

**TOPOLOGÍA ALGEBRAICA**  
**TEOREMA DEL PUNTO FIJO**  
**DE BROUWER**

Pablo. A. M.

Rafael. G. G.

Juan. L. G.

Enero 2007

## Capítulo 1: Introducción

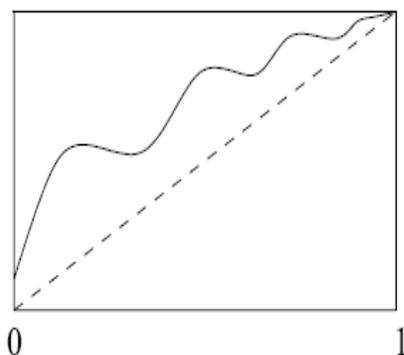
Supongamos por un instante que un montañero decide salir a pasear una tarde hasta el pico más alto de la sierra durante 12 horas, y en el mismo instante en el que llega está tan cansado que da media vuelta y regresa a casa. Si imponemos que tarda el mismo tiempo en ir que en volver, entonces podemos asegurar que hubo un lugar donde estuvo a la misma hora en días distintos (independientemente de la velocidad de paseo); la veracidad de este curioso ejemplo nos la da el teorema de Brouwer.

Un punto fijo de una función  $f: X \rightarrow X$  es un elemento  $x \in X$  que satisface que  $f(x)=x$ . Dado un conjunto  $X$ , parece razonable el preguntarse qué clase de funciones tienen un punto fijo en el conjunto  $X$ . No obstante, en topología es lógico preguntarse si dada una clase de funciones podemos encontrar un conjunto en el cuál dicha clase contenga la propiedad de  $q$  tener un punto fijo.

Un conjunto  $X$  decimos que cumple la **propiedad topológica de tener un punto fijo** (tfpp) si toda función continua del conjunto  $X$  en sí mismo tiene un punto fijo.

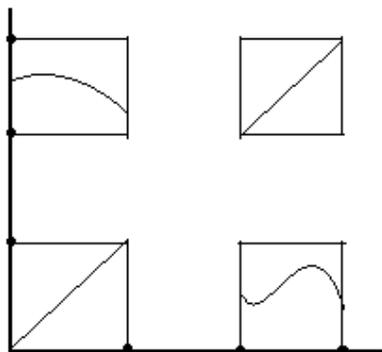
Nosotros estamos interesados en saber qué tipo de conjuntos son tfpp, para ello un pequeño proceso de prueba y error será gratamente ilustrativo.

Un primer ejemplo de conjunto con la propiedad del punto fijo es  $X = [0,1]$



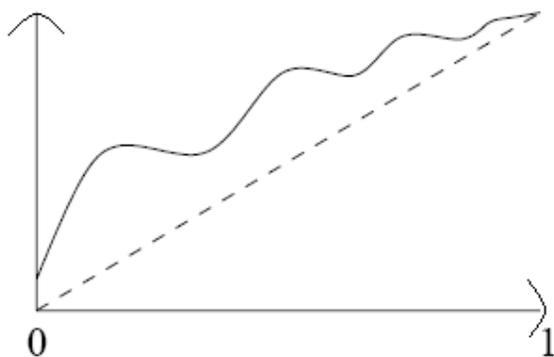
Por ser  $X$  compacto los extremos están incluidos y cualquiera que sea la función continua que parta de  $f(0)$  y llegue a  $f(1)$  intersecará a la línea rayada, que representa  $f(x)=x$ , es decir una línea de puntos fijos.

Pero las cosas se pueden complicar fácilmente. Sea  $X = [0,1] \cup [2,3]$



La función  $f: [0,1] \cup [2,3] \rightarrow [0,1] \cup [2,3]$  ya no tiene que tener puntos fijos. Consecuentemente, tendrá sentido pedirle a  $X$  que sea contractible. Probemos con el siguiente conjunto:

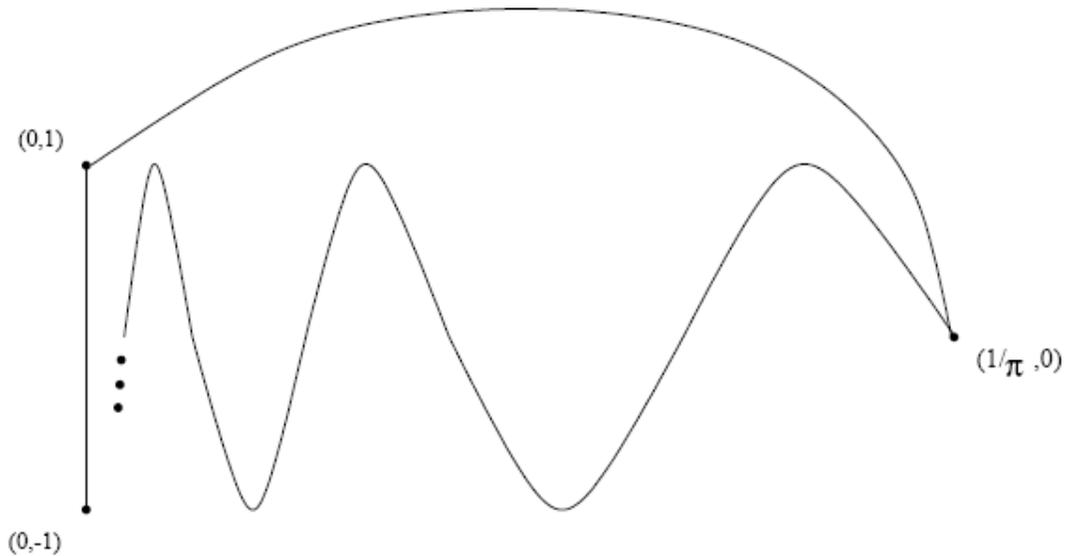
Sea  $X = (0,1)$ , homótopo a un punto y conexo pero se nos "escapa"  $f$  por no ser  $X$  compacto.



