Georg Vega,

des milit. Mar. Theres. Ordens Ritters, des kais. königl. Bombardierkorps Majors, der königl. Großbrit. Societ. der Wissenschaften zu Göttingen Correspondenten, der Churf. Mainz. Akademie nützlicher Wissensch. und der physikal. mathemat. Gesellschaft zu Erfurt Mitglieds,

Versuch

über

Enthüllung

eines

Geheimnisses in der bekannten Lehre der allgemeinen Gravitation.

Wien,

gedruckt und verlegt bey Joh. Th. Edlen von Trattnern, kaiserl. königl. Hofbuchdrucker und Buchhändler.

1800.

Seiner Königlichen Hoheit

A l b r e c h t

Herzog zu Sachsen = Teschen

in tiefster Ehrfurcht

gewidmet

vom Verfasser.

Untersuchung der geradlinigen Central-bewegung.

§. 1.

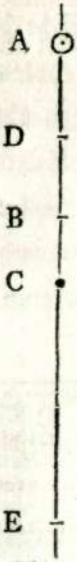
Die practische Astronomie von der höheren Mathematik und Mechanik begleitet hat die Naturlehre mit dem Satze bereichert, **daß in der Körperwelt eine im Verkehrten Verhältnisse der quadrirten Entfernungen abnehmende Centralkraft (eine allgemeine Gravitation vorhanden sey.***) Dem Mathematiker ist es erlaubet eine solche Centralkraft ohne alle Einschränkung anzunehmen, und sodann zu bestimmen, was für eine Bewegung erfolgen müßte, wenn ein fester Körper aus ei-

*) Diese Centralkraft ist eigentlich die Resultante der wechselseitigen Anziehungen der Elementartheilchen der in der ganzen Körperwelt vertheilten Materie. Toutes les molécules s'attirent en raison directe des masses, & en raison inverse du quarré des distances, sind Worte des Hr. *Laplace* in seinem neuesten Werke Mécanique céleste Paris An VII. worin die Lehre der Gravitation auf die allgemeinste Art abgehandelt ist.

ner vollkommenen Ruhe der einzigen Einwirkung einer solchen Centralkraft überlassen würde. Die Bestimmung einer solchen Bewegung ist eine reine mathematische Untersuchung. Wenn Schwierigkeiten oder Zweifel dabey aufstossen, so müssen solche bloß durch mathematische Gründe gehoben werden. Die Beschaffenheit einer solchen Bewegung ist der allereinfachste Fall, der sich in der Lehre der allgemeinen Gravitation denken läßt. Die Untersuchung darüber kann man auf folgende Art anstellen.

§. 2.

Es sey C der **Centralpunct** (der Punct nähmlich, gegen welchen die Centralkraft nach jeder gegen denselben gerichteten geraden Linie die Körper ziehet, drücket oder presset); in der Entfernung CA = a werde ein fester Körper der Wirkung der Centralkraft frey überlassen; die Masse dieses Körpers sey = M, welche in einem einzigen Puncte desselben vereiniget gedacht wird (eigentlich bedeutet M das Gewicht dieses Körpers, wenn er an die Erdfläche übertragen würde); die Beschleunigung der Erdschwere an der Erdfläche (der in 1



Secunde durch den freyen Fall zurückgelegte Weg) sey $= g$; in einer gewissen Zeit $= t$ Secunden lege der Körper den Weg $AD = x$ zurück, so daß er vom Centralpuncte C nur mehr um $CD = a - x$ entfernet ist; in dieser Entfernung sey auf den Körper der Zug, der Druck, oder die Pressung der Centralkraft $= P$, wo P und M durch einerley Einheiten z. B. durch Pfunde ausgedrückt seyn müssen; und endlich die Geschwindigkeit des Körpers in dem Puncte D nach der Richtung DE weiter fortzugehen sey $= v$ (eigentlich bedeutet v den in 1 Secunde mittelst gleichförmiger Bewegung durchlaufbaren Weg, wenn in D die fernere Wirkung der Centralkraft plötzlich aufhörte; und es müssen v, x, a und g durch eine und eben dieselbe Einheit z. B. durch den Wiener-Fuß ausgemessen seyn, wo sehr nahe $g = 15\frac{1}{2}$ ist.) Nach dieser Bezeichnung sind nun die Fundamentalgleichungen

$$\text{I. } dv = \frac{2gPdt}{M}$$

$$\text{II. } dx = vdt$$

$$\text{III. } vdv = \frac{2gPdx}{M}$$

$$\text{IV. } ddx = \frac{2gP(dt)^2}{M}$$

wodurch sich im gegenwärtigen, so wie in jedem anderen Falle die Bewegung vollständig bestimmen läßt; wie solches aus den Anfangsgründen der Bewegungslehre, unter andern auch aus §. 56. des 3ten Bandes meiner Vorles.

über

über die Mathem. Wien bey Trattnern 1788. bekannt ist. Mit vorzüglicher Evidenz hat Herr Pasquich (Opuscula statico - mechanica. Lipsiæ apud Weidmann 1799.) die erwähnten Formeln blos aus Gründen der sogenannten Analysis endlicher Grössen hergeleitet, und mit eben derselben Evidenz auf verschiedene Fälle angewendet.

§. 3.

Diese Fundamentalgleichungen (im eigentlichen Verstande nur I und II, denn III und IV, sind schon unmittelbare Folgen aus I und II) sind der Grund, worauf das ganze Lehrgebäude der Bewegung beruhet. Ohne Kenntniß dieser Fundamentalgleichungen ist es platterdings unmöglich in das Heiligthum der Bewegungslehre einzudringen; sie sollten jedem bekannt seyn, dem daran gelegen ist, von der Bewegungslehre auch nur eine mittelmässige Kenntniß zu erlangen.

