

II. *De Curvarum Tangentibus è Maximorum ac Minimorum Theoriâ immediatè deductis : Unâ cùm Theorem : quibusdam ad Sectiones conicas pertinentibus, ejusdem calculi auxilio investigatis. Autore Humphrido Dittono.*

Tangentium methodum propono, facilem satis ac generalem, imò generalissimam, ut pote curvis omnibus unâ eâdemque opera inservientem. Neque novam vocare metuo, cùm celebriorum Geometrarum nullus (in quantum unquam scire potui) aliquid hujus generis publici juris fecit. Pauca tantum ejus specimina hîc in medium profero, nire enim tum clarâ ac apertâ exemplorum multitudine non indigetimus !

Sit Curva $A G H$, cujus vertex A , axis $A K$, ordinatim applicata $F D$ centrumque (siquod habet) punctum K . Sumpto puncto L in Axe sit $A L = n$, $A D = x$, $F D = y$, $F L = z$; quarum quantitatum, tres posteriores sunt fluentes, prior verò n permanens ac stabilis, hæc enim una eademque prioribus variis semper responderet. Ex Triangulo Rectangulo $F D L$, hanc habemus Equationem, $z z = y \dot{y} + n n - 2 n x + x x$; determinandoque z ad extremum, oritur $2 y \dot{y} - 2 n \dot{x} + 2 x \dot{x} = 0$; unde interpretando $2 y \dot{y}$ secundum propriam Curvæ naturam, relinquetur quantitas n exposita in terminis etiam Curvæ propriis.

Cùm verò z hoc modò ad valorem extremum determinatam habeamus; hoc est, linea $F L$ omnium quæ a puncto L ad Curvam duci possunt vel maxima vel mi-

X x x x x x

nima

nima sit, indeque ad Curvam in puncto F normalis; ipsam DL esse subnormalem patet, ex quâ subtangens nullo negotio eruitur.

In exemplum producaturs primò Parabola Apolloniana, quàm curvam hâc delineatam esse supponemus.

Habemus ergo $2yy = rx$ (posito Parametro $= r$)

unde $rx - 2nx + 2xx = 0$, & $n = \frac{r}{2} + x$, er-

goque DL subnormalis $= \frac{1}{2} r$. (Cujus Theorematis sensus hâc est, viz. Si ultra terminum D abscissæ AD, designetur DL semiparametro equalis, atque à puncto L producaturs LF recta ad punctum F; recta sic ducta Parabolæ in puncto F normalis erit, & omnium quæ à puncto L, ad Curvam duci possunt minima. Dico minimam; alicui enim curvæ naturam ac indolem scienti, apparet Maximam esse non posse (idquod in sequentibus notaturum velim) sed necessario est vel maxima vel minima, ideoque posterior.) Hæcque pars prior est Theor. 5. Lib. 7. Conicor. Præclarissimi de La Hire.

Ducatur ordinata EB, junganturque puncta E, L; fit intercepta BD = f, unde AB = x - f, &

$BL = \frac{r}{2} + f$. Jam $LE^2 = \frac{rr}{4} + rx + ff$, &

$FL^2 = \frac{rr}{4} + rx + ff$, & $FL^2 = \frac{rr}{4} + rx$, ergo

$LE^2 - FL^2 = BD^2$; quæ pars posterior est Theorem. 5. ejusdem Lib. Conicor.

Quò propriùs punctum F in quò curvam normalis fecat, puncto A sive vertici admovetur; eò propiùs etiam punctum L eidem venit. Ergo quando F cum A coin-

A coincidit, & sic evanescit ordinata FD , tunc ipsa Minima jacet in Axe AK , & semiparametri quantitatem adequabit. Hoc est in illo casu $n = \frac{1}{2} r$ tantum; in nihilum abeunte x abscissâ ad ordinatam evanescentem pertinenta. Si ergo $AL = n = \frac{1}{2} r$, sumpto puncto D inter A & L , fiat $AD = x$; tum oritur

$$FL^2 = r^2 + x^2, \text{ ergo } FL^2 - AL^2 = x^2,$$

hoc est $FL^4 - AL^4 = AD^4$ semper. Eiusdemque tenoris est Theor. 2. Lib. 7. Conicor. de La Hire.