Como consecuencia de estos ejemplos tenemos la pregunta que se hizo Borsuk en 1932: ¿Si  $X$  es un conjunto **compacto** y **contractible** entonces cumple la propiedad topológica de tener un punto? La respuesta es negativa y la dio Kinoshita veinte años más tarde.

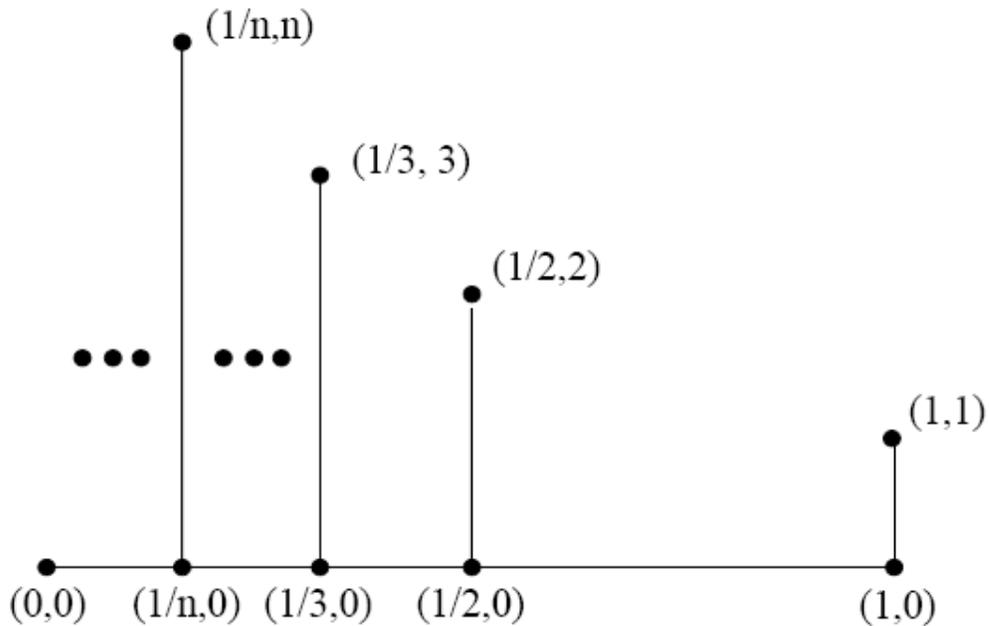
Es necesario ser un poco más restrictivos, supongamos  $X$  **compacto** y **convexo** (convexo  $\Rightarrow$  contráctil) ¿todos los conjuntos tfpp son al menos de esta forma?

Consideremos ahora el “círculo polaco”.



$X$  tiene la propiedad topológica de tener punto fijo pero no es convexo, lo que indica que hemos exigido demasiado al conjunto.

Consideremos el conjunto  $X$  de  $\square \times \square$  formado por el intervalo  $X_0 = [0,1]$ . Los segmentos  $X_n$  que empiezan en el punto  $(\frac{1}{n}, 0)$  y terminan en  $(\frac{1}{n}, n)$ . Este conjunto no es compacto ni convexo pero cumple la propiedad topológica del punto fijo.



Pocas conclusiones podemos sacar a priori sobre el aspecto y similitudes de los espacios que cumplen la propiedad topológica del punto fijo, pero entonces, ¿por qué nos molestamos en caracterizar los espacios según dicha propiedad?

**Proposición 1.1:**

*La propiedad topológica del punto fijo es un invariante topológico.*

**Demostración:**

En efecto, sea  $X$  tfpp, sea  $h : X \rightarrow Y$  un homeomorfismo. Sea  $f : Y \rightarrow Y$  continua. Entonces si  $h^{-1}$  es la inversa de  $h$  tenemos que  $h^{-1} \circ f \circ h : X \rightarrow X$  continua, y por tanto como  $X$  es tfpp seguro que existe  $x \in X$  talque  $h^{-1}(f(h(x)))=x$ ; y como  $h \circ h^{-1} = \text{id}(Y) \Rightarrow f(h(x))=x \Rightarrow f$  tiene un punto fijo. ■

**Proposición 1.2:**

*La propiedad topológica del punto fijo se preserva bajo retracciones*

**Demostración:**

Sea  $X$  tfpp, sea  $r : X \rightarrow Y$  un retracto de  $X$  en  $Y$ . Sea  $f : Y \rightarrow Y$  continua. Veamos que existe  $y$  en  $Y$  tal  $f(y)=y$ . Tenemos que  $f \circ r : X \rightarrow X$  es continua y por ser  $X$  tfpp tenemos que para algún  $x : f \circ r(x)=x$ ; si tomamos  $x \in Y \subseteq X$  entonces  $r(x)=x$  y por tanto  $f \circ r(x)=x=r(x) \Rightarrow Y$  es tfpp. ■

Ya hemos entendido el propósito de nuestro teorema, vamos a proceder con las tres demostraciones. Dos se basarán en el hecho de que  $S^{n-1}$  no es un retracto de  $D^n$ . La tercera será una demostración constructiva.

