleiten kann, denn es ist alle

noch nicht gesagt, daß die Punkte für welche wir dies thun können, die ganze Ebene erfüllen. Ja es ist möglich, wie wir aus den vorigen Betrachtungen sehen können, daß es in der Ebene Punkte gibt, für welche man keine Reihen herleiten kann, so daß für diese Punkte die Function nicht definiert ist. Die Gesamtheit der Werte, zu denen man auf die obige Weise gelangen kann, nennen wir das Gebiet der Variablen und die Stellen zu denen man nicht gelangen kann, nennen wir eine singuläre Stelle. Hierbei gibt es nun eine große Mannigfaltigkeit, es gibt Functionen, für welche das Argument die ganze Ebene erfüllt, mit Ausnahme einiger in endlicher Anzahl vorkommender Stellen, bei mancher Function gibt es unendlich viele Stellen der Art, ja es gibt sogar solche Fälle, wo ganze Strecken, ganze Flächen von dem Gebiete des Arguments auszuschließen sind. Der Bereich innerhalb dessen sie als Argument der definierten analytischen Function betrachtet werden kann, bildet ein Continuum, das aber nicht die ganze Ebene zu erfüllen braucht. Für solche singuläre Stellen sind die Functionen noch näher zu untersuchen, und es wird sich zeigen, daß man für manche Stellen die Werte der Function als Grenzwerte definieren kann, die die Function wirklich erreicht; es gibt aber auch Stellen für die die Function

gar nicht definierbar sind. Es wird sich z. B. zeigen, daß bei den transzendenten Functionen es wenigstens eine Stelle gibt, für welche die Function gar nicht definiert werden kann. Wir werden nämlich sehen, daß bei manchen Functionen der Fall eintritt, daß die Umgebung einer singulären Stelle, die Function einer ganz bestimmten Werth erhält. Wie klein man auch die Umgebung wählt, daß es da gegen die Functionen gibt, welche in der Umgebung einer singulären Stelle jedem beliebigen Werthe beliebig nahe gebracht werden können. Außerdem wird es in den Fällen zu untersuchen sein, ob die Function den Werth, dem sie für die Umgebung der singulären Stelle beliebig nahe gebracht werden kann, wirklich erreicht oder nicht. Es ist nämlich nicht nothwendig, daß die Function den Werth, dem sie beliebig nahe gebracht werden kann, wirklich erreicht. Um ein Beispiel zu haben, seien x, y, z reelle Größen und wir betrachten eine Curve, die durch die Gleichung definiert ist

$$z = a_1 \cos/m_1 t + a_2 \cos/m_2 t + \dots$$

$$y = b_1 \cos/m_1 t + b_2 \cos/m_2 t + \dots$$

Wenn wir m_1, m_2 irrational voraussetzen, so hat die Curve die Eigenschaft, daß sie jedem Punkte der Ebene unendlich nahe gebracht werden kann, ohne

dass sie durch alle Punkte hindurchgeht. — Mit der Unter-
suchung der Grenzwerte der Functionen werden wir
uns später zu beschäftigen haben. Jetzt gehen wir zu
der Entwicklung des Begriffes einer eindeutigen und
einer mehrdeutigen analytischen Function über.

Wenn wir aus einem Elemente $f(x/a)$ für eine Stelle
 $x = x'$ die in dem f blickt des Argumentes x steigt. Reihen
herleiten durch Vermittelung von anderen Punkten,
so können 2 Fälle eintreten. Es ist möglich, dass, wenn die Funk-
tion man auch zur Vermittelung nimmt, man stets nur eine
Reihe $f(x/a)$ erhält, dann hat die Function für $x = x'$
nur einen einzigen Werth, was auch für die Umge-
bung von x' gilt, dann sagen wir von der durch das
Element $f(x/a)$ definirten Function sie sei eine eindeu-
tige Function. Möglicherweise können wir aber aus
ein und demselben Elemente $f(x/a)$ verschiedene Rei-
hen $f(x/a)$ herleiten, alsdann wird die Function für
 $x = x'$ mehrere verschiedene Werthe erhalten können.
Dann sagen wir, die Function sei 2, 3, ... unendlich
vieldeutig, je nachdem wir für die Umgebung der Stelle
 $x = x'$ 2, 3 ... unendlich viel Reihen $f(x/a)$ herleiten
können. Hierdurch ist aber nur die Möglichkeit mehr-
deutiger Functionen gegeben, nicht aber ihre Existenz.
Es ist bis jetzt a nicht möglich zu entscheiden

welcher von beiden Fällen statthfindet:

Die Existenz mehrdeutiger Functionen ist aber noch nachzuweisen. Die M3glichkeit m3ssen wir aber zugelassen, da wir ja von der Stelle a zu der Stelle a' auf unendlich vielen verschiedenen W3gen gelangen k3nnen, auf denen wir aus $f(z/a)$ die Reihen f3r die Umgebung von a' , $f(z/a')$ herleiten k3nnen.

Nun ein Beispiel f3r die Existenz mehrdeutiger Functionen zu haben, betrachten wir die Function, welche dadurch definiert wird, daf3 ihr Differential gleich ist $\frac{dz}{z}$ und welche f3r $z=1$ null werden soll. Diese Function bezeichnen wir mit $L(z)$. Um ein Element der Function zu definiren, betrachten wir die Stelle 1. Zun3chst ist klar, daf3 man die Function $L(z)$ entwickeln kann in eine Potenzreihe von $z-1$, n3mlich

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots$$

Diese Function convergirt innerhalb eines um 1 beschriebenen Kreises, der durch den Nullpunkt geht. Die Function deren Differential $\frac{dz}{z}$ ist wird, wenn man sie f3r die Umgebung der Stelle 1 definiert, sein

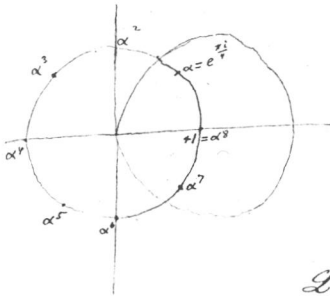
$$L(z/1) = \frac{z}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots + C \dots$$

da $L(z/1)$ f3r $z=1$ null sein soll, so muss $C=1$ sein also ist

$$L(z/1) = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$$

und diese Reihe convergirt innerhalb desselben Kreises

um 1. Nun denken wir uns um Nullpunkt einen Kreis, beschrieben mit dem Radius 1 und leiten aus $L(\alpha|1)$



durch Vermittlung der Punkte α, α^2, \dots neue Reihen wo $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ ist. Zunächst sehen wir daß $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ innerhalb des l.u.w. Kreises von $L(\eta|1)$ liegt, also können wir hieraus eine Reihe herleiten die feststeht hat

$$L(\alpha|\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} L(\alpha^n|1) \frac{(\alpha - \alpha^n)^n}{n!}$$

Durch einfache Rechnung kommen wir zu der Reihe

$$L(\alpha|\alpha) = L(\alpha|1) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha) - \frac{1}{2!} \frac{(\alpha - \alpha)^2}{2} + \frac{1}{3!} \frac{(\alpha - \alpha)^3}{3} - \dots \quad 2$$

Wählen wir nun $\alpha^2 = e^{\frac{4\pi i}{7}} = i$, so liegt dieser Punkt innerhalb des l.u.w. Kreises von 2, da dieser den Radius hat gleich 1, wir leiten aus 2 eine Reihe

$$L(\eta|\alpha^2) = L(\alpha^2|\alpha) + \frac{1}{2!} \frac{\alpha - \alpha^2}{1} - \frac{1}{2!} \frac{(\alpha - \alpha^2)^2}{2} + \frac{1}{3!} \frac{(\alpha - \alpha^2)^3}{3} - \dots \quad 3$$

Ebenso verfahren wir weiter und erhalten die Reihen

$$L(\eta|\alpha^3) = L(\alpha^3|\alpha^2) + \frac{1}{2!} \frac{(\alpha - \alpha^2)}{1} - \frac{1}{2!} \frac{(\alpha - \alpha^2)^2}{2} + \dots$$

$$L(\eta|\alpha^4) = L(\alpha^4|\alpha^3) + \frac{1}{2!} \frac{(\alpha - \alpha^2)}{1} - \dots$$

$$L(\alpha|\alpha^1) = L(\alpha|1) = L(\eta|\alpha^4) + \frac{\alpha - 1}{1} + \frac{(\alpha - 1)^2}{2} + \frac{(\alpha - 1)^3}{3} - \dots$$

Hieraus suchen wir zunächst, daß wir aus dem Elemente $L(\eta|1)$ für die Umgebung 1 eine Reihe herleiten, welche um eine Constante von der ursprünglichen verschieden ist. Für Punkte in der Umgebung von 1, wird also $L(\eta|1)$ & verschiedene Werte annehmen können, die um die l.u.w.

stante $L(1/d^4)$ verschieden sind. Die Konstante können wir folgendermaßen bestimmen. Es ist zunächst

$$L(1/d^4) = L(d^8/d^4) = L(d^4/d^0) + \frac{1}{2^4} \frac{(d^8 - d^4)}{1} - \frac{1}{2^8} \frac{(d^8 - d^4)^2}{2} + \dots$$

$$L(d^4/d^4) = L(d^4/d^0) + \frac{1}{2^6} \frac{d^2 d^6}{1} - \frac{1}{2^{10}} \frac{(d^4 - d^6)^2}{2} + \dots \text{ u. s. w.}$$

Setzen wir die Werte successiv ein, so erhalten wir

$$L(1+d^4) = \frac{1}{2^4} \frac{(d^8 - d^4)}{1} - \frac{1}{2^{10}} \frac{(d^8 - d^4)^2}{2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^6} \frac{(d^4 - d^6)}{1} - \frac{1}{2^{12}} \frac{(d^4 - d^6)^2}{2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^8} \frac{(d^2 - d)}{1} - \frac{1}{2^{16}} \frac{(d^2 - d)^2}{2} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^8} \frac{(d-1)}{1} - \frac{1}{2^{16}} \frac{(d-1)^2}{2} + \dots$$

$$= 8 \left\{ \frac{d-1}{1} - \frac{(d-1)^2}{2} + \frac{(d-1)^3}{3} - \dots \right\} = 8L(d/1)$$

$$\text{oder } L(1/d^4) = 8L(1/d^4) \text{ und dies ist 2. St.}$$

Wenn wir die Herleitung noch mal machen aus der neuen Reihe, so gelangen wir zu einer Reihe, die um 2. St. verschieden ist von der ursprünglichen.

Wir sehen also, daß wir aus einem Elemente für die Umgebung derselben Stelle unendlich viele Reihen definieren können, die alle um 2 St. verschieden sind, wie ist also eine unendlich vieldeutige Function. Hiermit ist nicht nur die Möglichkeit mehrdeutiger Functionen klar, sondern auch ihre Existenz nachgewiesen.

Daß man die aus einem Elemente hergeleiteten Reihen als ein Ganzes zu betrachten hat, wird sich auch aus dem Satze ergeben, daß eine analytische Function, welche

für irgend eine noch so kleine Umgebung eine Eigenschaft hat, diese Eigenschaft überall, wo sie existiert besitzt. Als Beispiel wollen wir die durch Differentialgleichungen definierten Functionen. Wenn man für irgend eine Umgebung eine Stelle, eine Reihe finden kann, die der Differentialgleichung genügt, so wird jede aus dieser hergeleitete Reihe auch der Differentialgleichung genügen. — Wenn zwischen den Functionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ irgend eine Gleichung besteht, so bildet man mittelst derselben Functionen wieder neue Reihen, so wird zwischen diesen dieselbe Gleichung bestehen. Es wird sich zeigen, daß jede monogene (d. h. ^{durch} keine irreduciblen Gleichung definierbare) Curve, durch ein beliebig kleines Stück definiert sind.

Definition eines Systems von Functionen.

Halten wir ein System von n Potenzreihen $f_1(x/a), f_2(x/a), \dots$ die für die Umgebung derselben Stelle definiert sind, so können wir hier aus für die Umgebung einer andern Stelle a_2 durch dieselben vermittelnden Punkte neue Reihen $f_1(x/a_2), f_2(x/a_2), \dots$ herleiten. Wenn a_2 innerhalb des gemeinsamen Convergencebereiches der neuen Reihen liegt, so nennen wir die dem Punkte a_2 entsprechenden Werte von f_1, f_2, \dots , das System zusammengehöriger Werte, dadurch die ursprünglichen Elemente definierten analogen Functionen. Diese Definition ist notwendig, um

bei mehrdeutigen Functionen stets die zugehörigen Werte
finden zu können. Nehmen wir z. B. die einfachen, doppel-
deutigen Functionen

$$\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x^2}, \sqrt{1+x^3}, \dots$$

und setzen fest, daß für $x=0$ alle den Werth 1 haben sollen.

