COURS D'HYDRAULIQUE
(Alger)

①

HYDRAULIQUE

Séance n° 1 - CHAPITRE I

A1 Généralités sur la mécanique des fluides.

- la science hydraulique
- raisonnement et expérimentation

$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ viscosité .....

hypothèses simplificatrices.

l'hydraulique est une science expérimentale

- éq. diff. difficiles à intégrer
- ou résultats complexes

lois expérimentales

mesures

débit d'une canalisation en f. du ϕ diamètre

recherche d'une expression algébrique simple

mais formules ~~non~~ homogènes et de portée limitée

ex $\frac{1}{4} DJ = \alpha \sqrt[4]{\frac{U^7}{D}}$

la formule de Flamant n'est valable que pour les tuyaux en fonte $0,10 < \phi < 2m$.

pour l'eau seulement

α dépend de la fonte, de la rugosité

fonte en service : $\alpha = 0,0023$

②

lois expérimentales

- semi - —— avec coeffts numériques (constants - doués de dimensions ...

Von Karman a dit que l'hydraulique était l'art de faire varier les constantes

Historique - Tendances modernes

aspect théorique
— expérimental

d'abord science expérimentale

Archimède

Bernoulli (début du 18e siècle)

découverte du calcul différentiel et intégral

principes de la mécanique (conservation de l'énergie).

l'hydraulique devient une science du raisonnement.

limites du calcul (19e siècle)

expérimentateurs BAZIN

(déversoirs : $Q = mlh\sqrt{2gh}$

? $m = 0,405 - 0,03 \frac{L-l}{L} + \frac{0,0027}{h} \left[1 + 0,55 \left(\frac{l}{L}\right)^2 \left(\frac{h}{p+h}\right)^2\right]$

déversoirs à contraction latérale.

<u>20e siècle</u> Synthèse, raisonnement et expérimentation

<u>analyse dimensionnelle</u>

Similitude (laboratoires)

(maquettes).

formule de COLEBROOK (1952)

(mais tuyaux en matière plastique

<u>Colloque UNESCO</u> – Paris 1971)

écoulements permanents (non uniformes

– apparition de l'outil : ordinateur).

(B) Définition des fluides

Def. milieu continu, homogène, sans forme propre, les particules peuvent se déplacer sous l'action d'une force très faible.

(mais vrai aussi pour l'argile, asphalte)

échelle moléculaire : le fluide a des molécules <u>libres</u> dont la trajectoire est limitée par les <u>parois</u> solides.

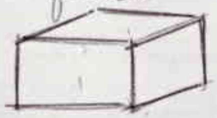
Parmi les fluides : les <u>liquides</u> occupent un volume déterminé.

liquide type : <u>eau</u>

(C) Actions de contact

On considère le liquide comme un milieu <u>continu</u>, pouvant être décomposé en éléments de volume $\iiint$ que l'on isole par la pensée : les <u>particules</u> de fluide.

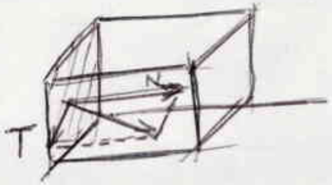
<u>exemple</u> :



Raisonnement

Système de force tel que les particules fluide conserve son état antérieur:

N aux actions exercées sur la particule par les particules voisines en contact avec elle.



sur chaque face
N
T

Efforts et déformations

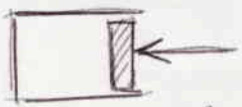
a) solides (élastiques: loi de HOOKE:

$$e = \frac{\Delta l}{l} = -\frac{\sigma}{E}$$

(Dr Merouani) . Merovani

b) fluides pas de forme propre

1er Cas modific. volume sans modification de forme



N déform. liée à l'effort.

2e Cas modif. forme sans modif. volume

la déformation n'est pas liée à l'effort.

particule fluide élémentaire:

en + des actions de contact: forces de masse fluides incompressibles, fluides réels fluides parfaits

pour les fluides réels $T = f(\text{vitesse})$
(si $V=0$; $T=0$)

si $T \equiv 0$ quelque soit la vitesse
$\Leftrightarrow$ fluide parfait

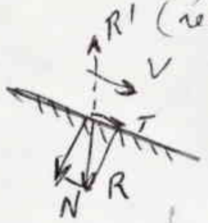
D

fluides incompressibles.

NOTION de PRESSION :

pression sur une paroi.

R' (réaction de la paroi sur le fluide).

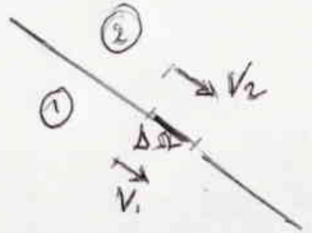


$$\boxed{\vec{R'} = -\vec{R}}$$

pression : $\dfrac{|\vec{N}|}{\underbrace{\Delta\Omega}_{\text{aire}}} = p$ quand $\Delta\Omega \to 0$

si $\boxed{V=0}$ $T=0$
l'action d'un liquide en équilibre sur une paroi est normale à celle-ci en tout point.

D Pression à l'intérieur d'un fluide :



$\Delta\Omega$: élément de la surface de séparation du fluide ① et de ②

$T_1 = -T_2$ fonction de $(V_2 - V_1)$

s'annule avec $(V_2 - V_1)$

$\vec{N_1} = -\vec{N_2} = \vec{N}$ et $p = \lim \dfrac{|\vec{N}|}{\Delta\Omega}$ si $\Delta\Omega \to 0$

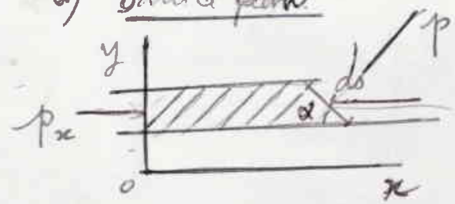
Isotropie du fluide parfait :

Dans un fluide parfait (en repos ou en mouvement)
ou dans un fluide réel au repos
la valeur absolue de l'effort est
indépendante de la direction de
l'élément de surface sur laquelle il agit.

Demonstration

Rem : fluide parfait (ou réel au repos) } → $T=0$

a) Dans le plan

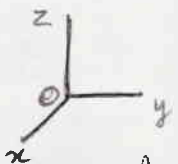


$p_x \cdot dy = (p \cdot ds)\sin\alpha = p\,(ds.\sin\alpha)$

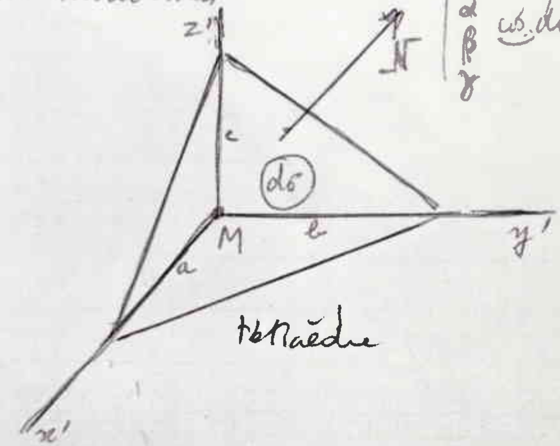
→ $\boxed{p = p_x}$ indépendant de α.

b) Dans l'espace (3 dimensions)

liquide en mouvement



trièdre de référence



α, β, γ cos. directeurs

tétraèdre

① forces de contact : ($\perp$ aux faces) :

sur MBC : $p_x \frac{bc}{2}$

MCA : $p_y \frac{cd}{2}$

MAB : $p_z \frac{bd}{2}$

sur ABC : $p \cdot d\sigma$

② forces de masse :

par unité de masse : $\vec{F}(X, Y, Z)$

masse de l'élément $\boxed{dm = \rho \frac{abc}{6}}$

$\rightarrow \vec{F}.dm = \begin{cases} \rho X \left(\frac{abc}{6}\right) \\ ----- \\ ---- \end{cases}$

EQUILIBRE : en projection sur les 3 axes.

sur Ox : $p_x . \frac{bc}{2} - (p.d\sigma.)\alpha + \cancel{X . \rho \frac{abc}{6}} = 0$

cf p. 3e ordre.
négligeable.