§. 4.

In den angeführten Fundamentalgleichungen bedeutet $\frac{gP}{M}$ die **Beschleunigung** der Kraft P auf die Masse M des bewegten Körpers; nähmlich den Weg, welchen der Körper M wegen der einzigen Wirkung der Kraft P in 1 Secunde zurücklegen würde, wenn während der ganzen Secunde die Kraft P unveränderlich bliebe. Setzet man nun in unserem Falle bey der geradlinigen Centralbewegung die Beschleunigung $\frac{gP}{M}$ der Centralkraft in der Entfernung CD auf den gegebenen Körper = p, so erhält die Gleichung III im §. 3. welche hier gebrauchet wird um die Bewegung zu bestimmen, folgende Gestalt

$$vdv = 2pdx.$$

§. 5.

Da wir nun angenommen haben, daß die Centralkraft im verkehrten Verhältnisse der quadrirten Entfernungen vom Centralpuncte abnehme, **nähmlich** daß

sich

sich die Beschleunigungen der Centralkraft auf einen und eben denselben Körper in verschiedenen Entfernungen vom Centralpuncte gegeneinander verhalten, wie umgekehrt die Quadrate dieser Entfernungen; so muß es bey einer festgesetzten Centralkraft eine gewisse bestimmte Entfernung $CB = b$ geben, wo die Beschleunigung der Centralkraft $= g$ ist, nähmlich eben so groß als die Beschleunigung der Erdschwere an der Erdoberfläche; und daraus läßt sich auch die Beschleunigung p in jeder Entfernung $AD = a - x$ ableiten. Es ist nähmlich vermöge der festgesetzten Beschaffenheit der Centralkraft

$$p : g = b^2 : (a - x)^2;$$

daraus folgt $p = b^2 g (a - x)^{-2}$;

setzet man nun diesen Werth für p im §. 4,

so ist auch $vdv = 2b^2 g dx (a - x)^{-2}$;

daraus folgt $v^2 = 4b^2 g (a - x)^{-1}$;

oder eigentlich $v^2 = 4b^2 g (a - x)^{-1} + \text{Const.}$;

nun ist für $x = 0$ auch $v^2 = 0$;

folglich $\text{Const.} = - 4b^2 g a^{-1}$,

und endlich $v^2 = 4b^2 g . [(a - x)^{-1} - a^{-1}]$,

$$\text{nähmlich } v^2 = \frac{4b^2 g}{a} \left(\frac{x}{a - x}\right);$$

es ist demnach die gesuchte mit x zusammengehörige Geschwindigkeit

$$\text{I. } v = \frac{2bg^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Substituiret man nun diesen Werth für v in der Gleichung II im §. 2. so ist die Differenzialgleichung für die Zeit

$$dt = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}.$$

Diese Differenzialgleichung läßt sich mittelst der Kreisbogen integriren; wenn man nähmlich $\int x^{-\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ nach der allgemeinen Formel im 625ten §. des 2ten Bandes meiner Vorlesungen über die Mathematik durch Hülfe des bekannten Intregals

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{8}a^2 \cdot \arccos\left(1-\frac{2x}{a}\right)-\tfrac{1}{8}(2a-4x)(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

vermöge §. 621. XI. eben desselben 2ten Bandes entwickelt, so ist sodann die mit x zusammengehörige Dauerzeit

$$\text{II. } t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[x^{\frac{1}{2}} \cdot (a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a \cdot \arccos\left(1-\frac{2x}{a}\right)\right]$$

allwo Const. $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $t = 0$ ist.

Aus diesen zwey Gleichungen könnte man noch eine dritte durch eine bloße Substitution ableiten, wenn man

den

den Werth für x aus I. suchen, und sodann in II. solchen setzen wollte. Allein bey dem vorgesetzten Entzwecke wäre es überflüßig sich dabey länger aufzuhalten.

§. 6.

In den gefundenen zwey Gleichungen I. und II. im §. 5. für v und t setze man $x = a$, so ist die Geschwindigkeit des Körpers im Centralpuncte C nach der Richtung CE weiter fortzugehen

$$v = \frac{2bg^{\frac{1}{2}}}{(0)^{\frac{1}{2}}} \text{ unermeßlich groß,}$$

weil die Geschwindigkeit, so wie die bewegende Kraft vermöge des angenommenen Gesetzes der Centralkraft, bis zum Centralpuncte ohne Ende fortwächst. Und die Dauerzeit der Bewegung vom Anfangspuncte A bis zum Centralpuncte C ist

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}\pi}{4bg^{\frac{1}{2}}}$$

weil $\arccos(-1) = \pi$ ist, wo $\pi = 3{,}14159265..$ bedeutet.

Setzet man x **negativ**, um auf der entgegengesetzten Seite des Punctes A die Bewegung zu bestimmen, so ist v und t **unmöglich** oder **imaginär**. Der Körper kann daher niemahls auf die entgegengesetzte Seite des Punctes A gelangen. Und dieses ist vollkommen deutlich; weil der Körper in A der Wirkung der Centralkraft frey überlassen wird, und diese ihn nur immer gegen C, niemahls aber von C hinwegtreibet.

