Prof. Guillermo Corbacho C.
gcorbach@uc.cl

ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA
Ejercicios Psu

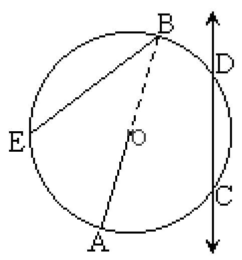
Presentación:
Los ejercicios que se exponen son extractos de diversas publicaciones escritas en Chile, orientadas al apoyo de postulantes a la prueba de selección universitaria (PSU). Sin embargo, por lo general, las publicaciones vistas no contienen la publicación de las soluciones de los mismos, sino que en muchos casos, solo señalan la respuesta final, indicando para ello la alternativa correcta. Para compensar aquello, el presente trabajo es una recopilación en la cuál se ilustran las respectivas soluciones a los mismos. Con lo cual los postulantes podrán interiorizarse de las propiedades y de los procedimientos que suelen intervenir en su solución.
Este trabajo está ideado también para ser consultado por profesores, dado que, según mi experiencia personal, la formación universitaria está orientada más a las matemáticas superiores en lugar de las necesidades prácticas de la educación básica y media.

A continuación -y volviendo por fin a lo que aquí nos atañe. La presentación de ejercicios PSU considerados bajo este titulo.

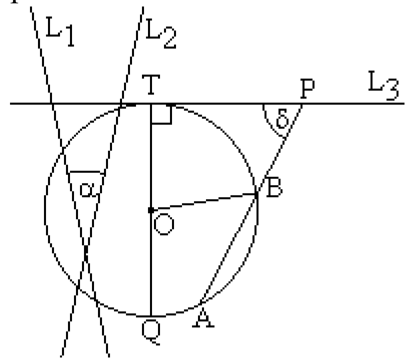
Consideración Importante:

Convendremos que para indicar el nombre de un arco, lo haremos mencionando los puntos extremos del mismo, en sentido contrario a las agujas del reloj.

1. Con respecto a la figura, es **falso** que:
   A) $\overline{EB}$ es cuerda.
   B) $\sphericalangle EBA$ es ángulo inscrito.
   C) $\overline{CD}$ es cuerda.
   D) $\overline{OA}$ es radio.
   E) $\overline{AB}$ es diámetro.



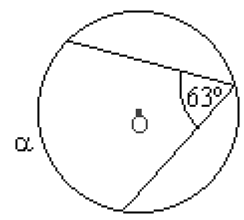
Solución:
Presentamos en la siguiente figura, alguno de los elementos que componen una ⊗.



- O es centro de la ⊗;
- $\sphericalangle QOB$ y $\sphericalangle BOT$ son ángulos del centro;
- $\sphericalangle OBA$ es ángulo inscrito;
- $\widehat{BT}$ es el arco subtendido por el $\sphericalangle BOT$;
- $\overline{OT}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OB}$ son radios de la ⊗;
- $\overline{AB}$ cuerda de la ⊗;
- $\overline{QT}$ diámetro de la ⊗;
- L_1 y L_2 son rectas secantes a la ⊗;
- L_3 es recta tangente a la ⊗;
- α es ángulo interior de la ⊗;
- δ es ángulo exterior a la ⊗.

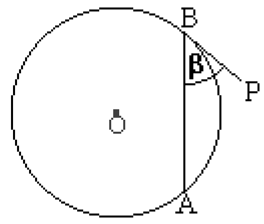
A primera vista, todas las alternativas parecen correctas, pero toda cuerda es un segmento rectilíneo que une dos puntos de la ⊗ y no se extiende más allá de ella. Es decir, no es una recta como señala C).
La alternativa falsa es C), pues toda cuerda es un segmento rectilíneo cuyos puntos que la conforman no quedan fuera de la frontera del circulo definido por la circunferencia, sino que une dos puntos de la misma, sin extenderse más allá de ella. Mientras que C) señala a una recta secante, la cuál se extiende más allá de los puntos de una circunferencia.

2. El arco α de la figura mide:
   A) 31,5º
   B) 63º
   C) 90º
   D) 126º
   E) Otro valor.



Solución:
Todo arco mide el doble que el ángulo inscrito que lo subtiende, por lo tanto, α = 126º.
Alternativa D).

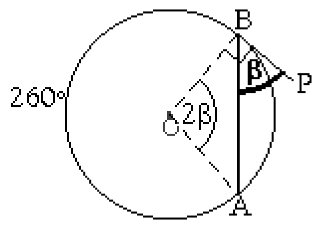
3. En la figura el arco $\overset{\frown}{BA} = 260º$ (medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas de un reloj), mientras que $\overline{PB}$ es tangente a la ⊙. Entonces, β mide:



   A) 260º
   B) 130º
   C) 100º
   D) 65º
   E) 50º

<u>Solución</u>:
Convendremos que para señalar los puntos extremos del arco y la dirección a través de el, que determina su medida en grados, será en sentido contrario a las agujas del reloj.

Todo ángulo del centro mide el doble que el ángulo semi inscrito –e inscrito- del arco que subtiende. Por lo tanto, $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle PBA = 2\beta$. Tal como se ilustra en la siguiente figura.



Además:

$\overset{\frown}{BA} + 2\beta = 360^\circ$

$260^\circ + 2\beta = 360^\circ$

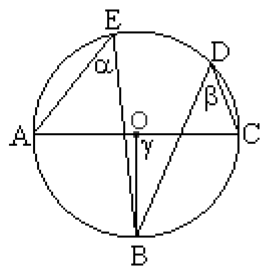
$2\beta = 360^\circ - 260^\circ = 100^\circ \quad / : 2$

$\Rightarrow \beta = 50^\circ$

Alternativa E).

4. En la figura $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{BC}$, entonces es verdad que:

   I. $\alpha = \beta$
   II. $\alpha + \beta = \gamma$
   III. $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$



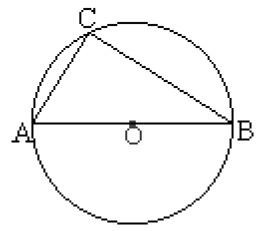
   A) Solo I.
   B) I y II.
   C) II y III.
   D) I y III
   E) I, II y III.

<u>Solución</u>:
I. α y β son ángulos inscritos que subtienden el mismo arco de circunferencia, por lo que son iguales. $\alpha = \beta$. I. es verdadera.
II. Todo ángulo del centro mide que su ángulo inscrito.
Entonces:

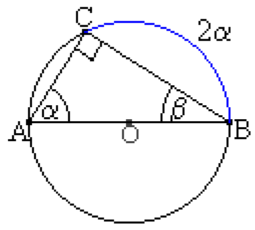
$$\gamma = 2\alpha$$
$$= \alpha + \alpha \qquad \text{y por ser } \alpha = \beta$$
$$= \alpha + \beta$$

II. Es verdadera.
III. Como $\gamma = 2\alpha \Rightarrow$ III. Es falsa.
Solo I y II.
Alternativa B).

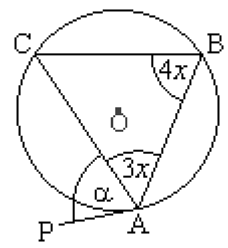
5. En la figura, AC = 5 [cm] y CB = 10 [cm]. ¿Cuánto mide el arco $\overset{\frown}{BC}$?
   A) 30º
   B) 60º
   C) 90º
   D) 120º
   E) Falta información.



<u>Solución</u>:
El triángulo ABC tiene al diámetro de la ⊗ por uno de sus lados, por lo tanto, es rectángulo en C y con $\overline{AB}$ como hipotenusa.
Esto significa que hay 90º en C y 90º a repartir entre los ángulos α y β.
Como los lados $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ están en la razón 1:2, entonces los ángulos que se oponen a ellos están respectivamente, en la misma razón:
Los valores son únicos: $\beta = 30^\circ$ y $\alpha = 60^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 120^\circ$.
Pues todo arco mide el doble que el ángulo inscrito que lo subtiende.
Alternativa D).

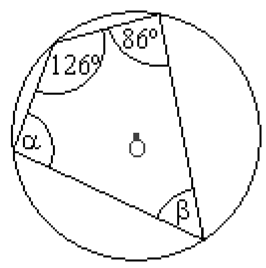


6. En la figura, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$. La medida del ángulo α es:
   A) 10º
   B) 40º
   C) 54º
   D) 72º
   E) Otro valor.



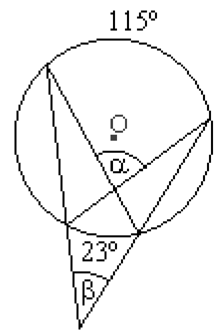
<u>Solución</u>:
Entonces, el ΔABC es isósceles y $\gamma = 3x$ por ser ángulo basal con 3x.
Luego, como la suma de los ángulos interiores es igual a 180º, se tiene:
$10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$.
α y $\beta = 4x$ tienen igual medida, por subtender el mismo arco de ⊗.
$\Rightarrow \alpha = \beta = 4 \bullet 18^\circ = 72^\circ$
Alternativa D).

7. El valor de $\alpha - \beta$ es:
   A) 180º
   B) 94º
   C) 54º
   D) 50º
   E) Otro valor.



<u>Solución</u>:
En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos en son suplementarios.
$\Rightarrow \alpha = 94^\circ$ y $\beta = 54^\circ \Rightarrow \alpha - \beta = 40^\circ$.
Alternativa E).

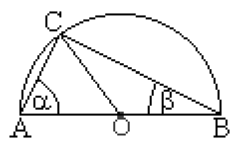
8. Con respecto a la figura, es verdadero que:
   I. $\alpha > \beta$
   II. $\alpha + \beta = 115º$
   III. $\alpha - \beta = 23º$



A) Solo II.
B) I y II.
C) I y III.
D) II y III.
E) I, II y III.

