UNA FORMULA DADA POR VILLARREAL

1) **Introducción:** El Binomio de Newton.

Un binomio, es una expresión algebraica que consta de dos términos algebraicos, (también llamados monomios), entendiendo por término algebraico aquel que está compuesto por variables, multiplicada por una constante (número), también llamado coeficiente, así tenemos algunos binomios:

$$x^2 + y\,; \quad a - 4b^3\,; \quad \frac{a}{b^2} + cb\,; \quad xyz + 3\sqrt{6}wx^2y^3$$

desde luego un binomio es visualizado mejor cuando los monomios están separados por signos de adición o sustracción.

Teniendo la noción de potenciación ya establecida, vamos a proceder a obtener el resultado de elevar a un exponente $n \in \boldsymbol{N}$ binomio de la forma $x + y$; comencemos con un caso particular: $(x+y)^2$

$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$

hemos obtenido una expresión algebraica con mas términos en este caso tres, llamada polinomio, nuestra tarea es obtener una fórmula para el caso $(x+y)^n$ con $n \in$ ***N*,** analicemos algunos casos particulares:

Por las reglas de potenciación se sabe que todo número o expresión elevado al exponente cero da como resultado la unidad:

$(x+y)^0 = 0$ por otro lado también se tiene

$(x+y)^1 = x + y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, y si operamos $(x+y)^2(x+y)$, se obtiene:

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

una observación válida, es afirmar que mientras crece el exponente, mas términos se obtiene del binomio, de hecho otro observador precavido diría que existe una relación entre los coeficientes del polinomio y el exponente al que a sido elevado el binomio; desde luego que esa afirmación si es cierta, ya para el siglo XVI, el italiano Nicolo "Tartaglia" [1], encontró esa relación; para ello colocó cada coeficiente de cada término algebraico en una distribución triangular, y los asoció con los binomios de la siguiente forma :

$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	1 1
$(x+y)^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	1 3 3 1

además, esos números del arreglo triangular cumplen una relación, y son obtenidos a partir de la suma de los números de la fila anterior, así se tiene

$$\begin{array}{c} 1 \\ \\ 1 \quad 1 \\ + \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ + \quad + \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ + \quad + \quad + \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

Hay que observar algo importante con respecto al polinomio, y es que este, está ordenado [3] ,ascendentemente con respecto a una variable y descendente con respecto a la otra variable. Por ejemplo: Hallar el resultado de $(x+y)^3$,

Primero ordenamos el polinomio en forma descendente con respecto a “x” y en forma ascendente con respecto a “y”; observando el arreglo anterior y nos fijamos en la cuarta fila, esos serán los coeficientes del polinomio del desarrollo de dicho binomio, se tiene entonces: ordenando el polinomio,

$$(x+y)^3 = *x^4 + *x^3y + *xy^2 + *y^3$$

usando el arreglo anterior se tiene el resultado, donde cada asterisco es cada coeficiente,

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Ahora veamos para el caso donde $(x+y)^n$ con $n \in \boldsymbol{N}^-$, es decir para los naturales negativos para eso veamos un ejemplo :

Nos piden hallar l desarrollo del binomio $(x+y)^{-2}$, esto es lo mismo que escribir, usando las leyes de exponentes:

$$(x+y)^{-2} = \frac{1}{(x+y)^2} = \frac{1}{x^2+2xy+y^2}$$

ahora dividamos el polinomio con el método usual:

$$1 \qquad\qquad \Big|\; x^2+2xy+y^2$$

$$-1-\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2} \qquad\qquad \frac{1}{x^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{3y^2}{x^4}-\frac{4y^3}{x^5}+.....$$

$$-\frac{2y}{x}-\frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{2y}{x}+\frac{4y^2}{x^2}+\frac{2y^3}{x^3}$$

$$\frac{3y^2}{x^2}+\frac{2y^3}{x^3}$$

$$-\frac{3y}{x^2}-\frac{6y^3}{x^3}-\frac{3y^4}{x^4}$$

$$-\frac{4y^3}{x^3}-\frac{3y^4}{x^4}$$

$$\frac{4y}{x^3}+\frac{8y^4}{x^4}+\frac{4y^5}{x^5}$$

....