Wollen wir nun für irgend einen andern Werth von x
die Werte bestimmen, so wissen wir nicht welche Zeichen-

combinations zu nehmen sind. Dies können wir aber
nach dem Vorigen entscheiden, wenn wir aus den Elementen

für die Umgebung von 0, die Reihe für die Umgebung des neu-
en Punktes durch dieselben vermittelnden Punkte herleiten.

Wir wollen nun zeigen, wie man auf solche mehrdeuti-
ge Functionen die Definition des Differentialcoefficienten
übertragen kann. Wenn wir das Functionelement
 $f(x/a)$ haben, so können wir zunächst die Ableitung bil-
den $f'(x/a), f''(x/a)$. Die ursprüngliche Function nebst
ihren Ableitungen

$$f(x/a), f'(x/a), f''(x/a), \dots$$

definieren ein Functionensystem. Nun können wir aus
diesen Elementen durch Vermittelung derselben Punkte
 b, c, d, \dots Reihen für die Umgebung von x_0 herleiten
und erhalten folgendes System von Reihen

$$\begin{aligned} f(x/a), f'(x/b), f''(x/c), \dots, f(x/x_0) \\ f'(x/a), f''(x/b), f'''(x/c), \dots, f''(x/x_0) \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(a) / f^{(n)}(b) / f^{(n)}(c) / \dots / f^{(n)}(a_0)$$

Wenn es möglich ist auf dem Wege $bc \dots$ aus $f^{(n)}(a)$ die Function $f^{(n)}(a_0)$ herzuleiten, so ist es auch möglich aus $f^{(n)}(a)$ auf demselben Wege $f^{(n)}(a_0)$ herzuleiten, w. d. die Möglichkeit auf dem Satze beruht, dass die Reihe $f^{(n)}(a)$ und ihre Ableitungen stets denselben Locus haben. Nun wollen wir zeigen, dass $f^{(n)}(a_0)$ die Ableitung von $f^{(n)}(a)$ ist. Es ist zunächst

$$f^{(n)}(a) = \sum_{0 \leq i} f^{(n+i)}(b/a) \frac{(x-b)^i}{i!} \text{ und}$$

$$f^{(n)}(b) = \sum_{0 \leq i} f^{(n+i)}(b/a) \frac{(x-b)^i}{i!}$$

Nun kann man die erste Reihe auch so schreiben

$$f^{(n)}(a) = f^{(n)}(b/a) + \sum_{0 \leq i} f^{(n+i)}(b/a) \frac{(x-b)^{i+1}}{i+1}$$

und die Ableitung hiervon ist

$$\sum_{0 \leq i} f^{(n+i)}(b/a) \frac{(x-b)^i}{i!}$$

also ist $f^{(n)}(a)$ die Ableitung von $f^{(n)}(b)$. Es lässt sich eben so aus $f^{(n)}(a)$, $f^{(n)}(b)$ herleiten, und $f^{(n)}(b)$ ergibt sich als die 2^{te} Ableitung von $f^{(n)}(a)$ u. s. w. So kann man weiter gehen und gelangt zu dem Resultate. Wenn sich auf dem

Wege $abc \dots$ u. aus $f^{(n)}(a)$ die Reihe $f^{(n)}(a_0)$ herleiten lässt, so lassen sich auf demselben Wege aus $f^{(n)}(a)$, $f^{(n)}(a_0)$ die Reihen $f^{(n)}(a)$, $f^{(n)}(a_0)$ herleiten und letztere sind die Ableitungen von $f^{(n)}(a_0)$. Nun sei der Kürze wegen

$$f^{(n)}(a/a_0) = y_0 + y_1 \frac{(x-a_0)}{1!} + y_2 \frac{(x-a_0)^2}{2!} + \dots$$

[Wo y_0, y_1, \dots die Ableitungen (die Nullte erste ...) von $f^{(n)}(a_0)$

für $x = x_0$ bedente]. dann ist

$$G'(n/x_0) = y'_0 + y''_0/(x - x_0) + \dots$$

Nach der Definition der Differentialcoefficienten ist y'_0 die Ableitung von $G'(n/x_0)$ für $x = x_0$.

Wenn man also aus $G'(n/x_0)$ die Reihe $G'(n/x_0)$ herleitet so liefert sie für $x = x_0$ den Differentialcoefficienten von $G'(x/x_0)$. Hieraus sehen wir, daß obgleich die Function für einen Punkt mehrere Wërthe hat, sie dann zu jedem Wërthe einen ganz bestimmten Differentialcoefficienten hat.

Trotz der Verschiedenheit der Wërthe der Function, gehört, sobald der Wërthe der Function fixirt ist, zu jedem Wërthe ein ganz bestimmter Differentialcoefficient. Jede mehrdeutige Function hat für jeden Punkt ebenso viel Differentialcoefficienten, wie viel Wërthe sie hat, welche auf denselben Wegen erhalten werden aus $G'(x/x_0)$ wie $G'(n/x_0)$ aus $G'(n/x)$.

Da nun $G'(n/x)$ eine Function derselben Art ist, so gilt dies für alle Ableitungen. —

Ueber mehrdeutige analytische Functionen.

Wenn aus einem Functionen Element $G'(n/x)$ eine mehrdeutige Function entspringt, so ist es doch möglich dadurch, daß man die Variable x gehörig beschränkt, zu bewirken, daß die Function für diesen

Beschränkten Bereich zu einer eindeutigen, wist. Wir wollen zunächst z auf eine durch z_0 gehende Gerade beschränkt sind.

Die Linie können wir darstellen durch die Gleichung, $z = a + it$ wo t reelle Werte durchläuft. Wir wollen nun mittels der Punkte dieser Geraden aus $f(z/a)$ eine Reihe herleiten. Als vermittelnde Punkte wählen wir die Punkte a, a_2, \dots und nehmen an, dass die a, a_2, \dots auf z folgen, d. h. diejenigen Werte von z sind, für die t positiv ist. Wir nehmen aber die Punkte so an: Es sei a so gewählt, dass er in dem l -Bereich von $f(z/a)$ liegt, dann leiten wir direkt aus $f(z/a)$ die Reihe $f(z/a)$; dann wählen wir a_2 im l -Bereich von $f(z/a)$ und leiten $f(z/a_2) = \dots$ Wir erhalten also eine Reihe von Reihen

a, a_2, a_3, \dots

$f(z/a), f(z/a_2), f(z/a_3), \dots$

Diese Reihe kann entweder bis ins Unendliche fortgesetzt werden, oder man kommt zu einem Punkte der Gerade, für welchen man keine solche Reihe herleiten kann. Wir wollen annehmen, dass wir zu $z = z_0$ noch gelangen können, und die Reihe $f(z/z_0)$ herleiten.

Auf diese Weise definieren wir für Punkte der Geraden eine analytische Funktion, und nun wollen wir zeigen, dass, wenn auch aus dem Elemente $f(z/a)$ eine mehrdeutige Funktion entspringt, man immer durch

Vermittelung der Punkte der Geraden, wie man dieselben auch wählen mag, für $x = x_0$ stets dieselbe Reihe

$$f(x/x_0) \text{ erhält.}$$

Zunächst sehen wir, daß die auf die obige Art definierte Function für jeden Punkt der Linie definiert ist. Denn z. B. für Punkte zwischen a_1 u. a_2 , ist wieder definiert durch $f(x/a_1)$, für Punkte zwischen a_2 u. a_3 durch $f(x/a_2)$ u. s. w. Jedem Werte von x ist also eine ganz bestimmte Werte der Function zugeordnet. Nun zeigen wir, daß die Function überall die Linie den Charakter einer ganzen Function hat, d. h. daß wenn x' die betrachtete Stelle ist, sie sich in der Umgebung von x' nach Potenzen von $x - x'$ entwickeln läßt. Liegt zunächst x' z. B. zwischen a_2 u. a_3 , dann liegt x innerhalb des Grenzbereiches von $f(x/a_2)$ und man kann aus $f(x/a_2)$ herleiten

$$f(x/a_2) = f(x'/a_2) + f'(x'/a_2)(x - x') + \dots$$

sie hat also wirklich für alle Punkte, die zwischen den Übergangspunkten liegen den Charakter einer ganzen Function. Dasselbe gilt für die Übergangspunkte a_1, a_2, \dots wo wir 2 Definitionen haben. Es ist z. B. für die Umgebung von a_2 zunächst $f(x/a_2)$; ferner können wir aber aus $f(x/a_1)$ eine Reihe herleiten nämlich

$$f(x/a_1) = f(x'/a_1) + f'(x'/a_1)(x - x') + \dots$$

Die auf die obige Weise definierte Function hat also

überall, wo sie definiert ist, den Charakter einer ganzen Funktion.

Wenn ich nun zur Vermittelung der Ableitung der Reihe für die Umgebung von $x = x_0$ neue von a, a_1, \dots verschiedene Punkte b_1, b_2, \dots des geraden wähle und die Reihen $f(x/b_1), f(x/b_2), \dots, f(x/x_0)$ herleite, so will bewiesen werden, dass die auf dem 2ten Wege hergeleitete Reihe $f(x/x_0)$ identisch ist mit der $f(x/x_0)$

Satz Es seien allgemein 2 Funktionen $F(x)$ u. $F_1(x)$ gegeben, die eindeutig sind und den Charakter ganzer Funktionen besitzen und in der Nähe von a übereinstimmen (in den beff. von $a - a$) Da sie in der Nähe von a übereinstimmen, so müssen sie bis zu einem gewissen Werte a' übereinstimmen. Man denke sich uns $F(x)$ u. $F_1(x)$ vorgestellt in der Form

$$F(x) = C_0 + C_1 \frac{(x-a)'}{1} + C_2 \frac{(x-a')^2}{2!} + \dots$$
$$F_1(x) = C'_0 + C'_1 \frac{(x-a')}{1} + C'_2 \frac{(x-a')^2}{2!} + \dots$$

was nach der Voraussetzung möglich ist, so stimmen beide Reihen für Werte von x , die in der Umgebung von a' und zwischen a u. a' liegen, überein, sie müssen also identisch sein d. h.

$$C_0 = C'_0$$
$$C_1 = C'_1$$

d. h. beide Funktionen F u. F_1 müssen somit übereinstimmen.

stimmen, wie weit die Convergenz von den obigen Reihen geht, dieselbe geht aber über a hinaus. Wenn also F_n, F_1 bis zu a' hin ($a' < a$) übereinstimmen:

Wir können nun den Punkt a' weiter von a entfernt nehmen und so fort schliessen, der Punkt a' hat dann (eigentlich die reelle Grösse) eine obere Grenze α . Bis dahin ist die Uebereinstimmung festgesetzt und weiter kann sie nicht gehen; daraus folgt, dass die Functionen $F_n, F_1, F_1(n)$ nur bis α fortgesetzt werden können, denn wenn sie über α fortgesetzt werden könnten, so müssten sie noch weiter übereinstimmen, d. h. über α hinaus, alldann wäre aber α nicht die Grenze. Wir haben also den Schluss, wenn die Functionen F_n, F_1 in ihrer gewöhnlichen Umgebung von a übereinstimmen, so stimmen sie überhaupt so weit überein, als sie festgesetzt werden können.

Daraus folgt nun unmittelbar dass $G(x/a) = G(x/a)$ Denn durch die beiden Reihen.

$$G(x/a) = G(x/b) = G(x/a_1) \dots G(x/a_n)$$

sind 2 Functionen definiert, die in der Nähe von a übereinstimmen, sie müssen also überall übereinstimmen wo sie fortgesetzt werden können. Hiermit ist also unsere Behauptung bewiesen.