Setzet man x grösser als a, um die Bewegung des Körpers auf der entgegengesetzten Seite des Centralpunctes von C gegen E zu bestimmen, so ist v und t auch **unmöglich**. Es **scheint** daher, daß der Körper über C gegen E nicht hinausgehen könne, ob er schon bey dem Anlangen in C nach der Richtung CE eine unendlich grosse Geschwindigkeit erlanget. In der Mathematik darf man mit dem **blossen Scheine** nicht zufrieden seyn, man muß überall **helles Licht** haben. Was hat es also mit der ferneren Bewegung des Körpers, nachdem er den Centralpunct erreichet, für eine Beschaffenheit? Der größte aller Analysten **Leonhard Euler** (Scientia motus Tom. I. pag. 268. §. 655.) behauptet, daß der Körper von C bis A wieder zurückkehre, und sodann wieder von A gegen C sich bewege; so daß er gleichsam in einer unendlich schmalen Ellipse AC, deren Brennpuncte mit den Scheiteln A, C einerley sind, unaufhörlich herumlaufe, weil in einer solchen Ellipse die

Dau-

Dauerzeit der Bewegung von dem einen Scheitel zu dem anderen eben so groß ist, als im gegenwärtigen Falle bey der geradlinigen Centralbewegung die Dauerzeit von A bis C; wie solches auch aus §. 226. des 3ten Band. meiner Vorlesungen über die Mathem. erhellet. Allein diese Behauptung kann unmöglich richtig seyn; weil der Körper bey seinem Anlangen in C weder eine Geschwindigkeit nach der Richtung CA hat, noch auch von irgend einer Kraft dahin getrieben wird. Wollte man, um diese Behauptung zu bestättigen, annehmen, daß doch vielleicht der Körper in C nach der Richtung CA eine Geschwindigkeit haben könne; weil die Gleichung I. im §. 5. durch eine Quadratwurzel bestimmet wird, die man positiv oder negativ setzen kann; so muß man betrachten, daß ja hier das entgegengesetzte Zeichen der Quadratwurzel (so wie bey der Geschwindigkeit eines frey fallenden Körpers) schon dadurch ausgeschlossen sey, weil der Körper während der Bewegung bloß nach der Richtung von A gegen C von der Centralkraft getrieben wird, und folglich auch bloß nach dieser Richtung eine Geschwindigkeit erlanget. Wenn er z. B. in D anlanget, so hat er nur nach der fortgesetzten Richtung von D gegen E, nicht aber nach der entgegengesetzten von D gegen A eine Geschwindigkeit. Der Körper kann daher von C gegen A nicht zurückgehen. Nach einer andern Richtung, die in C mit CA was immer für einen Winkel einschließt, kann derselbe a ch nicht fortgehen; weil

er

er nach einer solchen Richtung weder eine Geschwindigkeit hat, noch auch von einer Kraft dahin getrieben wird. Und vermöge des vorhergehenden **scheint es**, daß er von C gegen E auch nicht gehen könne. **Es scheint** daher auch (**licht aber ist es noch nicht**), daß der Körper bey der angenommenen Beschaffenheit der Centralkraft $p = b^2 g (a-x)^{-2}$, sobald er den Centralpunct erreichet, daselbst gänzlich ohne Bewegung verbleiben müsse; so daß daselbst nach jeder Richtung, und folglich auch nach der Richtung CE seine Geschwindigkeit $= 0$ sey. Allein nach dieser Richtung CE ist vermöge des angeführten seine Geschwindigkeit durch die Gleichung $= \frac{2bg^{\frac{1}{2}}}{(0)^{\frac{1}{2}}}$ ausgedrückt. Es scheint daher in diesem Falle $\frac{2bg^{\frac{1}{2}}}{(0)^{\frac{1}{2}}} = 0$ zu seyn; nähmlich es scheint, daß zuweilen $\frac{1}{0}$ dem 0 gleich seyn könne, obschon sonst in allen analytischen Untersuchungen $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl, oder eine unzählbare Menge Einheiten bedeutet.

§. 7.

§. 7.

Als ich im Märzmonathe 1788. eben am Schlusse des 3ten Bandes meiner Vorlesungen über die Mathematik arbeitete, und diesen Gegenstand berührte, hatte ich nicht mehr Musse genug denselben vollständig zu überdenken; weil ich mich zugleich zum Ausmarsche in den Feldzug gegen die Türken in Bereitschaft zu setzen hatte. Ich verfiel dadurch in die irrige Meinung, daß $\frac{1}{0}$ zuweilen $= 0$ seyn könne, so wie $\frac{0}{0}$ zuweilen wirklich $= 0$ ist. Ich behauptete nähmlich, daß bey der festgesetzten Beschaffenheit der Centralkraft der Körper im Centralpuncte gänzlich ohne Bewegung bleibe. Ich unterstützte diese Behauptung, nebst der imaginären Gestalt der Zeit und Geschwindigkeit auf der entgegengesetzten Seite des Centralpunctes, noch durch den Scheingrund, daß die unendlich große Geschwindigkeit, welche der Körper bey der Erreichung des Centralpunctes erlanget, durch die ebenfalls unendlich große entgegen wirkende Kraft gleichsam plötzlich getilget werden müßte, sobald der Körper auch nur um ein unendlich kleines Stückchen über den Centralpunct hinaus rücken würde: wie solches im 3ten Bande meiner Vorlesungen über die Mathematik, welcher im Märzmonathe 1788. die Presse verließ, auf der letzten Seite zu ersehen ist.

Allein als ich in der Folge in einigen müssigen Stunden des ersten Feldzuges gegen die Türken diesen Gegenstand gründlicher durchdachte, zeigte es sich durch die Untersuchung der geradlinigen Centralbewegung bey verschiedentlich angenommenen Centralkräften, daß der angegebene Scheingrund gar nicht richtig sey; wie solches auch bereits in der 1790. hinzugegebenen Beylage zum 3ten Bande meiner Vorlesungen über die Mathematik bemerket ist.