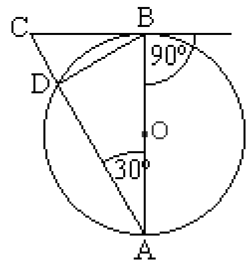
Solución:
Analicemos cada alternativa:
I. $\alpha = \dfrac{115º + 23º}{2} = \dfrac{138º}{2} = 69º$ $\qquad \beta = \dfrac{115º - 23º}{2} = \dfrac{92º}{2} = 46º$ $\qquad \alpha > \beta$
II. Utilizando I: $\alpha + \beta = 69º + 46º = 115º$
III. $\alpha - \beta = 69º - 46º = 23º$
I, II y III son verdaderas.
Alternativa E)

9. Con respecto a la figura es falso que:
   A) $\sphericalangle ACB = 90º$
   B) $\alpha + \beta = 90º$
   C) $\sphericalangle ACO = \alpha$
   D) $\sphericalangle COB = 2\alpha$
   E) $\sphericalangle OAC = \beta$



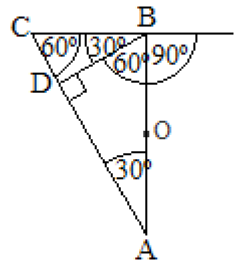
Solución:
Viendo cada alternativa:
A) El triángulo ABC tiene por uno de sus lados al diámetro $\overline{AB}$ de la circunferencia. Esto implica que el ángulo opuesto al diámetro es rectángulo. A) es correcta.
B) Lo anterior implica que $\alpha + \beta = 90º$ debido a que la suma de los ángulos interiores es igual a 180º. B) es correcta.
C) $\overline{AO} = \overline{OC} = R \Rightarrow$ El ΔAOC es isósceles con $\overline{AO}$ y $\overline{OC}$ lados basales y sus respectivos ángulos opuestos iguales. C) es correcta.
D) $\sphericalangle COB = 2\alpha$ es cierta debido a que el primero es ángulo del centro que subtiende el mismo arco de circunferencia que α.
E) Claramente por descarte, debe ser la alternativa falsa.
Alternativa E).

10. Con respecto a la figura, es verdadero que:



I. $\sphericalangle DBC = 30^\circ$
II. $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ABD$
III. $\sphericalangle ADB = 60^\circ$

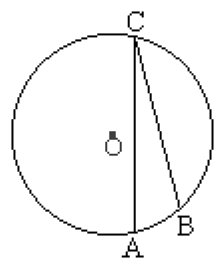
A) Solo I.
B) Solo II.
C) I y II.
D) I y III.
E) II y III.



Solución:
El ángulo semi inscrito mide 90º $\Rightarrow$ El triángulo ABC es rectángulo en B con $\sphericalangle ABC = 90^\circ$ y $\sphericalangle ACB = \sphericalangle DCB = 60^\circ$ para completar 180º. (*)

Además, el Δ ABD tiene por uno de sus lados al diámetro de la circunferencia, por lo tanto, es rectángulo en D, con el $\sphericalangle ADB = 90^\circ$.
Así, en el Δ DBC, $\sphericalangle CDB = 90^\circ$ pues es rectángulo en D y por (*), $\sphericalangle DCB = 60^\circ$ con lo que no queda más que el $\sphericalangle DBC = 30^\circ$, para completar los 180º en el Δ DBC. Al completar ángulos, la figura de la derecha ilustra lo indicado.
I. es verdadero.
II) De lo indicado en e ilustrado en la figura, se desprende que II. Es verdadero.
III) Y $\sphericalangle ADB = 90^\circ$, con lo cual, III. Es falso.
Sólo I y II son verdaderas.
Alternativa C)

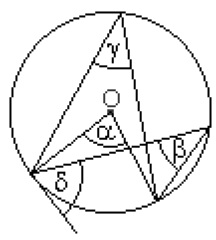
11. $\sphericalangle ACB = 15^\circ$; $\sphericalangle AOB =$



A) 30º
B) 9º
C) 18º
D) 72º
E) Otro valor.

Solución:
$\sphericalangle$AOB = 2$\sphericalangle$ACB = 30º
Alternativa A).

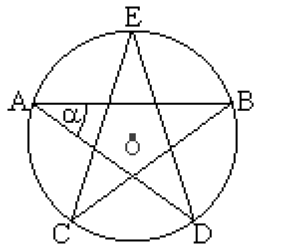
12. Según la figura, es **falso** que:



A) $\beta = \delta$
B) $\gamma = \beta$
C) $\alpha = 2\gamma$
D) $\delta = \alpha$
E) $\alpha = 2\beta$

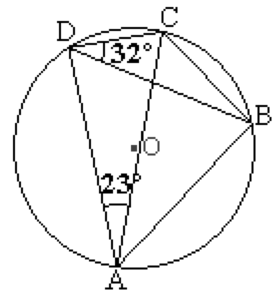
Solución:
Todos los ángulos inscritos y/o semi-inscritos subtienden el mismo arco de circunferencia, por lo tanto, son iguales:
δ = β = γ.
Sin embargo, α es ángulo del centro, por lo que mide el doble que δ, β y γ.
Por lo que $\delta = \alpha$ es falso.
Alternativa D).

13. Las cinco cuerdas de la figura son congruentes, el $\measuredangle \mathrm{DAB} = \alpha$ mide:
    A) 108º
    B) 72º
    C) 60º
    D) 36º
    E) Otro valor.

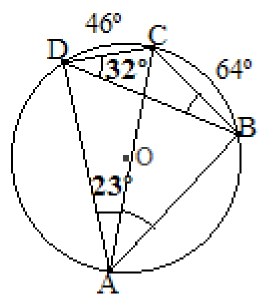


Solución:
La circunferencia es dividida en cinco partes congruentes. Por lo tanto, cada ángulo del centro mide $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ \Rightarrow$ cada ángulo inscrito -entre ellos el $\measuredangle \mathrm{DAB} = \alpha$, miden la mitad que cada ángulo centro, es decir, miden: 72º/2 = 36º.
Alternativa E).

14. La medida del $\measuredangle BCD$ en la figura tiene un valor de:
    A) 55º
    B) 125º
    C) 148º
    D) 157º
    E) Otro valor.



Solución:
Podemos completar las medidas de los arcos de circunferencia, teniendo presente que estos miden el doble que cada ángulo inscrito que lo subtiende y viceversa, -mutatis mutandi, "cambiando lo que hay que cambiar"- que los ángulos inscritos son a su vez la mitad que los arcos que subtienden, entonces:
$\measuredangle DBC = 23^\circ$ y $\measuredangle CAB = 32^\circ$

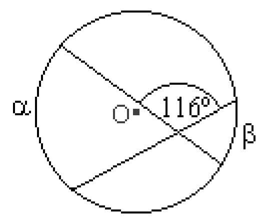


Como los ángulos opuestos de todo cuadrilátero inscrito son suplementarios,

$$\begin{aligned}\measuredangle \mathrm{BCD} &= 180^\circ - (23^\circ + \measuredangle \mathrm{CAB}) \\ &= 180^\circ - (23^\circ + 32^\circ) \\ &= 180^\circ - 55^\circ \\ &= 125^\circ\end{aligned}$$

Alternativa B).

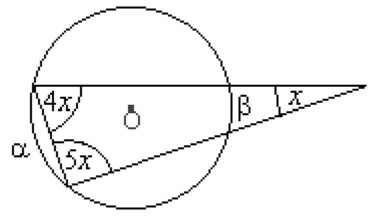
15. El valor de $\alpha + \beta$ en la figura es:
    A) 64º
    B) 116º
    C) 128º
    D) 232º
    E) Otro valor.



Solución:
La medida del ángulo interior que resulta de promediar las medidas de los respectivos ángulos del centro es el suplemento de 116º, esto es: 64º.
Por lo tanto, $64^\circ = \frac{\alpha + \beta}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 128^\circ$
Alternativa C).

16. En la figura, $\alpha = 2\beta$. ¿Cuánto mide α?

A) 18º
B) 36º
C) 72º
D) 144º
E) Otro valor.



Solución:
Los ángulos interiores suman 10x = 180º ⇒ x = 18º
x es ángulo exterior $\Rightarrow x = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$

$\Rightarrow 2x = \alpha - \beta$ y ahora reemplazamos $\alpha = 2\beta$ y $x = 18^\circ$

$36^\circ = \beta$

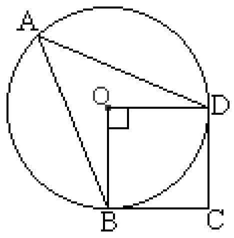
$\Rightarrow 72^\circ = \alpha$

Alternativa C).

17. En la circunferencia, $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ tangentes a ella y el $\sphericalangle BOD$ mide 90º. Entonces, es verdad que:

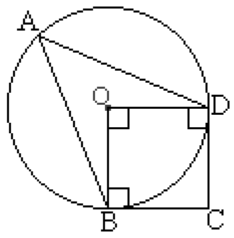
I. OBCD es cuadrado. II. $\sphericalangle BAD = \dfrac{\sphericalangle DCB}{2}$ III. $\sphericalangle ABO + \sphericalangle ADO = \sphericalangle BAD$

A) Solo I
B) Solo II
C) Solo III
D) I y III
E) I, II y III



Solución:
Analizaremos cada aseveración:

I. $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ son tangentes a la ⊗, por lo que los ángulos del vértice de la figura OBCD son, en los puntos de tangencia a la ⊗, rectos. Completamos estos datos en la fig. del enunciado.



⇒ Por ser OBCD un cuadrilátero, la suma de sus ángulos interiores es igual a 360º, con lo que concluimos que el $\sphericalangle BCD$ mide 90º y por tanto, todos los ángulos son rectos. Esto último implica que las prolongaciones de los segmentos jamás se desvían hacia el lado opuesto. Los lados opuestos son //s entre sí.

