Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcumque generaliter, sine prævia Reductione. Per Edm. Halley.

ARtis Analyticæ præcipuus quidem usus est Problemata Mathematica ad æquationes perducere, easque terminis quantum fieri possit simplicissimis exhibere. Ars autem ista manca quodammodo, nec satis Analytica merito videretur, nisi Methodi quædam subministrarentur, quarum ope Radices, sive Lineæ sive Numeri sint, ex jam inventis æquationibus elicere liceret, eoque nomine Problemata soluta dare.

Veteribus sane vix quicquam supra Quadraticarum æquationum naturam innotuit; quæcunque vero scripsere de Solidorum Problematum Effectione Geometricâ ope Parabolæ, Cissoïdis, aliusve Curvæ, particularia tantum sunt, ac casibus particularibus destinata; de Numericâ vero Extractione ubique altum silentium; ita ut quicquid in hoc genere jam calculo præstamus, modernorum inventis fere totum debetur.

Ac primus quidem ingens ille Algebræ hodiernæ repertor ac restaurator *Franciscus Vieta*, annis abhinc circiter centum, Methodum generalem aperuit pro educendis radicibus ex æquatione qualibet; eamque sub titulo *De Numerosâ potestatum ad Exegesin Resolutione* publico donavit, *ubique* ut ait *observando retrogradam Compositionis viam*. Hujusque Vestigiis insistentes *Harriottus*, *Oughtredus* aliique, tam nostrates tam extranei, quæcunque de hac re scriptis mandarunt, à *Vietâ* desumpta debent agnoscere. Qualia vero in hoc negotio præstiterit sagacissima ingenii *Newtoniani* vis, ex contractio e Specimine à Clarissimo *Wallisio*, Cap. XCIV. Algebræ suæ, edito,

edito, potius conjecturâ assequi quam pro certo comperiri licet. Ac dum obstinata Authoris modestia amicorum precibus devicta cedat, inventaque hæc sua pulcherrima in lucem promere dignetur, expectare cogimur.

Nuper vero eximius ille juvenis *D. Josephus Ralphson, R. S. S. Analysin Æquationum Universalem* Anno 1690. evulgavit, suæque Methodi præstantiam pluribus exemplis abunde illustravit; quo Genii Mathematici maxima quæque pollicentis nobile indicium prodidit.

Hujus exemplo ac ductu (ut par est credere) *D. de Lagney*, haud vulgaris apud *Parisienses* Mathematum Professor, idem argumentum aggressus est; qui cum totus fere sit in eliciendis Potestatum purarum radicibus, præsertim Cubicâ, pauca tantum eaque perplexa nec satis demonstrata de affectarum radicum extractione subjungit. Regulas autem binas compendiosas admodum pro approximatione radicis Cubicæ profert, alteram rationalem, alteram irrationalem; nempe Cubi $aaa + b$ latus esse inter $a + \frac{ab}{3aaa + b}$ ac $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} + \frac{1}{2}a$.

Radicem autem potestatis Quintæ $a^5 + b$ sic exprimit $=$

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$ (non $\frac{1}{2}aa$ ut perperam legitur in libro Gallico impresso) Has Regulas, cum nondum librum videram, ab amico communicatas habui, quarum vires experimento edoctus, compendiumque admiratus, volui etiam Demonstrationem investigare: Ea vero inventâ ad Universalem Æquationum omnium resolutionem eandem methodum accommodari posse statim cognovi; Eoque magis eas excolere statui, quia uno intuitu rem totam Synoptice explicari posse videbam, quodque hoc pacto singulis calculi restaurati vicibus saltem triplicarentur notæ sive Ciphræ in radice jam inventæ, quæ quidem omnibus aliorum omnium computationibus non nisi pari cum datis numero augentur.