## Capítulo 2. Demostración del teorema del punto fijo de Brouwer vía homología.

### **Teorema 2.1. Teorema del punto fijo de Brouwer.**

*Toda función continua de un espacio  $X$  en sí mismo, con  $X$  convexo, compacto tiene un punto fijo.*

### **Observación:**

Será suficiente probarlo para toda función continua  $f: D^n \rightarrow D^n$ . Pues  $D^n$  es homeomorfo a cualquier compacto convexo no vacío de  $\mathbb{R}^n$ , y como hemos visto que la propiedad topológica del punto fijo es un invariante topológico se tiene el resultado del teorema.

Para demostrar el teorema del punto fijo es necesario probar antes que  $S^{n-1}$  no es un retracto de  $D^n$ .

### **Lema 2.2.**

i)  $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$

ii)  $H_n(X) \approx 0$  si  $X$  es un punto si  $n \geq 1$ .

iii)  $H_n(X) \approx H_n(Y)$  si  $X$  e  $Y$  son equivalentes por homotopía.

iv)  $D^n$  es homótopo a un punto y así  $H_i(D^n) \approx 0$  si  $i \geq 1$  (usando ii) y iii)).

### **Teorema 2.3.**

$S^{n-1}$  no es un retracto de  $D^n$ .

### **Demostración**

Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un retracto de  $D^n$  en  $S^n$   $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$ . Sea  $i: S^{n-1} \rightarrow D^n$  la inclusión. Por ser  $r$  retracto  $r \circ i = Id /_{S^{n-1}}$ . Esto induce las aplicaciones de grupos en la cadena de homología:

$$H_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{i^*} H_{n-1}(D^n) \xrightarrow{r^*} H_{n-1}(S^{n-1}).$$

Sabemos por los lemas de clase que  $H_{n-1}(S^{n-1}) \approx Z$  y que  $H_i(D^n) \approx 0$  si  $i \geq 1$ , por lo tanto tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{i^*} & 0 & \xrightarrow{r^*} & Z \\ \{a\} & \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \end{array}$$

un generador de  $Z$  tiene por imagen de  $i$  el cero ; y  $r^*(0)=0$  en contradicción con que  $r^* \circ i^* = 1^*|Z$ . ■

### Demostración del teorema del punto fijo de Brouwer para $f: D^n \rightarrow D^n$

Razonemos nuevamente por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $f: D^n \rightarrow D^n$  continua y tal que  $f(x) \neq x$  para todo  $x$  de  $D^n$ . Sea  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  de la siguiente manera:

$$r(x) = \frac{\overline{f(x)x}}{\| \overline{f(x)x} \|} \cap S^{n-1} \quad \text{es decir, tomamos un punto de la bola y aplicamos } f, \text{ como } f(x) \neq x \quad \forall x \in X$$

se puede considerar al vector  $\overline{f(x)x} \neq 0$ . Si demostramos que  $r$  es continua, entonces será un retracto de  $D^n$  en  $S^{n-1}$ , lo que es imposible, como ya hemos visto antes. Y llegaremos a una contradicción con suponer que  $f$  no tiene puntos fijos.

La continuidad de la función  $r$  no es difícil de ver, puesto que pequeñas variaciones en los puntos  $x \in D^n$  generan pequeñas variaciones en los puntos  $f(x)$ , y por tanto el vector  $\overline{f(x)x}$  interseca en puntos muy próximos en  $S^{n-1}$  bajo pequeñas modificaciones del vector. No obstante, puesto que la demostración no está en ningún libro, hemos decidido exponerla, no hay otra forma que construirla analíticamente.

$$r(x) = \frac{\overline{f(x)x}}{\| \overline{f(x)x} \|} \cap S^{n-1} := (x-f(x)) \lambda(x) + f(x) \quad \text{donde } \lambda(x) \text{ es un escalar que depende del punto } x, \text{ y}$$

representa la proporción de vector  $\overline{f(x)x}$  necesaria para intersecar a  $S^{n-1}$ .  $r(x)$  será continua por tanto cuando lo sea  $\lambda(x)$ , pues  $r$  opera a  $x$  (un punto),  $f(x)$  (que es continua), y a  $\lambda(x)$ .

Sabemos además que si  $y = r(x)$  se tiene que  $\|y\|=1$  .por tanto  $\| (x-f(x)) \lambda(x) + f(x) \| = 1 \Rightarrow$

$(x - f(x))^2 \lambda^2(x) + f^2(x) + 2(x - f(x))\lambda(x)f(x) = 1$  dónde  $x = (x_1, \dots, x_n)$  y

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  despejando  $\lambda(x)$  tenemos

$$\lambda(x) = \frac{-2 \sum_{i=1}^n [(x_i - f_i(x))f_i(x)] \pm \sqrt{4 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2 - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - f_i(x))^2 (f_j^2(x) - 1)}}{2 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2}$$

donde el denominador no puede ser completamente cero, porque sino  $f$  si tiene un punto fijo.

