Problemas de Probabilidad Resueltos y Propuestos

1. Si consideramos que en el lanzamiento de 10 dados al menos aparece un uno ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos o más unos?

   Solución. Aquí aplicamos la probabilidad condicional. Definamos los eventos:

   (a) A es el evento en el que aparece al menos un uno.

   (b) B es el evento en el que aparecen al menos dos unos.

   La respuesta es $p(B|A)$, que indica la probabilidad de que salgan al menos dos unos si sale al menos un uno. De la definición de la probabilidad condicional se tiene

$$p(B|A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

   Puesto que todo evento que contenga al menos dos unos contiene al menos un uno, se tiene que $B \cap A = B$. Debemos calcular $p(B)$ y $p(A)$. Para eso calculamos $p(\overline{A})$ y $p(\overline{B})$. $\overline{A}$ denota el evento en el cual no aparece ningún uno y $\overline{B}$ es el evento en el cual aparece a lo sumo un uno.

$$p(\overline{A}) = \frac{5^{10}}{6^{10}}, \qquad p(\overline{B}) = \frac{5^{10} + 5^9 10}{6^{10}}$$

   De este modo se tiene que

$$p(B|A) = \frac{1 - \frac{5^{10}+5^9 10}{6^{10}}}{1 - \frac{5^{10}}{6^{10}}} = \frac{6^{10} - 5^{10} - 10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}}$$

2. Considere que en el lanzamiento de 4 dados aparece al menos un par ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los resultados es par? Resultado $\frac{7}{15}$

3. Se lanza un dado tantas veces como sea necesario hasta que aparezca un tres. Si suponemos que el tres no aparece en la primera lanzada

   (a) ¿Cuál es la probabilidad que se necesiten más de cuatro lanzadas?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que suceda en la tercera lanzada?

   Solución.

   (a) Definimos los eventos:

   A es el evento que la primera lanzada no es tres.

   B es el evento en el que en las primeras cuatro lanzadas no sale tres.

   $p(B|A)$ es la probabilidad de que se necesiten más de cuatro lanzadas para que aparezca tres si en la primera no sale tres. Debemos calcular $p(B \cap A)$ y $p(A)$. Puesto que $B \cap A = B$ ¿Porque? entonces $p(B \cap A) = p(B) = \frac{5^4}{6^4}$ y $p(A) = \frac{5}{6}$. Así

$$p(B|A) = \frac{5^3}{6^3}$$

   (b) Los eventos son:

   A es el evento que la primera lanzada no es tres.

   B es el evento en el que el tres sale en la tercera lanzada y no antes.

$p(B|A)$ indica la probabilidad de que el tres aparece por primera vez en la tercera lanzada sabiendo que no salió en la primera. $A \cap B = B$ Puesto que si tres sale por primera vez en la tercera lanzada entonces la primera lanzada no es tres. $p(B) = \frac{5^2}{6^3}$ y $p(A) = \frac{5}{6}$

$$p(B|A) = \frac{5}{6^2}$$

4. Se lanza dos dados las veces necesarias hasta que aparezcan los mismos valores en ellos.

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que esto suceda antes de la quinta lanzada?

   (b) ¿ Cuál es la probabilidad de que suceda después de la tercera lanzada?

   (c) Si suponemos que no sucede en la primera lanzada ¿Cuál es la probabilidad de que se necesiten más de 4 lanzadas?

   Resultados: $\frac{671}{1296}$, $\left(\frac{5}{6}\right)^3$, $\left(\frac{5}{6}\right)^3$

5. De un juego ordinario de cartas $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K$ de cuatro figuras $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$, en total 52 cartas) se eligen aleatoriamente 13 cartas ¿Cuál es la probabilidad de que se elijan 4 $\diamondsuit$, 5 $\clubsuit$, 2 $\heartsuit$ y 2 $\spadesuit$?

6. En un juego de cartas como el anterior, si se eligen aleatoriamente 5 cartas

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que se elijan 5 $\clubsuit$?

   (b) ¿Cuál es la probabilidad de que se elijan 3 J's y 2K's?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que se elijan de tal manera que aparezcan todas las figuras y no aparezcan valores repetidos, es decir, no hay pares?

7. La urna A contiene dos bolas blancas y una negra y la urna B contiene una blanca y dos negras. Se extrae al azar una bola de la urna A y se deposita en la urna B. Luego se selecciona aleatoriamente una bola de la urna B ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

   Resultado: $\frac{5}{12}$

8. Se tienen tres urnas A, B y C, que tienen bolas verdes, y azules en las siguientes cantidades: $(1, 2), (2, 1), (1, 1)$ respectivamente.