Demonſtrantur autem Regulæ prædictæ ex Geneſi Cubi & Poteſtatis quintæ. Poſito enim Latere Cubi cujuſque $a+e$, Cubus inde conflatus ſit $aaa+3aae+3aee+eee$, adeoque ſi ſupponatur aaa Numerus Cubus proxime minor dato quovis non Cubo, eee minor erit Unitate, ac reſiduum ſive b æquabitur reliquis Cubi membris $3aae+3aee+eee$: rejectoque eee ob parvitatem, $b=3aae+3aee$. Cumque aae multo majus ſit quam aee, $\frac{b}{3aa}$ non multum excedet ipſam e, poſitoque $e=\frac{b}{3aa}$, $\frac{b}{3aa+3ae}$, cui proxime æquatur quantitas e, invenietur $=\frac{b}{3aa+\frac{3ab}{3aa}}$ ſive $\frac{b}{3aa+\frac{b}{a}}$: hoc eſt $\frac{ab}{3aaa+b}=e$, adeoque latus Cubi $aaa+b$ habebitur $a+\frac{ab}{3aaa+b}$ quæ eſt ipſa formula rationalis D^{ni} *de Laguey*. Quod ſi aaa fuerit Numerus Cubus proxime major dato, Latus Cubi $aaa-b$ pari ratiocinio invenietur $a-\frac{ab}{3aaa-b}$; atque hæc Radicis Cubicæ approximatio ſatis expedita ac facilis parum admodum fallit in defectu, cum ſcilicet e reſiduum Radicis hoc pacto inventum paulo minus juſto ſit. Irrationalis vero formula etiam ex eodem fonte derivatur, *viz.* $b=3aae+3aee$, ſive $\frac{b}{3a}=ae+ee$; adeoque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}=\frac{1}{2}a+e$, atque $\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{b}{3a}}+\frac{1}{2}a=a+e$ ſive Radici quæſitæ. Latus vero Cubi $aaa-b$ eodem modo habebitur $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-\frac{b}{3a}}$. Atque hæc quidem formula aliquanto propius ad ſcopum collimat, in exceſſu peccans ſicut altera in defectu, ac ad praxin magis

commoda

commoda videtur, cum restitutio Calculi nihil aliud sit quam continua additio vel subductio ipsius $\frac{eee}{3a}$, secundum ac quantitas e innotescat; ita ut potius scribendum sit $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{b-eee}{3a}} + \frac{1}{2}a$ in priori casu, ac in posteriori $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{eee-b}{3a}}$. Utrâque autem formulâ Ciphræ jam cognitæ in Radice extrahendâ ad minimum triplicantur, quod quidem Arithmeticæ studiosis omnibus gratum fore confido, atque ipse Inventori abunde gratulor.

Ut autem harum regularum utilitas melius sentiatur, exemplum unum vel alterum adjungere placuit. Quæratur Latus Cubi dupli, sive $aaa + b = 2$. Hic $a = 1$ atque $\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$, adeoque $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{7}{12}}$ sive 1,26 invenietur Latus prope verum. Cubus autem ex 1,26 est 2,000376, adeoque $0{,}63 + \sqrt{,3969 - \frac{,000376}{3{,}78}}$ sive $0{,}63 + \sqrt{,3968005291005291} = 1{,}259921049895 -$; quod quidem tredecim figuris Latus Cubi dupli exhibet, nullo fere negotio, *viz.* unâ Divisione & Lateris Quadrati extractione, ubi vulgari operandi modo quantum desudasset Arithmeticus norunt experti. Hunc etiam calculum quousque velis continuare licet, augendo quadratum additione $\frac{eee}{3a}$. Quæ quidem correctio hoc in casu non nisi unitatis in Radicis figurâ decima quartâ augmentum affert.

Exemp. I. Quæratur Latus Cubi æqualis mensuræ *Anglicæ Gallon* dictæ, uncias solidas 231 continentis. Cubus proxime minor est 216 cujus Latus $6 = a$, ac residuum $15 = b$ adeoque pro prima approximatione provenit $3 + \sqrt{9 + \frac{5}{6}}$ = Radici. Cumque $\sqrt{9{,}8333}$... sit 3,1358... patet $6{,}1358 = a + e$. Supponatur jam $6{,}1358 = a$,

& habebimus Cubum ejus 231,000853894712, ac juxta regulam $3,0679 + \sqrt{9,41201041 - \frac{,000853894712}{18,4074}}$ æquatur accuratissime Lateri Cubi dati, id quod intra horæ spatium calculo obtinui 6.135792439661958897, in octodecimâ figurâ justum, at deficiens in decimâ nonâ. Hæc vero formula merito præferenda est rationali, ob ingentem divisorem, non sine magno labore tractandum; cum Lateris quadrati extractio multo facilius procedat, ut experientia multiplex me docuit.