$\rightarrow$ $p = p_x$ etc... $) \rightarrow p_x = p_y = p_z = p$. indépendant de α

$p = f(M) = f(x, y, z)$
(fonction scalaire)

E Unités utilisées en hydraulique :

Généralités

cohérence d'un système d'unités

grandeurs physiques

ex : longueur (conduite ...

vitesse

pression

accélérat ....

espèces principales : unités fondamentales

L, M, T

unités dérivées :

(un ensemble d'unités d'espèces ≠
(constitue un système d'unités

S.I. (système international

décret 61 501 du 3 Mai 1961

S.I.

longueur :	m.
masse	kg
temps	seconde
électricité	ampère
température	kelvin
	le mole
	le candela

le radian,
le stéradian

Tableau unités utilisées en hydraulique ;

voir Polycopié, page 17

équivalences entre ≠ systèmes

$\boxed{\text{Un résultat sans unité est un résultat sans valeur}}$

Masse volumique de l'eau (SI) :

$$\rho = \frac{1000 \text{ kg (masse)}}{1 \, m^3} = 1000 \text{ kg}/m^3$$

Poids volumique :

$$\varpi = \rho g = \underbrace{1000 \times 9,81}_{(kg/m^3) \times (m/s^2)}^{\text{force.}} = 9810 \text{ Newtons}/m^3$$

$\sim 10000 \text{ N}/m^3$

Chapitre 2

p28 à 52

HYDRAULIQUE

Cours n°2

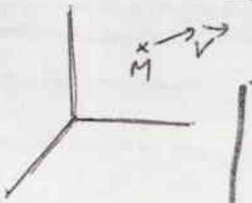
$$\boxed{\text{LES BASES DE LA MECANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES.}}$$

La Charge du courant liquide
les pertes de charge.

Principes généraux:

Variables d'EULER: fluide en mouvement.

en un point M de l'espace $M(x,y,z)$
on considère le vecteur vitesse



$$\boxed{\vec{V}\begin{cases} U = f_1(x,y,z,t) \\ V = f_2(\quad) \\ W = f_3(\quad) \end{cases}}$$

U, V, W (proj de V sont les variables d'EULER.

le mouvt est connu si en outre on connait la pression $p(x,y,z,t)$
et la masse volumique $\boxed{\rho = \rho(x,y,z,t)}$

equations

5 équs dependant de 4 variables x, y, z, t
pour determiner les fonctions U, V, W, p, ρ
on dispose des relations $\boxed{F = m\gamma}$ (eq. fondam. de la mécanique

l'eq. d'état $\boxed{\rho = f(p)}$ liquides $\rho = cte$

eq. de continuité (conservation de la masse d'une particule).

CHAMP DES VECTEURS VITESSE

autre aspect: coordonnée d'une particule:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= f_2(----, t) \\ z &= f_3(----, t) \end{aligned}}$$

→ variables de LAGRANGE

TRAJECTOIRES

Trajectoire: lieu des points occupés successivement par une même particule

Ligne de courant: à t donné

lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse

l'eq: → $\boxed{\dfrac{dx}{U} = \dfrac{dy}{V} = \dfrac{dz}{W}}$

U, V, W (variables d'EULER)

lignes d'émission

à t donné — lieu des particules issues de M à des instants différents

representation photographique:

trajectoires: (qques paillettes. long temps de pose

lignes de courant: (grand nombre de paillettes, court temps de pose

chacune represente un vecteur vitesse

lignes d'émission: en quelques points fixes on place quelques particules de permanganate qu'on photographie peu après -

Mouvement permanent

le champ de vitesse, la pression, la masse volumique — ne dependent pas du temps

$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(\quad) \\ w = \_\_\_ \\ p = p(x,y,z) \\ \rho = \rho(x,y,z) \end{cases}$$

3 variables seulement

$\rho = cte$ (liquide)

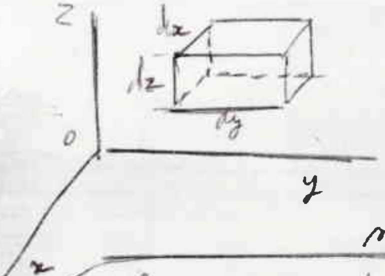
Dans un mouvement permanent les lignes de courant sont des courbes fixes (indépendantes du temps)
Elles sont confondues avec les trajectoires et les lignes d'émission

On ne parle plus que de lignes de courant -

Tube de courant : ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur une courbe fermée

EQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE PARFAIT :

$$\boxed{\vec{f} = m.\vec{\gamma}}$$



$$dm = \rho . dx . dy . dz$$

sur l'unité de masse

forces d'inertie $m\vec\gamma$	forces de contact (voir hydrostatique)	forces massiques
$\rho\, dx\, dy\, dz \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2} =$	$-\dfrac{\partial p}{\partial x} . dx\, dy\, dz \; +$	$X \rho\, dx\, dy\, dz$
ρ —— $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} =$	$-\dfrac{\partial p}{\partial y}$ —— $+$	$Y \rho$ ——
ρ —— $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} =$	$-\dfrac{\partial p}{\partial z}$ —— $+$	$Z \rho$ ——

(en projetant, sur Ox, Oy, Oz)

→ après division par $\rho\, dx dy dz$

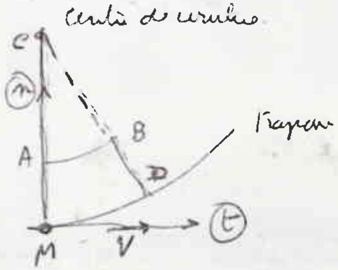
$$\left\{\begin{aligned} &\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}} \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right.$$

ou encore

$$\boxed{\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}\, p}}$$

par unité de masse

Equations intrinsèques : on projette sur les axes liés à la trajectoire



(CM = R)

composantes de $\vec{F}$: $\left\{\begin{matrix} T \\ N \end{matrix}\right.$

composantes de $\vec{V}$ $\left\{\begin{matrix} V_s \\ V_n = 0 \end{matrix}\right.$

composante de $\vec{\gamma}$:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma_s &= \frac{dV_s}{dt} = V_s \cdot \frac{\partial V_s}{\partial s} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial V_s}{\partial t}}}_{=0} \\ \gamma_n &= \frac{dV_n}{dt} = \frac{V_s^2}{r} + \cancel{\frac{\partial V_n}{\partial t}} \end{aligned}\right.$$