   (a) Se elige una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B; luego se elige al azar una bola de la urna B y se deposita en la urna C. Por último se elige una bola al azar de la caja C ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?

   (b) Si la bola extraída es original de la urna C, es decir, no es la pelota agregada de la urna B en el paso 2 del experimento ¿Cuál es la probabilidad de que sea verde?

   (c) Si la bola extraída es verde ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna A?

   (d) Si la bola extraída es verde ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la urna B?

   (e) Se eligen una bola de la urna A y una bola de la urna B al azar y se depositan en la urna C. Luego se elige una bola de la urna C ¿Cuál es la probabilidad de que la bola elegida de la urna C sea azul? ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea verde?

   (f) En las mismas condiciones previas ¿Cuál es la probabilidad de que si la bola extraída proviene de la urna A esta sea verde?

   (g) En las mismas condiciones previas ¿Cuál es la probabilidad de que si la bola es azul no proviene de la urna B?

Solución.

(a) Definimos nuestro espacio de probabilidad y determinamos las probabilidades de cada uno de los eventos que determinan nuestro espacio. Sea S el conjunto de ternas (x, y, z) que indican x es la bola extraída de la urna A, y indica la bola extraída de la caja B y z indica la bola extraída de la caja C. Para calcular las probabilidades de cada una de las ternas se puede proceder como en la clase construyendo un árbol de probabilidad condicional. Aquí haremos una lista y determinamos las probabilidades:

$$S =\{(v, v, v), (v, v, a), (v, a, v), (v, a, a), \\ (a, v, v), (a, v, a), (a, a, v), (a, a, a)\}$$

$$p(v, v, v) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \qquad p(v, v, a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$
$$p(v, a, v) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} \qquad p(v, a, a) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$
$$p(a, v, v) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \qquad p(a, v, a) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$
$$p(a, a, v) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \qquad p(a, a, a) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Se deja al lector verificar los valores y que la suma es 1.
La probabilidad $p(v, v, v)$ se calcula de la siguiente manera, la probabilidad de extraer una bola verde de la urna A (este es el primer paso del experimento aleatorio) es $\frac{1}{3}$ ya que en la urna A hay una bola verde y dos azules, puesto que dicha bola se deposita en la urna B se tienen ahora tres verdes y una azul en esta urna y por lo tanto la probabilidad de que se extraiga una verde es (en este momento) $\frac{3}{4}$, dicha bola se coloca en la urna C y se tienen en esta urna dos verdes y una azul; de este modo la probabilidad de extraer una verde de la urna C es $\frac{2}{3}$.
Ahora veamos la probabilidad condicional. Si tenemos tres eventos E_1, E_2 y E_3 de un experimento aleatorio y queremos determinar $p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, podemos hacerlo por medio de la fórmula

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_3|E_1 \cap E_2) \cdot p(E_2|E_1) \cdot p(E_1)$$

Se deja al lector la prueba de esta fórmula. En este caso definimos los eventos de esta manera:
E_1 es el evento se extrae una bola verde de la urna A
E_2 es el evento se extrae una bola verde de la urna B
E_3 es el evento se extrae una bola verde de la urna C
Por las características del experimento los eventos son dependientes.
Ahora bien $p(E_1) = \frac{1}{3}$, por lo expuesto arriba, $p(E_2|E_1) = \frac{3}{4}$ y $p(E_3|E_2 \cap E_1) = \frac{2}{3}$. De este modo

$$p(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = p(E_3|E_2 \cap E_1) \cdot p(E_2|E_1) \cdot p(E_1) = \frac{2}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{3}$$