Regula autem pro Radice Sursolidi Puri sive potestatis quintæ paulo altioris indaginis est, atque etiam adhuc multo perfectius rem præstat: datas enim in Radice Ciphras ad minimum quintuplicat, neque etiam multi nec operosi est Calculi. Author autem nullibi inveniendi methodum ejusve demonstrationem concedit, etiamsi maxime desiderari videatur: præsertim cum in Libro impresso non recte se habeat; id quod imperitos facile illudere possit. Potestas autem Quinta Lateris $a + e$ conficitur ex his membris $a^5 + 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2eee + 5ae^4 + e^5 = a^5 + b$, unde $b = 5a^4e + 10a^3ee + 10a^2e^3 + 5ae^4$, rejecto e^5 ob parvitatem suam: quocirca $\frac{b}{5a} = a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4$, atque utrinque addendo $\frac{1}{4}a^4$ habebimus $\sqrt{\frac{1}{4}aaaa + \frac{b}{5a}} = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + a^3e + 2a^2e^2 + 2ae^3 + e^4} = \frac{1}{2}aa + ae + ee$. Dein utrinque subducendo $\frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a + e$ æquabitur $\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$ cui si addatur $\frac{1}{2}a$, erit $a + e = \frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa} =$ radici potestatis $a^5 + b$. Quod si fuisset $a - b$, (assumptâ a justo majore,) regula sic se haberet, $\frac{1}{2}a + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}a^4 - \frac{b}{5a}} - \frac{1}{4}aa}$.

Atque

Atque hæc regula mirum in modum approximat, ut vix restitutione opus sit; at dum hæc mecum pensitavi, incidi in formularum methodum quandam generalem pro quavis potestate satis concinnam, quamque celare nequeo; cum etiam in superioribus potestatibus datas radicis figuras triplicare valeant.

Hæ autem formulæ ita se habent tam rationales quam irrationales.

$$\sqrt{aa+b} = \sqrt{aa+b} \text{ vel } a + \frac{ab}{2aa+\frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{a^3+b} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \frac{b}{3a}} \text{ vel } a + \frac{ab}{3aaa+b}$$

$$\sqrt[4]{a^4+b} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{9}aa + \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a + \frac{ab}{4a^4+\frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5+b} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa + \frac{b}{10a^3}} \text{ vel } a + \frac{ab}{5a^5+2b}$$

$$\sqrt[6]{a^6+b} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa + \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a + \frac{ab}{6a^6+\frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt{a^7+b} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa + \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a + \frac{ab}{7a^7+3b}$$

Et sic de cæteris etiam adhuc superioribus. Quod si assumeretur a radice quæsitâ major, (quod cum fructu fit quoties Potestas resolvenda multo propior sit potestati Numeri integri proxime majoris quam proxime minoris,) mutatis mutandis eædem radicum expressiones proveniunt.

$$\sqrt{aa-b} = \sqrt{aa-b} \text{ vel } a - \frac{ab}{2aa-\frac{1}{2}b}$$

$$\sqrt[3]{aaa-b} = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa - \frac{b}{3a}} \text{ vel } a - \frac{ab}{3aaa-b}$$

$$\sqrt[4]{a^4-b} = \tfrac{2}{3}a + \sqrt{\tfrac{1}{9}aa - \frac{b}{6aa}} \text{ vel } a - \frac{ab}{4a^4-\frac{3}{2}b}$$

$$\sqrt[5]{a^5-b} = \tfrac{3}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa - \frac{b}{10a}} \text{ vel } a - \frac{ab}{5a^5-2b}$$

$\sqrt[6]{}$

$$\sqrt[6]{a^6 - b} = \tfrac{4}{5}a + \sqrt{\tfrac{1}{25}aa - \frac{b}{15a^4}} \text{ vel } a - \frac{ab}{6a^6 - \frac{5}{2}b}$$

$$\sqrt[7]{a^7 - b} = \tfrac{5}{6}a + \sqrt{\tfrac{1}{36}aa - \frac{b}{21a^5}} \text{ vel } a - \frac{ab}{7a^7 - 3b}$$