Der scharfsinnige Geometer, Herr *L'Huilier* (Principiorum calculi differentialis & integralis expositio elementaris. Tubingæ apud Cottam. 1795.) der das unendlich Große und unendlich Kleine aus der Mathematik ganz verbannet wissen will, und von der königl. Preussischen Academie der Wissenschaften für diese Bemühung den ausgesetzten Preis erhielt, hat den Satz aufgestellet: **der durch eine analytische Untersuchung gefundene Ausdruck $x = a \cdot \frac{1}{0}$ sey eben so das Zeichen einer unmöglichen Antwort auf eine vorgelegte Frage wie $x = a\sqrt{-1}$.** Er behauptet diesem gemäß Seite 335. im §. 228. des genannten Werkes: der Ausdruck I. im §. 5.

$$v = \frac{2bg^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}(a-x)^{\frac{1}{2}}}$$

zeige an, **daß der bewegte Körper nicht nur nicht über den Centralpunct hinausgehen, sondern daß er nicht einmahl bis zum Centralpuncte kommen könne**; weil sowohl für $x > a$ als auch für $x = a$ die Geschwindigkeit v unmöglich ist. Allein wie weit eigentlich bey der in Betrachtung gezogenen Bewegung der Körper gelange, und wie sein fernerer Zustand in Hinsicht der Ruhe oder Bewegung beschaffen sey, erkläret Herr L'Huilier nicht. Er giebt zwar die Zeit ganz bestimmt und richtig an, die der Körper brauchet, um bis zum Centralpuncte zu kommen; behauptet aber doch dabey, daß der Körper bis zu einem solchen Centralpuncte gar nicht kommen könne.

Um diesen noch immer dunklen Gegenstand in ein helleres Licht zu setzen, soll nun die Bewegung des Körpers auch für andere angenommene Gesetze der Centralkraft untersuchet werden.

§. 8.

§. 8.

Es sey z. B. eine Centralkraft von der Beschaffenheit, daß die Beschleunigungen derselben in verschiedenen Entfernungen sich verhalten, wie umgekehrt die Würfel dieser Entfernungen, nähmlich $p : g = b^3 : (a - x)^3$;

so ist $p = b^3 g (a - x)^{-3}$,

folglich $vdv = 2b^3 gdx (a - x)^{-3}$ im §. 4.

und endlich $v^2 = \frac{2b^3 g (2ax - x^2)}{a^2 (a^2 - 2ax + x^2)}$

weil für $x = 0$ auch $v^2 = 0$, und folglich Const. $= - 2b^3 g . a^{-2}$ ist.

Setzet man nun in dieser Gleichung $x = a$, so ist $v^2 = \frac{2b^3 g}{0}$; und folglich wieder die Geschwindigkeit im Centralpuncte unendlich groß. Setzt man x größer als a, aber doch kleiner als $2a$, so hat v einen wirklichen Werth, so wie für $x < a$; für $x = 2a$ ist wieder $v^2 = 0$, so wie für $x = 0$. Setzet man endlich x grösser als $2a$, so ist v^2 negativ, und folglich v unmöglich, so wie bey einem negativen Werthe von x. Es scheint daher, daß bey einer solchen Beschaffenheit der Centralkraft der Körper über den Centralpunct auf eine Entfernung hinausgehe, die der anfänglichen Entfernung a gleich ist; und von da wieder nach A zurückkehre, und auf diese Art eben denselben Weg ohne Aufhören wiederhohle.

Nach der im vorigen §. angeführten Behauptung des Herrn *L'Huilier* würde hier der Körper von A **über den Centralpunct** C gegen E auf eine Entfernung $= a =$ CA hinausgehen, obschon er **bis zum Centralpuncte** C gar nicht kommen könnte.

§. 9.

Nimmt man aber die Centralkraft von der Beschaffenheit an, daß die Beschleunigungen derselben in verschiedenen Entfernungen vom Centralpuncte sich gegeneinander verhalten wie umgekehrt die 4ten Potenzen dieser Entfernungen, nähmlich setzet man $p : g = b^4 : (a-x)^4$;

so ist $p = b^4 g (a-x)^{-4}$

folglich $vdv = 2b^4 g dx (a-x)^{-4}$ im §. 4.

und $v^2 = \dfrac{4b^4 g . [a^3 - (a-x)^3]}{3a^3 . (a-x)^3}$.

Bey diesem Gesetze der Centralkraft verhält es sich demnach mit der Bewegung des Körpers im Central-

punc-

puncte eben so, wie bey dem zu erst angenommenen Gesetze im §. 5. Der Körper scheint nähmlich wieder im Centralpuncte ohne alle Bewegung zu bleiben, ob er schon bey dem Anlangen daselbst eine unendlich große Geschwindigkeit erlanget, um nach der fortgesetzten Richtung weiter gehen zu können.

Und nun ist es gänzlich unbegreiflich, warum bey diesem und dem ersten Gesetze der Centralkraft der Körper im Centralpuncte ohne Bewegung bleiben sollte, bey dem zweyten Gesetze aber bis auf eine Entfernung $= a$ über den Centralpunct hinausgehen könne, da doch in allen drey Fällen seine Geschwindigkeit im Centralpuncte nach der fortgesetzten Richtung unendlich groß ist. Die Sache wird noch mehr verwirret, wenn man die Bewegung für die Beschleunigung $p = b^n g(a-x)^{-n}$ untersuchet; wo man finden wird, daß die Bewegung des Körpers im Centralpuncte bey jedem geraden Exponenten mit §. 5. bey jedem ungeraden mit §. 8. übereinkomme; bey dem Exponenten -1 aber schon wieder eine Ausnahme zu machen sey.

§. 10.