Y así sucesivamente, se obtiene como resultado un polinomio de infinitos términos, llamado “serie infinita”, concluyendo:

$$(x+y)^{-2} = \frac{1}{x^2}-\frac{2y}{x^3}+\frac{3y^2}{x^4}-\frac{4y^3}{x^5}+..... \quad = x^{-2}-2x^{-3}y+3x^{-4}y^2-4x^{-5}y^3+....$$

de hecho también existe esa relación, entre los coeficientes del polinomio y el exponente negativo; retomando de nuevo el arreglo triangular, llamado también "Triángulo aritmético", veamos:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$(x+y)^{-1}$

$(x+y)^{-2}$

$(x+y)^{-3}$

Observamos que los coeficientes son las diagonales de dicho arreglo triangular, además estos están alternados por signos negativos y positivos, y teniendo en cuenta que el polinomio esta en forma decreciente negativamente, tomando como referencia al exponente del binomio a elevar y creciente positivamente con respecto a al otra variable; así por ejemplo:

$(x+y)^{-4} = *x^{-4} + *x^{-5}y + *x^{-6}y^2 + ...$

ahora reemplazando cada asterisco por cada coeficiente del arreglo triangular, se tiene:

$(x+y)^{-4} = x^{-4} - 4x^{-5}y + 10x^{-6}y^2 - 20x^{-7}y^3 + ...$

Para el caso $(x+y)^n$ con $n \in \boldsymbol{Q}$, , es decir n es cualquier fracción, se llega a al conocida formula de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \qquad \text{, donde } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3).....[n-(n-k)]}{1.2.3........k}$$

llamado coeficiente binomial.

También se tiene para el binomio de Newton en la forma de combinaciones o análisis combinatorio:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k \qquad \text{donde } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{y} \quad n! = 1.2.3.4.5......n$$

este último llamado factorial de "n".

Ahora analicemos para el caso cuando $(x+y)^n$ con $n \in \boldsymbol{R}$,

Sea de nuevo nuestro binomio $(x+y)^n$, pero le vamos hacer una transformación del siguiente modo: $(x+y)^n = \frac{y^n}{y^n}(x+y)^n = y^n(\frac{x}{y}+1)^n$, si $\frac{x}{y} = Z$, se tiene el binomio transformado: $(x+y)^n = y^n(1+z)^n$, sólo analicemos la parte $(1+z)^n$, $\forall n \in \boldsymbol{R}$, ahora supongamos que este nuevo binomio tiene la forma de una serie infinita:
$(1+z)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...$, llamemos a este binomio G(x), se tiene:
G(x)= $(1+z)^n$, además llamemos F(x)= $(1+z)$, entonces tenemos:
$[F(x)]^n = G(x)$, derivando ambos miembros, se tiene [2]:
$n[F(x)]^{n-1}F(x)' = G'(x)$, multiplicando por F(x) a ambos lados, se tiene:
$n[F(x)]^n F'(x) = G'(x)F(x)$ arreglando adecuadamente y teniendo en cuenta que $[F(x)]^n = G(x)$, se obtiene

$$nG(x)F'(x) = G'(x)F(x)$$

analicemos el primer miembro: $nG(x)F'(x)$

$$\begin{array}{ll} nG(x) = na_0 + na_1 x + na_2 x^2 + na_3 x^3 + na_4 x^4 + ... & \\ F'(x) = 1 & \downarrow \quad (x)\ \text{multiplicando} \\ \hline nG(x)F'(x) = na_0 + na_1 x + na_2 x^2 + na_3 x^3 + na_4 x^4 + ... & \end{array}$$