Atque inter hos duos terminos ſemper conſiſtit vera Radix, aliquanto propior irrationali quam rationali; *e* vero juxta formulam irrationalem inventa, ſemper peccat in exceſſu, ſicut in defectu a rationali formulâ reſultans Quotus; adeoque ſi fuerit $+ b$, Irrationalis majorem juſto exhibet radicem, rationalis minorem. E contrario vero ſi fuerit $- b$. Atque hæc de eliciendis radicibus è Poteſtatibus puris dicta ſunto, quæ quidem, ad uſus ordinarios ſufficientes multo facilius habentur ope Logarithmorum: quoties vero ultra Tabularum Logarithmicarum vires accuratiſſime definienda eſt radix, ad hujuſmodi methodos neceſſario recurrendum eſt. Præterea cum ex harum formularum inventione ac contemplatione, Univerſalis Regula pro æquationibus affectis (quam non ſine fructu Geometriæ ac Algebræ ſtudioſis omnibus uſurpandam confido) mihi ipſi oblata ſit, volui ipſius inventi primordia quæ poſſim claritate aperire.

Æquationum quidem affectarum Quadrato-quadratum non excedentium Conſtructionem Generalem concinnam admodum ac facilem, *Num.* 188 harum *Tranſact.* jam tum inventam publici juris feci: ex quo ingens cupido animum inceſſit, idem Numeris efficiendi. At brevi poſt *D^us^ Ralphſon* magna ex parte voto ſatisfeciſſe viſus eſt, uſque dum *D^us^ de Lagney* etiam adhuc compendioſius rem peragi poſſe hoc ſuo libello mihi ſuggeſſit. Methodus autem noſtra hæc eſt.

Supponatur Radix cujuſvis æquationis z compoſita ex partibus $a +$ vel $- e$, quarum a ex hypotheſi aſſumatur ipſi z quantum fieri poſſit propinquam, (quod tamen com-

Tabella Potestatum.

$$
\begin{array}{llllllll}
 & s & t & u & w & x & y & \\
z^7 = l a^7 & + 7 l a^6 e & + 21 l a^5 ee & + 35 l a^4 e^3 & + 35 l a^3 e^4 & + 21 l a^2 e^5 & + 7 l a e^6 & + l \\
z^6 = k a^6 & + 6 k a^5 e & + 15 k a^4 ee & + 20 k a^3 e^3 & + 15 k a^2 e^4 & + 6 k a e^5 & + k e^6 & \\
z^5 = h a^5 & + 5 h a^4 e & + 10 h a^3 ee & + 10 h a^2 e^3 & + 5 h a e^4 & + h e^5 & & \\
z^4 = g a^4 & + 4 g a^3 e & + 6 g a^2 ee & + 4 g a e^3 & + g e^4 & & & \\
z^3 = f a^3 & + 3 f a^2 e & + 3 f a ee & + f e^3 & & & & \\
z^2 = d a^2 & + 2 d a e & + d ee & & & & & \\
z = c a & + c e & & & & & &
\end{array}
$$

Transactions, Numb. 210. Pag. 143.

commodum est, non necessarium) & ex quantitate $a +$ vel $- e$ formentur Potestates omnes ipsius z in Æquatione inventas, iisque affigantur Numeri Coefficientes respectivè: deinde Potestas Resolvenda subducatur è summa partium datarum in primâ columnâ, ubi e non reperitur, quam Homogeneum Comparationis vocant, sitque differentia $+ b$. Dein habeatur summa omnium coefficientium ipsius lateris e in secunda Columna, quæ sit s; denique in tertia addantur omnes coefficientes quadrati ee, quarum summam vocemus t: Ac radix quæsita z, formulâ rationali habebitur $= a +$ vel $- \dfrac{sb}{ss + vel - tb}$: Irrationali vero fiet $z = a \mp \dfrac{\frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}ss \mp bt}}{t}$, id quod exemplis illustrare fortasse operæ pretium erit. Instrumenti vero loco adsit Tabella, Potestatum omnium ipsius $a +$ vel $- e$ Genesin exhibens, quæ si opus fuerit continuari facile possit. A septimâ vero incipiam, cum pauca Problemata eousque assurgere deprehendantur. Hanc Tabellam jure optimo *Speculum Analyticum Generale* appellare licet. Potestates autem prædictæ ex continuâ multiplicatione per $a + e = z$ ortæ, sic proveniunt, cum suis coefficientibus adjunctis, *Vide Tab.*

Quod si fuerit $a - e = z$, ex iisdem membris conficitur Tabella, negatis solummodo imparibus Potestatibus ipsius e, ut e, e^3, e^5, e^7: & affirmatis paribus e^2, e^4, e^6. Sitque Summa Coefficientium lateris $e = s$; Summa Coefficientium Quadrati $ee = t$; Cubi $= u$; Biquadrati $= w$; Surfolidi $e^5 = x$; Summa vero coefficientium Cubocubi $= y$; &c.