Como además, $\overline{CB}$ y $\overline{CD}$ son tangentes a la ⊗ originadas desde un mismo punto exterior ⇒ CB = CD. Y OB = OD por ser radios de la ⊗.

Lo que asegura que la figura OBCD sea un cuadrado es:

i. que tiene dos parejas contiguas de distinto tamaño. Descartando a todo otro cuadrilátero que no sea el rombo.
ii. Todos sus ángulos son iguales o recto. Lo que descarta al rombo, dejando solo el cuadrado. Por lo tanto, I) es verdadera.

II. Por definición de ángulo inscrito:

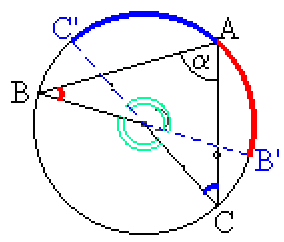
$\sphericalangle BAD = \dfrac{\sphericalangle BOD}{2}$ por ser $\sphericalangle BOD$ del centro, que subtiende el mismo arco.

$= \dfrac{\sphericalangle DCB}{2}$ por ser $\sphericalangle BOD$ del centro, que subtiende el mismo arco.

II) es verdadera.

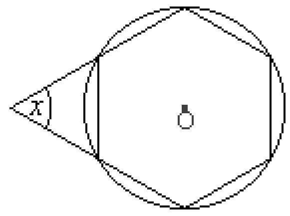
III) En el tipo de figuras que se ilustra a continuación, siempre se cumple la relación:

$$\alpha = \sphericalangle B + \sphericalangle C$$

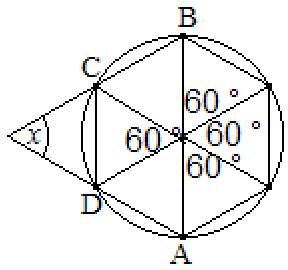


Por lo que III) es verdadera. I, II y III) son ciertas. Alternativa E).

18. En la circunferencia, el polígono inscrito es regular. ¿Cuánto mide x?
    A) 80º
    B) 75º
    C) 60º
    D) 45º
    E) Faltan datos.

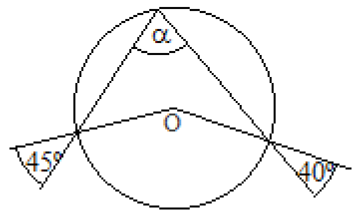


Solución:
El polígono regular de seis lados divide a la circunferencia en **seis** arcos congruentes cada uno de medidas iguales a 360º/**6** = 60º.
x es ángulo exterior, por lo que su medida es l a semirrecta entre el mayor y menor arco que subtienden las secantes a la circunferencia.

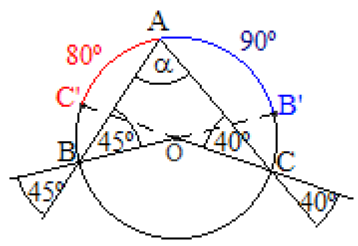


$$x = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2} = \frac{180º - 60º}{2} = \frac{120º}{2} = 60º$$ Alternativa C).

19. La medida del ángulo α es:
    A) 170º
    B) 95º
    C) 85º
    D) 42,5º
    E) falta información.



Solución:
Hemos exagerado la forma de la figura para señalar que en ilustraciones de esta forma, el mayor ángulo inscrito es siempre igual a la suma de los otros dos ángulos inscritos. O también, el mayor ángulo inscrito es igual a la suma de los respectivos ángulos opuestos por el vértice a los otros ángulos inscritos –como en este caso-.
Alternativa C).



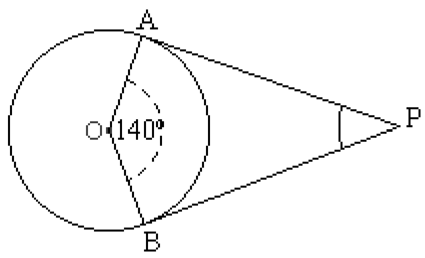
La razón estriba en lo siguiente:
α es ángulo inscrito, por tanto

$$\alpha = \frac{\measuredangle BOC}{2} = \frac{\measuredangle B'OC'}{2} \quad (\measuredangle s \text{ op. por vértice})$$

$$= \frac{\left(\widehat{B'A} + \widehat{AC'}\right)}{2} = \frac{(2 \bullet 45º + 2 \bullet 40º)}{2} = \frac{\cancel{2}(45º + 40º)}{\cancel{2}} = 85º$$

Alternativa C)

20. $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes a la ⊗. Las medidas del $\widehat{AB}$ y del $\measuredangle APB$ son respectivamente:
    A) 140º y 40º
    B) 140º y 80º
    C) 220º y 40º
    D) 280º y 40º
    E) 280º y 80º

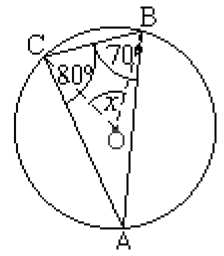


Solución:
- $\widehat{AB} + \widehat{BA} = 360º$
  $\widehat{AB} + 140º = 360º$
  $\Rightarrow \widehat{AB} = 220º$

- Y el $\measuredangle APB$ es exterior, por tanto:
  $$\measuredangle \text{APB} = \frac{220º - 140º}{2} = \frac{80º}{2} = 40º$$

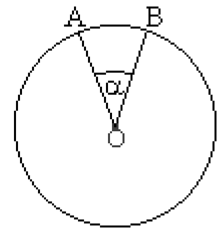
Alternativa C).

21. La medida del $\sphericalangle$ BOC es:
    A) 50º
    B) 60º
    C) 75º
    D) 105º
    E) 150º



Solución:
x y $\sphericalangle$CAB subtienden el mismo arco de circunferencia, con la diferencia que el primero es ángulo del centro y el segundo, inscrito.
Por lo tanto, $x = 2\sphericalangle CAB$
Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180º, en el ΔABC: $\sphericalangle$CAB = 30º, por lo tanto x = 60º.
Alternativa B).

22. El arco $\overset{\frown}{BA}$ es la octava parte del arco $\overset{\frown}{AB}$, entonces α = ?
    A) 36º
    B) 40º
    C) 45º
    D) 60º
    E) Ninguna de las anteriores.



Solución:

$$\frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{AB}} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BA}}{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BA}} = \frac{1}{8+1}$$ /Composición lado a lado en el denominador de la proporción

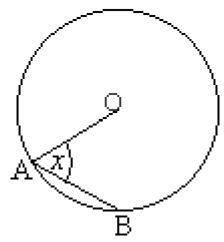
$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{BA}}{360^\circ} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 9\overset{\frown}{BA} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BA} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

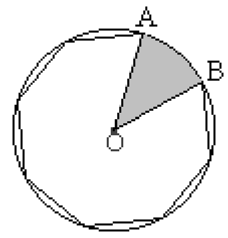
Como un ángulo del centro tiene igual medida angular que el arco que subtiende, $\alpha = 40^\circ$.
Alternativa B).

23. La cuerda $\overline{AB}$ tiene la misma longitud que el radio de la circunferencia de centro O, entonces el ángulo x mide:
    A) 30º
    B) 45º
    C) 60º
    D) 90º
    E) Ninguna de las anteriores.



Solución:
La cuerda $\overline{AB}$ es congruente junto con los otros dos lados del ΔABO. Es decir, el ΔABO es isósceles, por lo tanto, cada uno de los ángulos interiores del mismo, en particular x, mide 60º.
Alternativa C).

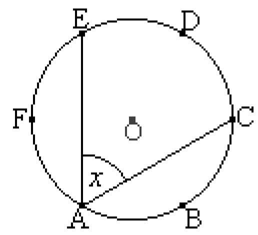
24. La superficie achurada representa un 12,5% del círculo, ¿cuánto mide el $\sphericalangle AOB$?
    A) 8º
    B) 11,25º
    C) 12,5º
    D) 22,5º
    E) 45º



Solución:

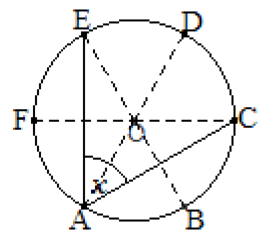
El 12,5% representa la octava parte del total. Por lo tanto el $\overset{\frown}{AB}$ y el ángulo del centro miden:
$\frac{360^{\circ}}{8} = 45^{\circ}$ Alternativa E).

25. La circunferencia de centro O esta dividida en 6 arcos congruentes por los puntos A, B, C, D, E y F. ¿Cuánto mide $\sphericalangle$EAC ?
    A) 15º
    B) 30º
    C) 60º
    D) 120º
    E) 200º



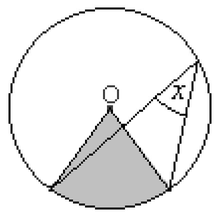
Solución:
Cada **ángulo del centro** –así como también cada arco- que abarque dos puntos cercanos de la circunferencia de la derecha mide:

$$\frac{360^{\circ}}{6} = 60^{\circ}$$



Como el $\sphericalangle$EOC suma dos de tales ángulos, entonces su medida es de 120º y el ángulo $x = \sphericalangle$EAC subtiende el mismo arco, pero por ser semi-inscrito, mide su mitad, es decir, 60º.
Alternativa C).

26. El área achurada representa el 20%, entonces, el triple de x es:
    A) 18º
    B) 36º
    C) 54º
    D) 72º
    E) 144º



Solución:

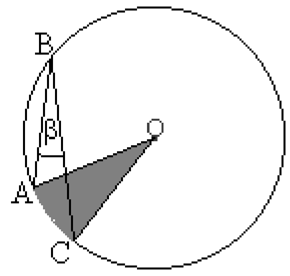
El 20% representa la quinta parte del total, pues $20^{\circ} = \frac{2\cancel{0}}{10\cancel{0}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}^{5}} = \frac{1}{5}$.

