Algoritmo de Pares o Diagrama de Pares

(Distribución de los primos entre los números pares)

José Acevedo J.

5 Dic. 2011, Santiago, Rep. Dom.

Como ya sabemos, el algoritmo de pares es aquel que nos permite generar todos los números pares mayores que dos, su enunciado es el siguiente:

Sea N un número natural par mayor que 4. Dividimos N entre 2, si el resultado de dicha operación es par le sumamos 2 y agregamos el valor obtenido a la sucesión, si por el contrario, el resultado es impar le sumamos 1 y agregamos el valor a la sucesión. Este proceso se repetirá hasta que la sucesión se haga periódica, esto ocurre cuando llega a 4.

Ejemplos:

$N = 36$

S_{36} {20, 12, 8, 6, 4}

$N = 56$

S_{56} {30, 16, 10, 6, 4}

En apariencia este simple algoritmo no tiene nada de especial, pero si somos buenos observadores notaremos que entre dos pares consecutivos de las sucesiones resultantes siempre existirá por lo menos un número primo. Esta afirmación es fácil de demostrar, aunque no es nuestro propósito dar una demostración exhaustiva de la misma.

Relación entre el algoritmo de pares y el postulado de Bertrand

El Postulado de Bertrand afirma que para valores de números enteros mayores que 3, existe por lo menos un número primo (p) tal que: $n < p < 2n - 2$. Existe otra afirmación más débil (la veracidad de esta es resultado directo de la primera): para todo $n > 1$ existe al menos un primo (p) tal que:

1) $n < p < 2n$.

En el 2006 el matemático M. El Bachraoui demostró que:

Para todo $m > 1$, existe un número primo (q) tal que: $2m < q < 3m$; por lo que:

2) $2m < p < 4m - 4$, también es verdadero para todo entero $m > 2$, por resultar una versión más débil de la afirmación de M. El Bachraoui, dado que:

$3m \leq 4m - 4$, para valores de $m > 3$.

De esto sacamos que:

Si (a, b) son números pares mayores que 4, tales que: $a/2 = m$ y $b = n$, para valores de $a = b = k$, tenemos que:

Sustituyendo n en 1, tenemos:

$b < p < 2b - 2$

y sustituyendo m en 2, nos queda:

$2(a/2) < q < 4(a/2) - 4$; expresión que reduciendo se convierte en:

$a < q < 2a - 4$

Como $a = b = k$, podemos decir que:

$k < p < 2k - 2$ y $k < q < 2k - 4$

Una vez llegado a este punto, es prudente observar con más lujos de detalles los primeros ejemplos del algoritmo de pares.

$N = 36$

S_{36} {20, 12, 8, 6, 4}

N = 56

S_{56} {30, 16, 10, 6, 4}

Obsérvese que ambas sucesiones tienen en común los números 4 y 6, a estos números los llamaremos troncos por ser comunes a todas las sucesiones resultantes del algoritmo de pares, el 6 aparte de ser tronco es un nodo, puesto que es el punto común entre 8 y 10.

$$\begin{tikzcd}
8 & & 10 \\
& 6 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Rama

Nodo

Todos los números pares mayores que 4 en algún punto sirven como nodos de una rama (sucesión que termina siempre en 4).

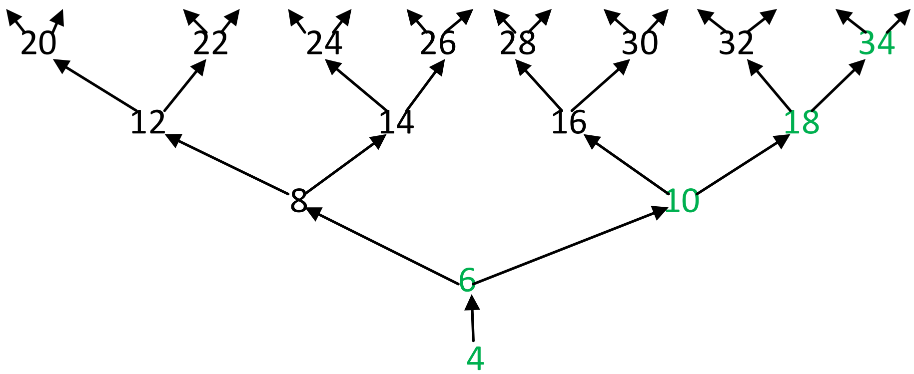
Así por ejemplo:

$$\begin{tikzcd}
16 & & 18 \\
& 10 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
12 & & 14 \\
& 8 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
20 & & 22 \\
& 12 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
24 & & 26 \\
& 14 \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En general:

$$\begin{tikzcd}
(2K - 4) & & (2K - 2) \\
& K \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$



Como se puede ver en el diagrama (árbol) los números 6 y 4 forman el tronco del árbol, a partir de estos salen las ramas que se ramifican hasta el infinito, nótese que cada base (sucesión de nodos horizontales) está compuesta por 2^n pares, así tenemos 1 par de números en la primera base, 2 pares de números en la segunda, 4 pares en la tercera y así sucesivamente.

Obsérvese también, la presencia del postulado de Bertrand en la rama coloreada de verde. Como dijimos en un principio, puede que a simple vista el algoritmo de pares o diagrama de pares no resulte interesante, pero si lo observamos de cerca podemos ver que posee propiedades interesantes, la presencia de los números primos entre pares consecutivos de una rama y la forma como quedan organizados los pares nos hace pensar que quizás no sea tan aleatorio el orden que rige al esquivo conjunto de los números primos.