Cum autem supponatur e exigua tantum pars radicis inquirendæ, omnes potestates ipsius e multo minores evadunt similibus ipsius a Potestatibus, adeoque pro primâ Hypothesi rejiciantur superiores, (ut in potestatibus puris ostensum est) ac formatâ æquatione novâ, substituendo do $a + e = z$ habebimus ut diximus $\pm b = \pm se \pm tee$. Cujus rei cape exempla ſequentia, quo melius intelligatur.

Exemp. I. Proponatur æquatio $z^4 - 3zz + 75z = 10000$. Pro prima Hypotheſi ponatur $a = 10$, ac conſequenter prodibit æquatio.

$$\begin{array}{llllll}
z^4 = & + a^4 & 4a^3e + 6a^2ee & 4ae^3 + e^4 \\
-dz^2 = & -da^2 & dae - dee & \\
+cz = & +ca & ce & \\
& & & \\
= & +10000 & 4000e + 600ee & 40e^3 + e^4 \\
& -300 & 60e - 3ee & \\
& +750 & 75e & \\
& -10000 & & \\
\hline
& +450 & -4015e + 597ee & -40e^3 + e^4 = 0 \\
& & \;\;\; s \qquad\;\; t & \;\; u
\end{array}$$

Signis + ac − (reſpectu e ac e^3) in dubio relictis, uſque dum ſciatur an e ſit negativa vel affirmativa; Quod quidem aliquam paret difficultatem, cum in æquationibus plures radices admittentibus, ſæpe augeantur Homogenia Comparationis, ut appellant, à minuta quantitate a, ac è contra eâ auctâ minuantur. Determinatur autem ſignum ipſius e ex ſigno quantitatis b; ſublatâ enim Reſolvendâ ex Homogenio ab a formato, ſignum ipſius se, ac proinde partium in ejus compoſitione prævalentium, ſemper contrarium erit ſigno differentiæ b. Unde patebit an fuerit $-e$ vel $+e$, ſive an a major vel minor radice vera aſſumpta ſit. Ipſa autem e ſemper æquatur $\dfrac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$, quoties b ac t eodem ſigno notantur; quoties vero diverſo ſigno connectuntur, eadem e fit $\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t}$. Poſtquam vero compertum ſit fore $-e$, in affirmatis æquationis membris negentur e, e^3, e^5, &c. in negatis affirmentur; ſcribantur ſcilicet ſigno contrario; ſi vero fuerit $+e$, affirmentur in affirmatis,

matis, negentur in negatis. Habemus autem in hoc nostro exemplo 10450 loco Resolvendæ 10000, sive $b = + 450$, unde constat a majorem justò assumptam, ac proinde haberi $-e$: Hinc æquatio fit $10450 - 4015\,e + 597\,ee - 4\,e^3 + e^4 = 10000$. Hoc est $450 - 4015\,e + 597\,ee = 0$. Adeoque $450 = 4015\,e - 597\,ee$ sive $b = se - tee$ cujus Radix e fit $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$.

Vel si mavis $\frac{s}{2t} - \sqrt{\frac{ss}{4tt} - \frac{b}{t}}$, id est, in præsenti casu, $e = \frac{2007\frac{1}{2} - \sqrt{3761406\frac{1}{4}}}{597}$, unde provenit Radix quæsita prope verum, 9,886. Hoc vero pro secundâ Hypothesi substituto, emergit $a + e = z$ accuratissime 9,88626036495...., in ultima figura vix binario justum superans; nempe cum $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$. Atque hoc etiam si opus fuerit, multo ulterius verificari possit, subducendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 + \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss + tb}}$ si fuerit $+ e$, vel addendo $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}$, radici prius inventæ, si sit $- e$. Cujus compendium eo pluris æstimandum quod quandoque, ex sola prima suppositione, semper vero ex secunda, iisdem conservatis coefficientibus quousque velis calculum continuare possis. Cæterum æquatio prædicta etiam negativam habet radicem, *viz.* $z = 10,26.....$ quam cuilibet accuratius expiscari licet.