Y la quinta parte del total de grados en la ⊗ de 360º es $\frac{360^{\circ}}{5} = 72^{\circ}$

Por lo tanto el arco y el ángulo del centro de la región achurada miden 72º

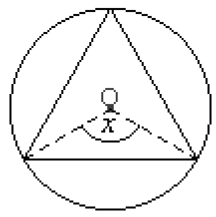
Y el ángulo x subtiende el mismo arco, pero por ser semi-inscrito, mide la mitad, es decir, 36º.
Alternativa B).

27. En la figura 15 la circunferencia tiene centro O y radio 12. Si β = 15º. Entonces el área sombreada es:
    A) π
    B) 2π
    C) 6π
    D) 24π
    E) 12π



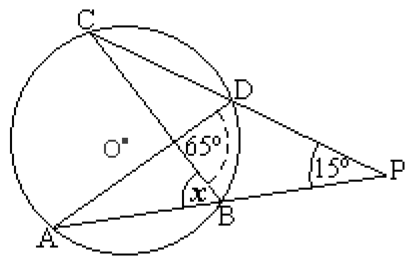
Solución:
El ángulo del centro siempre mide el doble que el ángulo inscrito con el cuál subtiende el mismo arco de circunferencia.
Por lo tanto, el ángulo del centro mide 30º.

28. El triángulo ABC es equilátero e inscrito en la circunferencia de centro O, luego la medida del ángulo x es:
    A) 30º
    B) 60º
    C) 90º
    D) 120º
    E) No se puede determinar.



Solución:
Como x es ángulo del centro, entonces mide el doble que el ángulo semi-inscrito que subtiende el mismo arco. Y como cada ángulo semi-inscrito mide 60º -por pertenecer a un triángulo equilátero-, entonces x mide 120º.
Alternativa D).

28. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{AE}$ son secantes a la circunferencia. De acuerdo con los datos de la figura, la medida del ∢CBA es:
    A) 80º
    B) 47,5º
    C) 40º
    D) 32,5º
    E) 15º



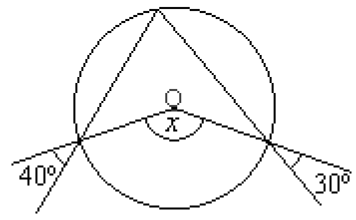
Solución:
Los 15º son la medida de un ángulo exterior, el cuál es igual a la semirrecta:

$$15º = \frac{\overset{\frown}{AC} - 65º}{2}$$

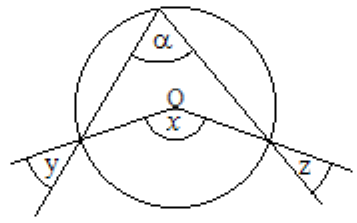
$$30º = \overset{\frown}{AC} - 65º \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 95º$$

Como *x* es un ángulo semi inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{AC}$, entonces mide la mitad de este, es decir, 47,5º
Alternativa B)

29. De acuerdo con los datos de la figura, el ángulo x mide:
    A) 35º
    B) 70º
    C) 130º
    D) 140º
    E) Ninguna de las anteriores.



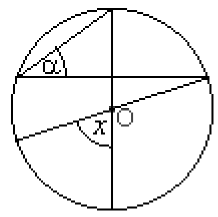
Solución:
Tal como se vió en el ejerc. 19, para figuras de la forma que se presenta, el ángulo inscrito α es igual a la suma de los ángulos x e y.
En este caso en particular, $\alpha = 40^{o} + 30^{o} = 70^{o}$.
Como x es un ángulo del centro que subtiende el mismo arco de circunferencia que el ángulo inscrito α, entonces mide el doble que el, es decir, 140º.
Alternativa D).



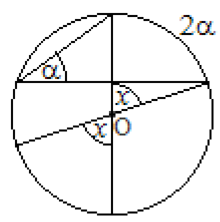
30. De un total de 150 personas, un 30% dice haber salido del país. Si dicha respuesta se desea representar en un gráfico circular, ¿cuántos grados medirá el ángulo que corresponda al porcentaje de personas que dice haber salido del país?
    A) 30º
    B) 108º
    C) 120º
    D) 330º
    E) 352º

Solución:
La circunferencia mide en total 360º y su 30% es $30\% \bullet 360^{o} = \dfrac{3\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \bullet 36\cancel{0}^{o} = 108^{o}$.
Alternativa B).

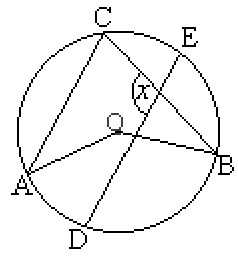
31. En la figura, el doble de x es:
    A) 90º
    B) 120º
    C) α
    D) 2α
    E) 4α



Solución:
Ángulos opuestos por el vértice son congruentes -de igual medida. Esto lo indicaremos en la 2da. figura del costado.
El $\sphericalangle x$ subtiende los mismos puntos de arco que el inscrito α, solo que desde el centro, por lo que x -con tal arco- miden el doble que α, es decir 2α.
Alternativa D).

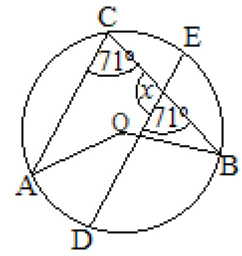


32. Si $\overline{AC} \,//\, \overline{DE}$ y $\measuredangle AOB = 142°$, entonces $x = ?$



   A) 71º
   B) 109º
   C) 142º
   D) 152º
   E) 161º

<u>Solución</u>:
Si $\measuredangle AOB = 142° \Rightarrow \measuredangle ACB = 71°$ por ser ángulo inscrito que subtiende el mismo arco que el ángulo del centro.

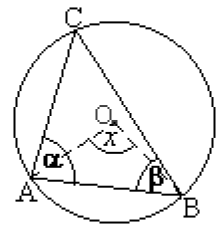


Como $\overline{AC} \,//\, \overline{DE}$, tenemos -por correspondencia de ángulos entre paralelas cortadas por una transversal- que el ángulo adyacente a *x* mide 71º. Así como se observa que *x* es suplementario al de 71º. Luego,

$x + 71° = 180°$

$x = 180° - 71° = 109°$ Alternativa B)

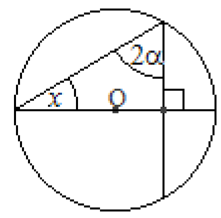
33. En la figura, $\alpha = 80°$, $\beta = 50°$. $x = ?$



   A) 50º
   B) 100º
   C) 115º
   D) 120º
   E) 130º

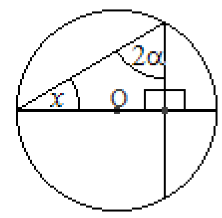
<u>Solución</u>:
En el ΔABC, $\measuredangle$ ACB = 50º (pues la suma de los $\measuredangle$ s interiores en todo Δ suman 180º)
Luego,
$x = 2\measuredangle ACB$ x es $\measuredangle$ del centro; $\measuredangle$ ACB semi inscrito y ambos subtienden el mismo arco.
$x = 100°$
Alternativa B).

34. En la circunferencia de centro O, $x =$



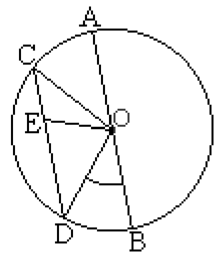
   A) $4\alpha - 90°$
   B) $180° - 4\alpha$
   C) $90° - 4\alpha$
   D) $2\alpha - 45°$
   E) $90° - 2\alpha$

<u>Solución</u>:
Si señalamos al interior del triángulo el ángulo de 90º, adyacente al que se ilustra en el enunciado, tal como se ilustra en la siguiente figura.



Así como recordamos que los dos ángulos agudos en un triángulo rectángulo son complementarios –suman 90º. Tenemos:
$x + 2\alpha = 90° \Rightarrow x = 90° - 2\alpha$ Alternativa E).

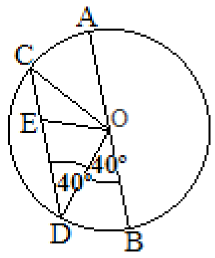
35. En la circunferencia de centro O, $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\sphericalangle COE = 30^o$ y el $\sphericalangle EOD = 70^o$. ¿Cuánto mide el $\sphericalangle DOB$?



A) 20º
B) 40º
C) 60º
D) 70º
E) 80º

Solución:

El Δ DOC es isósceles, pues $\overline{CO} = \overline{DO} =$ radio, donde $\sphericalangle DCO = \sphericalangle CDO$ (pues son los ángulos opuestos a dichos lados, los ángulos basales).



En el ΔCOD, el ángulo no basal mide:

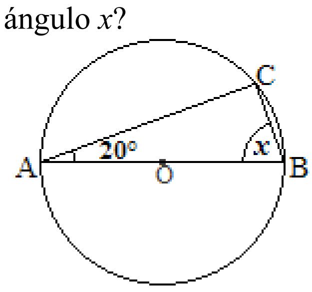
$$\sphericalangle COD = \sphericalangle COE + \sphericalangle EOD$$
$$= 30^o + 70^o$$
$$= 100^o$$

Luego, cada ángulo basal mide 40º para completar los 180º en tal triángulo.

Como $\overline{AB}//\overline{CD}$, tenemos, por ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal, lo que se ilustra en la figura de la derecha.

Alternativa B).

36. $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia de centro O, ¿Cuál es la medida del ángulo x?



A) 20º
B) 40º
C) 70º
D) 110º
E) 160º

Solución:

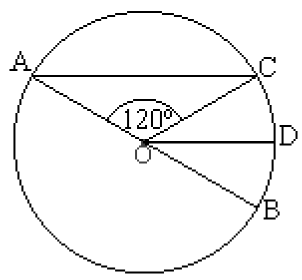
Basta recordar que:

- Todo ángulo inscrito que subtiende media circunferencia, mide 180º.
- La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180º.