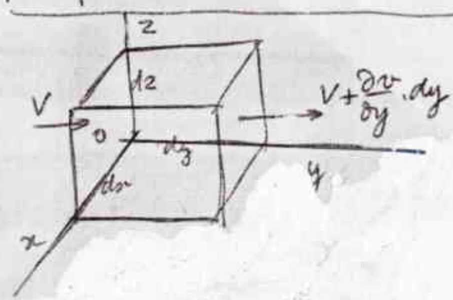
si mouvement permanent

→

$$\boxed{\begin{aligned} V . \frac{\partial V}{\partial s} &= T - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{V^2}{R} &= N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \end{aligned}}$$

équations intrinsèques

Equation de Continuité



portion d'espace fixe

masse qui entre — masse qui sort →

1re face $\rho V\,(dx\,dz)\,dt$ $\quad -\left(\rho V + \frac{\partial \rho V}{\partial y}\,dy\right)(dx\,dz)\,dt = -\frac{\partial \rho V}{\partial y}\,dx\,dy\,dz\,dt$

2e — → $-\frac{\partial \rho W}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt$

3e — → $-\frac{\partial \rho U}{\partial z}\,dx\,dy\,dz\,dt$

→ au total: gain de masse. $\boxed{-\left(\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\,dt}$

variation de masse volumique $\boxed{(dx\,dy\,dz)\,\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt}$

(= 0 si fluide incompressible)

égalité des 2 expressions: →

$$\boxed{\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

fluides incompressibles: $\boxed{\rho = cte}$ →

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{div}\,\vec V = 0}$$

EQUATION DE BERNOULLI

Cas du
- fluide parfait
- mouvement permanent.
- forces dérivant d'un potentiel U

$\vec F = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U$

ρ n'est fonction que de p (fluides incompressibles $\rho = cte$)

On a vu que $\boxed{V\frac{\partial V}{\partial s} = T - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}}$

s'intègre →

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} = Cte}$$ éq. de Barré de St Venant

seulement isotherme ρ n'est f. que de p.

et pour un fluide incompressible:

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = cte}$$ pour l'unité de masse.

ou encore, en 2 points M_1 et M_2 d'une ligne de courant

D. Bernoulli (1738) $$\boxed{\frac{V_1^2}{2} + g z_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + g z_2 + \frac{p_2}{\rho}}$$ unité de masse

Interprétation : Conservation de l'énergie

pour l'unité de volume

$$\boxed{\rho\frac{V^2}{2} + p + \rho g z = cte}$$

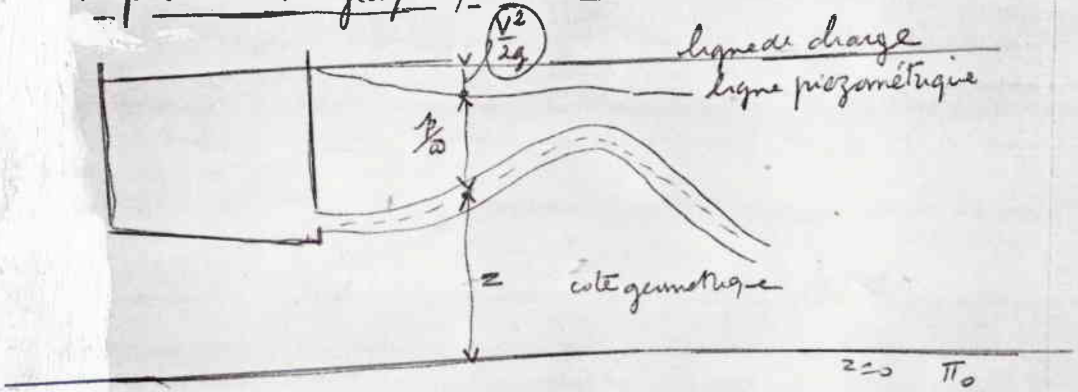
énergie cinétique — énergie de pression — énergie potentielle (dans le champ de pesanteur).

Pour l'unité de poids : particule.

$$\boxed{\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = cte}$$ (longueurs).

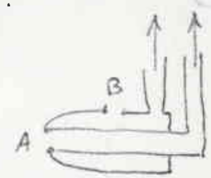
1 progr. quaternaire

Représentation graphique : de la relation de Bernoulli.



Application : exemple tube de PITOT.

$$p = p_0 + \underbrace{\rho\frac{V_0^2}{2}}_{\text{pression dynamique}}$$



à passer

Remarque : répartition transversale des vitesses :

$$\frac{V^2}{R} = \underbrace{N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}}_{\text{intégrable}}$$ 2e éq. intrinsèque :

en général non intégrable

Cas particuliers :

- Fonction de courant : écartement des lignes de courant (pas au programme)
- Vecteur tourbillon : pas au programme.

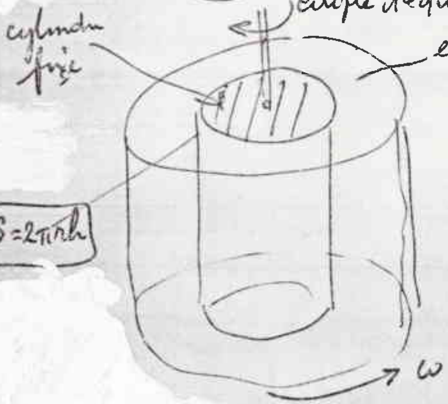
Cas des fluides visqueux

fluides réels :

Viscosité :

action de contact : T non nul.

Expérience de Couette



On entraîne le cylindre extérieur à la vitesse ω

$$\mu = \frac{Ce}{rSV} = \frac{Ce}{2\pi r^3 h\omega}$$

voir ci après.

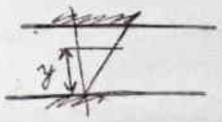
Coefficient de viscosité

$v = \omega r$

plaque mobile → v force $\rightarrow F$

e → force frottement.

plan fixe



$$\boxed{F = \mu . S . V \times \frac{1}{e}} = \frac{\mu S V}{e}$$

μ = coefficient de viscosité dynamique

effort par unité de surface : $\boxed{\tau = \mu \cdot \frac{dU}{dy}}$ utile

coefficient de viscosité cinématique : $\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}}$

UNITES

Viscosité dynamique $\mu = \frac{F e}{S . V} = \frac{MLT^{-2} \times L}{L^2 \times LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1} = \frac{F \times T}{L^2}$

Unité S.I. Newton $\times$ S / par m² (ou POISEUILLE)

Unité CGS : dyne $\times$ sec / cm² (ou POISE)

1 Newton = 10^5 dyne
1 m² = 10^4 cm²

1 Poiseuille = 10 poises

Viscosité cinématique : $\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1}$

SI : m²/seconde (ou m St = myria stokes)

CGS : cm²/seconde (STOKE)

1 stoke = 10^{-4} m²/s.