Además sabemos que existen dos soluciones reales para  $\lambda$ , las dos intersecciones del vector con el borde del  $n$ -disco  $D^n$ . Lo que automáticamente nos asegura que el discriminante

$$4 \sum_{i=1}^n (x_i - f_i(x))^2 - 4 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - f_i(x))^2 (f_j^2(x) - 1) > 0. \quad \lambda \text{ sólo depende de } f \text{ y de } x, \text{ por lo tanto es}$$

continua.

Hemos demostrado que si  $f$  no tiene puntos fijos entonces existe un retracto de  $D^n$  en  $S^{n-1}$ , lo cual no es posible. Por lo tanto  $f$  cumple la propiedad de tener un punto fijo. ■

**Capítulo 3. Demostración del teorema del punto fijo de Brouwer  
mediante la definición del grado de una función.**

Intuitivamente, cuando estamos en  $S^1$ , el grado se puede ver de la siguiente forma. Elegimos un punto  $x$  de la circunferencia y damos una vuelta alrededor de ella. Cuando enviamos esta vuelta sobre la imagen, daremos también vueltas sobre  $f(x)$  en la circunferencia. Ese número de vueltas (pudiéndose dar en sentido horario o antihorario) será el grado de la función  $f$ ,  $gr(f)$ .

Habrá que dar una base matemática a todo esto. Para ello definimos primero lo que será orientación, positiva o negativa, de un  $n$ -simple. Dados  $n+1$  puntos,  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  estos formarán un  $n$ -simple no degenerado (ningún punto pertenece al hiperplano generado por todos los demás) siempre y cuando el siguiente determinante sea distinto de 0,

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^n & 1 \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

donde  $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$  son las coordenadas del punto  $x_i$ . Ahora ya podemos decir que el  $n$ -simple tendrá orientación positiva siempre y cuando este determinante sea positivo y orientación negativa cuando el determinante sea negativo. Demostremos un lema que luego usaremos.

**Lema 3.1:** Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos  $n$ -simples orientados.

$$S_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

$$S_2 = \{x'_0, x_1, \dots, x_n\}$$

Entonces  $S_1$  y  $S_2$  tienen la misma orientación si y solo si  $x_0$  y  $x'_0$  están en el mismo lado del  $(n-1)$ -hiperplano  $H$  que contiene a  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Demostración:**

Sean  $S_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$   
 $S_2 = \{x'_0, x_1, \dots, x_n\}$ . Si  $x_0$  y  $x'_0$  están en lados contrarios de  $H$  entonces

$\bar{x} = tx_0 + (1-t)x'_0 \in H$  para algún  $t \in (0,1)$ . Así el  $n$ -simple  $\bar{S}$  con vértices  $\{\bar{x}, x_1, \dots, x_n\}$  es degenerado y  $\det(\bar{S}) = t \det(S_1) + (1-t) \det(S_2) = 0$ , lo cual es posible solo cuando  $S_1$  y  $S_2$  tienen orientación contraria. ■

Ahora daremos una triangulación  $T$  de la esfera  $S^{n-1}$  de tal forma que todo  $(n-1)$ -simple  $S$  de  $T$  esté orientado positivamente y tenga diámetro menor que uno,  $diam(S) < 1$ , también daremos una función  $f$  tal que  $diam(f(S)) < 1$ . A las triangulaciones que cumplen lo dicho se les llamará propias y de igual forma a este tipo de funciones. Elegimos ahora un punto  $x$  de la esfera tal que no está en el borde de ninguna imagen de un  $(n-1)$ -simple. Este punto  $x$  puede estar en varios  $(n-1)$ -simples o incluso en ninguno, ya que nadie nos asegura que nuestra función sea sobreyectiva. Un número de ellos,  $p$ , estarán orientados positivamente y otro número de ellos,  $n$ , negativamente. Estamos por tanto en condiciones de definir el grado de nuestra función  $f$  respecto de la triangulación  $T$  y del punto  $x$ , éste vendrá dado por la diferencia entre los  $(n-1)$ -simples orientados positivamente y los orientados negativamente, esto es:  $gr(f, T, x) = p - n$ . Esta definición es equivalente a la dada por la homología.

Nuestro siguiente paso será demostrar la independencia de la elección del punto  $x$  y la triangulación elegida para poder generalizar nuestra definición. Al ser  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  una función continua y  $S^{n-1}$  un compacto, podemos elegir  $T$  de tal forma que  $f$  sea una función propia y así hablar del grado de una función continua  $f$ .

**Lema 3.2:**  $gr(f, T, x)$  es independiente de la elección del punto  $x$ .

**Demostración:**

Sea  $T$  una triangulación propia y  $f$  una función propia. Sean  $x$  e  $y$  dos puntos tales que no están en el borde de ninguna imagen de un  $(n-1)$ -simple de  $T$ . Veamos

que  $gr(f, T, x) = gr(f, T, y)$ . Supondremos primero que ningún  $f(S)$  será un  $(n-1)$ -simple degenerado.