$\sphericalangle ACB = 90^o \Rightarrow x = 70^o$

Alternativa C).

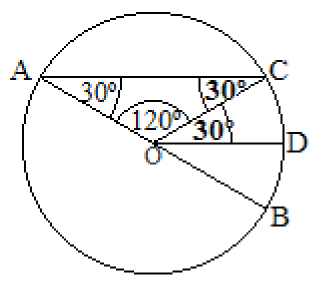
37. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de centro O. Si $\sphericalangle AOC = 120^o$ y $\overline{AC}//\overline{OD}$, entonces $\sphericalangle COD =$



A) 15º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 75º

Solución:

El triángulo AOC es isósceles, pues dos de sus lados son iguales -al ser radios de la circunferencia-. Por lo tanto, los ángulos inscritos de tal triángulo son basales, por lo tanto, si lo que falta para completar los 180º son 60º, estos se distribuyen en partes iguales entre ambos ángulos, resultando 30º para cada uno.



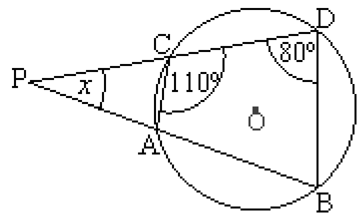
Por ser $\overline{AC}//\overline{OD}$ y por ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal,

$\sphericalangle COD = \sphericalangle OCD = 30^o$.

La figura de la derecha ilustra tal situación, los ángulos escritos en negrita señalan los ángulos alternos internos.

Alternativa B).

38. El cuadrilátero ABCD está inscrito en la circunferencia de centro O.
Si ∢ PDB = 80º y ∢ ACD = 110º, entonces x =
A) 10º
B) 20º
C) 30º
D) 40º
E) No se puede determinar



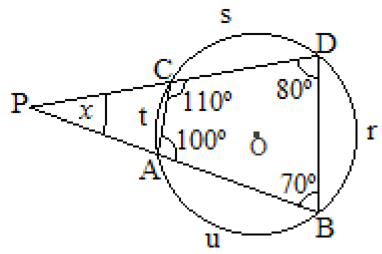
Solución:
Por ser x ángulo exterior, su medida viene dada por la semirrecta de los arcos que determinan las secantes sobre la circunferencia:

$$x = \frac{\widehat{BD} - \widehat{CA}}{2} = \frac{r-t}{2}$$

Recordemos que todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia tiene ángulos opuestos suplementarios y que cada arco mide el doble que el ángulo inscrito que lo subtiende.

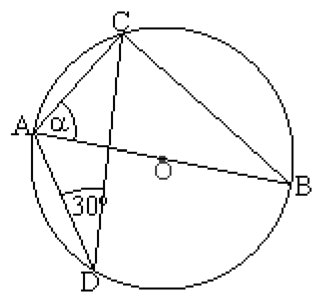
Las medidas de los restantes arcos presentan un sistema de ecuaciones, como ilustramos a continuación:

$u + r = 220º$ (I)
$r + s = 200º$ (II)
$s + t = 140º$ (III)
$t + u = 160º$ (IV)

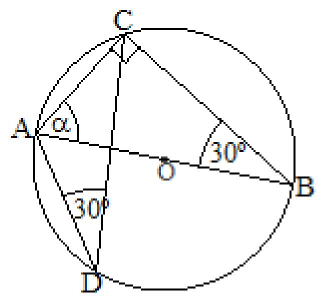


Si observamos la fórmula, a nosotros nos interesa $r - t$ porque es la recta de los arcos que se presentan en ella. Para ello, notamos que se obtiene restando (III) a (II), pues desaparecen los arcos s:
(II) – (III) = 200º – 160º
$r - t$ = 60º $\Rightarrow$ x = 30º Recordemos una vez más que x es igual a la semirrecta de tales arcos.
Alternativa C).

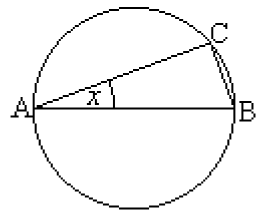
39. En la figura, la circunferencia tiene centro 0 y diámetro $\overline{AB}$.
¿Cuál es la medida del ángulo α?
A) 20º
B) 30º
C) 45º
D) 60º
E) 90º



Solución:
El $\widehat{AC}$ es subtendido no solo por el ∢ADC sino que también por el ∢ABC, razón por la que el ∢ABC = ∢ADC = 30º
Pero es necesario no olvidar que todo ángulo inscrito que subtiende media circunferencia, mide 90º. Por lo que el ΔABC es rectángulo en C.
Y debido a que los dos ángulos agudos en todo Δ rectángulo son complementarios –suman 90º, entonces α = 60.
Alternativa D).



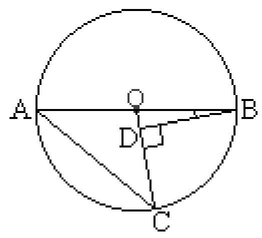
40. Se puede determinar la medida del $\sphericalangle x$ inscrito en la circunferencia, si:
    (1) $\sphericalangle ABC = 70º$.
    (2) $\overline{AB}$ es diámetro.



A) (1) por sí sola.
B) (2) por sí sola.
C) Ambas juntas, (1) y (2).
D) Cada una por sí sola, (1) ó (2).
E) Se requiere información adicional

Solución:
Son tres los ángulos, por lo que requerimos conocer la medida de dos de ellos para conocer al restante. Ello porque el faltante se obtendría por la diferencia con 180º, que es la suma inevitable de la medida de todos los ángulos interiores de un triángulo, en la geometría euclidiana.
Así que (1) no es suficiente por sí sola. Por la misma razón, (2) no es suficiente por sí sola, ya que también nos entrega solo la medida de un ángulo –el ángulo inscrito que subtiende el arco de circunferencia que une los extremos del diámetro mide siempre 90º. Siendo que requerimos de los otros dos ángulos para hallar al faltante *x*.
Sin embargo, ambas juntas nos proporcionan dos ángulos, 70º y 90º respectivamente y la suma es de 160º, el cuál difiere de 20º con los 180º. Por lo que $x = 20º$.
Alternativa C).

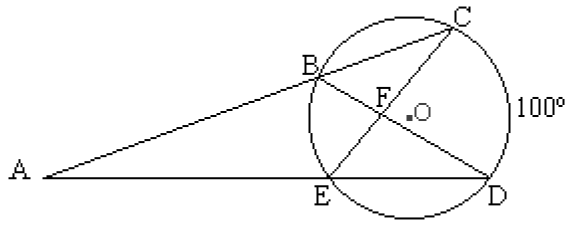
41. $\overline{AB}$ es diámetro de la circunferencia de centro O. Si $\overline{BD} \perp \overline{OC}$ y $\sphericalangle CAB = 40º$, entonces $\sphericalangle ABD =$



A) 10º
B) 20º
C) 22,5º
D) 30º
E) 40º

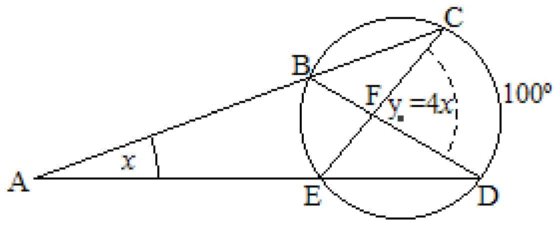
Solución:
En el ΔACO: por ser el ΔAOC isósceles -dos lados son iguales, por ser radios de la ⊗-, los ángulos opuestos a ellos tienen igual medida -son los ángulos basales:
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACO = 40º$
$\Rightarrow \sphericalangle AOC = 100º$ Para lograr la suma de $\sphericalangle$ s interiores en un Δ = 180º
$\Rightarrow$ En el ΔDOB: $\sphericalangle DOB = 80º$ $\sphericalangle$ adyacente suplementario con $\sphericalangle AOC$ de 100º
Y de la fig. se desprende que $\sphericalangle BDO = 90º$
Con lo que tenemos 170º contabilizados hasta el momento en este Δ.
$\Rightarrow \sphericalangle OBD = 10º = \sphericalangle ABD$ Para lograr la suma de $\sphericalangle$ s interiores en un Δ = 180º
Alternativa A).

42. $\overset{\frown}{DC} = 100^\circ$ y el $\measuredangle DFC$ es el cuádruplo del $\measuredangle BAD$, entonces $\overset{\frown}{BE} =$
    A) 20º
    B) 40º
    C) 30º
    D) 60º
    E) 80º



Solución:
Sean x e y los ángulos Exterior e Interior, respectivamente.
Entonces:

$$x = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{BE}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BE}}{2} \qquad \text{(I)}$$



Dividiendo lado a lado cada una de las igualdades anteriores, obtenemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{BE}}{\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{BE}} \qquad \text{(II)}$$

Esto es siempre conveniente hacerlo cuando tenemos dos incógnitas que equivalen a fracciones. Y en este último caso, si los denominadores son iguales, entonces ellos se simplifican entre sí.
¿Por qué hemos considerado el ángulo interior si nos preguntan por el ángulo exterior?
Se debe a que ambos ángulos están formados por los mismos arcos de circunferencia.
Y del enunciado, $\overset{\frown}{DC} = 100^\circ$, e $y = 4x$ reemplazando en (II)

$$\frac{\cancel{x}^{1}}{4\cancel{x}} = \frac{100^\circ - \overset{\frown}{BE}}{100^\circ + \overset{\frown}{BE}} \qquad \text{/simplificando las x y haciendo producto cruzado}$$

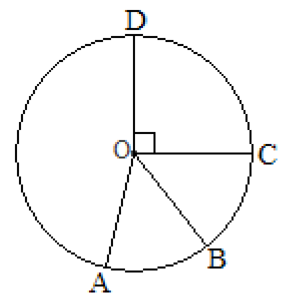
$$100^\circ + \overset{\frown}{BE} = 4\left(100^\circ - \overset{\frown}{BE}\right)$$

$$\cancel{100^\circ}^{0} + \overset{\frown}{BE} = \cancel{400^\circ}^{300^\circ} - 4\overset{\frown}{BE} \qquad \text{/Cancelando 100º a ambos lados}$$

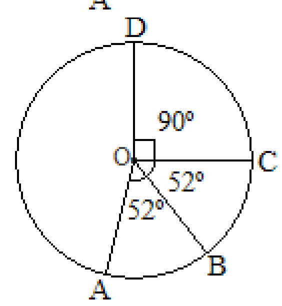
$$5\overset{\frown}{BE} = 300^\circ \qquad \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \frac{300^\circ}{5} = 60^\circ$$

Finalmente, reemplazamos este valor de $\overset{\frown}{BE} = 60^\circ$ y con el del enunciado, $\overset{\frown}{DC} = 100^\circ$ en la fórmula para el ángulo exterior x de (I), obteniendo (mentalmente si se desea):
$x = 20^\circ$ Alternativa A).