Wenn wir also durch $f(x|a)$ eine Function definiren, und das x auf eine durch a gehende Gerade beschränken, so wird springt für alle Punkte der Geraden, zu denen man mit der Herleitung der Reihen gelangen kann, eine ganz bestimmte eindeutige Function, wenn auch die aus dem Elemente $f(x|a)$ überhaupt entspringende Function mehrdeutig ist. Für die Punkte x_0 zu denen man überhaupt gelangen kann, gibt es eine obere und eine untere Grenze, die wir resp. mit α_2 u. α_1 bezeichnen wollen. Für alle Punkte der Geraden, welche durch a geht zwischen α_1 u. α_2 , kann ich aus dem Functionselemente $f(x|a)$ Potenzreihen herleiten, und zwar für jeden Punkt nur eine einzige. Wenn man also das Argument x , auf diese Stelle beschränkt, so entspringt aus dem Functionselement $f(x|a)$ eine eindeutige analytische Function, die überall für die Punkte der Linie zwischen α_1 u. α_2 den Charakter einer ganzen Function hat. Über die Punkte α_1 u. α_2 kann die Function nicht fortgesetzt werden, ohne daß sie den Charakter der ganzen Function verliert.

Daraus erklärt es sich auch, weshalb die Functionen reeller Argumente zwischen bestimmten Grenzen eindeutig sind, wie z. B. $\log x$, $\sin x$ etc. Hierbei ist nämlich die Veränderlichkeit der Variablen x , auf die Gerade $x = t$ beschränkt.

Von einer Function von x , welche durch Beschränkung der Veränderlichkeit von x auf einen Bereich zu einer eindeutigen geworden ist mit dem Charakter einer ganzen Function wollen wir sagen, dass sie eine reguläre Function, ein regulärer Liniy einer analytischen Function ist.

Verstehen wir unter t eine reelle Variable und unter $\varphi(t)$ irgend eine reguläre Function, so wird durch $x = \varphi(t)$ eine Linie definiert, die wir eine reguläre Linie nennen wollen. Es ist zunächst $\varphi(t)$ definiert durch eine Potenzreihe von $t - t_0$, wo t_0 der Ausgangspunkt sein möge. Nun kann man aus diesen Elementen neue Reihen herleiten, die Function $\varphi(t)$ wird hierdurch fortgesetzt. Man wird einmal zu Punkten kommen, über die hinaus die Function $\varphi(t)$ nicht fortgesetzt werden kann, ohne den Charakter einer ganzen (eindeutigen) Function zu verlieren. Auf diese Weise wird die Linie

$$x = \varphi(t)$$

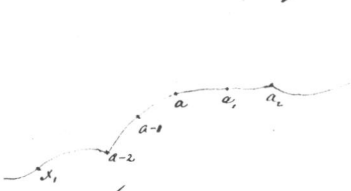
durch 2 Punkte beschränkt, und eben diesen beschränkten Theil der Linie nennen wir eine reguläre Linie. Denken wir uns nun eine reguläre Linie von x_0 nach x , und bestimmen die zugehörige Function $x = \varphi(t)$ und es möge dem x_0 t_0 entsprechen, resp. t_1 , t_2 , wobei t_0 , t_1 nicht die Grenzwerte von t sind. An diese Linie können

nen wir eine neue ansetzen, die sich durch eine neue Function $x = \varphi(t)$ definiren, die ebenfalls regulär sein soll u. s. w. Auf diese Weise können wir Wege von a bis nach a' definiren, die entweder einfache reguläre Linien sind, oder aus regulären Linienstücken zusammenengesetzt sind. Wenn die Linie aus mehreren Stücken besteht, so können wir stets bewirken, daß die verschiedenen Zusammensetzungspunkten entsprechenden t 's auf einander folgen. Denn wenn z. B. sich aus $x = \varphi(t)$ für a , ergibt t , und aus $x = \varphi(t')$ für a' , sich t' ergibt, so substituiren wir $t = t' + t - t$, und dann verwandelt sich

$x = \varphi(t)$ in $x = \varphi(t)$ mit der Eigenschaft daß dem x auch hier $t = t'$ entspricht. Man kann also leicht bewirken, daß während t alle reellen Wërthe $+\infty \dots +\infty$ durchläuft, x die ganze Linie beschreibt. Nach diesen Festsetzungen können wir von früheren und späteren Punkten sprechen, indem wir von zwei Punkten a', a'' denjenigen das spätere nennen, der einem späteren Wërthe von t entspricht. Hiermit ist auch der Sinn der Linien fest gestellt.

Wenn wir nun für die Umgebung von a eine Function definiren durch das Element $\varphi(x/a)$ und ziehen durch den Punkt a eine beliebige reguläre

oder aus regulären Stücken zusammengesetzte Linie,
so können wir für die Punkte dieser Linie aus dem



Elemente $f(x/a)$ neue
Reihen herleiten, wenn wir
allgemein die Punkte der Linie
zu denen wir überhaupt gehen

zurück können mit a bezeichnen, so daß wir aus $f(x/a)$
eine Reihe $f(x/a)$ unmittelbar oder mittelbar her-
leiten können, so werden wir zu jedem a ein ent-
sprechendes δ haben. Diese Größe δ wird eine obere
und eine untere Grenze haben, welche denjenigen
Punkten der Linie entspricht, über die hin aus die
Function auf die obige Weise nicht fortsetzbar ist.
Diese Punkte wollen wir mit α_1 u. α_2 bezeichnen.

Nun können wir beweisen folgenden
Satz: Wenn wir für irgend eine Umgebung von
 a eine Function $f(x/a)$ definiren, und durch den
Punkt a eine beliebige reguläre, oder aus regulären
Stücken bestehende Linie ziehen, so wird für alle Punk-
te dieser Linie zwischen bestimmten Punkten, über
die hinaus die Function $f(x/a)$ nicht festgesetzt wor-
den kann, ohne den Charakter einer ganzen Function
zu verlieren, durch das Element $f(x/a)$ eine eindeu-
tige Function definirt, die den Charakter einer gan-

zen Function hat, mag die durch $f(x/a)$ definierte Function ein oder mehrdeutig sein.

Dieser Satz, der eine Völligemeinerung des auf Seite 353 Bewiesenen ist, beweisen wir ebenso wie dort. Zu nächst zeigen wir, daß für alle Punkte dieser Linie oder Function eindeutig ist. Wählen wir einen Punkt a_1 , so daß die ganze Linie a , innerhalb des Convergenzbereiches von $f(x/a)$ liegt, so können wir eine Reihe $f(x/a_1)$ herleiten. Wählen dann a_2 so daß a_1, a_2 innerhalb des l. B. von $f(x/a)$ liegt, so können wir $f(x/a_2)$ herleiten u. s. w., bis wir zu $f(x/a')$ gelangen. Wählen wir nun andere vermittelnde Punkte b_1, b_2, \dots , die aber auch so gewählt werden müssen, daß b_1 vollständig innerhalb des l. B. von $f(x/a)$ liegt u. s. w. so können wir eine 2te Reihe $f(x/b_1)$ herleiten, und nun kann es sich darum nachzuweisen, daß $f(x/a) = f(x/b_1)$. Dies ist aber sofort ersichtlich; denn da sowohl a , als auch b_1 vollständig innerhalb des Convergenzbereiches von $f(x/a)$ liegen, so müssen die durch $f(x/a)$ definierten Functionen, welche wir durch Vermittelung der Punkte a_1, a_2, \dots u. b_1, b_2, \dots herleiten, anfangs übereinstimmen; sie müssen also nach dem Bewiesenen Satze überall übereinstimmen, wie weit sie nur festgesetzt werden können, also muß

$$f(x/a) = f(x/a)$$

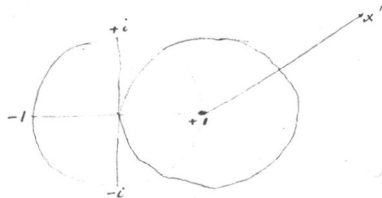
Also entspringt aus dem Elemente $f(x/a)$ für jeden Punkt der Linie nur eine Reihe, d. h. die Function ist eindeutig. Daß diese Function den Charakter einer ganzen Function hat, folgt ebenso leicht wie Seite 353

Man sieht also, daß wenn man die Veränderlichkeit des Argumentes x auf eine Linie beschränkt, daß a dann für jeden Punkt der Linie, aus dem gegebenen Elemente $f(x/a)$ nur ein einziger Werth der Function sich ergibt.

Wir kommen hier auf den Begriff eines eindeutigen Zweiges einer mehrdeutigen, analytischen Function, wovon wir verstehen, die Gewandtheit der Werthe, welche sich für die durch das Element $f(x/a)$ definierte Function ergeben, wenn man x auf eine Linie beschränkt.

Auch hat es nun seinen Sinn, wenn man spricht von Werthen einer Function, die man auf einem bestimmten Wege bekommt, das bedeutet nichts weiter, als diejenigen Werthe der Function, die man für eine Stelle x erhält, wenn man aus $f(x/a)$ durch Vermittelung von Punkten, die auf verschiedenen durch a u. a' gelegenen Linien Reihen $f(x/a)$ leidet. Auch können wir uns vorstellen, daß die Mehrdeutigkeit der Functionen von der Verschiedenheit der Wege abhängt, die man von der Ausgang

stelle a zu der betreffenden Stelle a' zieht. So wird z. B. die auf Seite 340 definierte Function für jede Stelle $x = x'$ verschiedene Werthe annehmen, je nachdem man, um den Werth von $L(x')$ zu berechnen aus der Reihe für die Umgebung von $+1$ eine Reihe für die Umgebung von x' auf der Geraden $+1x'$ herleitet, oder zunächst aus $L(x'/1)$ durch Vermittelung der Punkte des Kreises $(+1+i-1-i)$ eine Reihe für die Umgebung von $+1$ herleitet, (welche, wie wir wissen, von der ursprünglichen verschieden ist) und dann erst von $+1$ auf der Geraden nach x' geht.

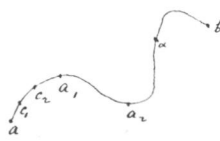


Die oben entwickelten Begriffe sind sehr wichtig, weil wir dadurch genöthigt werden, verschiedene Werthe einer mehrdeutigen Function als Werthe einer einzigen Function anzusehen. —

Den Satz / 360 / kann man noch auf andere Weise begründen wenn man folgenden Lehrsatz vorausgehen läßt.

Lehrsatz: Es sei das Functionelement $f(z)$ gegeben. In dem Convergencebereiche wählen wir irgend einen Punkt b , und irgend eine Linie von a nach b , die aber vollständig innerhalb des Convergencebereiches liegen soll. Nun leiten wir durch Vermittelung der Punkte dieser Linie

eine Reihe $f(z)/n/b)$ und es soll bewiesen werden, daß diese Reihe identisch ist mit derjenigen $f(z)/n/b)$, welche direct aus $f(z)/n/a)$ hergeleitet wird. - Die vermittelnden Punkte der Linie ab seien willkürlich gewählt a_1, a_2, \dots



und nun leiten wir aus $f(z)/n/a)$ $f(z)/n/a_1)$ hieraus $f(z)/n/a_2)$ u. s. w. bis wir zu $f(z)/n/b)$ kommen. Da

nun a_1, a_2 willkürlich gewählt worden sind, so wird man im Allgemeinen noch andere vermittelnde Punkte c_1, c_2, \dots innehalten müssen, so daß jeder folgende in der Umgebung der vorausgehenden liegt, und ihr Abstand muß kleiner sein, als der Abstand von der Grenze des L . bereiches. Zunächst ist nach einem der bewiesenen Sätze, daß wie wir auch die Punkte c_1, c_2, \dots wählen, wir stets zu denselben Reihen $f(z)/n/a_1), f(z)/n/a_2), \dots, f(z)/n/b)$ gelangen. Nun schließen wir so: Die Reihe $f(z)/n/c_1)$ stimmt in einer gewissen Umgebung von c_1 mit $f(z)/n/a_1)$ überein, sie muß also überall in dem gemeinsamen Conv. bereiche mit $f(z)/n/a_1)$ übereinstimmen. Nun liegt c_2 in dem Conv. Bereiche von $f(z)/n/c_1)$ und gleichzeitig von $f(z)/n/a_1)$; zunächst muß für den ganzen gemeinsamen Conv. bereich von $f(z)/n/c_1)$ u. $f(z)/n/c_2)$ $f(z)/n/c_1) = f(z)/n/c_2)$ sein. Nun liegt c_2 auch in dem Conv. bereiche von $f(z)/n/a_1)$. Wir haben also für eine Umgebung

von c_2

$$G/a/a) = G/a/c_1)$$

$$G/a/c_1) = G/a/c_2) \text{ also auch}$$

$$G/a/a) = G/a/c_2)$$

Folglich müssen beide Reihen innerhalb des ganzen gemeinsamen l.u.v. Bereiches von c_2 übereinstimmen.