Wirklich fanden alle mir bekannte Schriftsteller bey dieser Untersuchung so was unbegreifliches, so was geheimnißvolles, daß sie sich nicht recht darein finden konnten. Einige nahmen die Zuflucht zur Metaphysik; sie suchten daraus zu beweisen, daß es ungereimt sey das im §. 1. angeführte Gesetz der Centralkraft (so wie jedes andere) ohne alle Einschränkung anzunehmen. Allein wird dadurch der Knotten wohl aufgelöset? nein; er wird nur abgeschnitten. Und ist es dabey für eine so reine, so vollkommene Wissenschaft, als die Mathematik allgemein dafür erkannt wird, nicht eine Herabwürdigung, wenn man, um eine solche Schwierigkeit zu heben als die gegenwärtige ist, zu anderen nicht so vollkommenen Kenntnissen die Zuflucht nimmt?

§. 11.

Der Vorhang, welcher bisher dieses Geheimniß verhüllte, wird aufgerissen, sobald man gründlich untersuchet; ob die Bewegung von C gegen E bloß dadurch

durch richtig bestimmt werden könne, daß man in der Integralgleichung für die mit x zusammengehörige Geschwindigkeit den Weg x größer setzet als a. Wenn man in einer Function, welche mittelst der Integralrechnung gesunden worden, eine Größe verändert, so wird bloß dadurch der wahre geänderte Werth der Function zwar gemeiniglich, **aber doch nicht jederzeit**, richtig gefunden. Denn es kann ja möglich seyn, daß die Integration ganz anders ausfällt, wenn vorher in der Differenzialfunction eben dieselbe Veränderung vorgenommen wird. Zum Beyspiel aus der Differenzialgleichung $dy = x^m dx$ folgt $y = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \text{Const.}$ Setzet man nun in dieser Integralgleichung $m = -1$, so ist die Gleichung $y = \frac{x^0}{0} + \text{Const.}$ offenbar falsch; ob sie schon sonst bey jedem Werthe von m richtig verbleibet. Wenn man von dem Wege $S = ct$ bey der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit c, den mittelst der Integralrechnung gefundenen Weg $s = gt^2$ eines freyfallenden Körpers in eben derselben Zeit t abzieht, so ist der Weg $x = ct - gt^2$ eines mit der Geschwindigkeit c gerade aufwärts geworfenen schweren Körpers in einem nicht widerstehenden Mittel richtig bestimmet, weil durch die Integralrechnung eben dasselbe gefunden wird. Wenn man aber den Weg eines gerade aufwärts geworfenen schweren Körpers in ei-

einem widerstehenden flüssigen Mittel eben so bestimmen wollte; daß man nähmlich von dem mit der anfänglichen Geschwindigkeit während der Zeit t in einem widerstehenden flüssigen Mittel zurückgelegten Wege eines unschweren Körpers jenen Weg abzieht, welchen ein eben solcher schwerer Körper in eben derselben Zeit in einem solchen flüssigen Mittel durch den Fall zurücklegt, so wäre die Gleichung offenbar unrichtig. Eben so findet man für die krumme Linie, welche eine abgeschossene Kanonkugel in der widerstehenden Luft beschreibet, **eine falsche Gleichung**, wenn man die bekannten mittelst der Integralrechnung gefundenen Formeln für die geradlinige Bewegung eines unschweren Körpers in einem widerstehenden flüssigen Mittel mit den Formeln für die fallende oder auch für die gerade aufsteigende Bewegung eines eben solchen schweren Körpers in eben demselben widerstehenden Mittel verbindet; obschon die Gleichung für eine solche krumme Linie **in einem nicht widerstehenden Mittel auf eine solche Art** richtig gefunden wird.

§. 12.

§. 12.

Bey der geradlinigen Centralbewegung geht wirklich eine Veränderung vor, wenn man die Bewegung über C gegen E untersuchet; die Centralkraft hat nähmlich sodann eine entgegengesetzte Richtung. Deßwegen läßt sich diese Bewegung bloß dadurch keineswegs sicher bestimmen, daß man in der gefundenen Integralgleichung für die mit x zusammengehörige Geschwindigkeit den Weg x größer setzet als a; sondern um richtig und sicher bestimmen zu können, ob und was für eine Bewegung von C gegen E seyn werde, muß die Veränderung schon in der Differenzialgleichung der Bewegung angezeiget, und die gesuchte Bewegung aufs neue mittelst der Integralrechnung bestimmet werden.

Setzt man nun AE = x, wo x größer ist als a; so ist in E, in der Entfernung CE = x — a vom Centralpuncte, die Beschleunigung der im §. 1. festgesetzten Centralkraft $p = b^2g(x-a)^{-2}$; weil vermöge (§. 5.) $p : g = b^2 : (x-a)^2$ sich verhält. Es ist daher vermöge (§. 4.) die Differenzialgleichung für die mit x zusammengehörige Geschwindigkeit auf der Seite CE

$$vdv = -2b^2gdx(x-a)^{-2},$$

wo

wo dv negativ seyn muß; weil wegen der entgegenwirkenden, oder widerstehenden Kraft die Geschwindigkeit v abnimmt, wenn x wächst. Aus dieser Differenzialgleichung folgt nun