Aplicando este razonamiento para los diferentes elementos del espacio de probabilidad se obtienen los valores dados arriba. La probabilidad de que la bola extraída de la urna C sea verde es

$$p(E_3) = \sum_{s \in E_3} p(s)$$

Pero $E_3 = \{(x, y, v) : x, y \in \{v, a\}\}$ son todas las ternas con v en la tercera posición, de este modo se tiene

$$p(E_3) = p(v, v, v) + p(v, a, v) + p(a, v, v) + p(a, a, v) = \frac{23}{36}$$

(b) Sea E_1 el evento la pelota extraída de la urna C es original de dicha urna y E_2 es el evento la bola extraída de la urna C es verde. Con los eventos definidos, se quiere calcular $P(E_2|E_1)$. $p(E_1)$ se puede determinar ya que antes de extraer una bola de la urna C se deposita exactamente una bola ajena; luego hay dos originales y una añadida. Así $p(E_1) = \frac{2}{3}$. Además $E_1 \cap E_2$ es el evento la bola es verde y original de la urna C, puesto que originalmente hay una verde en la urna C se tiene que $p(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3}$ ya que hay tres posibles pelotas para extraer. Así se tiene que $p(E_2|E_1) = \frac{1}{2}$. Obsérvese que el resultado es idéntico a extraer una bola verde de la urna C sin ninguna condición, es decir, sin alterar sus condiciones originales, lo cual es perfectamente correcto. Esto se debe a la condición de que la bola extraída sea de las que se encontraban originalmente, de este modo la(s) bola(s) depositadas posteriormente no deben modificar la probabilidad del evento.

(c) Sean E_1 el evento la bola extraída proviene de la urna A y E_2 el evento la bola extraída de la urna C es verde, entonces $E_1 \cap E_2$ es el evento la bola extraída de la urna C es verde y proviene de la urna A. La probabilidad de $E_1 \cap E_2$ se puede calcular razonando de esta manera: para que este evento ocurra debe extraerse una bola verde de la urna A y depositarse en la urna B, luego ha de extraerse de la urna B la misma bola que proviene de A y depositarse en C y, por último, se extrae la misma bola de la urna C. Si F_1, F_2, F_3 son los eventos, F_1 se extrae una bola verde de A y se deposita en B, F_2 se extrae la misma bola de B y se deposita en C y F_3 es el evento se extrae la misma bola depositada previamente. Entonces se cumple $E_1 \cap E_2 = F_1 \cap F_2 \cap F_3$. Además $p(F_1) = \frac{1}{3}$, $p(F_2|F_1) = \frac{1}{4}$ y $p(F_3|F_1 \cap F_2) = \frac{1}{3}$; $p(F_1) = \frac{1}{3}$ porque hay tres bolas en total y una sola verde; $p(F_2|F_1) = \frac{1}{4}$ puesto que hay cuatro bolas, las tres originales y la que se depositó y sólo hay una manera de extraer ésta. Asimismo $p(F_3|(F_1 \cap F_2) = \frac{1}{3}$ pues hay tres bolas en total y una opción para extraer la bola indicada. Luego

$$p(E_1 \cap E_2) = p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p(F_1)p(F_2|F_1)p(F_3|F_2 \cap F_1) = \frac{1}{36}$$

De este modo

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{23}{36}} = \frac{1}{23}$$

(d) Sea E_1 el evento la bola que se extrae de la urna C proviene de la urna B y E_2 el evento la bola extraída de la urna C es verde. $E_1 \cap E_2$ es el evento la bola que se extrae de la urna C es verde y proviene de la urna B. Para que esto ocurra, independientemente de la bola que se extrae de la urna A y se deposita en la urna B, ha de extraerse de la urna B una de las bolas verdes originales y depositarse en la urna C y luego se extrae dicha bola de la urna C. Si definimos los eventos: F_1 es el evento donde se extrae una bola de la urna A y se deposita en B, F_2 es el evento se extrae una bola verde de la urna B original, es decir se ha de extraer una de las dos verdes que se encuentran desde el inicio del experimento en la urna B y se deposita en C y, F_3 es el evento se extrae la pelota depositada previamente de la urna C. Es claro que $p(F_1) = 1$, $p(F_2|F_1) = \frac{2}{4}$ y $p(F_3|F_1 \cap F_2) = \frac{1}{3}$, las razones son análogas a las dadas en la parte previa. Además $E_1 \cap E_2 = F_1 \cap F_2 \cap F_3$

$$p(E_1 \cap E_2) = p(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = p(F_1)p(F_2|F_1)p(F_3|F_1 \cap F_2) = \frac{1}{6}$$

De este modo se tiene que

$$p(E_1|E_2) = \frac{p(E_1 \cap E_2)}{p(E_2)} = \frac{6}{23}$$

(e) Procedemos a definir nuestro espacio de probabilidad y establecemos las probabilidades de cada resultado. Sea S el conjunto de ternas (x, y, z) que indican x es la bola extraída de la urna A, y indica la bola extraída de la caja B y z indica la bola extraída de la caja C.