Secundò sit curva quædam ordinis Parabolici superioris, cujus æquatio $r^{\frac{p-q}{p}} x^{\frac{q}{p}} = y^{\frac{p}{p}}$.

$$\text{Tum } y^{\frac{p}{p}} = r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q}{p}}, \text{ adeoque}$$

$$2y^{\frac{p}{p}} = \frac{2q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}};$$

substituendoque hunc valorem loco $2y^{\frac{p}{p}}$ in æquatione generali determinante z ad

$$\text{tremum, habemus inde } n = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}} + x; \text{ \&}$$

$$\text{propterea subnormalis } DL = \frac{q}{p} r^{\frac{2p-2q}{p}} x^{\frac{2q-p}{p}}$$

Hoc verò singulis hiscè curvis facillimè applicatur, si indices p & q secundum unius cujusque naturam ac genium debito modo exponantur.

Supponetur tertio Curvam esse Ellipsiu cujus $\frac{1}{2}$ Axis Major $A K$; ex cujus etiam equatione consequitur

$$2 y \dot{y} = r \dot{x} - \frac{2 r x \dot{x}}{q} \quad \text{Unde provenit}$$

$$r \dot{x} - \frac{2 r x \dot{x}}{q} - 2 n \dot{x} + 2 x \dot{x} = 0, \quad \&$$

$$n = \frac{r}{2} + x - \frac{r x}{q}, \quad \text{ac propterea } \frac{r}{2} - \frac{r x}{q} \text{ subnormali } D L$$

equalis. Sivero ellipseos loco substitueretur Circulus, equationem eodem modo tractando, inveniemus $D L = \frac{r}{2} - x$, posito r Circuli Radio x quali.

Sed ad Ellipsiu revertendum, cujus alia proprietas ex hoc fonte deducenda est, prout in Parabolâ factum.

$$\text{Sit } B D = f, \quad \text{unde } A B = x - f. \quad \text{Habemus } L E^q (= L B^q + E B^q) = \frac{r r}{4} - \frac{r r x}{q} + \frac{r r x x}{q q} + f f + r x -$$

$$\frac{r x x}{q} - \frac{r f f}{q} : \& F L^q (= F D^q + L D^q) = r x - \frac{r x x}{q} + \frac{r r}{4} - \frac{r r x}{q} + \frac{r r x x}{q q} : \text{Ergo, } L E^q - L F^q = f f - \frac{r f f}{q}$$

Hoc verò est Theor. 6. Lib. 7. Conic. de La Hire.

Postulat enim Geometra ille sublimis, ut sit $q. r.$
 $\frac{q}{2} - x : L D$, cujus valor est $\frac{r}{2} - \frac{r x}{q}$ prout supra in-

ventum ;

ventum; ideoque quarta proportionalis est tribus aute positis: Hoc verò ei concessio, L F esse minimam omnium reclarum quæ à puncto L ad Ellipsiu duci possunt evidenter demonstrat. Preterea quoniam est $q : q - r :: f : f - fr$, Ergo $\frac{ff}{q} = \frac{rff}{q}$

sive $f \times f - fr$, idem est quòd rectangulum apud D
 $\frac{ff}{q}$

De La Hire exemplar vocatum: Hoc verò exemplar secundum ejus definitionem, est Rectangulum simile Rectangulo, differentiam inter Quadratum Axis Transversif & Figuram constituenti (hoc est Rectangulo $qq - qr$) & preterea ad Rectam BD sive f applicatum. Et quòd Rectangulum $\frac{ff}{q} - \frac{rff}{q}$ omnes hactè conditiones possideat, luce Meridianâ Clarius est.

Notetur, ex valore quantitatis n supra invento, planè consequi $n \simeq r$. Nam $n = r + x + rx$, ergo

$qn + rx = \frac{qr}{2} + \frac{qx}{2}$, sed (propter $q \simeq r$) $qx \simeq rx$,

ergo, $qn \simeq \frac{qr}{2}$, & $n \simeq \frac{r}{2}$.