Mesure (voir TD) (appareil de COUETTE)

Valeurs numériques:

CGS

Eau :	0°	15°	20°	60°	100°	200°
μ	1,79	1,15	1	0,60	0,30	0,14 centipoises
ν =	1,79	— mêmes valeurs —				centistokes.

en SI : $\mu_{eau} = 1.10^{-2}$ Poise = 10^{-3} Poiseuille

ν_{eau} = 1 centistoke = 10^{-6} SI

autres fluides:

	Air	Essence	Mercure	Huiles	Glycérine
μ centipoises	0,018	0,6	1,6	10 à 1200	870

ν | air à 20°C = $\frac{0{,}00018 \text{ poises}}{0{,}0012 \text{ g/cm}^3}$ = 0,15 stoke

eau à 20°C : 0,01 stoke

Variation de μ et ν avec la pression
la température

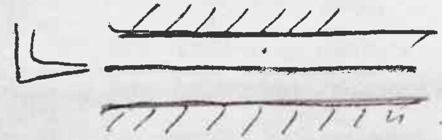
(voir TD).

Théorie de la viscosité ....

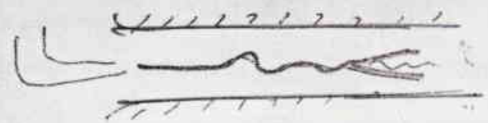
Gaz parfaits: Théorie de Maxwell

Liquides purs: Théorie d'Andrade

Ecoulements turbulents :



régime laminaire.



—— turbulent.

écoulements laminaires : exp. de Poiseuille 1844

—— exp. de Hagen

L'écoulement laminaire disparaît pour une certaine valeur de R_e nombre de Reynolds $\boxed{R_e = \frac{VD}{\nu}}$

($R_e \sim 2000$ pour les tuyaux:

$R_e < 2000$ écoulement laminaire

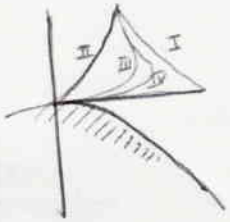
$R_e >$ — —— turbulent

Couche limite:

I fluide parfait

II — visqueux

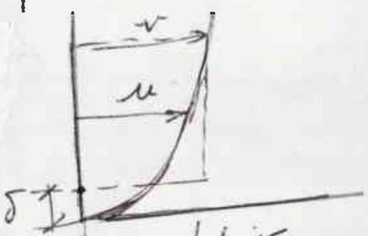
III, IV } avec Re ↗



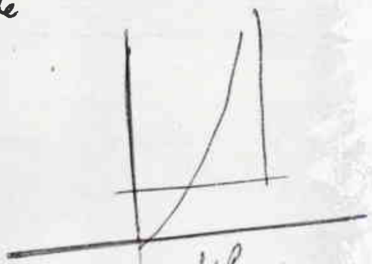
couche de transition ou couche limite (Prandtl . 19..)

qques millimètres....

épaisseur de la couche limite



1ère définition



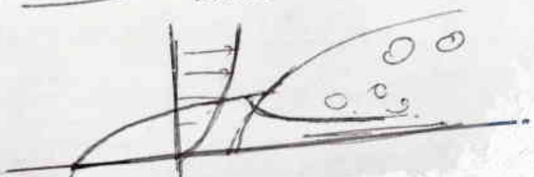
2e définition

égalité des débits

$u = v$ (à 1% près)

couche limite laminaire

— turbulente

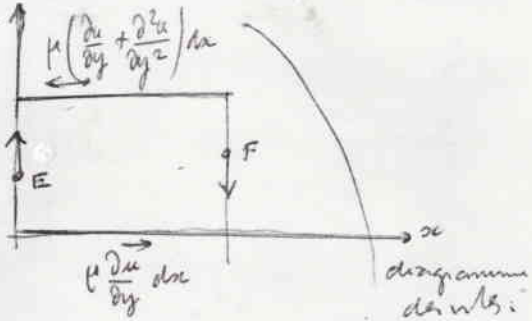


Décollement

équations de NAVIER.

$$\boxed{\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}\; p} = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu\,\overrightarrow{\Delta V}}$$

démonstration facultative.



$m = \rho\, dx\, dy \times 1$

on a trouvé que $\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ (unité de masse)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

------ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

Cas général:

Equations de NAVIER

Laplacien

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \nu.\Delta u$$

— — — — — —

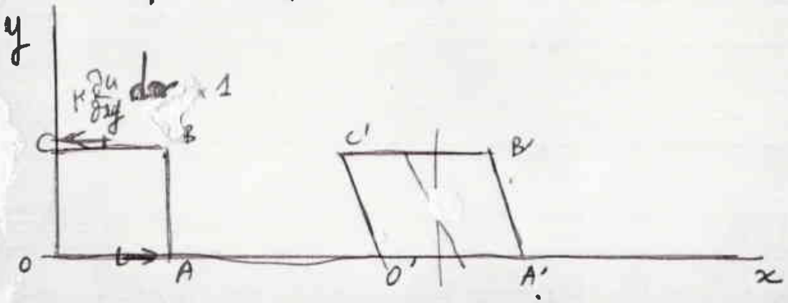
— — — — — —

$$\frac{1}{\rho}\,\overrightarrow{\text{grad}\; p} = \vec{F} - \vec{\gamma} + \nu\,\overrightarrow{\Delta V}$$

Pertes de charge

Dissipation de l'énergie dans un fluide visqueux
forces de viscosité retardatrices, absorbent du travail → chaleur.

Énergie dissipée :



Travail $\left(\mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right) \times \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \cdot dt$

force — distance

→ puissance dissipée par unité de volume : $\boxed{\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$

Cas général :

$$\Phi = \mu\left[2\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \sum\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] > 0$$

fonction de dissipation

Notion de perte de charge pour un filet liquide

l'eau

échange d'énergie avec les filets voisins
+ perte d'énergie propre
= perte de charge

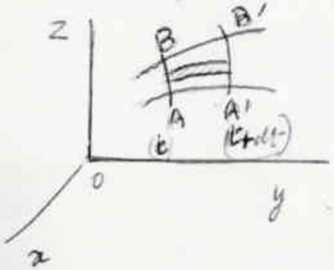
déplacement de M_1 à M_2 :

$$\boxed{\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varpi} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\varpi} + z_2 + \int_1^2 d\zeta}$$

en M_1 — en M_2 — perte de charge

extension de l'éq. de Bernoulli.