$$S = \{(v,v,v),(v,v,a),(v,a,v),(v,a,a),\\ (a,v,v),(a,v,a),(a,a,v),(a,a,a)\}$$

$$p(v,v,v) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{6} \qquad p(v,v,a) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{18}$$
$$p(v,a,v) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18} \qquad p(v,a,a) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$
$$p(a,v,v) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{9} \qquad p(a,v,a) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{9}$$
$$p(a,a,v) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{18} \qquad p(a,a,a) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$

Explicamos algunos de estos datos, por ejemplo, para calcular $p(v,v,v)$ calculamos la probabilidad de extraer una bola verde de la urna A la cual es $\frac{1}{3}$ pues en ella se encuentran una bola verde y dos azules, la probabilidad de extraer una bola verde de la urna B es $\frac{2}{3}$ y estos dos eventos son independientes (el resultado de uno de esos eventos no afecta la probabilidad del otro). Puesto que las bolas extraídas son depositadas en la urna C, la probabilidad de que sea verde es $\frac{3}{4}$ ya que del total de cuatro bolas hay tres verdes, la que se encontraba originalmente y las que se agregaron de las urnas A y B. Si E_1 es el evento se extrae una bola verde y se deposita en la urna C, E_2 es el evento se extrae una bola verde de la urna B y se deposita en la urna C y E_3 es el evento se extrae una bola verde de la urna C, se tiene que $p(v,v,v) = p(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$, así

$$p(v,v,v) = p(E_1)p(E_2|E_1)p(E_3|E_1 \cap E_2) = \frac{1}{3}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad de que la pelota extraída de la urna C al final del experimento sea azul, se calcula sumando las probabilidades de todos los eventos de S cuya última componente es a. Si H es el evento se extrae una bola azul de la urna C, se tiene que

$$p(H) = \sum_{x,y\in\{v,a\}} p(x,y,a) = \frac{1}{2}$$

La probabilidad de que se verde es $\frac{1}{2}$.

(f) Sea T el evento la bola extraída de la urna C proviene de la urna A. Es inmediato que $p(T) = \frac{1}{4}$ ya que al momento de extraer la bola hay en la urna C 4 bolas, las dos originales y las depositadas de las urnas A y B respectivamente y de estas hay una que proviene de la urna A. Sea L el evento la bola extraída es verde. Queremos calcular $p(L|T)$ y para esto necesitamos calcular $p(L\cap T)$, $L \cap T$ es el evento la bola extraída es verde y proviene de la urna A. Para que esto ocurra hay que extraer una bola verde de la urna A y al final extraer dicha bola de la urna C donde fue depositada. Luego si E es el evento se extrae una bola verde de la urna A entonces $E \cap T = L \cap T$ y

$$p(E\cap T) = p(T|E)p(E) = \frac{1}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Luego

$$p(L|T) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Se puede usar un argumento directo, puesto que la bola proviene de la urna A y ésta es verde la probabilidad de elegirla es $\frac{1}{3}$.

(g) Sea E el evento la bola que se extrae al final es azul y T el evento la bola que se extrae al final proviene de la urna B; queremos calcular $p(\overline{T}|E)$. Se deja al lector verificar $p(\overline{T}|E) = 1 - p(T|E)$. Basta entonces calcular $p(T|E)$; $E \cap T$ es el evento la bola extraída es azul y proviene de la urna B, el valor de $p(E \cap T)$ es $\frac{1}{3}\frac{1}{4}$ que es la probabilidad de que se elija una azul de la urna B multiplicado por la probabilidad de que se elija la bola proveniente de la urna B de la caja C. Así

$$p(T|E) = \frac{1}{6}$$

y

$$p(\overline{T}|E) = \frac{5}{6}$$

9. Se tienen tres urnas A, B y C, que tienen bolas verdes, rojas y azules en las siguientes cantidades: $(3,2,2),(2,3,2),(1,1,2)$ respectivamente.

   (a) Se elige una bola al azar de la urna A y se deposita en la urna B; luego se elige al azar una bola de la urna B y se deposita en la urna C. Por último se elige una bola al azar de la caja C ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de C sea verde?

   (b) Se eligen una bola de la urna A y una bola de la urna B al azar y se depositan en la urna C. Luego se elige una bola de la caja C ¿Cuál es la probabilidad de que la bola elegida sea azul?

   (c) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola sea roja?

   (d) Si la bola extraída proviene de la urna B¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

   (e) si la bola es roja ¿Cuál es la probabilidad de que no proviene de la urna B?