43. En la circunferencia de centro O, $\overline{OD} \perp \overline{OC}$. $\measuredangle COD = \measuredangle AOB + 38^\circ$.
¿Si $\measuredangle AOB = \measuredangle BOC$, cuánto mide el $\measuredangle DOA$?
    A) 104º
    B) 142º
    C) 166º
    D) 176º
    E) 256º

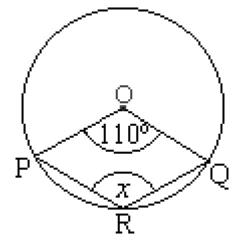


Solución:



$\measuredangle COD = \measuredangle AOB + 38^\circ$ Dato del enunciado.
$90^\circ = \measuredangle AOB + 38^\circ$ Dato que se desprende de la figura.
$\Rightarrow 90^\circ - 38^\circ = \measuredangle AOB$
$\Rightarrow 52^\circ = \measuredangle AOB$
y $\measuredangle BOC = 52^\circ$ Por enunciado e igualdad anterior.
La figura de la derecha ilustra las medidas halladas.
El ángulo pedido –leído en sentido contrario a las manecillas del reloj-, es la cantidad faltante para completar los 360º de la ⊗. Así, si tenemos 194º grados contabilizados, nos faltan 166º.
Alternativa C).

44. El ángulo del centro correspondiente al $\overset{\frown}{PQ}$ mide 110°. Si R es un punto cualquiera de tal arco, el $\measuredangle x$ mide:
   A) 55º
   B) 70º
   C) 110º
   D) 125º
   E) 220º



Solución:

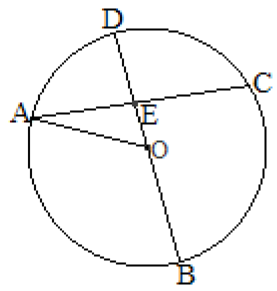
$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{QP} = 360^\circ$

$110^\circ + \overset{\frown}{QP} = 360^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{QP} = 250^\circ$

Como x es un ángulo inscrito que subtiende al arco $\overset{\frown}{QP} \Rightarrow x = \frac{\overset{\frown}{QP}}{2} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

Alternativa A)

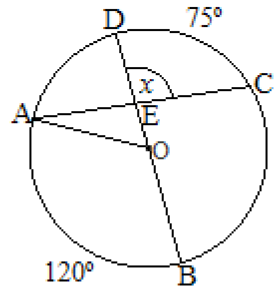
45. $\overset{\frown}{DC} = 75^\circ$ y $\measuredangle$ AOB = 120º. Entonces el valor del $\measuredangle$ BEC es:
   A) 75º
   B) 105º
   C) 82,5º
   D) 97,5º
   E) 22,5º



Solución:

Sea x el ángulo interior formado por $\overset{\frown}{DC} = 75^\circ$ y $\measuredangle$ AOB = 120º.
Luego,

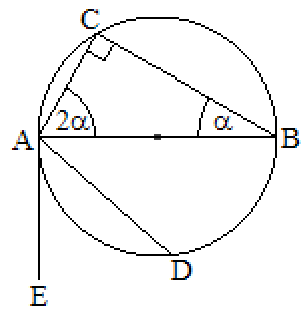
$x = \frac{75^\circ + 120^\circ 2}{2} = \frac{195^\circ}{2} = 97,5^\circ$



Como x y el $\measuredangle$ BEC son adyacentes suplementario, entonces suman 180º.
Luego, x + $\measuredangle$ BEC = 180º
97,5º + $\measuredangle$ BEC = 180º
$\measuredangle$ BEC = 180º - 97,5º = 82,5º.

Alternativa C).

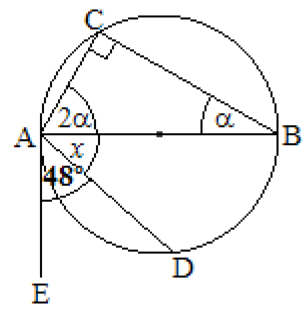
46. En la circunferencia, $\measuredangle$ EAD = 48º, entonces la medida del $\measuredangle$ DAB es:



A) 30º
B) 42º
C) 60º
D) 84º
E) 96º

Solución:

Si no se indica el centro de la circunferencia no sabríamos si $\overline{AB}$ es diámetro, a no ser por el ángulo recto, que es inscrito.



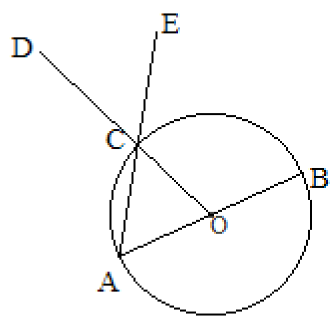
El nos indica que:

1. la medida del arco que subtiende el $\measuredangle$ C, mide su doble, esto es, 180º. Bueno, tal arco es $\overset{\frown}{AB}$.
2. Debido a que $\overset{\frown}{AB}$ = 180º, los puntos A y B sobre la ⊗ forman un diámetro, $\overline{AB}$ es diámetro.

Observemos ahora que los ángulos inscritos $\measuredangle$ EAD y $\measuredangle$ DAB subtienden entre sí un arco de media ⊗. Entonces, la suma de sus medidas equivale a la mitad de 180º.
También podemos notar $\measuredangle$ EAD y $\measuredangle$ DAB subtienden entre sí el mismo arco que el ángulo recto e inscrito en C. En cualquier caso: $\measuredangle$ EAD + $\measuredangle$ DAB = 90º
Y reemplazando del enunciado: $\measuredangle$ EAD = 48º, tenemos
48º + $\measuredangle$ DAB = 90º
$\measuredangle$ DAB = 90º - 48º = 42º
Alternativa B).

Observe como los ángulos al interior del ΔABC α y 2α resultaron ser inútiles, distractores.

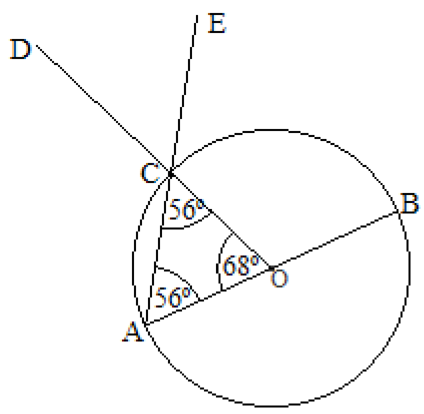
47. En una circunferencia de centro O, $\overline{AB}$ es uno de sus diámetros y $\measuredangle$AOC = 68º. A partir de ello y de los datos de la figura, el $\measuredangle$ DCE mide:



A) 44º
B) 56º
C) 62º
D) 68º
E) 124º

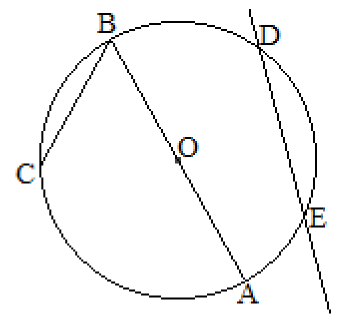
Solución:

El ángulo pedido es igual al ángulo $\measuredangle$ ACO, por ser opuestos por el vértice. (*)
Como $\overline{AO}$ = $\overline{OC}$ = R, radios de la circunferencia. Entonces, sus ángulos opuestos también son iguales –llamados basales en un triángulo isósceles.
Es decir, $\measuredangle$ CAO = $\measuredangle$ ACO.
(**)



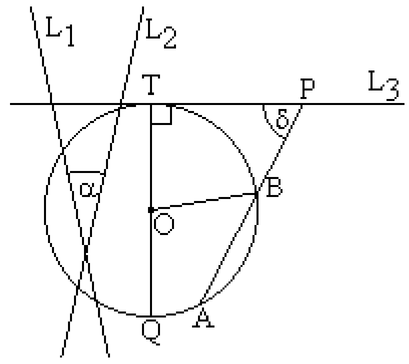
Además, la suma de los ángulos interiores suma 180º, así que tenemos en definitiva:
$\measuredangle$ CAO + $\measuredangle$ ACO + $\measuredangle$ AOC = 180º
Usando (**) y dato del enunciado:
2$\measuredangle$ ACO + 68º = 180º
Despejando
2$\measuredangle$ ACO = 112º ⇒ $\measuredangle$ ACO = 56º
Y como se indicó en (*)
$\measuredangle$ DCE = $\measuredangle$ ACO = 56º
Alternativa B).