→ Energie d'une tranche liquide (section ω)



$dm = \rho . V . dt . d\omega$

energie E de la tranche liquide de masse $dm = \rho . V . dt . d\omega$

$$E = \int_\omega (e_z + e_p + e_c) \cdot dm = \int_\omega e_z . dm + \int_\omega e_p dm + \int_\omega e_c dm$$

$$\boxed{E = E_z + E_p + E_c}$$

énergie de position

$$E_z = \int_\omega g z dm = m g z_G$$

z_G cote au c.d.g. ou G (centre de gravité)

l'énergie de pression

$$E_p = \int_\omega g \frac{p}{\varpi} dm = g . \frac{p_G}{\varpi} . m$$

l'énergie cinétique

$$E_c = \int_\omega \frac{V^2}{2g} . g \, dm = \int_\omega \frac{V_2}{2} . \rho . V . d\omega . dt = \frac{1}{2} \rho dt \int_\omega V^3 d\omega$$

$$V = V_0 + \varepsilon$$

$$E_c = \frac{1}{2} \rho dt \; \alpha U_0^3 d\omega = \frac{V_0^2}{2} \rho \alpha V dt = \alpha m \frac{U_0^2}{2}$$

α vient de l'inégale répartition des vitesses

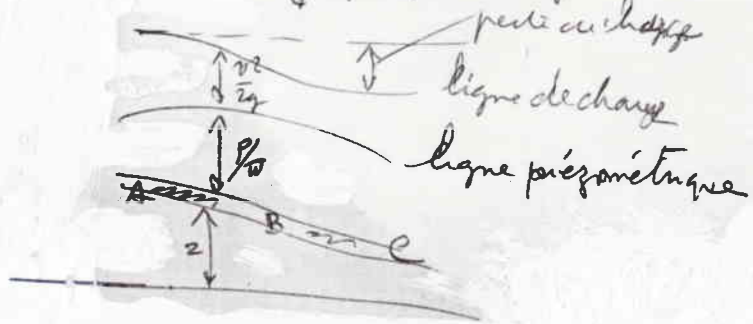
Cas du théorème de Bernoulli pour un courant liquide :

$$z_1 + \frac{p_1}{\varpi} + \alpha \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\varpi} + \alpha \frac{U_2^2}{2g} + (\Delta \xi)_1^2$$

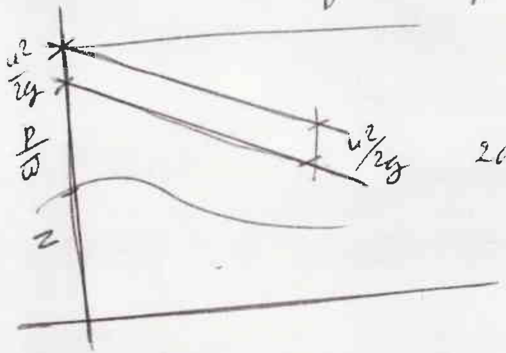
représentation graphique :

Cas des fluides parfaits

introduction graphique de la perte de charge



Cas d'un courant uniforme (et permanent)



2 droites //

Mouvements à potentiel (à revoir).

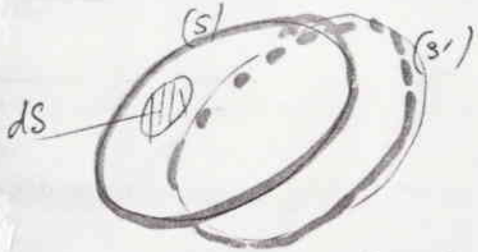
THEOREME D'EULER

3ème leçon

On a intégré les éq. dynamiques pour un fluide parfait avec un champ de forces dépendant d'un potentiel. ($\to$ Bernoulli)

Etude de la résultante des forces appliquées à un volume de fluide :

flux entrant :



$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma} = \left(d \, \frac{\overrightarrow{mV}}{dt} \right)$$

impulsion

vrai pour le point mais aussi pour une masse non ponctuelle.

Cas du mouvement permanent : $\to$

$\frac{d}{dt}\left(\sum m\vec{V}\right)$ est facile à calculer.

$$\frac{d}{dt}\sum m\vec{V} = \frac{\sum_2 m\vec{V} - \sum_1 m\vec{V}}{dt}$$ avec $m = \rho . V_n . dt$

avec $\sum_1 m\vec{V} = \iint \left| \rho V_n . \vec{V} \right| ds . dt$ sur la surface d'entrée

$\sum_2 m\vec{V} = \iint \left| \rho V_n . \vec{V} \right| ds\,dt$ sur la surface de sortie.

au total

$$\boxed{\sum \text{force ext} = \iint_S \rho \, V_n . \vec{V} . ds}$$

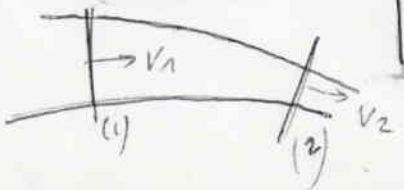
En écoulement permanent le système des débits de quantités de mouvement sortant d'une surface S est égal au système des forces extérieures appliqué au fluide limité par la surface S.

(théo. d'OSTROGRADSKI).

exemple : théorème de Bélanger

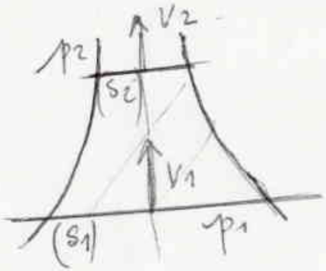
plus loin

Exemple 1) Écoulement permanent dans un tuyau



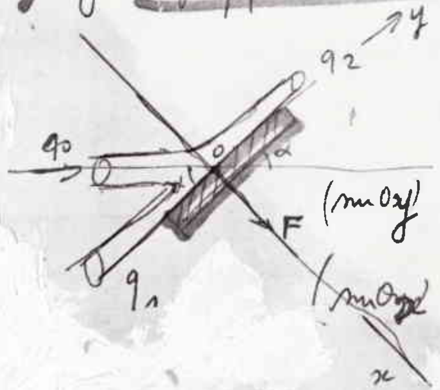
$$\boxed{\sum \vec{F} = \rho q \vec{V_2} - \rho q \vec{V_1}}$$

Tube de courant vertical :



$$\rho q \vec{V_2} - \rho q \vec{V_1} = -\rho g W + p_1 S_1 + p_2 S_2$$

2) Jet frappant une plaque



$q_0 = q_1 + q_2$ eq. continuité

Théorème d'EULER :

(sur Oy) $0 = -\rho q_0 \cos\alpha \, V + \rho q_2 V - \rho q_1 V$

(sur Ox) $F = \rho q_0 \sin\alpha \, V$

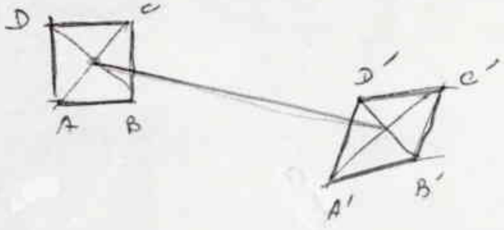
$\rightarrow q_1 = \dfrac{1-\cos\alpha}{2} \cdot q_0$ et $q_2 = \dfrac{1+\cos\alpha}{2} \cdot q_0$

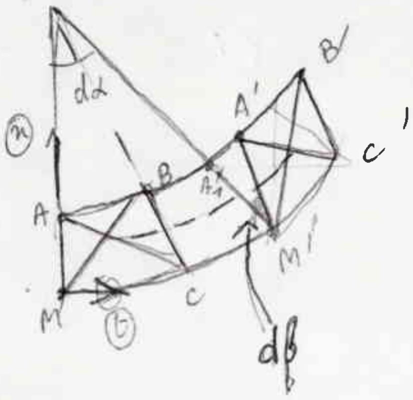
Rappel : Ecoulements plans ...... Polycopié p 62

$$V = \begin{cases} u(x,y) \\ v(x,y) \end{cases}$$

Vecteur tourbillon

translation
rotation
déformation :





$$\vec{T} = \frac{d\alpha - \frac{d\beta}{2}}{dt}$$

$$d\alpha = \frac{V}{R}\,dt$$

$$d\beta = \left(\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R}\right) dt$$

en effet $d\beta = \frac{A'_1 A'}{dn} = \left(V + \frac{\partial V}{\partial n} dn\right) dt - V\left(1 - \frac{dn}{R}\right) dt$

donc $\boxed{\left|\vec{T}\right| = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}\right)}$

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}\right) \\ \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) \\ \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{V}}$$

Nullité du vecteur Tourbillon :

mouvement plan : $\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0$

$\longrightarrow \quad V = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ et $V = \frac{\partial \phi}{\partial y}$

Mouvements à potentiel

applic. mécanique des sols.