Quando (ut in Parabola modò observatum) punctum F in A verticem incidit, ipsa Minima in Axe designatur; & propter evanescentem x , habemus $n = r$: Assumptoque quovis puncto D inter A & L, si AD = alicui x , comparando emergit $FL^2 - AL^2 = \frac{xx - rxx}{q}$; quòd ipsum est Theor. 3. Lib. 7. Conic.

D. La

D. La Hire. Quoniam enim est $q : q - r :: x : x - r x$, patet $\frac{q}{q}$ $\frac{x}{x - r x}$ esse exemplar, sed ap-

plicatum ad abscissam x ; & preterea hoc esse mensuram adequatam defectus, quadrati Minimæ à quadrato cujus vis rectæ alterius, ab eodem puncto ad curvam protensæ; hæcque demonstrat ille loco citato.

Theoremata verò ad Axem minorem sive conjugatum ellipseos spectantia (hactenus enim majore sive Transverso usi fuimus) eodem planè modo determinantur. Sit jam $A K$ Axis Minoris $= \frac{c}{2}$, Parameter $= R$;

punctum L jam ultra centrum, ad alteras partes GK collocari supponitur. Operando ut priùs, inveniatur AL sive $n = \frac{R}{2} + x - \frac{R x}{c}$, & subnormalis $DL = \frac{R}{2} - \frac{R x}{c}$;

Hoc est $c : R :: \frac{c - x}{2} : \frac{R - R x}{c}$, adeoque ducta FL

omnium quæ à puncto L ad ellipsiu duci possunt Maxima, & $LF^a - LE^a = \frac{R f f - f f}{c} =$ Rectangulo exemplar ad

BD (sive f) applicato. Quòd verò hoc sit exemplar, patet, est enim $c : R - c :: f : \frac{R f - f}{c}$, adeoque ex defini-

tionem, $\frac{R f - f}{c} \times f =$ Exemplari. Hoc verò Theor. est

7 Lib. 7 Conicor. De La Hire.

Iterum;

Iterum ; Puncto F cùm A coincidente ; propter evanescentem x evanescentis tunc temporis ordinatæ, re-

linquitur $n = \frac{R}{2}$, & AL omnium quæ à puncto L

ad Ellipsin duci possunt Maxima, & AL^q — FL^q = $\frac{Rxx - xx}{c}$ Exemplari ad AD sive x applicato ;

eodemque modo sonat. Theor. 4. Lib. predicti Conicorum.

Observandum verò ad casum precedentem (quòd priùs ergo notari debuit) ubi invenimus

$n = \frac{R}{2} + x - \frac{Rx}{c}$, quòd $n \approx \frac{R}{2}$; nam $c n + Rx =$

$\frac{Rc}{2} + cx$, & propter $R \approx c$, adeoque $Rx \approx cx$, re-

linquitur $c n \approx \frac{Rc}{2}$, & $n \approx \frac{R}{2}$.

Jam verò ut res in Ellipsi peracta est, sic eodem prorsus modo in Hyperbola peragenda foret, Minimæque in hac curvâ lineæ determinandæ : sed talis inter hascæ curvas connectio, tam facilisq; ab unâ ad alteram transitus, ut vel Tyronibus ipsis labor inanis videatur. Nil aliud restat, v. gr.

ad subnormalem determinandam, quàm ut signum — in + mutetur. Nam cùm in Hyperbolâ sit

$2yy = \frac{rx}{q} + 2\frac{rx}{q}x$, & $n = \frac{r}{2} + x + \frac{rx}{q}$ (exquatione

generali) manet DL = $\frac{r}{2} + \frac{rx}{q}$.