Elijamos un camino  $C$  de  $x$  a  $y$  de tal forma que no corte ninguna cara de dimensión menor que  $(n-2)$  de ningún  $(n-1)$ -simple  $f(S)$ ,  $S$   $(n-1)$ -simple de  $T$ . Nos vamos a ir moviendo por  $C$  y veremos como cambia el grado. Claramente, para que el grado cambie tendremos que pasar a otro  $(n-1)$ -simple a través de una  $(n-2)$ -cara  $A = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n))$ , de un  $(n-1)$ -simple  $f(S_1) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ . La cara  $A$  correspondiente a  $(x_1, \dots, x_n)$  es compartida por  $S_1$  con otro  $(n-1)$ -simple  $S_2 = (x'_0, x_2, x_1, \dots, x_n)$  cambiando  $x_2$  por  $x_1$  para que  $S_2$  siga teniendo orientación positiva ( $x_0$  y  $x'_0$  están a lados diferentes de  $(x_1, \dots, x_n)$ ). Así,

$$\begin{aligned} f(S_1) &= (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ f(S_2) &= (f(x'_0), f(x_2), f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

Hay dos casos ahora a considerar:

i)  $f(x_0)$  y  $f(x'_0)$  están en el mismo lado que el hiperplano  $A$ . Al pasar el punto  $z$  por la cara  $A$  moviéndonos por el camino  $C$   $z$  entrará en los dos  $(n-1)$ -simples  $f(S_1)$  y  $f(S_2)$  o quedará fuera de ambos.  $f(S_1)$  y  $f(S_2)$  tienen orientación contraria por el lema 3.1 por lo que en ambos casos el número  $n - p$  seguirá siendo el mismo (si entra en los  $(n-1)$ -simples sumaremos y restaremos un 1 y si no entra no sumaremos ni restaremos nada).

ii)  $f(x_0)$  y  $f(x'_0)$  están en lados contrarios de  $A$ . Al pasar  $z$  por la cara  $A$  este pasará de un  $(n-1)$ -simple a otro. Ambos tienen la misma orientación por el lema 3.1 así que sumaremos lo mismo en un lado o en otro sin variar así el grado.

Veamos ahora que ocurre cuando para algún  $S$ ,  $f(S)$  es degenerado. Modificaremos la función  $f$  a otra función  $g$  la cual será no degenerada. Sea  $S$  tal que  $f(S)$  es degenerado. Esto nos dice que hay algún vértice de  $S$  que es llevado al  $(n-2)$ -hiperplano generado por los demás vértices. Ahora,  $x$  e  $y$  están en el interior de  $f(S)$  para cada  $S$  de  $T$ . Modificamos un poco la función  $f$  en el vértice degenerado para que su imagen no esté en el  $(n-2)$ -hiperplano

generado por los demás vértices y de tal forma que no alteremos ningún  $(n-1)$ -simple en los que están contenidos  $x$  e  $y$ . Así tendremos que  $gr(f, T, y) = gr(g, T, y)$  y  $gr(f, T, x) = gr(g, T, x)$ . Ahora sabemos que para  $g$ , función propia no degenerada, la igualdad se cumple y así también para  $f$ ,

$$gr(f, T, x) = gr(f, T, y) \quad \blacksquare$$

Ya podemos hablar simplemente del grado de una función  $f$  respecto a una triangulación  $T$ ,  $gr(f, T)$  sin preocuparnos del punto elegido. Además, en la última parte de la demostración, hemos demostrado el siguiente lema que nos será útil más adelante.

**Lema 3.3:** *Dadas  $f, g : T \rightarrow S^{n-1}$  funciones propias y  $x \in S^{n-1}$  que no está en el borde de ningún  $f(S)$  para  $S \in T$ , si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $|f(y) - g(y)| < \varepsilon$  para todo vértice  $y$  entonces  $gr(f, T, x) = gr(g, T, x)$ .*

Demostremos ahora la independencia del grado respecto a la triangulación elegida.

**Lema 3.4:**  *$gr(f, T)$  es independiente de la elección de  $T$ .*

**Demostración:**

Demostramos primero que si  $T'$  es un refinamiento de  $T$  entonces  $gr(f, T) = gr(f, T')$ . Lo haremos por inducción.

Añadamos un punto más a la triangulación  $T$  junto con las aristas que podamos añadir (con subdivisión baricéntrica). Sabemos que la imagen de los nuevos  $(n-1)$ -simples no pueden ocupar todo  $S^{n-1}$  por que de ser así, tendríamos un  $(n-1)$ -simple  $S$  de  $T$  cuya imagen ocuparía todo la esfera (los nuevos  $(n-1)$ -simples estarían dentro de él) contradiciendo así la suposición de que  $f$  es propia ya que  $diam(f(S))$  sería mayor que 1. De esta forma podemos elegir un  $x$  que no está en ninguna imagen de los nuevos  $(n-1)$ -simples y así el grado no variará.

Como un refinamiento  $T'$  de  $T$  se hace añadiendo un número finito de vértices a los vértices de  $T$  tenemos que  $gr(f, T) = gr(f, T')$ .