CHAPITRE 3

53 bis

LES ECOULEMENTS SOUS PRESSION

Etude générale théorique.

A Généralités

B / Ecoulements laminaires

1°/ mouvement plan

2°/ Écoulement circulaire. Loi de POISEUILLE

C Ecoulements Turbulents

1°/ Généralités Diagramme des vitesses

2°/ Rugosité

3°/ Principe de l'étude

4°/ Pertes de charge linéaires

a) Expression générale

b) Recherches modernes

c) Formules classiques anciennes.

d) formule pratique. $\gamma L Q^2$

5°/ Pertes de charge singulières (locales)

a) Définitions

b) Elargissement. Th. de Bélanger

c) Rétrécissement

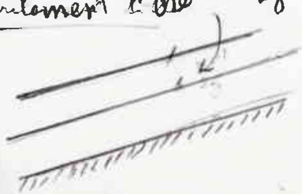
d) Généralisation

e) Calcul pratique

f) longueur équivalente

Les écoulements

l'écoulement libre $\frac{\alpha V^2}{2g}$



la ligne piézométrique est à la surface du liquide

l'écoulement sous pression.

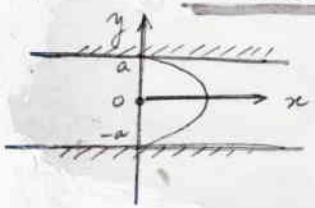
- ligne de la ligne de charge.
- — — ligne piézométrique
- section de l'écoulement.

écoulements souterrains :

Écoulements sous pression : $R_e = \frac{UD}{\nu}$

A $\boxed{\text{Écoulements laminaires :}}$

1°/ écoulement plan rectiligne uniforme



$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} - \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

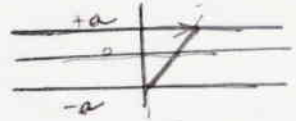
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \text{(eq. de continuité)}\ (3)$$

Si la vitesse ne dépend pas de x

$$\rightarrow \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\,\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = A = c^{te}$$

$$F(x) = G(y)$$

1er cas : $\boxed{A = 0} \rightarrow p = c^{te}$ et $u = my + x$

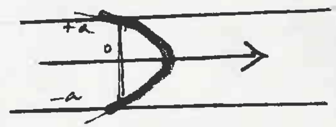


$$u = u_0 \cdot \frac{y+a}{2}$$

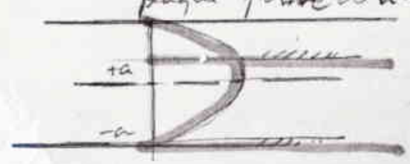
2e cas $A \neq 0$ p est une fonction linéaire décroissant

et $\boxed{u = u_0\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}$

2 plaques immobiles

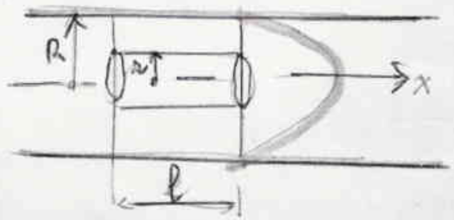


1 plaque mobile



2°/ Ecoulement à section circulaire : loi de POISEUILLE

élément de longueur l :



force motrice : $\pi r^2 \cdot \Delta p$

force de viscosité : $(2\pi r l)\mu \cdot \frac{dV}{dr}$ →

$$\pi r^2 \Delta p + (2\pi r l)\mu \frac{dV}{dr} = 0$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{r}{2\mu}\frac{\Delta p}{l}$$

$$\rightarrow \boxed{V = \frac{1}{4\mu}\frac{\Delta p}{l}(R^2 - r^2)}$$

Débit :

$$dQ = ds \times V = (2\pi r \cdot dr) \cdot \frac{1}{4\mu}\left(\frac{\Delta p}{l}\right)(R^2 - r^2)$$

$$\rightarrow Q = \int_0^R \frac{2\pi}{4\mu}\left(\frac{\Delta p}{l}\right)(R^2 - r^2) r\,dr =$$

loi de POISEUILLE

$$= \frac{R^4}{4}\cdot\frac{\pi}{2\mu}\cdot\frac{\Delta p}{l} = \boxed{\frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{\Delta p}{l}\right)R^4}$$

Q

fonction réduite de l'écoulement

6 grandeurs physiques

$R \quad u \quad \Delta p \quad l \quad \nu \quad \rho$

relation $\boxed{U_m = \frac{Q}{S} = \frac{1}{8\mu}\frac{\Delta p}{l}\cdot R^2}$ $\mu = \nu\rho$

ou $U = \frac{1}{8\nu\rho}\frac{\Delta p}{l}R^2$

3 variables réduites :

1. $R_e = \frac{UD}{\nu}$
2. $\left(\frac{\Delta p}{\rho} / \frac{U^2}{2}\right)$
3. $\frac{R}{l}$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{1}{16}\frac{\Delta p}{\rho}\left(\frac{UR}{\nu}\right)\left(\frac{R}{l}\right)$$

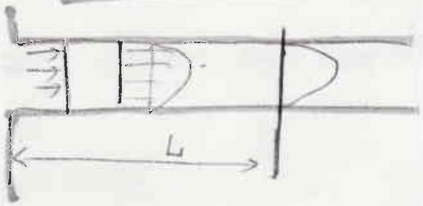
fonction réduite de l'écoulement (laminaire)

$$\boxed{\frac{\Delta p}{\rho\frac{U^2}{2}} = \frac{64}{R_e}\cdot\frac{l}{D}}$$

pour un tube incliné : on pose $p^* = p + \varpi z$

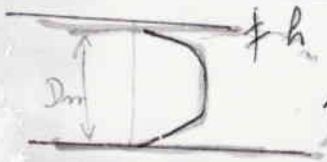
$$\rightarrow \quad \frac{\Delta p^*}{\rho} = \frac{64}{R_e} \frac{U^2}{2} \cdot \frac{l}{D}$$