So gehen wir weiter und gelangen zu dem Schlusse, daß $G/n/a) = G/n/b)$ innerhalb des gemeinsamen l.u.v. Bereiches mit einander übereinstimmen. Ließen wir nun direkt aus $G/n/a) = G/n/b)$, so haben wir für die Umgebung von b , $G/n/a) = G/n/b)$. Nun ist aber auch für eine gewisse Umgebung von b

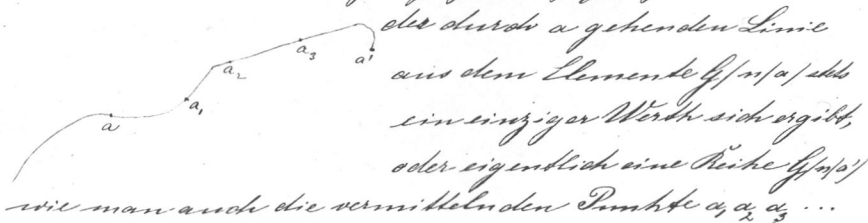
$$G/n/a) = G/n/b) \text{ also muß auch für die}$$

bestimmte Umgebung von b

$$G/n/b) = G/n/b) \text{ d. h. beide Reihen}$$

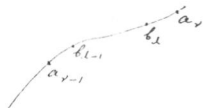
müssen identisch sein, was zu beweisen war:

{ Nun können wir den Lehrsatz auf Seite auch durch folgende Deductionen begründen. Es handelt sich hierbei zu zeigen, daß für jede Stelle a'



wählt, wir müssen die Punkte stets die Bedingung erfüllen, daß die ganze Linie von a_{i-1} bis nach a_i vollständig in dem l.u.w. Bereiche von $f(n/a_{i-1})$ liegt. Verstehen wir unter x_0 irgend einen Punkt der Reihe a_i , so soll $f(n/x_0)$ so definiert werden, daß, wenn x_0 mit a_i zusammenfällt $f(n/x_0) \equiv f(n/a_i)$, wenn dagegen x_0 zwischen a_{i-1} und a_i fällt, so soll unter $f(n/x_0)$ die Reihe verstanden werden, die aus $f(n/a_{i-1})$ hergeleitet wird. Man wolle wir eine andere Reihe von Punkten zur Vermittlung wählen, und zwar sollen sie denselben Bedingungen unterworfen sein, wie die a 's und diesen vermittelt derselben die Reihe $f(n/a')$ und man soll beweisen werden, daß $f(n/a')$ identisch ist mit $f(n/a)$. Wenn ich nun die zweite Reihe von Punkten nehme, so sei $f(n/x_0)$ auf dieselbe Weise definiert wie $f(n/a)$. Der Satz wird bewiesen, wenn es sich zeigen läßt, daß $f(n/x_0)$ mit $f(n/a)$ identisch ist. Dann ist es nur nöthig die Identität von $f(n/b_1)$ u. $f(n/b_2)$ zu zeigen. Nehmen wir an, daß die Uebereinstimmung von $f(n/b)$ $f(n/b_1)$ bewiesen ist für alle b_1 , die dem b_2 vorangehen, und daraus wollen wir zeigen, daß auch $f(n/b_2) = f(n/b_1)$ ist. Fassen wir den unmittelbar vorangehenden Punkt b_{i-1} , so liegt er offenbar auf der Strecke von a nach

b_{v-1} , er kann aber in Bezug auf die a 's verschiedene Lagen haben, er kann erstens zwischen α_{v-1} u α_v ebenso wie b_v fallen, dann mit α_{v-1} zusammenfallen, und schließlich dem α_{v-1} voraus-



gehen. Der erste Fall lässt sich nun einfach beweisen. Denn wenn b_{v-1} zwischen α_{v-1} u α_v fällt, so können wir direct aus $G(n/\alpha_{v-1})$ herleiten $G(n/b_{v-1})$ und dann nehmen wir an dass $G(n/b_{v-1}) = \bar{G}(n/b_{v-1})$ gehen wir von b_{v-1} nach b_v , so muss $\bar{G}(n/b_v)$ übereinstimmen mit der welche direct aus $G(n/\alpha_{v-1})$ hergeleitet wird, d. h. $G(n/b_v) = \bar{G}(n/b_v)$.

Der Fall, wo b_v zwischen α_{v-1} u α_v , aber vor α_{v-1} zu liegen kommt, lässt sich auch einfach zeigen unter der Annahme, dass $G(n/b_{v-1}) = \bar{G}(n/b_{v-1})$ ist, wenn man nur die Herleitungen gehörig macht, worauf wir hier nicht eingehen wollen. Auf diese Weise können wir unter der Annahme, dass $G(n/b_{v-1}) = \bar{G}(n/b_{v-1})$ zeigen, dass $G(n/b_v) = \bar{G}(n/b_v)$ und dies ist ausreichend, da b_v mit a , und der letzte (b_{v+1}) Punkt mit a' zusammenfallend angesehen werden kann. Man könnte noch einen andern Beweis geben, indem man anser der Reihe der Punkte $a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, a'$ u b, b_1, \dots, a' , noch eine dritte passend gewählte Reihe a, c, c_1, \dots, a' betrachtet.

und durch Vermittelung der Ketten für die Punkte die Identität der beiden Ketten für a' , welche durch a, \dots und b, \dots hergeleitet worden sind. }

Definition des analytischen Gebildes und Begriff der Grenzwerte der Function.

Wir haben durch ein Functionselement eine Function definiert. Bezeichnen wir mit y die Werte der Function, so erhalten wir aus dem Elemente $y = G(x/a)$ ein System von zusammengehörigen Wertepaaren x, y .

Wir können im Anschluss an die analytische Geometrie die Gesamtheit der Wertepaare x, y , die durch die durch das Element $y = G(x/a)$ definierte Function bestimmt werden, das analytische Gebiet nennen, und die Gesamtheit der Wertepaare x, y , die aus einem Functionselement entspringen das Element des analytischen Gebildes. Jedes einzelne Wertepaar x, y des analytischen Gebildes, wollen wir die Stelle, oder den Punkt des analytischen Gebildes nennen. Bis jetzt haben wir als das Gebilde die Gesamtheit nur derjenigen Stellen betrachtet, für die man Elemente $y = G(x/a)$ berechnen kann. Es gibt aber auch Stellen x , wie wir es schon wissen, für deren Umgehung es nicht möglich ist, Functionselemente aus dem

ursprünglichen Elemente herzuweisen. Solche Stellen werden nun die Grenzstellen des Gebildes sein, und wir wollen uns nun mit diesen etwas beschäftigen. Die Grenzstellen können wir nun in 2 Theile theilen, erstens in solche, die dem Gebilde wirklich zugeordnet werden müssen, als in der That zu demselben gehörige, und solche, die als Grenzfall uneigentlich zugeordnet werden. Man schließt gewöhnlich so: w sei $y = f(x/a)$ das Element und a' ein Punkt der Linie durch a , über die hinaus die Function $y = f(x/a)$ nicht fortgesetzt werden kann ohne den Charakter einer ganzen Function zu verlieren. Nun kann es vorkommen, daß es einen Wirth b' von y gibt, so daß nach Annahme einer beliebig kleinen Größe ϵ , es möglich sein muß, die Grenze S von y anzugeben, daß für Wërthe von x , für die $|x - a'| < \delta$ beständig $|y - b'| < \epsilon$ sei. Alsdann sagen wir y nähert sich der Grenze b' , wenn x sich dem a' nähert. Man sagt man, der Wërth x' sei der Wërth von y für den Wërth $x = a'$. Dies ist aber dem Wesen der Functionen nach nicht richtig. Es liegt die Stelle a' an der Grenze des Gebildes, aber sie braucht nicht dazu zu gehören, was wir hier noch nicht zeigen können. Wir müssen hier eine Definition der Grenzstellen des Gebildes geben, nach der wir unterscheiden können, ob diese Grenzstelle dem Gebilde wirklich gehört, oder ob sie nur uneigentlich zugeordnet wird.

Das Wesen der analytischen Function ist nämlich, daß in der Nähe einer jeden Stelle des Gebildes (x_0, y_0) ein Zusammenhang gibt, der durch eine analytische Formel $y - y_0 = f(x, y_0)$ sich darstellen läßt; oder was dasselbe ist, daß die Stellen x_0, y_0 , welche einem und demselben Elemente angehören, sich durch eine Gleichung zwischen x, y x_0, y_0 bestimmen lassen. Wenn nun für die oben betrachteten Stellen a, b das Gebilde die Eigenschaft hat, daß das Wertepaar x, y in der Umgebung von a, b eine Gleichung ergibt von der Form $f(x, y | a, b) = 0$, so sagen wir, die Stelle a, b gehört zu dem Gebilde, und die Function f behält in der Nähe von a den Charakter einer algebraischen Function. In diesem Falle wird, wenn sich x dem a nähert y dem b ohne Ende nähern. Wir ordnen in diesem Falle die Stelle a, b dem Gebilde als einem Punkte zu. Die Gesamtheit aller Punkte x, y des Gebildes nennen wir dann eine *monogene, analytische Function*.

Wenn es keine solche analytische Gleichung $f(x, y | a, b) = 0$ gibt, so ordnen wir die Stelle a, b nicht eigentlich zu als dem Grenzfall. Um ein Beispiel zu haben, betrachten wir die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ wo x, y, r reelle Größen sein sollen. Ein Element des Gebildes wird durch die Gleichung

$$y^2 + (x-1)/(x-1+2i) = 0.$$

Die Stelle $se = x=y=0$ ist also zu dem Gebilde zuzurechnen, was geometrisch klar ist.

Wenn wir für die Grenzstelle die Gleichung $G(x, y | a, b) = 0$ gefunden haben, so wird uns dieselbe in der Nähe von a die Werte von y liefern. Diese Gleichung wird, wie wir es sehen werden, auch noch durch andere Wertepaare xy befriedigt, so wird sich aber zeigen, daß diese Wertepaare schon durch die Definition des Elementes definiert sind.

Die Gleichung $G(x, y | a, b) = 0$, die die Grenzpunkte definiert, welche dem Gebilde zuzurechnen sind, muß irreduzibel sein, sollte sie reduzibel sein, so nehme man den irreduziblen Factor, welchem $se = a, y = b$ genügt.

Die obigen Definitionen bleiben bei einem Systeme von Functionen bestehen. Wenn durch Elemente $G_1(x, y) G_2(x, y)$ mehrere Functionen für die Umgebung einer und derselben Stelle definiert werden, und ziehen wir durch a eine Linie auf der alle F_0 Elemente bis zu einem gewissen Punkte festgesetzt werden können, so können wir von Werten des Func. Systems sprechen, die auf diesem bestimmten Wege erhalten werden. Wollen wir nämlich für eine Stelle a' die zugehörigen Werte des Func. Systems finden, so ziehen wir von a nach a' eine Linie, aber so, daß auf derselben alle Functionen bis nach n'

fortgesetzt werden können, und legen durch Vertauschung derselben Punkte die Reihen $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, so geben uns dann die Constanten Glieder dieser Reihe die Werte der Functionen für $x = a'$, die zusammengehören.

Ebenso können wir die Grenzwerte definiren. Wenn wir nämlich auf der Linie nach a' , wo a' ein Punkt ist, über den die Functionen nicht fortgesetzt werden können, sich dem Punkte a' nähern, und die Werte der Functionen sich ganz bestimmten Werten b_1, b_2, \dots nähern, so sagen wir (a', b_1, b_2, \dots) sind die Grenzwerte der F. Systeme für $x = a'$.

Wenn es sich nun für die Umgebung der Stelle a' analytische Gleichungen von der Form ergeben

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1, a', b_1) &= 0 \\ f_2(x, y_2, a', b_2) &= 0 \end{aligned}$$

ergeben die für a' die Werte b_1, b_2, \dots liefern, so sagen wir die Stelle a' gehört zu dem Gebiete der Variablen x .

Wir können die Sache auch so auffassen.

Definitionen. Bezeichnen wir die so zusammengehörigen Werte der Functionen mit y_1, y_2, \dots, y_r , so können wir die Gesamtheit der Wertesysteme

$x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_r$ auch ein Gebilde nennen, und zwar ein Gebilde 1.ter Stufe im Gebiete der ^{variablen} Variablen.