$$v^2 = \frac{4b^2g}{x-a} + \text{Const.}$$

Um Const. zu bestimmen darf man hier nicht $x = 0$ setzen; denn durch diese Gleichung wird die Geschwindigkeit nur von C angefangen gegen E in jedem Puncte richtig bestimmet. Man muß daher durch irgend eine bekannte Geschwindigkeit auf der Seite CE des Centralpunctes von C angefangen Const. zu bestimmen trachten. Dieses geht nun leicht an; weil das Quadrat der Geschwindigkeit im Centralpuncte C vermöge (§. 5.) bekannt ist, wo C sowohl das Ende von AC, als auch den Anfang von CE vorstellet. Es ist nähmlich vermöge der Bewegung von A bis C (wenn man im §. 5. in der Gleichung $v^2 = 4b^2g.[(a-x)^{-1} - a^{-1}]$ oder $v^2 = 4b^2g.(\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a})$, keineswegs aber in der nächst darauffolgenden $v^2 = \frac{4b^2g}{a}.(\frac{x}{a-x})$, um nicht auf einen Irrweg zu gerathen, $x = a$ setzet) im mathematischen Verstande genau genommen das Quadrat der Geschwindigkeit im Centralpuncte $= 4b^2g.(\frac{1}{0} - \frac{1}{a})$;

und vermöge der in diesem §. 12. gefundenen Formel für die fortgesetzte Bewegung auf CE ist, wenn man wieder $x = a$ setzet, das Quadrat der Geschwindigkeit im Centralpuncte $= \frac{4b^2g}{0} + \text{Const.}$

folglich ist $4b^2g.(\frac{1}{0} - \frac{1}{a}) = \frac{4b^2g}{0} + \text{Const.}$

nähmlich $\text{Const.} = -\frac{4b^2g}{a}$,

und endlich $v^2 = 4b^2g.(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{a})$;

woraus nun die gesuchte mit x zusammengehörige Geschwindigkeit auf der Seite CE folget

$$v = \frac{2bg^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2a-x}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

wo für $x = 2a$ die Geschwindigkeit $v = 0$ wird; und für $x > 2a$ ist v unmöglich.

Setzet man nun den auf der Seite CE gefundenen Werth für v in die Gleichung II. im §. 2.

so ist $dt = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}} \cdot dx(x-a)^{\frac{1}{2}}(2a-x)^{-\frac{1}{2}}$

und folglich

$$t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}} . [-(x-a)^{\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a . \arccos(3 - \frac{2x}{a})],$$

wo

wo Const. $=0$ ist, wenn man hier durch t nur die Dauerzeit der Bewegung von C angefangen gegen E fortgesetzet bezeichnet.

§. 13.

Um bey dem angenommenen Gesetze der Centralkraft die Gleichungen, wodurch die Bewegung bestimmet wird, etwas einfacher auszudrücken; setze man den mit der Zeit t und Geschwindigkeit v zusammengehörigen Abstand des Körpers vom Centralpuncte $= z$; so ist für die Bewegung von A bis C

$$1)\ v^2 = \frac{4b^2g}{a} \cdot \left(\frac{a-z}{z}\right)$$

$$2)\ t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}} \cdot z^{\frac{1}{2}}(a-z)^{\frac{1}{2}} + \frac{a^{\frac{3}{2}}}{4bg^{\frac{1}{2}}} \cdot \left[\pi - \arccos\left(1-\frac{2z}{a}\right)\right];$$

und für die fortgesetzte Bewegung über C gegen E ist

$$3)\ v^2 = \frac{4b^2g}{a} \cdot \left(\frac{a-z}{z}\right)$$

$$4)\ t = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2bg^{\frac{1}{2}}}\left[-z^{\frac{1}{2}}(a-z)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a \cdot \arccos\left(1-\frac{2z}{a}\right)\right],$$

welches man leicht findet, wenn man im §. 5. für den

Ab-

Abstand CD, und im §. 12. für CE entweder in den Differenzialgleichungen, oder auch in den schon gefundenen Integralgleichungen z substituiret.

Aus diesen letzten zwey Gleichungen, so wie auch schon aus dem vorigen §. 12. ist es nun endlich vollkommen deutlich zu ersehen: **daß ein Körper bey der im §. 1. festgesetzten Beschaffenheit der Centralkraft, wenn er in A ihrer Wirkung frey überlassen wird, über den Centralpunct C nach der fortgesetzten Richtung CE bis auf eine Entfernung z = a hinausgehe, welche der anfänglichen Entfernung CA gleich ist; da wird seine Geschwindigkeit = o; er kehret demnach wegen der immerfortdauerenden Wirkung der Centralkraft wieder nach A zurück; und wiederhohlet diesen Weg ohne Aufhören.**

Hiemit glaube ich nun das analytische Geheimniß, womit der durch die gefundenen Integralgleichungen anzuzeigende Zustand des beweglichen Körpers in dem berührten einfachsten Falle der Lehre von der allgemeinen Gravitation verschleuert zu seyn scheinet, hinlänglich enthüllet zu haben; nachdem in der vormahligen Bemühung zur wahren Kenntniß dieses Gegenstandes zu

ge-

gelangen, nicht ich allein, sondern sogar ein *L. Euler* und ein *L'Huilier* auf Irrwege geriethen. *)

§. 14.

Um jedoch die geradlinige Centralbewegung vollständiger zu untersuchen, nehme man die Centralkraft von der Beschaffenheit an; daß die Beschleunigungen derselben in verschiedenen Entfernungen vom Centralpuncte sich gegen einander verhalten, wie die nten Potenzen dieser Entfernungen. Man setze nähmlich $p = \frac{gz^n}{b^n}$ wegen $p : g = z^n : b^n$, wo CD oder auch $CE = z$ ist, und $CB = b$ diejenige Entfernung bedeutet, wo die Beschleunigung der Centralkraft $= g$ ist, nähmlich eben so groß, als die Beschleunigung der Erdschwere an