Dadas dos triangulaciones  $T_1$  y  $T_2$  de  $S^{n-1}$  cogemos un refinamiento  $T_3$  de ambas y así tendremos que  $gr(f, T_1) = gr(f, T_3) = gr(f, T_2)$  probando la independencia de la triangulación elegida. ■

A partir de ahora ya podemos escribir  $gr(f)$ , con  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  una función continua.

**Teorema 3.5:** *si  $f, g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  son homótopas entonces  $gr(f) = gr(g)$ .*

**Demostración:**

Sean  $f, g : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  y  $F : S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$  una homotopía de  $f$  y  $g$ .  $F$  es continua y  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ . Además, la compacidad de  $S^{n-1} \times I$  implica la continuidad uniforme de  $F$ . Así, para  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que para cualquier  $t \in I$  y cualesquiera  $x, y \in S^{n-1}$  satisfaciendo  $|x - y| < \delta$ , tenemos que  $|F(x, t) - F(y, t)| < 1$ . Elijiendo una triangulación  $T$  tal que  $diam(S) < \delta$  para cada  $S \in T$  tendremos que  $F(\cdot, t)$  será un función propia para  $T$ .

Ahora, el lema 3.3 nos decía que si existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $|F(x, t) - h(x)| < \varepsilon$  para cada vértice  $x \in T$  tendremos que  $gr(F(\cdot, t)) = gr(h)$ . Fijemos ese  $\varepsilon > 0$ . De nuevo usamos la continuidad uniforme de  $F$  y elegimos  $\delta > 0$  tal que para cualquier  $x \in S^{n-1}$ ,  $|F(x, t) - F(x, t')| < \varepsilon$  si  $|t - t'| < \delta$ . Así hemos probado que  $gr(F(\cdot, t))$  es una función constante para  $t \in I$ . Directamente,  $gr(f) = gr(g)$

■

Probaremos ahora que la esfera unidad no es un retracto de la bola unitaria. Esto implica directamente el teorema de Brouwer como vimos en el capítulo anterior.

**Lema 3.6:** *Si  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  tiene una extensión continua a  $D^n$  entonces  $f$  es homótopa a una función constante.*

**Demostración:**

Sea  $f' : D^n \rightarrow S^{n-1}$  la extensión continua de  $f$ . Entonces definiendo  $F : S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$  cómo  $F(x, t) = f'((1-t)x)$  se tiene la homotopía de  $f$  y la función constante  $g(x) = f'(0)$ .



**Teorema 3.7:**  $S^{n-1}$  no es un retracto de  $D^n$ .

**Demostración:**

Supongamos que existe  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  una retracción. Entonces  $id : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ , la restricción de  $r$  a  $S^{n-1}$ , tendría una extensión continua a  $D^n$ . Por el lema 3.6  $id$  será homótopa a una función constante. Pero el grado de una función constante es 0 mientras que el de la función identidad es 1 lo que contradice el teorema 3.5. Llegamos así a un absurdo por lo que  $S^{n-1}$  no es un retracto de  $D^n$ .



**Capítulo 4. Demostración combinatoria del teorema del punto fijo de Brouwer**

Hemos demostrado el teorema ya de dos formas diferentes, la tercera que presentamos difiere de las dos anteriores en un par de cosas principalmente; la que vamos a mostrar es una demostración constructiva en contrario de la reducción al absurdo realizada en las dos anteriores y además en esta demostración no usamos las bolas de  $R^n$  como conjunto base para la demostración sino que empleamos la estructura conocida como  $n$ -simple, que denotaremos por  $S^n$ .

Vamos a demostrar que toda función continua que vaya de un  $n$ -simple a él mismo, siempre tendrá un punto fijo. Como la estructura  $S^n$  es compacta, convexa y con interior no vacío es homeomorfa a un disco de  $R^n$ , con lo que la propiedad del punto fijo en el  $n$ -simple se conservará de manera trivial en su disco homeomorfo correspondiente. Veamos esto un poco más detallado, aunque haya sido ya mencionado en general que la propiedad de tener punto fijo es una propiedad topológica.

$$\begin{array}{ccc}
 & f & \\
 & B^n \rightarrow B^n & \\
 h \downarrow & & \uparrow h^{-1} \\
 & S^n \rightarrow S^n & \\
 & g &
 \end{array}$$

Queremos ver que nuestra función  $f$  tiene un punto fijo, como hemos comentado, vamos a demostrar que  $g$  lo tiene, como  $h$  es homeomorfismo y siempre nuestras funciones van de un espacio a él mismo esto es trivial, ya que:

$g(h(x) = h(x))$  para algún  $x$ , con lo que  $h^{-1}(g(h(x))) = x = f(x)$ , demostrando que  $x$  es punto fijo de  $f$ .

Vamos ya a por la demostración que hemos prometido entre nuestros  $n$ -simples, necesitamos para ello varios pasos que mostramos en el siguiente diagrama.

*Lema de Sperner  $\rightarrow$  Teorema KKM  $\rightarrow$  Punto fijo de Brouwer*

Comenzamos por el principio, esto es, con el lema de Sperner, para ello necesitamos definir la noción de etiquetado de vértices de un  $n$ -simple.

**Definición:**

*Sea  $N_0$  un conjunto finito de índices o “etiquetas”, un etiquetado es una asignación de las etiquetas guardadas en  $N_0$  a los vértices de nuestro  $n$ -simple.*

Necesitamos ahora dar una ley de etiquetación que nos asegure que el  $n$ -simple etiquetado de tal forma es interesante para nuestro propósito.