   Resultados: a) $\frac{73}{280}$, b) $\frac{3}{7}$, c) $\frac{2}{7}$, d) $\frac{3}{7}$, e) $\frac{3}{4}$

10. La urna I contiene dos esferas blancas y tres negras, la urna II contiene tres blanca y una negra y la urna III contiene una blanca y una negra.

    (a) Se extrae una esfera de cada urna ¿Cuál es la probabilidad de que todas sean del mismo color?

    (b) Se elige una urna al azar y se extrae una esfera ¿Cuál es la probabilidad de que sea negra?

    (c) Si es como en el caso anterior, si la bola es blanca ¿Cuál es la probabilidad de que se extrajo de la urna II?

    Resultados: a) $\frac{9}{40}$, b) $\frac{9}{20}$, c) $\frac{5}{11}$

11. En una fábrica de televisores las máquinas I,II y III producen respectivamente el 28%, el 32% y el 40% del total. En la producción de cada máquina el 3%, 4% y el 5% son televisores defectuosos. Se toma al azar un televisor de la producción total y se le encuentra defectuoso ¿Cuales son las probabilidades que haya sido producido por:

    (a) la máquina I

    (b) la máquina II

    (c) la máquina III

    Resultados: a) $\frac{21}{103}$, b) $\frac{32}{103}$, c) $\frac{50}{103}$

12. Se considera una caja que contiene 6 bolas rojas, 4 blancas y 5 azules. Se extraen tres bolas en forma sucesiva (sin reposición).

    (a) Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul.

(b) Calcular la probabilidad de que las tres bolas son del mismo color.

(c) Calcular la probabilidad de que hay exactamente dos rojas.

Resultados: a) $\frac{4}{91}$, b) $\frac{34}{455}$ c) $\frac{27}{91}$

13. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.

    (a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.

    (b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿Cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

    Resultados: a) $\frac{2}{5}$, b) $\frac{3}{4}$

14. Una caja contiene 12 lámparas de las cuales 4 son defectuosas. Se toman al azar tres lámparas del lote una tras otra. Hallar la probabilidad de que las tres lámparas no sean defectuosas. Resultado: $\frac{14}{55}$

15. Se consideran ahora tres cajas con lámparas: La caja 1 contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas. La caja 2 contiene 6 lámparas de las cuales 1 es defectuosa La caja 3 contiene 8 lámparas de las cuales 3 son defectuosas Escogemos al azar una caja y luego sacamos una lámpara al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara sea defectuosa? Resultado: $\frac{113}{360}$

16. La probabilidad de que el jugador 1 de en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 de en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 de en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez al blanco.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?

    (b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

    Resultado: a) $\frac{31}{72}$, b) $\frac{6}{31}$

17. La probabilidad de que el jugador 1 de en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 2 de en el blanco es $\frac{1}{3}$.

    (a) Si cada uno dispara dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado por lo menos una vez?

    (b) Supongamos ahora que cada uno dispara una vez. Dado que el blanco fue alcanzado solamente una vez, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

    Resultado: a) $\frac{3}{4}$, b) $\frac{2}{5}$

18. Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de una manera diferente en cierta circunstancia; el 70% de las mujeres reaccionan positivamente en dicha circunstancia, mientras que el porcentaje de los hombres es solamente el 40%. Se sometió a una prueba a un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres para descubrir sus reacciones. Una prueba escogida al azar de las 20 resultó negativa ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizada por un hombre? Resultado: $\frac{2}{5}$

19. En un país hay cuatro partidos políticos que se dividen la opinión pública. Se sabe que:
    El 35% de la población adhiere al partido I
    El 31% adhiere al partido II
    El 28% adhiere al partido III
    El 6% adhiere al partido IV
    Entre los adherentes al partido I, un 36% corresponde a personas con ingresos inferiores a dos salarios mínimos Entre los adherentes al partido II, esa proporción es del 52% Para el

partido III, es un 42% Para el partido IV, 11Si se elige una persona al azar y resulta tener ingresos inferiores a dos salarios mínimos. Calcular la probabilidad de que sea un adherente al partido I; al partido II; al partido III y al partido IV.

Resultados: a) $\frac{630}{2057}$ b) $\frac{805}{2057}$, c) $\frac{588}{2057}$, d) $\frac{3}{187}$

20. De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. A continuación se extrae una bola al azar de la segunda caja.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?