Allgemeiner denken wir uns zwischen n Variablen complexen
Größen x_1, x_2, \dots, x_n , m Gleichungen gegeben, wovon n ist.
Setzt man $m = n - 1$, so sagen wir, die Gesamtheit der Wërth-
systeme x_1, \dots, x_n bildet im Gebirke der n Variablen $x_1, \dots,$
 x_n ein analytisches Gebilde 1^{ter} Stufe, ist $m = n - 2$, so ist
das Gebilde der zweiten Stufe definiert, u. s. w. Jede
complexee Variable bildet eine 2fache Mannigfaltigkeit
und n Variablen 2nfache Mannigfaltigkeit, wir können
nen also auch von analytischen Gebilden verschiedener
Stufen in verschiedenen Mannigfaltigkeiten sprechen.
Wenn wir ein Element (f, p, a) definieren, so definieren
wir hier durch ein analytisches Gebilde xy 1^{ter} Stufe im
Gebirke der 2 Veränderlichen x, y , y als Wërth der Func-
tion betrachtet. Die Sache auf diese Weise aufzufassen
ist sehr wesentlich, weil wir gezwungen werden nicht
nur y als Function von x , sondern auch umgekehrt
 x als Function von y zu betrachten. Alsdann werden
wir den Satz zu beweisen haben, dass, wenn wir z. B.
durch das Element $y = a x + a, x^2 + \dots$ ein Gebilde defini-
ren und aus dem Elemente, das Element

$x = b y + b, y^2 + \dots$ herleiten, welches wieder
um ein analytisches Gebilde definiert, dass alsdann
beide Gebilde identisch sind, d. h. dass wir dieselben
Werthepaare x, y erhalten, ob wir aus dem Elemente

$y = ax + a, n^{\text{te}} \dots$ oder aus

$x = by + b, q^{\text{te}} \dots$ ausgehen. Diese Betrachtung

wird uns dazu führen, die Nothwendigkeit der Adjunction der Stellen $a'b'$, für deren Umgebung eine analytische Gleichung $f(x, y | a'b') = 0$ besteht, einzusehen.

Es ist bis jetzt nicht ausgeschlossen, daß die Stelle $a'b'$ des Gebildes im Unendlichen liegt, alsdann haben wir nun statt $x - a', y - b'$, welche unendlich klein werden, wenn sich se and m nähert, die Werthe $\frac{x}{se}, \frac{y}{m}$ einzuführen, wenn $a' = 0, b' = 0$ oder $\frac{x}{se}, y - b'$ wenn $a' = 0, b'$ endlich ist u. s. w. Die Stelle $a'b'$ ordnen wir dem Gebilde zu, wenn für die Umgebung der Stelle die Gleichung $f(x, y | a'b') = 0$ besteht, und im Falle, daß $a'b'$ unendlich wird, hat man statt der Potenzreihe von $x - a', y - b'$, die Potenzreihe resp. von $\frac{x}{se}, \frac{y}{m}$ sich zu denken.

Wir haben schon früher den Satz erwähnt, daß wenn zwischen mehreren Functionen eine Gleichung besteht für irgend welche Func. Elemente, die für die Umgebung einer und derselben Stelle definiert werden, daß alsdann dieselbe Gleichung besteht für alle zusammengehörigen Functionelemente, die aus dem gegebenen hergeleitet werden. Wir wollen nun diesen Satz nachweisen.

Lehrsatz Es sei $f_1(n), f_2(n) \dots$ irgend ein System von Functionen, definiert durch Functionelemente $f_1(n/a), f_2(n/a), \dots$, Es möge nun zwischen diesen Elementen eine analytische Gleichung bestehen

$$G(f_1(n), f_2(n) \dots) = 0$$

wo G eine ganze Function ist, oder eine beständig convergirende Reihe. Wenn wir aus diesen Elementen für die Umgebung einer andern Stelle b die zusammengehörigen Elemente $f_1(n/b), f_2(n/b) \dots$ herleiten, so soll bewiesen werden, dass auch für diese Elemente die obige Gleichung besteht.

Es sei $f_1(n) - f_2(n/a)$ setzen wir für die f_1 diese Ausdrücke in der Gleichung, so können wir die Glieder beliebig anordnen, um G umzuwandeln in eine Potenzreihe von $x - a$, die sicher convergent ist innerhalb des allen Reihen $f_1(n/a)$ gemeinsamen l.u.w. Bereiches. Betrachten wir nun G als Function von x , die sich aus Potenzreihen von $x - a$ darstellen lässt, so können wir G umwandeln in Potenzreihen von $x - b$, wenn wir b innerhalb des l.u.w. Bereiches von $G(x) = 0$ oder innerhalb der den Reihen $f_1(n/a)$ gemeinsamen l.u.w. Bereiches wählen, so dass wir erhalten

$$G(f_1(n) \dots) = P(x - b)$$

Dasselbe erreichen wir aber, wenn wir $f_1(n)$ in Potenzreihe

von $\alpha - b$, also in $G_u(\alpha/b)$ umwandeln; und dann die Reihe in $G(f_1/\alpha)$ erweitern.

Dies möge nun liefern

$$G(g_1/n/b \dots) = \tilde{P}_1(\alpha - b)$$

zunächst sehen wir folgendes. Es liegt $\alpha - b$ vollständig innerhalb des Conv.-bereiches aller Reihen, es muß also für die Umgebung der Stelle b

$$G_u(n/\alpha) = G_u(\alpha/b);$$

ferner ist für die Umgebung dieser Stelle auch

$$G(f_1/n/\alpha) \dots = \tilde{P}(\alpha - \alpha) = G(f_1/\alpha) \dots = \tilde{P}(n - b)$$

und daraus folgt, daß für die Umgebung der Stelle b $\tilde{P}(\alpha - b) = \tilde{P}_1(n - b)$, d. h. es ist identisch $\tilde{P} = \tilde{P}_1$. Nur haben wir für die Umgebung von α $G(f_1/n) \dots = G(g_1/n/\alpha) = \tilde{P}(n - \alpha) = 0$. Es muß also auch $\tilde{P}_1(n - b)$ für die Umgebung von b in den Coefficienten Null sein, d. h.

$$G(g_1/n/b) \dots = 0 \text{ für die Umgebung von } b.$$

Die Gleichung

$G(g_1/n/b) \dots = \tilde{P}_1(\alpha - b)$ hat aber Gültigkeit für alle Punkte, die innerhalb des allen Reihen gemeinsamen Conv.-bereiches $(g_1/n/b)$ liegen, demnach muß

$$G(g_1/n/b, g_2/n/b) \dots = 0$$

für alle Punkte die innerhalb des allen Reihen $G_u(\alpha/b)$ gemeinsamen Conv.-bereiches liegen.

Auf diese Weise können wir weiter schließen für neue

aus g_1, \dots, g_n hergeleitete zusammengehörige Elemente sind auf diese Weise kommen wir zu dem Schlusse, daß wenn obige Gleichung für irgend eine Umgebung gilt, daß sie dann überall gilt, für alle zusammengehörigen Werthe der Function. Wenn nun a ein Grenzpunkt ist im Endlichen, und nähert sich das System zusammengehöriger Werthe f_1, f_2, \dots bestimmten endlichen Werthen b_1, b_2, \dots unendlich, wenn sich so dem a unendlich nähert, so besteht auch für die Grenze die obige Gleichung, wie man sich leicht überzeugen kann.

Und hiermit ist unser Satz vollständig nachgewiesen.

Functionen mehrerer Variablen.

Bei der Erweiterung der im Vorigen entwickelten Begriffe bleiben die wesentlichen Principien bestehen. Die Theorie der Functionen mehrerer Veränderlichen in den Elementen aufzunehmen ist nothwendig, da wir schon bei der Untersuchung Functionen einer unabhängig Veränderlichen auf Functionen zweier oder mehrerer Variablen stoßen.

Es sei für die Umgebung einer Stelle a, b, c, \dots eine Potenzreihe $G(x, y, z, \dots | a, b, c, \dots)$ gegeben, aus dieser leiten wir neue Reihe $G(x, y, z, \dots | \alpha, b, c, \dots)$ indem wir a, b, c, \dots in dem Convergencebereich der Reihe $G(x, y, z, \dots | a, \dots)$ wählen u. s. w. Aus denselben Gründen wie bei einer Variablen Betracht.

ken wir die neue Function $f(x, y, \dots, a, b, \dots)$ in demjenigen Theile des low. Bereiches der des l. B. der ursprünglichen Reihe liegt als Fortsetzung der ursprünglichen.

Angenommen wir kommen auf diese Weise bis zu der Stelle $a' b'$... indem wir die Reihe $f(x, y, z, \dots, a' b' c')$ erhalten, und wählen dann in dem l. B. des letzteren eine Stelle x_0, y_0, z_0 ... so sagen wir, $f(x_0, y_0, z_0, \dots, a' b' c')$ sei ein Wörth, der durch die Reihe $f(x, y, z, \dots, a, b, \dots)$ definirten Functionen der Stelle x_0, y_0 ... Die ursprüngliche Reihe $f(x, y, z, \dots, a, b, \dots)$ nennen wir das Element der Function von x, y, z, \dots . Wenn es möglich ist eine Stelle x_0, y_0, z_0, \dots im low. Bereiche irgend einer der hergeleiteten Reihen zu bringen, so ist diese Stelle angehörig dem Gebiete x, y, z, \dots . Man kann dies auch so auffassen.

Leiten wir aus $f(x, y, z, \dots, a, b, \dots)$ die Reihe $f(x, y, z, \dots, a_0, y_0, z_0, \dots)$... nennen wir das constante Glied einen Wörth, der durch das Element definirten Function an der Stelle x_0, y_0, z_0, \dots ... Die Gesamtheit der Potenzenreihen, die wir aus einer herleiten können, bildet ein in sich geschlossenes Ganze, jede ist aus einer andern beliebigen ableitbar, und alle Reihen sind durch eine beliebige derselben vollständig bestimmt; es ist vollständig bestimmt, welche Reihen dazu gehören, welche nicht. Aus diesem Grunde müssen wir wenn aus dem Elemente für eine Stelle x_0, y_0, z_0, \dots mehrere Reihen ableitbar sind, die verschiedenen Wörthe, als Wörthe

einer Function ansehen. Wir kommen auch hier zu dem Begriffe eindeutiger und mehrdeutiger Functionen.

Ebenso laesst sich die fruher entwickelten Principien auf Systeme von Functionen erweitern. Es seien fuir die Umgebung einer und derselben Stelle a. b. c. . . mehrere Functionselemente f_1, f_2, \dots, f_n definiert.

Aus diesen leiten wir neue Reihen, indem wir bei allen Functionen das Ableiten durch Vermittelung derselben Stellen ausfuhren, weshalb die vermittelnden Punkte in dem gemeinsamen B. B. aller Elemente f_1, f_2, \dots liegen muessen. Es ist hieraus klar, dass es vorkommen kann, dass eine Function als Glied des Systems Werte nicht annehmen kann, die sie allein fuir sich betrachtet annehmen koennte.

Definition. Bezeichnen wir mit x_1, x_2, \dots, x_n die Veraenderlichen und mit $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{nn}$ die Systeme zusammengehoriger Werte der Functionen, so bildet die Gesamtheit der Werthsysteme $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ein analytisches Gebilde n^{ten} Stufe in dem Gebiete der n complexen Variablen. Dadurch verschwindet das Befremdliche, dass man alle Werte der Function als Werte einer Function zu betrachten hat. Nehmen wir z. B. eine Flaechen 2^{ten} Grades, also eine Gleichung, zwischen denselben Variablen x, y, z vom 2^{ten} Grade an, so wird eine

der Variablen z. B. z als Function von x, y betrachtet doppelt
deutig sein. Betrachten wir die Gesamtheit der Werthe z ,
welche $z(x, y)$, so sehen wir, dass sie ein Gebilde darstellt. Das
auf die angegebene Weise entstehende Gebilde nennen wir
ein monogenes Gebilde n ter. Stufe von Gebilde der $m+r$
Veränderlichen. Eben so sprechen wir von einem mono-
genen Functionensystem.

Es stellen man 3 wichtiger Aufgaben entgegen:

1) Die Definition zu geben, was es heisst, eine Function
oder ein Functionensystem erhalte auf einem bestimm-
ten Wege für eine Stelle einen bestimmten Werth, und
die Grenzwerthe zu untersuchen.

2) Zu beweisen, dass wenn für irgend ein System zu-
sammengehöriger Elemente eine Gleichung besteht,
sie dann auch für alle hergeleiteten besteht.