*) Herr Laplace drücket sich in dem oberwähnten Werke, Mécanique Céleste, Premiere Partie Livre II. pag. 197. über diesen Gegenstand mit folgenden Worten aus: Il y a cependant une différence essentielle entre le mouvement elliptique vers le foyer, & le mouvement dans une ellipse infiniment applatie. Dans le premier cas, le corps parvenu au foyer, passe au-delà, & s'en éloigne à la même distance, dont il étoit parti; dans le second cas, le corps parvenu au foyer, revient au point d'où il étoit parti. Une vitesse tangentielle à l'aphelie, quelque petite qu'elle soit, suffit pour produire cette différence qui n'influe point sur le temps que le corps emploie à descendre vers le foyer.

an der Erdfläche. Es ist daher auf der Seite AC, wenn CA = a, CD = z, und die mit z zusammengehörige Geschwindigkeit = v ist,

$$vdv = -\frac{2gz^n dz}{b^n}$$

$$v^2 = -\frac{4gz^{n+1}}{(n+1).b^n} + \text{Const.};$$

nun ist $v^2 = 0$ für $z = a$;

daher $\text{Const.} = \frac{4g.a^{n+1}}{(n+1).b^n}$

und $v^2 = \frac{4g}{(n+1).b^n}.(a^{n+1} - z^{n+1})$.

Daraus folgt nun, wenn n eine **positive** ganze oder gebrochene Zahl (und zwar eigentliche oder uneigentliche Bruchzahl) bedeutet, die Gleichung für die Geschwindigkeit im Centralpuncte, wenn man z = 0 setzet,

$v^2 = \frac{4g.a^{n+1}}{(n+1).b^n}$ **von einer bestimmten Größe.**

Um die fernere Bewegung auf der Seite CE zu bestimmen, sey nun CE = z, und die mit diesem z zusammengehörige Geschwindigkeit = v; so ist auf dieser Seite CE auch

$$vdv = -\frac{2gz^n dz}{b^n},$$

$$v^2 = -\frac{4gz^{n+1}}{(n+1).b^n} + \text{Const.};$$

$$\text{nun ist } v^2 = \frac{4g.a^{n+1}}{(n+1).b^n} \text{ für } z = 0;$$

$$\text{daher Const.} = \frac{4g.a^{n+1}}{(n+1).b^n}$$

$$\text{und } v^2 = \frac{4g}{(n+1).b^n}.(a^{n+1}-z^{n+1}),$$

so wie auf der anfänglichen Seite von A bis C. Es wird nähmlich auf der Seite CE für $z = a$ auch die Geschwindigkeit $= 0$; und für $z > a$ ist auf dieser Seite, so wie auf der ersten AC die Geschwindigkeit v unmöglich. Ueberhaupt sind in diesem Falle auf beyden Seiten des Centralpunctes in gleichen Entfernungen die Geschwindigkeiten einander gleich.

Wenn demnach die Beschleunigungen der Centralkraft in verschiedenen Entfernungen vom Centralpuncte sich gerade so verhalten, wie die nten Potenzen dieser Entfernungen, wo n was immer für eine ganze oder gebrochene Zahl bedeutet; so geht ein Körper, welcher in A der Wirkung einer solchen Centralkraft frey überlassen wird, über den Centralpunct auf eine Entfernung hinaus, die der anfänglichen Entfernung CA gleich ist; von da geht solcher wieder in den ersten Anfangspunct A zu-

rück,

rück; und wiederhohlet diesen Weg ohne Aufhören dergestalt, daß immer auf beyden Seiten des Centralpunctes in gleichen Entfernungen seine Geschwindigkeiten gleich sind.

Um die Dauerzeit der Bewegung bey einem gegebenen n zu bestimmen, dienen nachstehende Differenzialgleichungen,

auf der Seite AC

$$dt = -\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}n}}{2g^{\frac{1}{2}}} \cdot dz(a^{n+1} - z^{n+1})^{-\frac{1}{2}},$$

und auf der Seite CE

$$dt = +\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}n}}{2g^{\frac{1}{2}}} \cdot dz(a^{n+1} - z^{n+1})^{-\frac{1}{2}},$$

weil nähmlich dz auf dieser Seite positiv, und auf jener negativ ist. Es ist nähmlich auf dieser Seite $d(CE) = dz$, und auf jener $d(AD) = d(a-z) = -dz$.

§. 15.

Ferner setze man die Centralkraft von der Beschaffenheit, daß die Beschleunigungen in verschiedenen Entfernungen vom Centralpuncte sich gegeneinander verhalten, wie umgekehrt die nten Potenzen dieser Entfernungen, wo n was immer für eine ganze oder uneigentliche Bruchzahl über 1 bedeutet. Man setze nähmlich $p = b^n g z^{-n}$; so ist auf der Seite AC

$$vdv = -2b^n g z^{-n} dz,$$

$$v^2 = +\frac{4b^n g}{(n-1).z^{n-1}} + \text{Const.};$$

$$\text{nun ist } v^2 = 0 \text{ für } z = a$$

$$\text{daher Const.} = -\frac{4b^n g}{(n-1).a^{n-1}}$$

$$\text{und } v^2 = \frac{4b^n g}{(n-1).a^{n-1}}.\left(\frac{a^{n-1}-z^{n-1}}{z^{n-1}}\right).$$

Um nun die Geschwindigkeit im Centralpuncte zu bestimmen, setze man $z = 0$; oder um die Potenzen von 0 zu vermeiden, setze man $z = 0.a$; so ist die Gleichung für die Geschwindigkeit im Centralpunkte

$$v^2 = \frac{4b^n g}{(n-1).a^{n-1}}.\left(\frac{1}{0} - 1\right) \text{ unermeßlich groß.}$$

Für die fernere Bewegung auf CE ist

$$vdv = -2b^n g z^{-n} dz,$$

$$v^2 = \frac{4b^n g}{(n-1).z^{n-1}} + \text{Const.};$$

$$\text{nun ist } v^2 = \frac{4b^n g}{(n-1).a^{n-1}}.\left(\frac{1}{0} - 1\right) \text{ für } z = 0.a;$$

da-

daher $\frac{4b^n g}{(n-1)a^{n-1}} \cdot (\frac{1}{0} - 1) = \frac{4b^n g}{(n-1)a^{n-1}} \cdot \frac{1}{0} + \text{Const.}$

nähmlich $\text{Const.} = -\frac{4b^n g}{(n-1)a^{n-1}}$

und $v^2 = \frac{4b^n g}{(n-1) \cdot a^{n-1}} \cdot (\frac{a^{n-1} - z^{n-1}}{z^{n-1}})$.