    (c) Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?

Resultados: a) $\frac{1}{7}$, b) $\frac{13}{35}$, c) $\frac{3}{13}$

21. Se dispone de n+1 urnas numeradas 0,1,...,n. La urna i contiene i bolas blancas y $n-i$ negras.

    (a) Se elige al azar una urna y se extrae de ella una bola.

        i. Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.

        ii. Si la bola extraída es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna i, $0 \leq i \leq n$?

    (b) Se elige al azar una urna y se extraen de ella k bolas con reposición.

        i. Hallar la probabilidad de que las k bolas extraídas sean blancas.

        ii. Si las k bolas extraídas son blancas y se realiza una nueva extracción, ¿cuál es la probabilidad de que esta nueva bola también sea blanca?

Resultado: a) i)$\frac{1}{2}$, ii) $\frac{i}{2n(n+1)}$, b) i) $\frac{1}{(n+1)n^k}\sum_{i=0}^{n} i^k$ ii) $\frac{1}{2}$

22. Supongamos que en un país un 40% de los ciudadanos habilitados para votar es adherente al partido A, un 35% al partido B y un 25% al partido C. Se realiza de manera simultánea una elección interna en los tres partidos, pero como no se requiere acreditar la adhesión a cada partido, el voto "extrapartidario" es posible: un votante de un partido puede, si quiere, participar en la interna de otro partido. Supongamos que Ud. sabe que:

    Entre los adherentes de A, un 10% votó en la elección interna de otro partido

    Entre los adherentes de B, un 15% votó en la interna de A

    Entre los adherentes de C, un 5% votó en la interna de A

    (a) ¿Cuál fue el porcentaje de votos obtenidos por el partido A en las internas?

    (b) Si se elige al azar una persona dentro de todas las que en las votaron a A

        i. ¿cuál es la probabilidad que sea un adherente de B?

        ii. ¿cuál es la probabilidad que sea un adherente de C?

    (c) Si 400.000 personas votaron en la interna de A

        i. ¿en cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes de B?

        ii. ¿y la cantidad de votantes de A que son adherentes de C?

Resultados: a) 42.5%, b) i) 0.1235, ii) 0.0294, c) i) 49400, ii) 11764

23. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad de la sangre es 0.4. Si se sabe que 15 personas han contraído esta enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que:

(a) sobrevivan exactamente 5 personas.

(b) al menos 10 sobrevivan.

(c) sobrevivan entre 3 y 8 personas.

Resultados: a) 0.1859, b) 0.0338, c) 0.8778

24. Una urna contiene tres bolas blancas y una roja. Una segunda urna contiene una bola blanca y cuatro rojas. Se lanza un dado, si sale una puntuación inferior o igual a cuatro se extrae una bola al azar de la primera urna; en caso contrario se extrae, también al azar de la segunda. Suponiendo que una persona desconoce el resultado del lanzamiento del dado pero sabe que la bola extraída es blanca. ¿Cuánto valdrá la probabilidad de que el resultado fuera 1(probabilidad de que la bola blanca extraída sea debido a que ha salido 1)?.

Resultado: $\frac{15}{68}$

25. Tenemos una caja con 10 tornillos, de estos 8 son buenos y 2 son defectuosos. Se extraen dos tornillos de la caja. Se pide:

(a) Calcular la probabilidad de que la segunda extracción sea un tornillo bueno, sabiendo que la primera extracción ha sido un tornillo bueno.(sin reemplazo).

(b) Calcular la probabilidad de que la segunda extracción sea un tornillo bueno, sabiendo que la primera extracción ha sido un tornillo bueno (con reemplazo).

Resultados: a) $\frac{7}{9}$, b) $\frac{8}{10}$

26. Se lanza una moneda que se supone homogénea. Si sale cara se extrae al azar una bola de una urna, A, que contiene 3 bolas blancas y 1 roja. Si sale cruz se extrae al azar una bola de una urna, B, que contiene 2 bolas blancas y 3 rojas. Suponiendo que ha salido una bola blanca ¿cuál sería la probabilidad de que saliese cara? Resultado: $\frac{15}{23}$

27. ¿Cuál es la probabilidad condicional de que al tirar sucesivamente una moneda equilibrada, salga cara por primera vez en la $n-$ésima tirada, sabiendo que salió por lo menos una vez entre las $(m+n)$ primeras tiradas? $(m \geq 1)$. Resultados: $\frac{2^m}{2^{m+n}-1}$