48. Con respecto a la figura, es **falso** que:



A) $\overline{CB}$ es una cuerda.
B) $\overline{DE}$ es tangente.
C) $\sphericalangle$CBA es inscrito.
D) $\overline{AB}$ es diámetro.
E) $\overline{OB}$ es radio.

Solución:
Presentamos en la siguiente figura, alguno de los elementos que componen una ⊗.

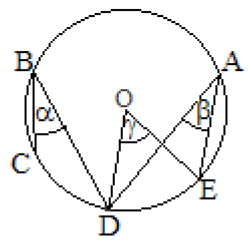


- O es centro de la ⊗;
- $\sphericalangle QOB$ y $\sphericalangle BOT$ son ángulos del centro;
- $\sphericalangle OBA$ es ángulo inscrito;
- $\widehat{BT}$ es el arco subtendido por el $\sphericalangle BOT$;
- $\overline{OT}$, $\overline{OQ}$ y $\overline{OB}$ son radios de la ⊗;
- $\overline{AB}$ cuerda de la ⊗;
- $\overline{QT}$ diámetro de la ⊗;
- L_1 y L_2 son rectas secantes a la ⊗;
- L_3 es recta tangente a la ⊗;
- α es ángulo interior de la ⊗;
- δ es ángulo exterior a la ⊗.

Si identificamos los elementos del enunciado tenemos que:
A) es correcto. $\overline{CB}$ es cuerda.
B) Es falsa, pues $\overleftrightarrow{DE}$ es secante.
y no es necesario seguir, pues hallamos la alternativa falsa.
Alternativa B).

49. En la figura, $\widehat{CD} \equiv \widehat{DE}$ es falso que:

A) $\alpha = \beta$
B) $\gamma = 2\alpha$
C) $\gamma = \alpha + \beta$
D) $\alpha = \dfrac{\gamma}{2}$
E) $\gamma = \dfrac{\beta}{2}$



Solución:
Los ángulos inscritos α y β subtienden arcos congruentes –de igual medida, por lo tanto, ellos también tienen igual medida entre sí.
Además, el ángulo del centro mide el doble que el ángulo inscrito con el cuál subtiende el mismo arco, luego, tenemos las siguientes relaciones de igualdad en las medidas:

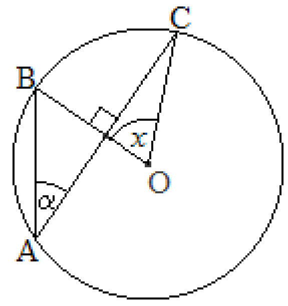
$$\gamma = 2\beta \quad \wedge \quad \alpha = \beta \quad \Rightarrow \gamma = 2\alpha$$

De lo que se tiene que $\alpha = \beta = \dfrac{\gamma}{2}$

Y de
$$\begin{aligned} \gamma &= 2\alpha \\ &= \alpha + \alpha \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

Revisando las alternativas, e) señala que el ángulo del centro mide la mitad que el ángulo inscrito.
Alternativa E).

50. En la circunferencia de la figura, $\overline{AC} \perp \overline{BO}$, luego el doble de x es:
   A) 90º
   B) 120º
   C) α
   D) 2α
   E) 4α



Solución:
El ángulo del centro x y el ángulo α inscrito subtienden el mismo arco de ⊗, luego:

$$x = 2\alpha.$$

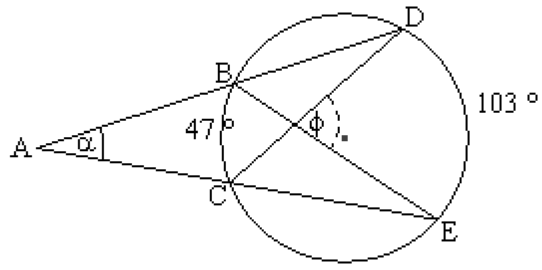
El doble de x es:

$$2x = 2(2\alpha) = 4\alpha$$

Alternativa E)

Observación: en este ejercicio, la perpendicularidad indicada en el enunciado es un dato insignificante, un distractor…

51. Con respecto a la figura, si $\widehat{BC} = 47º$ y $\widehat{DE} = 103º$.
Entonces es verdadero que:
   I) $\alpha = 28º$
   II) $\phi = 75º$
   III) $\alpha + \phi = 103º$



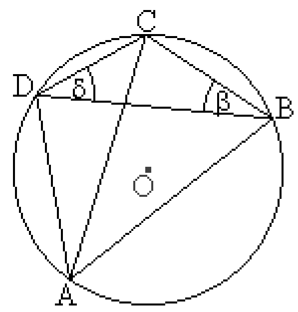
A) Sólo I.
B) Sólo II.
C) I y II
D) I y III
E) I, II y III

Solución:
α y ϕ son los ángulos exterior e interior respectivamente, entonces

$$\alpha = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2} = \frac{103º - 47º}{2} = \frac{56º}{2} = 28º \quad \text{e} \quad y = \frac{\widehat{DE} + \widehat{BC}}{2} = \frac{103º + 47º}{2} = \frac{150º}{2} = 75º$$

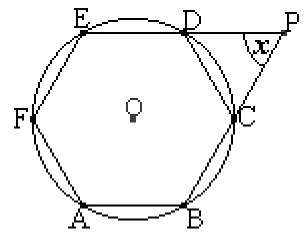
Luego, I), II) y III) son verdaderas.
Alternativa E)

52. Si δ = 34º y β = 28º, entonces $\measuredangle DAB$ mide:
   A) 118º
   B) 62º
   C) 104º
   D) 60º
   E) 112º



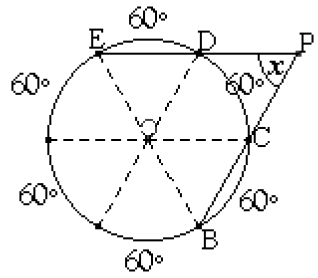
Solución:
La suma β + δ y el $\measuredangle DAB$ suman, por separado, 180º con el $\measuredangle DCB$ [Suma de ∢s int. a un Δ y ∢s opuestos dentro de un cuadrilátero inscrito a una ⊗]
Por lo tanto, $\measuredangle DAB$ = β + δ = 62º pues cumplen la misma relación numérica con otro valor, en este caso, el $\measuredangle DCB$. Alternativa B).

53. En la figura, ABCDEF es un polígono regular inscrito en la ⊗.
Entonces, el $\measuredangle EPB = x$ mide:
A) 30º
B) 45º
C) 60º
D) 75º
E) 80º



Solución:
El polígono regular de 6 lados divide a la ⊗ en 6 arcos congruentes, iguales a:

$$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$$



Como x es ángulo exterior, su valor viene dado por la diferencia de arcos formados por la prolongación de las secantes que lo forman.

$$x = \frac{\overset{\frown}{EB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

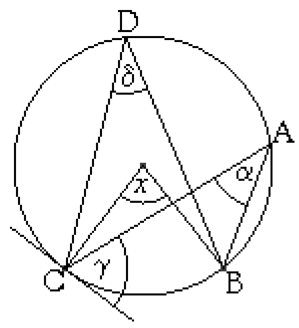
Como $\overset{\frown}{EB}$ abarca 3 arcos congruentes, su medida es $3 \bullet 60^\circ = 180^\circ$

Mientras que $\overset{\frown}{CD} = 60^\circ$ es en sí un solo arco congruente.

$$x = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$$

Alternativa C)

54. De acuerdo a la información de la figura, se puede afirmar que:
A) $x - \alpha = \gamma$
B) $x = \alpha$
C) $\delta + \gamma = \alpha$
D) $\gamma = x$
E) $\gamma - \alpha = \delta$

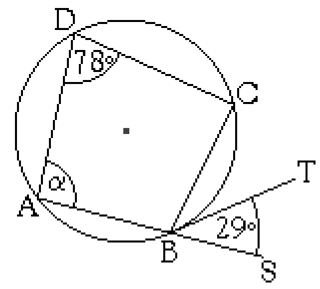


Solución:
Recordemos que el ángulo del centro x es igual al doble que cualquier ángulo inscrito o semi inscrito que subtienda el mismo arco que el, sean estos últimos α, β, γ.
Lo anterior equivale también a indicar que x es igual a la suma de dos cualquiera de tales ángulos –inscritos o semi inscritos, que subtiendan el mismo arco que el.
Analizamos cada alternativa:
A) $x - \alpha = \gamma$ y si despejamos al ángulo del centro x
Obtenemos

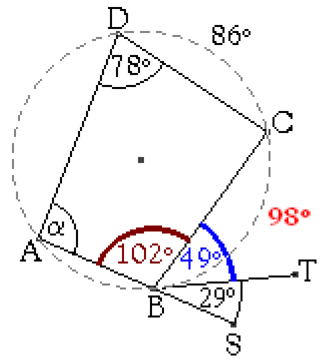
$$x = \alpha + \gamma$$

Que es lo indicado anteriormente.
Alternativa A)

55. $\overline{BT}$ es tangente a la ⊗ y $\widehat{CD} = 86°$, entonces, el valor de α es:
    - A) 78º
    - B) 86º
    - C) 92º
    - D) 98º
    - E) 102º

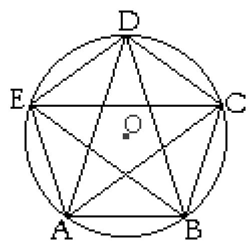


Solución:
Recordemos que en un cuadrilátero inscrito en una ⊗, los ángulos opuestos suman 180º -son suplementarios. Por lo tanto, el $\measuredangle ABC = 102°$
Los $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle SBC$ son adyacentes suplementarios -suman 180º, por lo tanto, dado que $\measuredangle ABC = 102°$, entonces $\measuredangle SBC = 78°$.
Además: $\measuredangle SBC = \measuredangle SBT + \measuredangle TBC$
$78° = 29° + \measuredangle TBC$
$78° - 29° = \measuredangle TBC$
$49° = \measuredangle TBC$



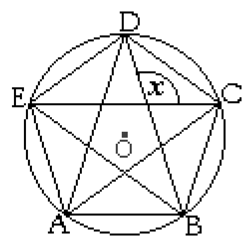
Pero $\measuredangle TBC$ es un ángulo semi inscrito, por lo que el arco $\widehat{BC}$ que subtiende, mide el doble, esto es, 98º.
Vamos a ilustrar lo que hemos conseguido hasta ahora –sin olvidar el dato del enunciado, $\widehat{CD} = 86°$:
Con todos los datos graficados, vemos que el ángulo pedido α, subtiende al arco $\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD} = 184°$, medido desde el centro. Como α no es $\measuredangle$ del centro, sino inscrito en la ⊗, por lo que mide la mitad que el arco que subtiende. Esto es, 92º. Alternativa C).