Bey diesem Gesetze der Centralkraft hat es demnach mit der geradlinigen Centralbewegung die nähmliche Beschaffenheit wie im §. 14.; nur daß hier die Geschwindigkeit im Centralpuncte unermeßlich groß ist, dort aber eine bestimmte Größe hat.

§. 16.

Nun setze man die Centralkraft von der Beschaffenheit, daß die Beschleunigungen sich verhalten wie umgekehrt die ersten Potenzen der Entfernungen; nähmlich man setze $p = bgz^{-1}$; so ist auf der Seite AC von A bis C

$$vdv = -2bgz^{-1}dz,$$

$$v^2 = -4bg \cdot \text{lognat } z + \text{Const.}$$

nun ist $v^2 = 0$ für $z = a$,

da=

daher Const. $= 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; a$,

und $v^2 = 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; \frac{a}{z}$.

Daraus folgt nun die Gleichung für die Geschwindigkeit im Centralpuncte, wenn man $z = 0.a$ setzet,

$v^2 = 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; \frac{1}{0}$ unermeßlich groß.

Für die fortgesetzte Bewegung auf CE ist

$vdv = -\; 2bgz^{-1}dz$,

$v^2 = -\; 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; z + \text{Const.}$

nun ist $v^2 = 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; \frac{1}{0}$ für $z = 0 \,.\, a$;

daher $4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; \frac{1}{0} = - 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; 0 \,.\, a + \text{Const.}$

oder Const. $= 4bg \,.\, (\mathrm{lognat}\; \frac{1}{0} + \mathrm{lognat}\; 0 \,.\, a)$,

und ferner Const. $= 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\, (\frac{1}{0} \times 0 \,.\, a)$,

nähmlich Const. $= 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; a$;

und folglich $v^2 = 4bg \,.\, \mathrm{lognat}\; \frac{a}{z}$;

wie auf der Seite AC

Bey diesem Gesetze der Centralkraft hat es demnach mit der Bewegung des Körpers die nähmliche Beschafschaffenheit wie im §. 14.; nur daß auch hier die Geschwindigkeit im Centralpuncte unermeßlich groß ist, dort aber eine bestimmte Größe hat.

§. 17.

Endlich sey die Centralkraft von der Beschaffenheit, daß die Beschleunigungen sich verhalten, wie umgekehrt die $\frac{1}{n}$ten Potenzen der Entfernungen, wo n jede ganze oder auch uneigentliche Bruchzahl über 1 bedeutet. Es sey nähmlich $p = b^{\frac{1}{n}} g z^{-\frac{1}{n}}$, so ist auf der Seite AC von A bis C

$$vdv = -2b^{\frac{1}{n}} g z^{-\frac{1}{n}} dz,$$

$$v^2 = -\frac{4nb^{\frac{1}{n}} g z^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + \text{Const.}$$

nun ist $v^2 = 0$ für $z = a$;

daher $\text{Const.} = \frac{4nb^{\frac{1}{n}} g a^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$,

und $v^2 = \frac{4nb^{\frac{1}{n}} g}{n-1} (a^{\frac{n-1}{n}} - z^{\frac{n-1}{n}})$.

Daraus folgt nun die Gleichung für die Geschwindigkeit im Centralpuncte, wenn man $z = 0$ setzet,

$$v^2 = \frac{4nb^{\frac{1}{n}}ga^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$$ von einer bestimmten Größe.

Und ferner ist für die fortgesetzte Bewegung auf CE

$$vdv = -2b^{\frac{1}{n}}gz^{-\frac{1}{n}}dz,$$

$$v^2 = -\frac{4nb^{\frac{1}{n}}gz^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + \text{Const.}$$

nun ist $v^2 = \frac{4nb^{\frac{1}{n}}ga^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$ für $z = 0$;

daher $\text{Const.} = \frac{4nb^{\frac{1}{n}}ga^{\frac{n-1}{n}}}{n-1}$,

und $v^2 = \frac{4nb^{\frac{1}{n}}g}{n-1} \cdot (a^{\frac{n-1}{n}} - z^{\frac{n-1}{n}})$.

Es ist demnach bey diesem Gesetze der Centralkraft die geradlinige Centralbewegung eben so beschaffen wie im §. 14.

Anmerkung. Ich übergehe allhier die Fälle mit Stillschweigen, wo der Körper in A schon mit einer Geschwindigkeit entweder nach der Richtung AC, oder nach der entgegengesetzten versehen angenommen wird.

Auch

Auch enthalte ich mich über diese Untersuchung einige fernere Betrachtungen zu machen, oder Schlußfolgen daraus abzuleiten, damit ich nicht zu weitläuftig werde. **Nur dieses kann ich nicht unerinnert lassen, daß man mit der Folgerung der besonderen Gleichungen aus einer mittelst der Integralrechnung gefundenen allgemeinen Gleichung jederzeit sehr behutsam seyn soll, um nicht in Irrthümer zu verfallen. Womit auch zugleich der eigentliche Zweck dieser kleinen Abhandlung angezeiget ist.**