3) Denken wir uns x_{m+1}, \dots, x_{m+r} ausgedrückt durch ir-
gend welche Elemente (von x_1, \dots, x_n) so muss bewiesen
werden, dass Folgendes möglich ist. Angenommen es lie-
gen x_1, \dots, x_n in der Umgebung einer Stelle a_1, \dots, a_n und
der zusammengehörigen Werthe x_{m+1}, \dots, x_{m+r} in der Umge-
bung von a_{m+1}, \dots, a_{m+r} . Nehme ich von allen diesen $m+r$
Variablen x_1, \dots, x_{m+r} n beliebige heraus

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, so wird es im Allgemeinen
möglich sein alle r übrigen als Potenzreihen von x_1, \dots, x_n ,

... $\alpha_j - \alpha_j$ auszudrücken. Durch diese neuen Reichen wird ein neues Gebilde definiert, und es ist nachzuweisen, daß dieses neue Gebilde identisch ist mit dem ursprünglichen; so daß wir zu jedem monogenen Gebilde n ter Stufe zwischen m Variablen x beliebige der Variablen als Functionen der $m-i$ übrigen werten betrachten können. Diese Aufgabe haben wir bei Functionen einer Veränderlichen auch noch nicht erledigt.

Man soll eine Function auf einer bestimmten Linie fortsetzen. Es sei eine Stelle a, b, c, \dots und man will aus dem Functionselemente ein Element für eine andere Stelle a', b', c', \dots herleiten, so zeigt es sich, daß man nicht den Übergang so machen kann, indem man Linien von a nach a' , von b nach b' zieht, und die Punkte dieser Linien als Uebergangsstellen benützt. Man muß die Punkte vielmehr einander zuordnen. Dies geschieht mittelst der Definition einer analytischen Linie. Man denkt sich x, y als reguläre Functionen einer reellen Variablen t , $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t), \dots$ und die Gesamtheit der Wertepaare x, y, \dots welche sich für daselbe t ergeben nennen wir eine Linie. Wenn wir also für x einen beliebigen Punkt gewählt haben, so sind hiermit auch die andern Punkte für y, z, \dots bestimmt. Die Gesamtheit der Punktsysteme ist dann die verlangte Linie, an jeder der Uebergang stattfinden soll. Wenn wir von einer Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ zu einer andern $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$

übergehen wollen, so denken wir uns x_1, \dots, x_n als Functionen von t , die so bestimmt sind, daß für ein bestimmtes t_0 x_1, \dots, x_n gleiche sind a_1, \dots, a_n und für ein anderes t_1 gleich a'_1, \dots, a'_n . Jedem Punkte der reellen Geraden, worin sich t bewegt entspricht eine Stelle der Linie von a_1, \dots, a_n nach a'_1, \dots, a'_n . Die Functionen von t können durch Elemente für die Umgebung einer Stelle t_0 definiert werden, die wenigstens bis zu t_0 fortgesetzt werden müssen. Unser Element $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ verwandelt sich in eine Function von t , die für die Umgebung einer bestimmten Stelle t_0 definiert wird. Jedem Werte von t in der Umgebung von t_0 entspricht eine Stelle von x_1, \dots, x_n und hiermit ein Werte von $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$. Setzt man das Element von $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ ausgedrückt in t fort, so erhält man für alle Punkte der Linie von a_1, \dots, a_n nach a'_1, \dots, a'_n eine Darstellung der Function die durch $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ definiert wird, bis zu a'_1, \dots, a'_n inclusive. Wenn nun a'_1, \dots, a'_n keine Grenzstelle ist, so können wir weiter gehen, indem wir für die neue Linie von a'_1, \dots, a'_n x_1, \dots, x_n als neue Functionen von t definieren und $G \dots$ durch t ausdrücken. Nur darf man nicht glauben, daß die Fortsetzung der Function $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ ausgedrückt in t übereinstimmt überall mit der Fortsetzung von $G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ als Function von x_1, \dots, x_n betrachtet. Bei den algebraischen Functionen stimmt immer die Fort-

setzung der Functionselemente $G(x, y, z, \dots)$ in t ausgedrückt mit der Fortsetzung, in x, \dots ; beiden Transcendenten ist es nicht immer der Fall. Um dies an einem Beispiele zu erläutern, nehmen wir an x, y, z reell zu sein, so definiert $z = G(x, y, t)$ ein Element einer analytischen Fläche in der Höhe der Stelle α, β, γ . Durch dieses Element ist die Fläche vollständig definiert. Wenn man sich eine beliebige Gerade und lege durch dieselbe Ebenen, so werden wir hierdurch Linien erhalten, die auf der Fläche liegen, diese Linien kann man durch eine Variable t ausdrücken, und hierdurch werden die Linien vollständig definiert. Man könnte man glauben, daß auch die Fläche vollständig durch diese Linien definiert wird, so daß ein Element der Linie die Fläche selbst bestimmt. Dies ist aber nicht der Fall bei den transcendenten Flächen. Es zeigt sich nämlich, daß es transcendente geschlossene Flächen gibt auf denen Gerade Linien liegen. Die Gerade wird nun durch ein Element definiert, und kann ins Unendliche fortgesetzt werden können, während nur ein Stück derselben auf der Fläche liegt, und zu der Fläche gehört. Nicht alle Punkte der definierten Linie gehören zu der Fläche, so daß die Fortsetzung der Linie nicht mit der Fortsetzung der Fläche übereinstimmt. Dies hat man jedoch nicht so aufzufassen, als ob Linien, die auch teilweise in, teilweise außerhalb

der Fläche liegen in ihrer Fortsetzung, nie zu der Fläche gehören.
Die kleinerische Fläche ist eine Fläche auf der Geradenlinien
liegen, die sich noch weiter erstrecken als die Fläche, sie ge-
hören aber vollständig zu der Fläche, da sie durch die
Gleichung der Fläche in ihren ganzen Ausdehnungen
vollständig definiert sind, also zu der Fläche zu rechnen
sind, sie sind als Durchschnitt imaginärer Theile der
Fläche aufzufassen.

Man kann die Definition der Functionen mehrerer
Variablen nicht auf Definitione der Functionen
einer Variablen reduciren. Man hat stets zu unter-
suchen ob ein Gebilde niederer Stufe, das in einem
einer höheren Stufe enthalten ist, in dem definierten
Gebilde höherer Stufe vollständig, oder nur zum
Theil enthalten ist. Bei den algebraischen Functionen
ist stets das Gebilde niederer Stufe, wenn es in einem
höherer Stufe zum Theil enthalten ist, auch vollstän-
dig darin enthalten, nicht aber bei den transscendenten.
Dies hängt damit zusammen, daß das Gebiet der Variablen
bei den algebraischen Functionen beliebig weit ausgedehnt
werden kann, nicht aber bei den transscendenten. —
Wenn nun ein Element $f(x, y, z, \dots)$ gegeben ist, so denken
wir uns von a, \dots eine Linie gezogen. Nun wählen wir
auf derselben einen Punkt a, b, \dots durch a, \dots schon

bestimmt, und zwar so daß nicht nur a, b, \dots in dem C. B. von $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ liegt, sondern auch die ganze Strecke von a, b, \dots nach a, b, \dots . Alsdann können wir aus $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ herleiten $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$. Wir wählen nun a_2, b_2, \dots in dem C. B. von $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ ebenso und leiten aus $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ $f(x, y, \dots | a_2, b_2, \dots)$ Wenn ich auf diese Weise bis zu $f(x, y, \dots | a', b')$ komme, so sagen wir das Element $f(x, y, \dots | a', b')$ auf dem bestimmten Wege aus $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ hergeleitet und dann ist das constante Glied von $f(x, y, \dots | a', b')$ ein Werth der durch das Element $f(x, y, \dots | a, b, \dots)$ definierten Function an der Stelle a', b' . Man sieht aber, daß dies nur dann Sinn hat, wenn man nachgewiesen hat, daß man durch verschiedene vermittelnde Punkte derselben Linie von a, b, \dots nach a', b', \dots , die an die obige Bedingung, geknüpft sind, stets für a', b' dasselbe Element $f(x, y, \dots | a', b')$ herleitet. Der Kürze wegen wird bei dem Beweise des oben erwähnten Satzes Folgendes festgehalten. Eine Stelle a_1, \dots, a_n wollen wir kurz, mit a bezeichnen und die Potenzreihe für die Umgebung der Stelle $f(x, y, \dots | a_1, a_2, \dots | a_1, \dots)$ mit $f(x, y, \dots | a)$ u. s. w.

Satz: Es sei ein Functionselement $f(x, y, \dots)$ gegeben, und wir leiten aus demselben ein neues $f(x, y, \dots | a^{(u)})$ auf folgende Weise. Wir ziehen von a nach $a^{(u)}$ eine Linie und wählen auf derselben Punkte $a' a'' a'''$ so, daß nicht nur a' sondern auch die ganze Strecke $a a'$ in dem Cono. Bereiche von $f(x, y, \dots)$, ebenso

$a' a''$ im Conv. Bereiche der aus $G_1(a)$ hergeleiteten Reihe $G_1(a')$ liegt u. s. w. bis wir zu $a^{(n)}$ kommen, um $G_1(a^{(n)})$ erhalten. Es soll bewiesen werden, dass man aus $G_1(a)$ stets zu demselben Elemente $G_1(a^{(n)})$ gelangt, wie man auch die vermittelnden Punkte auf der Linie mit Beibehaltung der obigen Bedingungen wählt.

Es seien zunächst die vermittelnden Punkte $a' a'' \dots a^{(n)}$ und die hergeleiteten Reihen

$$G_1(a) G_1(a') G_1(a'') \dots G_1(a^{(n)})$$

Nun nehmen wir eine zweite Reihe von Punkten

$$b' b'' \dots b^{(n)}, \text{ wo } b' \text{ mit } a', \text{ u. } b^{(n)} \text{ mit } a^{(n)}$$

identisch sein soll und der Bedingung gemäß gewählt und bilden die Reihe

$$G_1(b) G_1(b') G_1(b'') \dots G_1(b^{(n)})$$

und es soll bewiesen werden, dass $G_1(a^{(n)}) = G_1(b^{(n)})$ d. h. dass die für die Stelle $a^{(n)}$ durch Vermittelung von $a' a'' \dots$ hergeleitete Reihe identisch ist mit der, welche für dieselbe Stelle durch Vermittelung von $b' b'' \dots$ hergeleitet wird.

Um dieses nachzuweisen wählen wir eine dritte Reihe von Punkten

$$c' c'' c''' \dots c^{(n)} \text{ so, dass sie aus den } a's \text{ und } b's$$

zusammengesetzt ist in der Reihenfolge, wie die $a's$ und $b's$ in die Reihe geordnet auf einander folgen, wobei ebenfalls $c' \equiv a', c^{(n)} \equiv a^{(n)} \equiv b^{(n)}$ und nun legen wir die Reihen

$$f/c) f/c') f/c'') \dots f/c^{(n)}$$

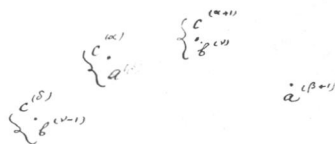
Also zeigen wir, dass jedes $f/c)$ zusammenfällt mit $f/a)$ oder $f/b)$, je nachdem c mit a oder b zusammenfällt. Wir nehmen an, dass dieses schon bis $c^{(k)}$ bewiesen ist, d. h. dass $f/c^{(k)}$ übereinstimmt mit der Reihe $f/a^{(k)}$ oder $f/b^{(k)}$ je nachdem $a^{(k)}$ oder $b^{(k)}$ mit $c^{(k)}$ zusammenfällt, und überfalls alle vorangehenden. Folgen wir nun aufeinander folgende Stellen $c^{(k)}$ u $c^{(k+1)}$ in's Auge. Zunächst ist klar, dass $c^{(k)}$ mit einem der a 's oder b 's zusammenfällt, also muss $c^{(k+1)}$ mit irgend einem Punkte der Reihe a oder b zusammenfallen.

Nehmen wir zunächst an, dass $c^{(k)}$ u $c^{(k+1)}$ mit Punkten zusammenfällt, die derselben Reihe [a] oder [b] angehören. Es sei z. B. $c^{(k)} \equiv a^{(k)}$, $c^{(k+1)} \equiv a^{(k+1)}$, dann ist die Schlussfolgerung, denn da der Voraussetzung, gemäß

$$f/c^{(k)} \equiv f/a^{(k)} \text{ und } a^{(k+1)} \text{ in dem Kreisbogen von } f/a^{(k)} \text{ also auch von } f/c^{(k)} \text{ liegt, so hat man direct } f/c^{(k+1)} \equiv f/a^{(k+1)}$$

Nun seien die Punkte mit denen $c^{(k)}$ und $c^{(k+1)}$ zusammenfällt zwei verschiedenen Reihen angehörig. Es sei z. B. $c^{(k)} \equiv a^{(k)}$ u $c^{(k+1)} \equiv b^{(k)}$. Nun folgt auf $a^{(k)}$ der Punkt $a^{(k+1)}$ da $c^{(k+1)}$ der nächste an $c^{(k)}$ liegende Punkt ist, so muss $b^{(k)}$ zwischen $a^{(k)}$ und $a^{(k+1)}$ liegen.