Longueur d'établissement du régime laminaire :



$$\boxed{\frac{L}{D} = 0{,}028\, R_e}$$

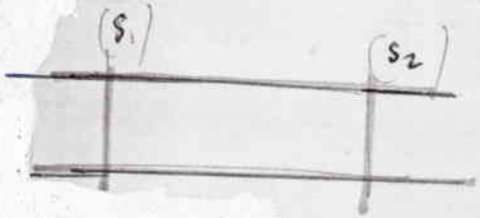
Ecoulements turbulents $R_e > 2000$



1) rugosité d'aspérités

rugosité relative $\varepsilon = \dfrac{h_m}{D_m}$

2) rugosité d'ondulation



$$\boxed{E_1 = \frac{p}{\varpi} + z + \alpha \frac{U^2}{2g}}$$ unité de poids

perte de charge $(E_2 - E_1)$

7 variables physiques indépendantes: | liquide ρ, ν, U, Δp
canalisation D, h, L
(h = rugosité hauteur des aspérités)

reliées par 1 relation

On peut former 4 variables réduites indépendantes

$$\varepsilon = \frac{h}{D}, \quad \frac{L}{D}, \quad R_e = \frac{UD}{\nu}, \text{ et } \left(\frac{\Delta p}{\rho} \Big/ \frac{U^2}{2}\right)$$

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{U^2}{2}} = f\left(\varepsilon, R_e, \frac{L}{D}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta p = \rho \frac{U^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot F(\varepsilon, R_e)}$$

(si l'écoulement n'est pas horizontal

$$\boxed{\Delta\left(\frac{p}{\rho} + gz\right) = \frac{U^2}{2} \cdot \frac{L}{D} \cdot F(\varepsilon, R_e)}$$

$$\Delta\left(\frac{p}{\varpi} + z\right) = \Delta H = \frac{U^2}{2g} \frac{L}{D} F(\varepsilon, R_e)$$

(dans le cas de l'écoulement laminaire $F = \lambda = \dfrac{64}{R_e}$

Cas général: écoulement turbulent

Von Karman et Prandtl a trouvé pour les tuyaux lisses:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + 2 \log_{10} R_e \sqrt{\lambda}$$

Tuyaux rugueux:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 + 2 \log_{10} \frac{D}{2h}$$

h = rugosité

Blasius $2.10^3 < R_e < 8.10^4 \to \lambda = 0,316\, R_e^{-1/4}$

et $R_e > 10^5 \to \lambda = 0,0032 + 0,221 . R_e^{-0,237}$

Formule de COLEBROOK.

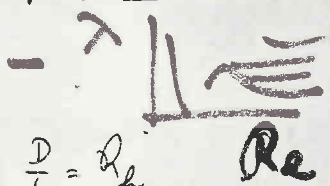
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{2,51}{R_e\sqrt{\lambda}}$$ tuyau lisse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log_{10} \frac{k}{3,71.D}$$

→ selon COLEBROOK:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log\left(\frac{2,51}{R_e\sqrt{\lambda}} + \frac{k}{3,71.D}\right)}$$

Diagramme de MOODY (poly - p. 15)

Voir Mr Journoud Schéma - 

Formules classiques anciennes

$$\boxed{\frac{1}{4} D.J = \phi(u)}$$

$\frac{D}{4} = R_h$

$J = \frac{\Delta H}{L}$

$$\Delta p^* = \rho \frac{U^2}{2} \frac{L}{D} . \lambda \qquad \Delta H = \frac{p}{\varpi} \qquad \frac{\Delta H}{L} = \frac{U^2}{2g} . \lambda$$

$$\to D.J = D \frac{\Delta H}{L} = \lambda \frac{U^2}{2g} \quad \to \phi(u) = \frac{\lambda U^2}{8g}$$

Journoud

4ème leçon

Pertes de charge

formules du type $U = C\sqrt{RI}$

ou $\frac{D}{4} J = b U^2$

ou $$\boxed{J = \frac{\lambda U^2}{2gD}}$$ $\Delta H = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g}$.

Pour les conduites circulaires

DARCY: $\frac{1}{4} DJ = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^2$ 1856

M. Lévy:

Flamant: (1892) $J = K . U^{7/4} D^{-5/4}$

Lazard 1935

Koch et Vibert 1947

etc...

Formule de Dupuit: $\varphi(u) = k U^2$

$k = 0{,}0001$ tuyaux lisses

$k = 0{,}0006$ —— rugueux

Formule de DARCY: $\phi(u) = \left(\alpha + \frac{\beta}{D}\right) U^2$

$\alpha = 0{,}000507$

$\beta = 0{,}0000\,1294$

Formule de FLAMANT $\phi(u) = \alpha \sqrt[3]{\frac{U^7}{D}}$ à vérif ?

$\alpha = 0{,}00023$ (fonte)

Formule de LEVY: $\phi(u) = \frac{U^2}{2\alpha^2\left(1 + 3\sqrt{\frac{D}{2}}\right)}$

=

Formule pratique:

$$\boxed{\Delta H = \gamma L Q^2}$$

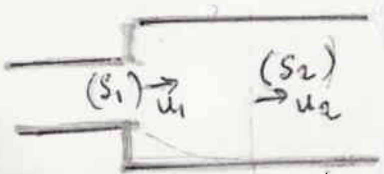
$\gamma = \frac{\lambda}{2g} \cdot \frac{16}{\pi^2} \times \frac{1}{D^5}$ en effet

$J = \frac{\Delta H}{L} = \left(\frac{\lambda}{2g} \cdot \frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{1}{D^5}\right) Q^2$ car $U = \frac{Q}{S}$

$U^2 = \frac{Q^2}{S^2} = \frac{Q^2}{\pi^2 D^4 / 16}$

Pertes de charge singulières (ou locales)

Théorème de Bélanger



On applique le théorème d'EULER.

$$\frac{d}{dt}\sum mV = \frac{1}{dt}\left[\rho Q\,dt\,(U_2-U_1)\right] =$$

$$= \rho\, Q\,(U_2-U_1) = \rho\, S_2 U_2 (U_2-U_1)$$

= forces extérieures. $S_2(p_1-p_2) \longrightarrow$

$$\rho\, S_2 U_2 (U_2-U_1) = S_2(p_1-p_2)$$

$$\rightarrow -U_2U_1 + U_2^2 = \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho}.$$

$$\rightarrow \frac{p_1}{\rho} - \frac{p_2}{\rho} = \left(\frac{U_2^2}{2} - \frac{2U_1U_2}{2} + \frac{U_1^2}{2}\right) + \frac{U_2^2}{2} - \frac{U_1^2}{2}$$

ou $\frac{p_1}{\rho g} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta K$

perte de charge.

avec $\Delta K = \frac{(U_1-U_2)^2}{2g} = \frac{(\Delta U)^2}{2g}$

Théorème de Bélanger

La perte de charge dans un élargissement est égale à la "hauteur capable" de la vitesse perdue.