56. En la fig. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$, entonces el valor del $\measuredangle EBC$ es:
    - A) 36º
    - B) 60º
    - C) 72º
    - D) 120º
    - E) 144º



Solución:
La ⊗ está subdividida en 5 arcos congruentes, donde la medida de cada uno es:
$\frac{360°}{5} = 72°$
El $\measuredangle EBC$ subtiende 2 arcos de 72º, pero por ser un ángulo inscrito, su medida es igual a la mitad de lo que subtiende. Es decir, $\measuredangle EBC$ tiene una medida equivalente a 1 arco de 72º.
Alternativa C)

57. Las 5 cuerdas formadas en la figura son congruentes; en tal caso, el valor del ángulo x es:
    - A) 36º
    - B) 72º
    - C) 108º
    - D) 192º
    - E) 216º

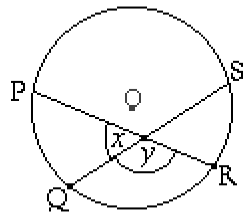


Solución:
Cada uno de los 5 arcos de ⊗ miden: $\frac{360°}{5} = 72°$.
x es ángulo interior. Su medida es igual al promedio de los arcos formados por las cuerdas $\widehat{CD}$ y $\widehat{EB}$, que a su vez, forman al ángulo x. Así: $x = \frac{\widehat{EB} + \widehat{CD}}{2} = \frac{\cancel{2}^{1} \bullet 72° + \cancel{72°}^{36}}{\cancel{2}^{1}} = 108°$

Alternativa C)

58. La figura muestra una circunferencia con centro en O. Si $\sphericalangle x$ mide 55°, se puede determinar el $\sphericalangle$ ROS si:

(1) $\sphericalangle$ POQ = 50°
(2) $\sphericalangle y$ = 125°



A) (1) por sí sola
B) (2) por sí sola
C) Ambas juntas, (1) y (2)
D) Cada una por sí sola (1) ó (2)
E) Se requiere información adicional

<u>Solución</u>:
El $\sphericalangle$ ROS tiene vértice en el centro, llamado el en sí como un ángulo del centro. Y su medida es igual al arco $\overset{\frown}{RS}$ que subtiende.

Mientras que *x* es ángulo interior a la ⊗. Su medida es igual al promedio de los arcos $\overset{\frown}{PQ}$ y $\overset{\frown}{RS}$, determinados por las cuerdas que a su vez también forman el ángulo interior *x*. Esto queda expresado como:

$$x = \frac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS}}{2}$$

O bien, reemplazando el dato del $\sphericalangle x$:

$$55^\circ = \frac{\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS}}{2} \quad \Rightarrow 110^\circ = \overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{RS}$$

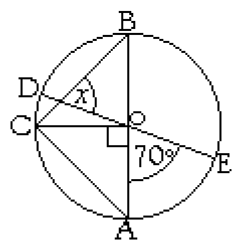
Como $\overset{\frown}{RS} = \sphericalangle ROS$, tenemos por consiguiente, en la expresión anterior :

$$110^\circ = \overset{\frown}{PQ} + \sphericalangle ROS \Rightarrow \sphericalangle ROS = 110^\circ - \overset{\frown}{PQ}$$

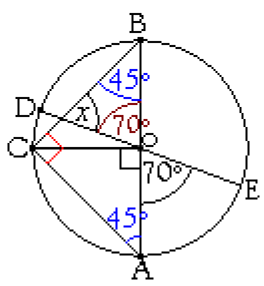
Esta es una ecuación para el ángulo pedido, pero lamentablemente, requerimos del valor del arco $\overset{\frown}{PQ} = \sphericalangle POQ$.
Y (1) nos ofrece tal valor.
Mientras que (2) no nos ofrece ayuda alguna, pues conocido *x*, el valor del ángulo interior *y* era deducible por ser su ángulo adyacente suplementario, pero luego qué con el.
La alternativa es A) (1) por sí sola.

59. En la ⊗ de centro O, $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ son diámetros. Si el $\sphericalangle AOE = 70^\circ$, entonces el $\sphericalangle x$ mide:

A) 65°
B) 110°
C) 115°
D) 145°
E) 155°

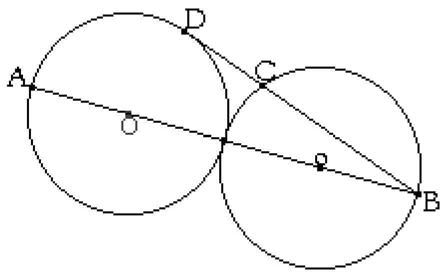


<u>Solución</u>:
El ángulo inscrito en C es rectángulo, dado que circunscribe media ⊗. Por lo tanto, entre los $\sphericalangle s$ CAB y ABC se reparten los 90° grados faltantes para completar los 180° del ΔABC.
Además, tal Δ es isósceles, dado que los Δs AOC y OBC son congruentes. Criterio de congruencia L.A.L. Dos de sus respectivos lados tienen igual medida por ser radios de la ⊗ y el ángulo comprendido entre ellos es de 90°. Esto implica que entre ambos Δs: AC = CB .
Los ángulos opuestos a dichos lados: el $\sphericalangle$ CAB y el $\sphericalangle$ ABC también tienen igual medida, por ser los ángulos basales. Así que se reparten entre sí los 90° faltantes en 45° cada uno.
El siguiente punto a notar es que el $\sphericalangle$ DOB del ΔAOB, es opuesto por el vértice con $\sphericalangle$ DOB = 70° el de 70° de la figura del enunciado. Por consiguiente, el $\sphericalangle$ DOB = 70°
La figura de la derecha resume todo lo indicado:



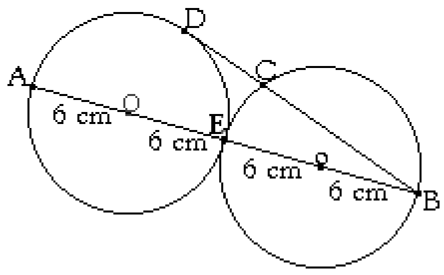
Por último, la suma de los $\sphericalangle s$ interiores igual a 180° en todo Δ nos indica que $x = 180^\circ - (70^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ Alternativa A).

60. En la figura se tienen dos circunferencias congruentes y tangentes exteriormente, de radio 6 [cm]. Si $\overline{AB}$ contiene los centros de las circunferencias y $\overline{\mathrm{BD}}$ es tangente en D, entonces la medida de la cuerda $\overline{BD}$ es:



A) $12\sqrt{2}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $6\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{2}$

Solución:



A estas alturas, la nominación de las letras da lo mismo para los puntos que componen la figura. Lo que importa realmente es notar que el punto Potencia de la figura, es el punto del cuál se desprenden las rectas secante y la tangente. Ese punto en la figura es el punto B.
Ahora bien, si llamamos E al punto de tangencia de las dos circunferencias, tenemos, en virtud del punto potencia que:

$$BE \bullet BA = (BD)^2$$

$$12 \bullet 24 = (BD)^2 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{12 \bullet \underbrace{24}_{12\bullet 2}} = BD$$ Es fácil notar que $24 = 12 \bullet 2$ y muy conveniente expresarlo asi.

$$\sqrt{(12)^2 \bullet 2} = BD$$

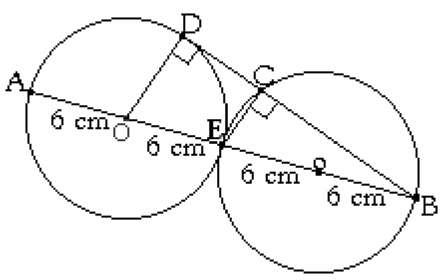
$$12\sqrt{2} = BD$$

Alternativa A)

61. En relación al enunciado anterior: ¿Cuál es la medida de $\overline{BC}$?

A) $12\sqrt{2}$
B) $8\sqrt{2}$
C) $6\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $3\sqrt{2}$

Solución:



Si trazamos los segmentos $\overline{OD}$ y $\overline{CE}$ notaremos que la figura ahora nos queda con dos triángulos semejantes por criterio AA (por tener 2 $\sphericalangle s$ de igual medida).

En el ΔODC:
$\sphericalangle ODB = 90º$ por ser $\overline{\mathrm{BD}}$ tangente a la ⊗ en D y por tanto perpendicular al radio $\overline{OD}$

En el Δ ODB:
$\sphericalangle EDB = 90º$ por ser $\sphericalangle$ inscrito que subtiende media ⊗

Y la medida del $2^{\underline{do}}$ ángulo que tienen de igual es el que comparten ambos, el $\sphericalangle$ del vértice B.
Establecido y probado que son semejantes, relacionamos en una proporción, los lados homólogos de cada uno de los Δs:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BE}{BO} \Rightarrow \frac{BC}{12\sqrt{2}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3BC = 24\sqrt{2} \Rightarrow BC = \frac{24\sqrt{2}}{3} = 8\sqrt{2}$$ Alternativa B).