Demnach liegt $b^{(k)}$ in dem



Conz Bereiche von $G/a^{(13)}$. Ich habe der Annahme nach $G/c^{(12)} = G/a^{(13)}$; daraus kann ich nun herleiten $G/c^{(12+1)} = G/b^{(12)}$ und will nachweisen das

$$\bar{G}/b^{(12)} = G/b^{(12)}$$

Es geht dem $b^{(12)}$ ein $b^{(18-1)}$ voraus, welches mit $c^{(12)}$ zusammenfallen möge. Nun ist der Annahme nach

$$G/c^{(12)} = G/b^{(18-1)}$$

Da nun die ganze Sprache $d^{(18-1)}c^{(12)}$ innerhalb des Conz Bereiches von $G/b^{(18-1)}$ liegt, so können wir hieraus $G/a^{(13)}$ herleiten.

und mit dieser muß bewiesen werden, das sie identisch ist mit $G/a^{(13)}$ dies ist aber ohne Weiteres klar, denn die ganze Sprache $c^{(12)}c^{(12)}$ liegt in dem l. B. von $G/c^{(12)} = G/b^{(18-1)}$

Ich kann aber aus $G/c^{(12)}$ herleiten $G/c^{(12)} = G/a^{(13)}$ und aus $G/b^{(18-1)} = G/c^{(12)}$ eine Reihe $G/a^{(13)}$ da

$G/a^{(13)}$ und $G/a^{(13)}$ innerhalb des gemeinsamen l. Bereiches mit der Reihe $G/c^{(12)}$ gleiche Werte liefern, so müssen sie überhaupt identisch sein, d. h. $G/a^{(13)} = G/a^{(13)}$

Wenn ich nun so fortfahre und aus $G/a^{(13)}$ herleite $\bar{G}/b^{(12)}$ so haben wir zunächst

$$G/c^{(12+1)} = \bar{G}/b^{(12)} \text{ und ebenfalls } G/b^{(12)} = G/b^{(12)} \text{ also ist auch } G/c^{(12+1)} = G/b^{(12)}$$

Nun fällt c mit a u. b zusammen und $c^{(12)}$ mit $a^{(12)}$, $b^{(12)}$. Es folgt also hieraus das

$$f(c^{(1)}) \equiv f(a^{(1)})$$

$$f(c^{(2)}) \equiv f(b^{(2)}) \text{ oder}$$

$$f(a^{(2)}) \equiv f(b^{(2)}) \text{ was zu beweisen war.}$$

Aus diesem Satze folgt ohne Weiteres, dass wenn wir die Variablen einer durch das Element $f(x_1, x_2, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ definierten Function $f(x_1, \dots, x_n)$ auf eine Linie im obigen Sinne beschranken, so erhält die Function $f(x_1, \dots, x_n)$ für jede Stelle dieser Linie einen eindeutig bestimmten Werth.

Man kann also sprechen von Werthen die eine Function definiert durch das Element $f(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ für eine Stelle a'_1, a'_2, \dots bekommt, wenn der Uebergang von a_1, \dots, a_n nach a'_1, \dots, a'_n auf einem bestimmten Wege stattfindet. - Die durch das Element $f(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ definierte Function, hat ausserdem für alle Punkte der Linie den Charakter einer ganzen Function, so weit iberhaupt die Function auf der Linie fortgesetzt werden kann. Es gibt nun auf dieser Linie 2 Punkte iber die die Function nicht fortgesetzt werden kann, ohne den Charakter einer ganzen Function zu verlieren. Es sei nun a'_1, \dots, a'_n eine solche Stelle iber die hinaus die Function nicht fortgesetzt werden kann. Wenn sich nun, während sich x_1, \dots, x_n auf einem bestimmten Wege der Stelle a'_1, \dots, a'_n nähert, der Werth der Function einem bestimmten Werthe a_{n+1} unendlich nähert, so sagen wir a_{n+1} ist der Grenzwert der Function. Es ist noch die Frage, unter

welchen Umständen der Grenzwert a_{n+1} , an den Werten der Function zu adjungiren ist, oder unter welchen Umständen die Stelle $a_{n+1}, a'_1, \dots a'_n$ des definierten Gebietes, dem Gebilde wirklich zu adjungiren ist: Hierfür stellen wir das Kriterium wie bei Functionen einer Variablen. Wenn zwischen den Größen $x_{n+1} - a'_{n+1}, x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n$ eine algebraische Gleichung, besteht für eine Umgebung der Stelle $a'_{n+1}, a'_1, \dots a'_n$, ausdrückbar als Potenzreihe von $x_{n+1} - a'_{n+1}, x_1 - a'_1, \dots x_n - a'_n$ so zählen wir die Stelle $a_{n+1}, a'_1, \dots a'_n$ zu dem Gebilde. Wir sagen also dann, die Function verliere in der Nähe von $a'_1, \dots a'_n$ den Charakter einer ganzen Function behalte aber den einer algebraischen.

Dieselben Begriffe lassen sich sofort auf Systeme von Functionen übertragen. Die Grenzstelle eines Systems von Functionen adjungiren wir zu dem Gebilde, wenn für jede einzelne Function $x_{n+1}, \dots x_{n+r}$ das gilt, was für eine Function gelten muss. Es wird sich zeigen, dass es in diesem Falle ausreichend sein wird, wenn für die Umgebung der Grenzstelle $a'_1, a'_2, \dots a'_n, a'_{n+1}, \dots a'_{n+r}$ zwischen den Größen $x_1 - a'_1, \dots x_{n+r} - a'_{n+r}$ r algebraische Gleichungen bestehen.

Die obige Adjunction wird gerechtfertigt durch folgende Ueberlegung. Betrachten wir eine Function von n Variablen $x_1, \dots x_n$ und bezeichnen den Werth derselben mit

x_{n+1} , so wird durch die Gesamtheit der Wertesysteme $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$, ein Gebilde n ter Stufe in dem Gebiete der $(n+1)$ Variablen definiert, durch das Functionselement $x_{n+1} = G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$.
 Nun bezeichnen wir mit b_1, \dots, b_n die Grenzstelle über die hinaus auf dem vorgeschriebenen Wege die Function nicht fortsetzbar ist und b'_1, \dots, b'_n eine Stelle vorher. Nun nehmen wir an, dass wenn sich b_1, \dots, b_n der Stelle b'_1, \dots, b'_n unendlich nähert, dass sich der Werte b_{n+1} einem bestimmten Werte b_{n+1} nähert. Solange die Stelle b_1, \dots, b_n nicht erreicht ist, besteht zwischen x_1, \dots, x_n, x_{n+1} , die analytische Gleichung

$$x_{n+1} = \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n | b'_1, \dots, b'_n)$$

wo \mathcal{F} eine Potenzreihe von x_1, \dots, x_n bedeutet. Es kann möglicher Weise der Fall eintreten, dass wir eine Gleichung von der Form erhalten

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n | b_1, \dots, b_n) = 0$$

die befriedigt wird für Werte in der Nähe von b_1, \dots, b_n . Näher sieht man x_{n+1} , denn b_{n+1} , wenn sich $x_1, \dots, x_n, b_1, \dots, b_n$ nähert, so können wir mit Recht die Stelle b_1, \dots, b_n , dem Gebiete zufügen, da ja die Gleichung $F=0$ alle Punkte des Gebietes $x_{n+1} = G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ bis zu b_1, \dots, b_n , enthält und für die Grenzstelle, für welche die Reihen zugewendet aufhören, ebenfalls gültig ist. Damit die Gleichung besteht $F=0$ muss, wenn sich aus $x_{n+1} = G(x_1, \dots, x_n | a_1, \dots, a_n)$ die Reihe herleite

$$x_{n+1} = G(x_1, \dots, x_n | b'_1, \dots, b'_n) \text{ für } x_{n+1} \text{ dies}$$

einschleibe in F , die Gleichung $F=0$ identisch befriedigt werden, denn die Gleichung gilt für jedes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ in der Umgebung von b_1, \dots, b_{n-1} .

Ebenso diese Grenzstellen werden solche sein, wo die Functionen charakteristische Singularstellen zeigen. Es wird sich z. B. zeigen, daß solche singular Stellen die Mehrdeutigkeit der Functionen verursachen ($y = \sqrt{x-b}$), daß bei Functionen mehrerer Variablen diese singular Stellen die Unbestimmtheit der Functionen mit sich bringen. u. s. w. Das letztere findet sogar schon bei Functionen einer Variablen z. B. bei $e^{\frac{1}{x}}$ statt; es zeigt sich, daß in der Nähe der Stelle $\alpha=0$ die Function $e^{\frac{1}{x}}$ jedem beliebigen Werte beliebig nahe gebracht werden kann, was sich durch die Verschiedenheit der Wege bewerkstelligen läßt.

Auf diese Weise haben wir den allgemeinsten Begriff der analytischen Abhängigkeit entwickelt. Zur Vervollständigung derselben bleiben noch einige Sätze übrig, die wir jetzt beweisen werden.

II. Lehrsatz. Es sei ein System von r Functionen von n Variablen $f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots f_r(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ definiert durch die Elemente für die Umgebung einer und derselben Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. $f_{r+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots f_{r+m}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ kann möglicherweise zwischen diesen Functionen in der Umgebung der Stelle $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Gleichung von der Form bestehen

$$G(p_1 \dots p_r) = 0$$

wo G eine ganze Funktion oder eine beständig convergirende Reihe ist. Es ist zu beweisen, dass dieselbe Gleichung besteht für alle Systeme aller aus $p_1/a_1 \dots 1/a_1 \dots p_r/a_r \dots 1/a_r$ für jede beliebige Stelle $b_1 \dots b_n$ ableitbaren Elemente.

$$p_1/a_1 \dots 1/b_1 \dots p_r/a_r \dots 1/b_r \dots$$

Anderem Ende wählen wir innerhalb des C. B. von allen $p_1 \dots p_r$ eine Stelle $b_1 \dots b_n$ und leiten aus den Elementen

$$p_u/a_1 \dots a_n/a_1 \dots a_n$$

$$p_u/a_1 \dots a_n/b_1 \dots b_n$$

Setzen wir dies in G ein, so bekommen wir, wenn wir die Glieder nach Potenzen von $a_1 \dots b_1 \dots a_n \dots b_n$ ordnen

$$G(p_1 \dots p_r) = \mathcal{F}(a_1 \dots b_1 \dots a_n \dots b_n)$$

Da nun in einer gewissen Umgebung von $b_1 \dots b_n$

$$p_u/a_1 \dots a_n/a_1 \dots a_n = p_u/a_1 \dots a_n/b_1 \dots b_n$$

so muss für dieselbe Umgebung von $b_1 \dots b_n$

$$G(p_1 \dots p_r) = \mathcal{F}(a_1 \dots b_1 \dots a_n \dots b_n) = 0$$

dies ist nur dann möglich, wenn die Coefficienten einzeln Null sind, d. h. die Gleichung

$$G(p_1 \dots p_r) = 0$$

gilt also überall wo $p_u/a_1 \dots a_n/b_1 \dots b_n$ existirt, d. h. sie gilt auch für die Umgebung der Stelle $b_1 \dots b_n$ für alle $a_1 \dots a_n$ wie weit die Entwicklung von $p_u \dots$ möglich ist. Auf diese Weise schliessend kommen wir zu dem Resultate, dass die

Gleichung für alle x_1, \dots, x_n gilt, wie weit wir überhaupt mit der Entwicklung der Reihen gelangen können.

Zusatz Wenn sich Q, \dots, Q_v ganz bestimmten endlichen Grenzen nähern, wenn x_1, \dots, x_n von a_1, \dots, a_n an a'_1, \dots, a'_n unendlich nahe kommen, so wird die Gleichung auch hierfür befriedigt. Wenn also a'_1, \dots, a'_n dem Gebiete gehört, so gilt die Gleichung $Q, \dots, Q_v = 0$ überall.

