Weber's Electrodynamics

韋伯(1804 - 1891)發現兩帶電質點間的作用力與其相對速度與距離有關，是最早提出力的作用與速度有關的科學家，這個理論能有效的解釋靜電學中電磁吸引、感應電流等現象。若有一組帶電粒子q_1與q_2，分別座落於$\vec{r}_1$與$\vec{r}_2$上，其速度分別為$\vec{v}_1$與$\vec{v}_2$，則帶電質點 2 對 1 的韋伯力(Weber's force)其值可表示成

$$F_{21} = q_1 q_2 \frac{1}{r^2}(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2})$$

其中$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$為兩個帶電質點間的相對距離，相對速度可表示成

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{r}$$

而 Weber's Electrodynamics 中最重要的結果是其作用力的形式符合牛頓第三運動定律的 strong form，也就是兩個質點間的作用力大小相等且方向相反，力在質點的連心線的沿長線上，而 Weber's force 也可以符合古典力學中的 Galilean Transformation。

Lagrange's Equations to Weber's Electrodynamics

根據 Weber's Electrodynamics，我們可以知道兩個帶電質點之間的位能可以下列形式表式：

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{q_1 q_2}}{\mathrm{r}}(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2})$$

其中q_1與q_2分別為質點 1 和 2 的帶電量，$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$為兩個帶電質點間的距離。而平面上質點的動能可以表示成

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

因此 Lagrangian 可以寫成

$$L = T - U$$

$$\mathrm{L} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{q_1 q_2}{r}(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2})$$

其中

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} - \frac{2\dot{r}}{rc^2}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\ddot{r} - \frac{2\ddot{r}}{rc^2} + \frac{2\dot{r}}{r^2c^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + \frac{q_1q_2}{r^2}(1+\frac{\dot{r}^2}{c^2})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

將上列式子代入 Lagrange's equations

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

可得到 equation of motion

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = \frac{q_1q_2}{r^2}(1-\frac{\dot{r}-2r\ddot{r}}{c^2})$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

由 polar coordinates 可以知道

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F_r$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = rF_\theta$$

所以 equation of motion 可以寫成以下的形式

$$F_r = \frac{q_1q_2}{r^2}(1-\frac{\dot{r}-2r\ddot{r}}{c^2})$$

$$F_\theta = 0$$

從上式我們可以知到 r 方向的作用力即為 Weber's force，另外，注意到θ方向是沒有作用力的，即兩個帶電質點間沒有扭力(torque)作用，因此 Weber's Electrodynamics 中的作用力是在兩個質點連心線上，遵守牛頓第三運動定律的strong form，此結果和 Maxwell-Lorentz's Electrodynamics 中的 Lorentz force 有很大的不同，接下來的部分將會對兩種不同形式的電動力學做討論。

Comparison between Weber's and Maxwell's Electrodynamics

在前面我們有提到，Weber's Electrodynamics 是遵守牛頓第三運動定律的，因此 Weber's Electrodynamics 能夠自動的滿足線動量守恆，然而 Lorentz force 很明顯的是不遵守的，這意味著一組相互作用的電荷的線動量有可能增加或減少，即使它們不與外界的物體作用。由上面的證明也可知道 Weber's force 在角動量方面也是守恆的，而 Maxwell's Electrodynamics 中則否，這意味著相互作用的電荷之間的角動量有可能增加或減少，即便它們不與外界的物體作用。

另外，Lorentz force 也不屬於保守力，且討論高速質點運動時，磁感應的部分必需被修正。