ahora, analizando el otro miembro: $G'(x)F(x)$

$$\begin{array}{ll} G'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + ... & \\ F(x) = 1+x & \downarrow \quad (x)\ \text{multiplicando} \\ \hline nG'(x)F(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + 6a_6 x^5 .... & \\ \qquad a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + 5a_5 x^5 + ... & \downarrow \quad (+)\text{Sumando} \\ \hline nG'(x)F(x) = a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + (4a_4 + 3a_3)x^3 + (5a_5 + 4a_4)x^4 + ... & \end{array}$$

igualando términos:
$na_0 + na_1 x + na_2 x^2 + na_3 x^3 + na_4 x^4 + ... = a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + (4a_4 + 3a_3)x^3 + (5a_5 + 4a_4)x^4 + ...$
ahora empatando coeficientes termino a termino, se tiene:

$a_1 = na_0$, sabiendo de que , $a_0^n = 1$, se tiene: $\qquad a_1 = n$

$na_1 = 2a_2 + a_1 \longrightarrow a_2 = \frac{a_1}{2}(n-1) \qquad a_2 = \frac{a_1(n-1)}{1.2}$

$na_3 = 3a_3 + 2a_2 \longrightarrow a_3 = \frac{a_2}{3}(n-2) \qquad a_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$

$na_4 = 4a_4 + 3a_3 \longrightarrow a_4 = \frac{a_3}{4}(n-3) \qquad a_4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$

ya podemos intuir la forma que tendrá el coeficiente del término genérico (a_k) y será de la forma:

$$a_k = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)........[n-(k-1)]}{1.2.3.4.........k}$$

esto último se le denomina coeficiente binomial; ya Newton conocía este resultado aunque no lo demostró, apareció en su libro “De analysi per aequationes numero terminorun infinitas” , escrito en 1669, que no fue publicado hasta 1711; Newton escribió este teorema y de la deducción, en una carta dirigida a Odenburg pero cuyo destinatario real era Leibniz, el no lo dedujo de la manera expuesta por nosotros, su deducción esta basada en la idea de Wallis, acerca de interpolaciones o “intercalculos”, que se generaron apartir de problemas de cuadraturas, y sin el uso del triángulo aritmético.

2) **El Polinomio de Villarreal:**

Después de analizar el binomio de Newton, veamos un caso mas general, ya no un binomio, sino que sucede cuando elevamos un polinomio a un exponente cualquiera: es decir:

$$P(x)=a + bx +cx^2+dx^3+.............+zx^n,$$

un polinomio de grado “n”, con “n+1” términos, se desea obtener la formula para el caso $[p(x)]^m$, $m\in$ ***R***, procediendo similarmente como en el caso del binomio de Newton $(x+y)^n$ con $n\in$ ***R***, se tiene*:*

Sea el polinomio $\quad P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 +............. wx^{n-1}+ zx^n,$

Y sea también $\quad F(x) = [P(x)]^m = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ...Wx^{nm-1} + Zx^{nm}$

Entonces se tiene: $\quad F(x) = [P(x)]^m$, derivando en ambos miembros [2].

$$F'(x) = m[P(x)]^{m-1}P'(x), \text{ multiplicando por } P(x)$$

$$F'(x)\, P(x)=m[P(x)]^mP'(x), \text{ y teniendo en cuenta que } F(x) = [P(x)]^m$$

Se tiene : $\quad F'(x)\, P(x)=mF(x)P'(x),$

Operando la primera parte:

$$\begin{array}{l} F'(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + ... \\ P(x) \;\; = a + bx + cx^2 + dx^3 + ... \\ \hline \end{array}$$

multiplicando

$$\begin{array}{rl} F'(x)\, P(x) = & aB + 2aCx + 3aDx^2 + 4aEx^3 + ... \\ & \quad bBx + 2bCx^2 + 3bDx^3 + ... \\ & \qquad cBx^2 + 2cCx^3 + ... \\ & \qquad\qquad dBx^3 + ... \\ & \qquad\qquad .... \end{array}$$

$$F'(x)P(x) = aB + (2aC + bB)x + (3aD + 2bC + cB)x^2 + (4aE + 3bD +2cC+dB)x^3+ ....$$