**Definición:**

*Llamaremos etiquetado admisible a un etiquetado en el cuál, ninguna cara de nuestro  $n$ -simple contenga la etiqueta con la que está etiquetado el vértice opuesto a dicha cara. Denotaremos la cara del  $n$ -simple opuesta al vértice  $i$  como  $S_i^n$ .*

*Un  $n$ -simple estará completamente etiquetado si sus todos sus vértices poseen etiquetas diferentes y además entre éstas se encuentran todas las de nuestro conjunto  $N_0$ .*

**Lema 4.1 Lema de Sperner.**

*Todo  $n$ -simple que posea un etiquetado admisible contiene un número impar de  $n$ -simples completamente etiquetados, en particular, al menos contiene uno.*

**Demostración:**

Lo haremos por inducción, los dos siguientes lemas serán empleados:

**Lema 4.1.1**

*En cualquier grafo, la suma de los grados de todos los vértices es igual al doble del número de aristas. La demostración es trivial, simplemente observamos que al contar la suma de todos los grados contamos las aristas dos veces.*

### **Lema 4.1.2**

*El número de vértices de un grafo con grado impar siempre es par.*

#### **Demostración:**

Esta nos costará un poco más de trabajo. Sea  $G = (U, V)$  un grafo cualquiera con  $U$  vértices y  $V$  aristas. Llamaremos  $P$  a la suma de los grados de todos los vértices de grado par e  $I$  la suma de los grados de los vértices de grado impar. Por el Lema 1 tenemos que  $|I| + |P| = 2|V|$ . Esta relación obliga a  $I$  a ser par ya que los otros dos términos de la ecuación los son de manera trivial. Demostrando así lo deseado. ■

Vamos ya con la demostración del lema de Sperner propiamente dicha.

Caso base;  $n=2$ , esto es, nuestro  $n$ -simple es un triángulo. La construcción del caso base es totalmente análoga al caso general, por lo que emplearemos notación general aunque en ocasiones nos restrinjamos al caso  $n=2$  para su mejor comprensión.

La demostración es tan sencilla como curiosa e original, consiste en asociar un grafo a cualquier triangulación elegida para nuestro  $n$ -simple. Recordar que cada vértice de cualquier triángulo está etiquetado.

El grafo va a constar de tantos vértices como triángulos utilizados en la triangulación más un vértice adicional que va a representar al exterior de nuestro triángulo.

Las aristas las vamos a construir de la siguiente forma:

Elegimos  $n-1$  etiquetas de nuestro conjunto de ellas. Como sólo tenemos tres, elegimos dos, ahora, dos triángulos estarán relacionados y por tanto sus correspondientes vértices en el grafo unidos mediante una arista si comparten el  $(n-1)$ -simple etiquetado con todas las etiquetas seleccionadas. También entra en este juego el vértice que representa al exterior.

Lo primero de lo que nos tenemos que convencer es de que un subsimple estará completamente etiquetado, es decir, con tres etiquetas diferentes en sus vértices si y sólo si tiene grado uno en nuestro grafo. Se trata esto último de una observación trivial.

El segundo paso consiste en darse cuenta que el vértice que representa al exterior siempre tiene grado impar. Demostraremos esta observación para el caso base. Sea “ $b$ ” el número de segmentos( $(n-1)$ -simples) completamente etiquetados en la cara elegida. Veamos que “ $b$ ” es impar. Sea “ $a$ ” el número de segmentos de nuestra cara etiquetados degeneradamente con una etiqueta  $A$

elegida, es decir, sus dos extremos poseen la misma etiqueta. Los segmentos “a” tienen sus extremos etiquetados con la etiqueta A mientras que los segmentos “b” tienen solo un extremo etiquetado con A. Así, en un principio, tendríamos “2a+b” extremos etiquetados con A. Pero hemos contado dos veces cada vértice A que está en el interior del segmento original (un extremo de un segmento pertenece a dos segmentos). Sea “c” el número de extremos etiquetados con A en el interior del segmento original. En total hemos contado “2c+1” extremos de segmentos con la etiqueta A. En consecuencia, “2a+b=2c+1” y por lo tanto “b” es impar. Basta demostrarlo para un segmento porque nuestro etiquetado es admisible por hipótesis.

Como tenemos asegurado ya que el vértice que representa al exterior tiene grado impar, basta aplicar el lema 4.1.2 para asegurar que hay un número impar de triángulos completamente etiquetados, ya que la única posibilidad que tiene un vértice para tener grado impar en nuestro grafo es que tenga grado 1, es decir, que el triángulo al que representa esté completamente etiquetado. Hemos demostrado el caso base.

Es sencillo aplicar la inducción para el caso n-ésimo. Las observaciones que hemos dado para el caso base se cumplen también para cualquier dimensión, nuestro grafo tiene por tanto la misma pinta, y basta aplicar la hipótesis de inducción para asegurar que el vértice que representa al exterior siempre tiene grado impar. Sabemos precisamente por esta hipótesis que el número de (n-1)-simples completamente etiquetados es impar, por tanto basta elegir uno de estos (n-1)-simples para dar nuestra relación necesaria para la construcción del grafo.