Concipietur Quarto Curvam M S N (in altera Fig. Fig. parte delin. Esse unam ex Hyperboloidibus, cujus Asymptoti A K, K H, rectamque S R ad Asymptoton K H ordinatam, S R sit = y, S P = z, K R = x, K P = n, quæ hinc necessariò minor erit quàm x, ut consideranti patet. Equatio curvæ propria est $y^p x^q = r^q s^p$ cujus loco (propte r & s quantitates determinatas) scribi possit $y^p = x^{-q}$, adeoque

$$y = x^{-\frac{2q}{p}}, \quad \& \quad 2 y \dot{y} = -\frac{2q}{p} \frac{\dot{x}}{x} x^{-\frac{2q}{p}}; \quad \text{hinc cum}$$

$z z = y y + x x - 2 n x + n n$, pro extremo habemus

$$2 y \dot{y} + 2 x \dot{x} - 2 n \dot{x} = 0, \quad \text{hoc est } -\frac{2q}{p} \frac{\dot{x}}{x} x^{-\frac{2q}{p}} + 2 x \dot{x} - 2 n \dot{x} = 0,$$

$$+ 2 x \dot{x} = 2 n \dot{x}, \quad \& \quad n = x - \frac{q}{p} x^{-\frac{2q}{p}}$$

$$\text{adeoque subnormalis P R } (= x - n) = \frac{q}{p} x^{-\frac{2q}{p}}$$

Curvam jam A F G (ultimo loco) Cycloiden primariam concipiamus; sitque r Radius, c Arcus & y ordinata Circuli genitoris, cujus Diameter per A K representatur centrumque inter L & K positum. Tum vocatâ F D cycloidis ordinatâ a, cæterisque ut prius; curvæ equatio est $a a = y y + 2 c y + c c$, adeoque $z z (= a a + n n - 2 n x + x x) = y y + 2 c y + c c + n n - 2 n x + x x$, & (z ad extremum determinatâ)

$$\text{natâ) } 2y\dot{y} + 2c\dot{y} + 2y\dot{c} + 2cc - 2nx + 2xx = 0.$$

Est verò $\dot{y} = \frac{rx - x\dot{x}}{y}$, & $\dot{c} = \frac{r\dot{x}}{y}$, ergo hos valores sub-

stituendo, ac equationem debitè reducendo, habemus

$$2r - \frac{2rc - 2xc}{y} + \frac{2r + 2cr}{y} = 2n - 2x,$$

propterea $2r - x + \frac{2rc - xc}{y} = n - x = Df.$
subnormali.

Incomparabilis D. Barovius subtangente præcognitâ, ad Maximum & Minimum determinandum utitur; hocque idem post eum fecit D. Neiwentiit in suâ infinitorum Analyfi. Cùm verò multis aliis Methodis, in quibus nihil omnino de Curvarum Tactione presupponitur, Maximum ac Minimum inveniri queant, palàm est è Maximis & Minimis ad Tangentes determinandas, tutò ac legittimè procedere posse.

COROLL. I.

EXempla hætenus oblata percurrenti, in singulis vis patebit, quòd $2y\dot{y} - 2nx + 2xx = 0$, posito nempe loco n in hac equatione, valore ejus secundum curvæ naturam. In Hyperboloidibus ergo

Y y Y y Y y ex.

$$\text{ex. gr. } \frac{2q}{p} x x - \frac{2q-p}{p} x x + \frac{2q}{p} x x + 2 x x = 0,$$

quod (ipso oculo judice) manifestum est ; & sic in aliis (sine ullâ demonstratione) veritas faciliè perspicietur.

C O R O L L. II.

EX subnormalium inventione, curvarum ordinatas Maximas & Minimas facile determinabimus. Hæcque in re dico, si subnormalis (pro aliquo curvæ puncto) nihilo ponatur equalis, habemus ordinatam istius curvæ ad extremum determinatam ; & quidam maximam si ad partes curvæ concavas, minimam verò si ad convex applicari intelligatur. Ex. gr. in Circulo (positâ subnormali = 1) est $1 = r - x$; fit $r - x = 0$; ergo $r = x$, ac inde $y = r$, hoc est applicata maxima Ra-

dio equalis. Similiter in Ellipfi, $1 = r - \frac{rx}{q}$; fit

$$\frac{r}{2} - \frac{rx}{q} = 0, \text{ tum } r q = 2 r x, \text{ ac } x = \frac{q}{2}, \text{ ergo } y y = \frac{r q}{4}$$

= 4tæ parti Figuræ (utivocant) five femiaxis conjugati quadrato, adeque maxima $y =$ isti femaxi. Nec Methodo dissimili cum aliis curvis operandum foret; inveniatur subnormalis ex equatione datâ, cæque nihilo equali.

equali positâ, ordinatam curvæ maximam vel minimam determinatam habebimus; priorem ad partem curvæ versus axem concavam, posteriorem ad convexam.