Exemp. II. Sit $z^3 - 17\,zz + 54\,z = 350$ ac ponatur $a = 10$. Ex præscripto Regulæ,

$$\begin{array}{rcl} zzz & = & aaa + 3aae + 3aee + eee \\ -dzz & = & daa - 2dae - d\,ee \\ +c\,z & = & c\,a + c\,e \end{array}$$

 Id est

$$
\begin{array}{llllll}
 & b & & s & & t \\
\text{Id est} & +1000 & + & 300e & + & 30ee + eee \\
 & -1700 & - & 340e & - & 17ee \\
 & +540 & + & 54e & & \\
 & -350 & & & & \\
\hline
\text{Sive} & -510 & + & 14e & + & 13ee + eee = 0
\end{array}
$$

Cum autem habeatur -510, constat a minorem justo assumi, ac proinde e affirmativam esse, ac ex $510 = 14e + 13ee$ sit $\frac{\sqrt{bt + \frac{1}{4}ss} - \frac{1}{2}s}{t} = e = \frac{\sqrt{6679} - 7}{13}$, unde z sit 15,7... quæ nimia quidem est ob late sumptam a; ideo supponatur secundo $a = 15$, ac pari ratiocinio habebimus $e = \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - tb}}{t} = \frac{109\frac{1}{2} - \sqrt{11710\frac{1}{4}}}{28}$ ac proinde $z = 14{,}954068$. Quod si calculum adhuc tertio restaurare velis, usque in vigesimam quintam figuram vero conformem invenies radicem: Paucioribus vero contentus, scribendo $tb \pm teee$ loco tb, vel subtrahendo aut addendo radici prius inventæ $\frac{\frac{1}{2}eee}{\sqrt{\frac{1}{4}ss \mp tb}}$ ad scopum statim perveniet. Æquatio vero proposita nulla alia radice explicari potest, quia Potestas Resolvenda 350 major est Cubo ex $\frac{17}{3}$ vel $\frac{1}{3}d$.

Exemp. III. Sit Æquatio illa quam in Resolutione difficillimi Problematis Arithmetici adhibet Clarissimus *Wallisius*, Cap. LXII. Algebræ suæ, quo radicem *Vietæ* Methodo accuratissime quidem assecutus est: Eandemque exemplum Methodi suæ affert laudatus D^s *Ralphson*, *pag.* 25, 26. nempe $z^4 - 80z^3 + 1998z^2 - 14937z + 5000 = 0$. Hæc autem æquatio ejus formulæ est, ut plures habeat radices Affirmativas, ac quod difficultatem ejus augeat, prægrandes sunt Coefficientes respectu Resolvendæ datæ: Quo melius autem tractetur, dividatur, ac juxta notas punctationum regulas ponatur $-z^4 + 8z^3 - 20z^2 + 15z = 0{,}5$ (ubi z est $\frac{1}{10}z$ in æquatione proposita) ac pro prima Hypothesi habeamus $a = 1$. Proinde.

+ 2

$$+2 - 5e - 2ee + 4e^3 - e^4 - 0,5 = 0$$

Hoc est $1\frac{1}{2} = 5e + 2ee$; hinc $\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ss + bt} - \frac{1}{2}s}{t} = e$ fit $\frac{\sqrt{37} - 5}{4}$ adeoque $z = 1,27$: Unde constat $12,7$ radicem esse æquationis propositæ vero vicinam. Secundo loco supponatur $z = 12,7$ ac juxta præscriptum Tabellæ Potestatum oritur.

$$\begin{array}{llllll}
 & b & s & t & u & \\
- & 26014,4641 & - 8193,532\,e & - 967,74\,ee & - 50,8\,e^3 & - e^4 \\
+ & 163870,640 & + 38709,60\,e & + 3048\,ee & + 80\,e^3 & \\
- & 322257,42 & - 50749,2\,e & - 1998\,ee & & \\
+ & 189699,9 & + 14937\,e & & & \\
- & 5000 & & & & \\
\hline
+ & 298,6559 & - 5296,132\,e & + 82,26\,ee & + 29,2\,e^3 & - e^4 = 0
\end{array}$$