III Jetzt kommt folgender Satz: Geht man von einem Systeme r Functionen Q_1, \dots, Q_r zwischen n Variablen x_1, \dots, x_n aus und setzt $x_{n+1} = Q_1, x_{n+2} = Q_2, \dots, x_{n+r} = Q_r$ so wird hierdurch ein Gebilde n ter Stufe im Gebiete der $n+r$ Variablen definiert. Wir werden zeigen, daß wir auf mannigfaltige Weise, sei es aus dem System dieser ursprünglichen Gleichungen, sei es aus dem System der daraus ableitbaren Gleichungen, andere Gleichungen erhalten können, in denen andere Größen x als Functionen der übrigen erscheinen, und daß das neue hierdurch definierte Gebilde identisch ist mit dem ursprünglichen. Wenn z. B. $x_2 = \sqrt[3]{x_1 - a_1}$ gegeben ist, so soll bewiesen werden, daß das hieraus hergeleitete Element $x_1 = \sqrt[3]{x_2 - a_2}$ identisch dieselbe Function definiert wie die erste Gleichung. Wenn wir also abdam von einem Gebilde n ter Stufe im Gebiete von $(n+r)$ Variablen sprechen, so kann man beliebige r der Variablen als Functionen der n übrigen ansehen. Dieser Satz braucht einige Vorbereitung.

sätze, welche selbst sehr wichtige Sätze der Theorie sind, und die wir zunächst entwickeln wollen. Wir wollen im Folgenden mit (u_1, \dots, u_n) alle Glieder eines Ausdrückes bezeichnen, in denen die Größen u_1, \dots, u_n in der α -ten Dimension vorkommen, und mit $(u_1, \dots, u_n)_{\alpha+1}$ die Glieder der $(\alpha+1)$ -ten Dimension u. s. w. Ferner soll, wenn wir einer Größe einen griechischen Index beizugeben, diese Größe das System aller ähnlichen Größen bezeichnen, welche verschiedene Inverse haben, so bezeichnet z. B. die Gleichung

$$a_{\alpha,1} u_1 + a_{\alpha,2} u_2 + \dots + a_{\alpha,n} u_n = v_\alpha$$

das System aller Gleichungen, die man erhält, wenn man dieselbe die Wërthe 1, 2, ... bis zu einer gewissen Grenze gibt.

Lehrsatz Denken wir uns eine Potenzreihe gegeben von n Variablen u_1, \dots, u_n .

$$F(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\alpha} (u_1, \dots, u_n)_{\alpha} \quad 1$$

(wo also $(u_1, \dots, u_n)_{\alpha}$ eine homogene Function α -ten Dimension ist, welche innerhalb eines bestimmten konv. Bereiches konvergent ist). Setzen wir nun in diese Potenzreihe

$$u_{\mu} = \mu_{\mu} (v_1, \dots, v_n) = \sum_{\alpha} (v_1, \dots, v_n)_{\mu, \alpha} (\mu = 1, 2, \dots, n) \quad 2$$

welche Potenzreihen konvergent sein sollen, und für $v_1, v_2, \dots, v_n = 0$ die Wërthe $\mu_{\mu} = 0$ liefern, so kann man zunächst nach dem allgemeinen Satze (Seite ...) nachdem man in jedes einzelne Glied $(u_1, \dots, u_n)_{\alpha}$ die Potenzreihen eingesetzt, das Resultat hierauf nach Potenzen von v_1, \dots, v_n ordnen und erhält auf diese

Weise für einen bestimmten Bereich

3

$$\Psi(x_1, \dots, x_m) = \Psi_0(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\alpha} \frac{\Psi_{\alpha}}{\alpha} (x_1, \dots, x_m)$$

Folgt wir nun irgend einen Coefficienten von Ψ_0 ins Auge, z. B. irgend einen Coefficienten in der homogenen Function v ter Dimension so wird es in dem Substitutionsresultate, d. h. in der Reihe

$$\Psi_0(x_1, \dots, x_m) = \sum_{\alpha} \frac{\Psi_{\alpha}}{\alpha} (x_1, \dots, x_m)$$

erst in den Gliedern v ter Dimension und höherer Ordnung nicht aber in den Gliedern niedriger Dimensionen.

In den Gliedern v ter Dimension wird es linear erscheinen und alle Coefficienten von Gliedern der v ten Dimension in α , werden in dem Resultate erst in Gliedern v ter Dimension erscheinen und zwar linear.

Dies sieht man sogleich, wenn man folgendes überlegt.

Setzen wir in die Function

$$f(x_1, \dots, x_m) \text{ statt } x_1, x_2, \dots, x_m$$

die Werte aus α ein, so erhalten wir hierdurch die Glieder, welche in Bezug auf die v 's sind von der α ten, $\alpha+1$ ten, $\alpha+2$ ten ... ten Dimension, und zwar sieht man, daß die Glieder aus

$$\Psi_{\mu} = \sum_{\alpha} \frac{\Psi_{\alpha}}{\alpha} (x_1, \dots, x_m)_{\mu, \alpha}, \text{ welche von der } \beta \text{ten}$$

Dimension sind, werden uns in solchen Gliedern vorkommen, deren Dimension wenigstens $(\alpha + \beta - 1) \alpha + \beta \alpha$ ist. Denn z. B. das Glied $\frac{\Psi_{\alpha}}{\alpha} (x_1, \dots, x_m)_{\mu, \alpha}$ kommt im α ten, $\alpha-1$ ten ... ten

Grade vor. Der niedrigste Grad in welchem $(x_1 \dots x_n)^{\alpha, \beta}$ vorkommt ist also 1; da aber alle Glieder, die hier in Betracht kommen aus Gliedern von der d ten Dimension entstehen, so wird das Glied $(x_1 \dots x_n)^{\alpha, \beta}$ noch mit andern Gliedern erscheinen müssen, und zwar sei dabei mit dem Producte von $(d-1)$ andern Gliedern vorkommt. Nun ist offenbar die niedrigste Dimension die durch Producte von $d-1$ Gliedern 1ten, 2ten, 3ten Dimension hergeleitet werden kann, die $(d-1)^{te}$. Das Glied $(x_1 \dots x_n)^{\alpha, \beta}$ wird also mit diesen Gliedern die möglichste niedrigste $(d+\beta)^{te}$ Dimension liefern. Nun kann aber das Glied vorkommen können in der d ten Potenz. Es wird also dann ein Glied von der Dimension α, β liefern. Nun ist aber sobald $d > 1, \beta > 1$

$$\alpha, \beta > d + \beta - 1,$$

Denn es sei $d = d' + 1$

$$\beta = \beta' + 1 \text{ so ist}$$

$$d + \beta = d' + \beta' + 2 \text{ und}$$

$$d, \beta = d', \beta' + d' + \beta' + 1 = d' + \beta' - 1 + d', \beta'$$

also sicher $d, \beta > d' + \beta' - 1$. Im Falle $d = 1, \beta =$ beliebig ist aber $d, \beta = d + \beta - 1$. Ferner kann es vorkommen noch in der $(d-1)^{ten}$ $(d-2) \dots$ Potenz, resp. multiplicirt mit andern Gliedern in $1^te, 2^te, 3^te$ Potenz vorkommen; die niedrigste Dimension wird offenbar erzeugt, wenn wir jedes Mal die $(d-1)(d-2) \dots$ Potenz von $(x_1 \dots x_n)^{\alpha, \beta}$ multipliciren resp. mit der 1ten 2ten Potenz von Gliedern von der

ten Dimension aus den übrigen x_μ , also (x_1, \dots, x_n) . -- Ist
 mit dem Produkte 2, 3 solcher Glieder. Hierdurch werden
 allgemeine Glieder entstehen, die in Bezug auf die x 's von
 der $(\alpha - n) / \beta + n$ ten Dimension sind, wo $n = 1, 2, \dots$
 bis höchstens $(\alpha - 1) / \beta$ gehen kann. Man sehen wir, daß der Aus-
 druck $(\alpha - n) / \beta + n$ größer ist, oder gleich $\alpha + \beta - 1$. Wir sehen
 also hieraus, daß wenn wir in u, \dots, u_n für n, \dots, n_n
 aus 2 setzen und dann nach Dimensionen von x_1, \dots, x_n
 ordnen das Glied $(x_1, \dots, x_n) / \beta$ zum ersten Mal in den Gliedern
 der $(\alpha + \beta - 1)$ ten Dimension vorkommt, und in keinem nie-
 drigeren. Auch sieht man sofort, daß die Coefficienten von
 $(x_1, \dots, x_n) / \beta$ hierin linear vorkommen.

Man denken wir uns in $\sum_{\mu=1}^n (x_\mu, \dots, x_n) / \beta$ für u die Werte
 2 eingesetzt, und fassen das Glied v ter Dimension von einem
 x_μ ins Auge, so wird offenbar wenn wir uns das Resultat
 nach Dimensionen von x_1, \dots, x_n geordnet denken, nach
 den Vorigen das Glied niedrigerer Dimension, in dem das
 Glied v ter Dimension von x_μ zum ersten Mal vorkommt
 von der

$(\alpha + v - 1) / \beta$ ter Dimension sein, und die
 Coefficienten des betrachteten Gliedes, werden in diesem
 nur linear vorkommen u. z. b. war.

Netzt wollen wir folgende Aufgabe lösen, welche für die The-
 orie der Functionen von größerer Bedeutung ist, und die uns

nach als Hilfsatz, zum Beweise unseres Hauptsatzes dienen wird.
Aufgabe Angenommen es sei zwischen n Variablen x_1, \dots, x_n gegeben eine gewisse Anzahl von Gleichungen, die m sein mögen, so daß $m < n$, von der Form

$$g_\mu(x_1, \dots, x_n) a_\mu = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m) \quad 1$$

Sie mögen sämmtlich für $x_\mu = a_\mu$ befriedigt werden. Wir wählt man nun alle andern Systeme des x_1, \dots, x_n , deren absoluter Restrikt eine gewisse Grenze nicht überschreiten und die den Gleichungen genügen. Diese Aufgabe wollen wir zunächst unter folgender Voraussetzung lösen. Es sei g_μ entwickelt nach Potenzen von $x_1, x_2, \dots, x_n - a_n$, so muß das constante Glied Null sein und wir setzen voraus, daß g_μ mit Gliedern n ter Dimension anfängt, auf diesen Fall lassen sich die allgemeinen Gleichungen zurückführen. Unter dieser Voraussetzung setzen wir

$$x_1 - a_1 = u_1, \quad x_2 - a_2 = u_2, \dots \text{ und erhalten alsdann die}$$

Gleichungen

$$h_{\mu,1} u_1 + \dots + h_{\mu,n} u_n + g_\mu = 0 \quad (\mu = 1, \dots, m) \quad 2$$

wobei die Glieder höherer Dimensionen bezeichnet und wo $h_{\mu,n}$ coeff. sind, die nicht sämmtlich Null sind. In diesen Gleichungen nehmen wir noch $(n-m)$ lineare Functionen von u_1, \dots, u_n und $(n-m)$ anderen Variablen t_ν von der Form

$$h_{\nu,1} u_1 + \dots + h_{\nu,n} u_n = t_\nu \quad (\nu = 1, \dots, n-m) \quad 2$$

wobei die Coefficienten $h_{\nu,1}, \dots, h_{\nu,n}$ willkürlich sind und so gewählt

werden müssen, daß die Determinante aller n^2 Coeff. im 2^{ten} Glied nicht verschwindet, d. h.

3

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$$

Die Aufgabe reducirt sich nun auf folgende.

Man soll alle Wërthsysteme von u_1, \dots, u_n finden, die diesen Gleichungen 1. u. 2. genügen.

Denken wir uns die Gleichungen aufgelöst nach den u 's so erhalten wir

$$u_\mu = v_\mu + U_\mu \quad (\mu = 1, \dots, n)$$

wo v_μ eine lineare Function von t_1, \dots, t_n und U_μ lineare Function der g 's ist.

Netzt zeigen wir, daß man ganz bestimmte Potenzreihen der t 's finden kann für die u 's, die die Gleichung formal befriedigen, das heißt, daß wenn man die Reichen in u 's, die Ausdruck auf der Linken und Rechten identisch sind.

Alsdann zeigen wir, daß diese Potenzreihen einen gemeinsamen low. Bezirk haben, den man so beschreiben kann, daß diese Potenzreihen den ursprünglichen Gleichungen genügen, und schließlich, daß diese Potenzreihen alle Systeme der u 's liefern, die eine gewisse Grenzweite über-schreiten. Wir nehmen für die u 's Potenzreihen mit