Aseguramos aplicando nuevamente el Lema 4.1.2 que existe un número impar de n-simples completamente etiquetados y concluimos la demostración. ■

## **Teorema 4.2 Teorema K-K-M**

(KNASTER-KURATOWSKI -MARZUKIEWICZ)

Sea  $C_i, i \in N_0$  una familia de subconjuntos cerrados de  $S^n$  satisfaciendo:

$$i) S^n = \bigcup_{i \in N_0} C_i.$$

$$ii) \overline{\{x_1, x_2, \dots, x_m\}} \subseteq \bigcup_{i=1}^m C_i.$$

Entonces  $\bigcap_{i=1}^n C_i \neq \Phi$ .

### Demostración:

Vamos a tomar una sucesión de triangulaciones de nuestro n-simple cuyo diámetro tienda a cero, sea  $G^k \rightarrow 0$ . Esto es, hacemos más fina nuestra triangulación en cada paso. La condición ii) del enunciado nos asegura que en cada uno de estos pasos podemos etiquetar admisiblemente nuestro n-simple. Además también se desprende de esta condición que todos los vértices etiquetados con la misma etiqueta “viven” en el mismo cerrado.

Con estas condiciones podemos asegurarnos gracias al lema de Sperner que en cada paso tenemos al menos un n-simple completamente etiquetado. Vamos a fijarnos en estos n-simples. Es razonable tomar una sucesión que vaya pasando en cada paso de nuestra sucesión de triangulaciones por el vértice etiquetado con una etiqueta particular, por ejemplo la etiqueta  $i$ , por supuesto perteneciente a  $N_0$ . Sea  $y^{ki}$  esta sucesión. Puesto que estamos en un compacto, las sucesiones poseen subsucesiones convergentes. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $y^{ki} \rightarrow y^*$ . Ahora bien, esta misma construcción la podemos hacer para cualquier etiqueta de nuestro conjunto  $N_0$ , además sabemos que todas las etiquetas iguales pertenecen al mismo cerrado y que todas estas sucesiones tienen que converger al mismo punto porque hacemos la triangulación tan pequeña como queramos. Basta aplicar que el límite de una sucesión dentro de un cerrado cae en el mismo cerrado para asegurar que la intersección de todos nuestros cerrados es no vacía, terminando de este modo la demostración. ■

El último paso que nos queda es ver que este teorema implica de manera directa el teorema del punto fijo de Brouwer. Veámoslo con detalle.

Sea  $f = (f_0, f_1, \dots, f_n) : S^n \rightarrow S^n$  una función continua, sabemos que todo  $x \in S^n$  se escribe de la forma  $\sum_{i=0}^n x_i w_i$  donde los  $w_i$  denotan los vértices de nuestro n-simple y los escalares  $x_i$  cumplen que todos son mayores o iguales que cero y además  $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ .

Vamos a considerar los siguientes conjuntos para cada  $i \in N_0$ ,

$C_i = \{x \in S^n / f_i(x) \leq x_i, x_i > 0\}$ . Por la continuidad de  $f$  podemos asegurar que sus componentes son continuas y gracias a esto aseguramos que nuestros  $C_i$  son cerrados porque vienen dados por una relación de “menor o igual”. Tenemos que comprobar ahora que cumplen las condiciones del teorema anterior (K-K-M).

i) Su unión cubre todo el  $n$ -simple, razonamos por reducción al absurdo, supongamos que existe un  $x \in S^n$  tal que no “vive” en ninguno de estos cerrados, entonces  $\forall i \in N_0$  tendremos la relación  $f_i > x_i$ , basta sumar en “i” para obtener la contradicción  $1 > 1$ .

ii)  $\overline{\{x_1, x_2, \dots, x_m\}} \subseteq \bigcup_{i=1}^m C_i$ , Vamos a tomar  $\overline{\{x_1, x_2, \dots, x_m\}}$ , cualquier punto que pertenezca a esta envoltura convexa tendrá un cero en la coordenada correspondiente a los vértices del  $n$ -simple que no estén dentro de esta envoltura. Como nuestros cerrados contienen la condición  $x_i > 0$ , podemos asegurar que ii) se cumple.

Una vez vistas las condiciones sabemos que la intersección de todos estos cerrados es diferente del vacío.

Tomamos  $x \in \bigcap_{i \in N_0} C_i$ . Si en alguna de las coordenadas de nuestro  $x$ , se da la desigualdad estricta  $f_i(x) < x_i$ , llegaremos a la contradicción  $1 < 1$  sumando de nuevo en “i”, ya que estamos utilizando todos los cerrados posibles y la función va del  $n$ -simple en sí mismo. Por tanto nuestro  $x$  está obligado a tener  $f_i(x) = x_i \quad \forall i \in N_0$ , es decir  $f(x) = x$ . Hemos encontrado nuestro punto fijo y hemos demostrado por tercera vez en este trabajo el teorema del punto fijo de Brouwer.

■

## **BIBLIOGRAFÍA**

- A. HATCHER. Algebraic topology.
- J. W. VICK. Homology theory. An introduction to algebraic topology.
- W. S. MASSEY. A Basic course in algebraic topology.
- J. MUNKRES. Topología.
- M.HENLE. A combinatorial introduction to topology.