POSTSCRIPTUM

Prioribus sequentia hæc (notatu non indigna) adjungi possunt.

PRimò æquè facilè hâc methodo determinari Tangentem, ad partes curvæ convexas operando, ac ad partes concavas uti priùs. Sit enim $A C$ Tangens verticalis inque eâ ad libitum sumpto puncto C , sit $A C = n$, $C O = z$ (quò etiam caractere omnes lineæ, à puncto C ad curvam convexam $A E G$ ductæ, insigniantur) ergo ductâ $M O$ semper ad $A C$ perpendiculari, erit $C M = n - y$, & cum $O M = x$, erit $z z = n n - 2 n y + y y - x x$, adeoque (pro extremo ipsius z valore) $2 y \dot{y} + 2 x \dot{x} - 2 n \dot{y} = 0$. In quâ equatione si exponatur $2 x \dot{x}$ secundum curvæ naturam, lineam $C Z$ (quæ hoc loco subnormalis vicem subibit) determinatam dabimus. Res clarior est quàm quæ exemplis Illustrantibus indigeat; quæque jamjam dicta sunt facile hoc opus excusabunt.

Secundò, Sicut Methodo priore, (Curvarum Tangentes invenimus) ipsius lineas $L E$ vel $C O$ à puncto
 $Y y y y y y z$ dato

dato vel in Axe vel in Tangente verticali sumpto productas, ad extremum determinando; sic etiam considerando lineas Q E, &c. à puncto in Axe dato ultra verticem productas, idem (idque Universaliter) perficere possumus. Omnes enim lineæ Q E valoris fluentis sunt ac perpetuò mutabilis, sola verò Tangens Q F (posito quòd Q F curvam tangat) stabilis est ac ad unicum valorem determinata. Hoc ergo loco, \bar{z} extremi Hypothesis non inuenitur, sed quantitatem permanentem tantam speculabimur. Assumantur duo puncta Q L, indeque ad idem curvæ punctum E duæ semper lineæ ducantur L E, Q E. Inter punctum F contactus ac verticem, angulus Q E L semper erit obtusus, ad alteras verò partes puncti F acutus erit, supposito (quòd prius monitum) Q F curvam tangere, ac F L ei ad angulos rectos insistere. Sit Q A = p. A L = n. A B = x. B E = y. Q E = z. V E (intercepta inter punctum E & V ubi cadit Q V perpendicularis ab Q in L E productam) = v. Jam propter Triangulum obtusangulum Q E habemus hanc equationem

$$z z = p^2 + 2 p n - y^2 - x^2 + \frac{y^2 + n^2 - 2 n x + x x}{x} \\ x = v; \text{ five loci } \frac{y^2 + n^2 - 2 n x + x x}{x} \text{ scribendo } f, \\ \text{ est } z z = p^2 + 2 p n - y^2 - x^2 + 2 n x - 2 f v, \text{ ideoque} \\ z z \dot{z} = 2 y \dot{y} - 2 x \dot{x} + 2 n \dot{x} - 2 \dot{f} v - 2 v \dot{f}.$$

Si z jam sit quantitas stabilis, quòd in Casu Q E cùm Q F tangente coincidet, erit tum

$$- 2 y \dot{y} - 2 x \dot{x} + 2 n \dot{x} = 0 \text{ (rectangulo } 2 f v \text{ ejus-} \\ \text{que adeo fluxione penitus evanescente.) Hæc verò} \\ \text{est ipsa æquatio Generalis Methodo superiori determinata,} \\ \text{quæque}$$

