Ejercicio 1.

$$f(z) = \begin{cases} 0 & -\pi < z < 0 \\ 4\pi - 3z & 0 \le z < \pi \end{cases}$$

Se calculan los coeficientes a_0, a_n, b_n para construir la serie de Fourier de $f(z)$ con $p = \pi$.

Para a_0 se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \, dz + \int_{0}^{\pi}(4\pi - 3z)dz\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[4\pi z - \frac{3z^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{5\pi}{2}$$

Para a_n se tiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\cos nz \, dz = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} 0 \, dz + \int_{0}^{\pi}(4\pi - 3z)\cos nz \, dz\right]$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[(4\pi - 3z)\frac{\operatorname{sen} nz}{n}\bigg|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nz \, dz\right]$$

Por lo tanto el resultado para a_n es:

$$a_n = -\frac{3}{n\pi}\frac{\cos nz}{n}\bigg|_0^{\pi} = \frac{3 - 3(-1)^n}{n^2\pi}.$$

Donde $\cos n\pi = (-1)^n$

Ahora por ultimo hay que calcular a b_n.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(4\pi - 3z)\operatorname{sen} nz \, dz = \frac{4 - (-1)^n}{n}.$$

Por lo tanto con los resultados obtenidos para los coeficientes la serie nos queda de la siguiente forma:

$$f(z) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - 3(-1)^n}{n^2\pi}\cos nz + \frac{4 - (-1)^n}{n}\operatorname{sen} nz.$$

Ejemplo extraído del libro de Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera, Séptima edición, de los autores Zill y Cullen

$$f(m) = 3m + 6\pi \qquad -\pi < m < \pi$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(m)dm = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(3m + 6\pi) \, dm\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{3m^2}{2} + 6\pi m \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{3\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{2} \right] + \left[6\pi^2 + 6\pi^2 \right] \right] = \frac{1}{\pi} \left[12\pi^2 \right] = 12\pi$$

Ahora se calculara a a_n y b_n.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(m) cosnm \, dm = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (3m + 6\pi) \, cosnm \, dm \right]$$

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} 3m \, cosnm \, dm + \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi \, cosnm \, dm \right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo nos queda:

$$u = m \quad dv = cosnm$$
$$du = dm \quad v = \frac{1}{n} sennm$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v \, du.$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{6\pi}{n} sen \, nm + \frac{3m}{n} sen \, nm - 3 \int \frac{1}{n} sen \, nm \, dm \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[\frac{x}{\pi n} sen \, nx + \frac{3}{\pi n^2} cos \, nx + \frac{1}{n} sen \, nx \right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando con los límites de integración nos queda:

$$a_n = \frac{3(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{3(-1)^n}{\pi n^2} = 0$$

Y se hace lo mismo para b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(m) sen \, nm \, dm = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (3m + 6\pi) sen \, nm \, dm \right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 3m \, sen \, nm \, dm + \int_{-\pi}^{\pi} 6\pi \, sen \, nm \, dm\right]$$

Integrando por partes el lado izquierdo tenemos que:

$$u = m \quad dv = sen \, nm$$
$$du = dm \quad v = -\frac{1}{n} cosnm$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v \, du.$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{6\pi}{n}\cos nm - \frac{3m}{n}cosnm + 3\int \frac{1}{n}\cos nm \, dm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\left[-\frac{3m}{\pi n}\cos nm + \frac{3}{\pi n^2} sennm - \frac{6}{n}\cos nm\right]_{-\pi}^{\pi}$$

Evaluando con los limites de integración nos queda:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[-\frac{3\pi(-1)^n}{n} - \frac{6\pi(-1)^n}{n} - \frac{3\pi(-1)^n}{n} + \frac{6\pi(-1)^n}{n} = \frac{-6(-1)^n \pi}{n}\right]\right]$$

$$= \frac{6(-1)^{n+1}}{n}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es:

$$\boldsymbol{f(m) = 6\pi + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} sen \, nm}$$

$$f(h) = \begin{cases} 4 & -5 < h < 0 \\ 2 + 8h & 0 < h < 5 \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(h)dh = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4dh + \int_{0}^{5} (2 + 8h)dh\right]$$

$$a_0 = \frac{1}{5}\left[4h|_{-5}^0 + 2h|_0^5 + \frac{8h^2}{2}\Big|_0^5\right] = \frac{1}{5}\left[20 + 10 + \frac{200}{2}\right] = \frac{1}{5}\left(\frac{260}{2}\right) = 26$$

Ahora se calculara a a_n y b_n:

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^0 4\cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 2\cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 8h\cos\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = \cos\frac{n\pi}{5}h$$
$$du = dh \quad v = \frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v\,du.$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^0 4\cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 2\cos\frac{n\pi}{5}h\,dh + \frac{5h}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 - \int_0^5 \frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[\frac{20}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h\Big|_{-5}^0 + \frac{10}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \frac{40h}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5 + \frac{200}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_0^5\right]$$

$$a_n = \frac{1}{5}\left[\frac{200}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{5}x\Big|_0^5 = \frac{200(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{200}{n^2\pi^2}\right] = 40\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2}\right)$$

Y se hace lo mismo para b_n

$$b_n = \frac{1}{5}\left[\int_{-5}^0 4\sin\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 2\sin\frac{n\pi}{5}h\,dh + \int_0^5 8h\sin\frac{n\pi}{5}h\,dh\right]$$

Integrando por partes la integral de la derecha tenemos que:

$$u = h \quad dv = sen\frac{n\pi}{5}h$$

$$du = dh \quad v = -\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h$$

Y la forma para resolver una integral de este tipo es:

$$uv - \int v \, du.$$

Sustituyendo valores

$$\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0} 4sen\frac{n\pi}{5}h \, dh + \int_{0}^{5} 2sen\frac{n\pi}{5}h \, dh - \frac{40h}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_{0}^{5} + \int_{0}^{5}\frac{40}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h \, dh\right]$$

$$\frac{1}{5}\left[-\frac{20}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_{-5}^{0} - \frac{10}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_{0}^{5} - \frac{40h}{n\pi}cos\frac{n\pi}{5}h\Big|_{0}^{5} + \frac{200}{n^2\pi^2}sen\frac{n\pi}{5}h\Big|_{0}^{5}\right]$$

$$b_n = \left[\left[-\frac{20}{n\pi} + \frac{20(-1)^n}{n\pi}\right] + \left[\frac{10}{n\pi} - \frac{10(-1)^n}{n\pi}\right] + \left[\frac{-200(-1)^n}{n\pi}\right]\right] = \frac{38(-1)^{n+1} - 2}{n\pi}$$

Por lo tanto el resultado final de la serie de Fourier es

$$f(h) = 13 + \sum_{n=1}^{\infty} 40\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \, cos\frac{n\pi}{5}h\right] + \left[\frac{38(-1)^{n+1} - 2}{n\pi} sen\frac{n\pi}{5}h\right]$$