Adeoque $-298,6559 = -5296,132\,e + 82,26\,ee$, cujus radix e juxta regulam $= \frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}{t}$ fit $\frac{2648,066 - \sqrt{6987686,106022}}{82,26} = ,05644080331\ldots = e$ minori vero: Ut autem corrigatur, $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}$ sive $\frac{,0026201\ldots}{2643,423\ldots}$ fit $,00000099117$, ac proinde e correcta $= 05644179448$; Quod si adhuc plures radicis figuras desideras, formetur ex e correctâ $tue^3 - te^4 = 0,43105602423\ldots$, ac $\frac{\frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{4}ss - bt - tue^3 + te^4}}{t}$ sive $\frac{2648,066 - \sqrt{6987685,67496597577\ldots}}{82,26}$ $= ,056441794480744402 = e$, unde $a + e = z$ radix accuratissima fit $12,756441794480744402\ldots$ qualem invenit Cl. *Wallisius* in loco citato. Ubi observandum redintegrationem calculi semper triplicare notas veras in assumpta a, quas prima correctio sive $\frac{\frac{1}{2}ue^3 - \frac{1}{2}e^4}{\sqrt{\frac{1}{4}ss - bt}}$ quintuplices reddit, quæque etiam commode per Logarithmos efficitur. Altera autem correctio post primam, etiam duplum Cipharum numerum adjungit, ut omnino assumptas septuplicet; prima tamen plerumque usibus Arithmetices abunde sufficit. Quæ vero dicta sunt de numero cipharum in radice recte assumptarum, ita intelligi velim, ut cum a non nisi decima parte distet à vera radice, prima figura recte assumatur; si intra centesimam partem, duæ primæ: Si intra millesimam tres priores rite se habeant; quæ deinde juxta nostram regulam tractatæ statim novem evadunt.

Restat jam ut nonnulla adjiciam de nostra formula rationali, *viz.* $e = \frac{sb}{ss \pm tb}$, quæ quidem satis expedita videbitur, nec multum cedit priori, cum etiam datas ciphras triplicare valeat. Formata autem æquatione ex $a \pm e = z$, ut prius, statim patebit an a assumpta sit major vel minor vero, cum scilicet se signo semper notari debeat contrario signo differentiæ Resolvendæ ac Homogenii sub ex a producti. Deinde posito quod $+b \mp se + \text{vel} - tee = 0$; divisor fit $ss - tb$ quoties b ac t iisdem signis notantur; idem vero fit $ss + bt$, si signa ista diversa sint. Praxi autem magis accommodata videtur, si scriberetur Theorema, $e = \frac{b}{s \pm \frac{tb}{s}}$ nempe cum una multiplicatione ac duabus divisionibus res peragatur, quæ tres multiplicationes ac unam divisionem alias requireret. Hujus etiam Methodi exemplum capiamus à prædictæ Æquationis radice $12,7...$: ubi

$$\underset{+b}{298,6559} \underset{-s}{- 5296,132e} \underset{+t}{+ 82,26ee} \underset{+u}{+ 29,2e^3} - e^4 = 0,$$

adeoque $\frac{b}{s - \frac{tb}{s}} = e$, hoc est, fiat ut s ad t ita b ad $\frac{tb}{s}$ $= 5296,132)298,6559$ in $82,26(4,63875...$ quocirca divisor fit $s - \frac{tb}{s} = 5291,49325...)\,298,6559(0,056441..... = e$, *viz.* quinque figuris veris adjectis radici assumptæ. Corrigi autem nequit hæc formula sicut præcedens irrationalis; adeoque si plures desiderentur radicis figuræ, præstat assumpta nova Hypothesi calculum de integro repetere: ac novus Quotus triplicando figuras in radice cognitas supputatori etiam maxime scrupuloso abunde satisfaciet.

London: Printed for *Sam. Smith* and *Benj. Walford*, Printers to the *Royal Society*, at the *Prince's Arms* in St. *Paul's* Church yard. 1694.