Por otro lado:

$$\begin{array}{l} mF(x) = mA + mBx + mCx^2 + mDx^3 + ... \\ P'(x) \;=\; b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + ... \\ \hline \end{array}$$

multiplicando

$$\begin{array}{rl} mF(x)P'(x)= & mbA + mbBx + mbCx^2 + mbDx^3 + ... \\ & \quad 2mcAx + 2mcBx^2 + 2mcCx^3+.... \\ & \qquad 3mdAx^2 + 3mdbx^3 +.... \\ & \qquad\qquad 4meAx^3 + ... \\ & \qquad\qquad .... \end{array}$$

$mF(x)P'(x) = mbA + (mbB + 2mcA)x + (mbC + 2mcB + 3mdA)x^2 + (mbD + 2mcC + 3mdB + 4meA)x^3 + \ldots$

Ahora empatando resultados:

$aB + (2aC + bB)x + (3aD + 2bC + cB)x^2 + (4aE + 3bD + 2cC + dB)x^3 + \ldots = mbA + (mbB + 2mcA)x + (mbC + 2mcB + 3mdA)x^2 + (mbD + 2mcC + 3mdB + 4meA)x^3 + \ldots$

Ahora, igualando coeficientes de cada termino algebraico se tiene:

Sabiendo que $A = a^{nm}$

* $aB = mbA$ $\qquad B = \frac{b}{a}A(\frac{m+1-1}{1})$

* $2aC + bB = mbB + 2mcA$ $\qquad C = (\frac{m+1-2}{2})\frac{b}{2a}B + \frac{2(m+1)-2}{2}$

* $3aD + 2bC + cB = mbC + 2mcB + 3mdA$

$$D = (\frac{m+1-3}{3})\frac{b}{3a}C + (\frac{2(m+1)-3}{3})\frac{cB}{3a} + (\frac{3(m+1)-3}{3})\frac{mdA}{a}$$

y así sucesivamente.
Villarreal [4] llegó a la formula siguiente por recurrencia:

Sea Q : cualquier coeficiente del polinomio resultante.

$$Q = Z(\frac{b}{a})(\frac{i-n}{n}) + w(\frac{c}{a})(\frac{2i-n}{n}) + y(\frac{d}{a})(\frac{3i-n}{n}) + \ldots\ldots\ldots\ldots + B(\frac{w}{a})(\frac{(m-1)(m+1)-n}{n}) + A(\frac{z}{a})(\frac{m(m+1)-n}{n}) + A$$

1. Este triángulo ya se había usado en China, allá por los años 1303 por Yang Hiu, también apareció en el libro del “Espejo precioso de Chu Shih-Chieh”; Pascal muchos años después lo utilizó en problemas de probabilidades y encontró propiedades inéditas, allá por 1654, este triángulo fue tan relacionado con el, que se le llamo Triángulo de Pascal.
2. Si hablamos en rigor, sólo podemos derivar la serie si esta es convergente, y de hecho la suposición de que es convergente es válida (se demuestra).
3. Para ordenar un polinomio, se toma en cuenta el exponente de una variable del monomio y así se pasa a ordenar de mayor a menor o viceversa según la variable escogida. Por ejemplo si se tiene $x^3y^2 + x^2y^3 + x^5$ y si se le ordena con respecto a “x” de forma descendente se tiene $x^5 + x^3y^2 + x^2y^3$

4. Federico Villareal llegó a esta formula allá por el año de 1873 en Lambayeque aunque sus detractores decían que esa fórmula ya la había encontrado Leibniz, lo cierto es que no se tiene ningún documento del sabio alemán acerca de este polinomio; mas bien se tiene sus trabajos para el caso de un trinomio elevado al exponente “n” , $(x+y+z)^n$