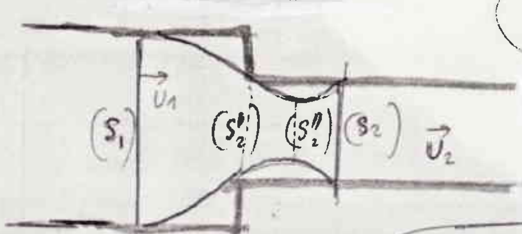
$$\Delta K = -\frac{(U_1-U_2)^2}{2g} = \frac{1}{2g}\,U_1^2\left(1-\frac{U_2}{U_1}\right)^2 =$$

(fluides parfaits) $\boxed{\Delta K = \left(1-\frac{S_1}{S_2}\right)\frac{U_1^2}{2g} = K\,\frac{U^2}{2g}}$

Terme correctif de BORDA (fluides réels).

$$\boxed{\Delta K = \left[\left(1-\frac{S_1}{S_2}\right)^2 + \frac{1}{9}\right]\frac{U^2}{2g}}$$

Rétrécissement :

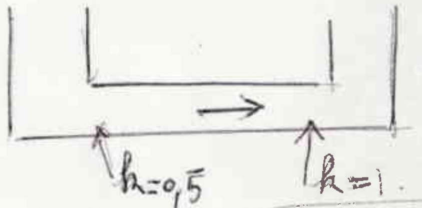


$S_2'' = 0{,}62\,S_2$ expérience

$$\rightarrow \Delta K = \frac{1}{2g}\cdot\left(\frac{U_2}{0{,}62}\right)\left[\left(1-0{,}62\right)^2 + \frac{1}{9}\right]$$

Borda

$$\rightarrow \boxed{\Delta K = 0{,}5\;\frac{U^2}{2g}}$$



Generalisation : $\Delta K = \frac{k u^2}{2g}$

Longueur équivalente : $\Delta k_i = k_i \frac{U^2}{2g}$

$$\Delta H' = \gamma L' Q^2 = \gamma L' \underbrace{S^2}_{=\frac{\pi^2 D^4}{16}} U^2 = k_i \frac{U^2}{2g}$$

$$\boxed{L' = \frac{8 k_i}{g \gamma \pi^2 D^4}}$$

Perte de charge dans les tuyaux coniques

longueur L $\qquad \phi = D$ et d

si $L \geq 7(D-d)$ $\quad <$

$L \geq 4(D-d)$ $\quad >$

} méthode habituelle

— $J = \dfrac{\lambda U^2}{2 g \delta}$

avec $\delta = D \sqrt[5]{\dfrac{4n^4(1-n)}{1-n^4}}$

et $n = \dfrac{d}{D}$

U = vitesse moyenne

Pertes de charge dans les coudes

$$\Delta H = \zeta \cdot \frac{v^2}{2g} \cdot \frac{2\alpha}{57} \quad \text{(WEISBACH)}$$

v = vitesse moyenne

α = angle au centre (degrés)

$$\zeta = 0,13 + 0,16 \left(\frac{d}{r}\right)^{3,5}$$

r = rayon de courbure

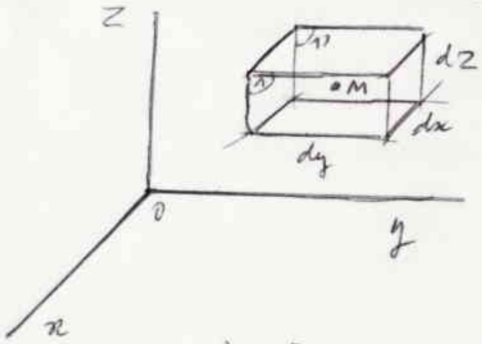
d = ϕ intérieur

$\frac{d}{r}$	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
ζ	0,14	0,16	0,20	0,30	0,44	0,66	1	1,4	2

Chapitre 1ère

RAPPELS D'HYDROSTATIQUE

Eq. fondamentale de l'hydrostatique



particule liquide.

liquide
masse volumique ρ
en M règne $p(x,y,z)$

particule au repos

Actions de contact:

faces (1) et (1') $(\perp Ox)$:

sur (1) $\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$

sur (1') $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy \cdot dz$

--- etc. ---

(2)
(2')

(3)
(3')

forces massiques:

$$\vec{F}.dm \quad \begin{cases} X.dm \\ Y.dm \\ Z.dm \end{cases}$$

avec $dm = \rho\,(dx\, dy\, dz)$.

→ les 3 eq. d'équilibre: ..

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dy\, dz + \rho X\, dx dy dz = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X & (1) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y & (2) \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z & (3) \end{cases}$$

ou sous forme vectorielle

⟶

Pour une quantité de fluide = unité de volume : $\boxed{\overrightarrow{grad}\, p = \rho . \vec{F}}$

unité de masse : $\frac{1}{\rho}\overrightarrow{grad}\, p = \vec{F}$

— de poids : $\frac{1}{\rho g}\overrightarrow{grad}\, p = \frac{\vec{F}}{g}$

Additionnons (1)+(2)+(3) → après × par dx, dy, dz.

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz}_{\text{différentielle totale de } p} = \rho\,(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

différentielle totale de p

fonction de x, y, z

(non de t car repos)

ρ = cte

donc

$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est une différentielle totale

s'écrit encore : $\boxed{dp = \rho . dU = -\rho . dV}$

U = U(x,y,z) = fonction de force

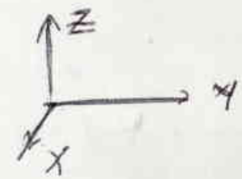
V = potentiel

Il ne peut y avoir d'équilibre que si les forces massiques dérivent d'un potentiel

Equilibre d'un liquide soumis uniquement à la pesanteur :

a) $U = -gZ + cte$ ou $V = gZ + cte$

force de masse $\begin{cases} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = -g \end{cases}$



→ $dp = -\rho g\, dz = -\varpi . dz$

ou $\boxed{dp + \varpi . dz = 0}$

formule fondamentale

b) Surfaces d'égale pression : $U = cte$

$dp = \rho . dU = -\varpi . dz = 0$

plans horizontaux

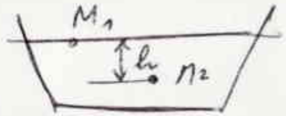
c) Différence de pression entre deux points

• M_1 (z_1)

• M_2 (z_2)

$$\boxed{p_2 - p_1 = \varpi (z_1 - z_2)} \quad (>0)$$

d) pression absolue



$$\boxed{p_2 = p_1 + \varpi (z_1 - z_2) = p_a + \varpi h}$$

↓ pression absolue en M_2

↓ pression relative

$\varpi h = p_2 - p_a$

application : "graphique des pressions"

e) équation générale

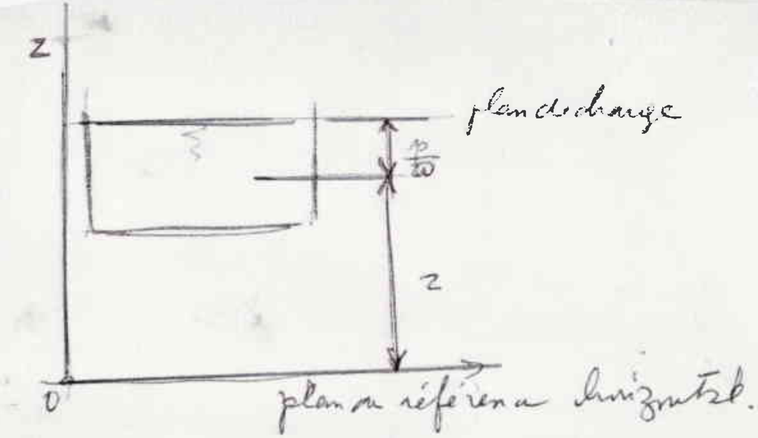
$$p_1 + \varpi z_1 = p_2 + \varpi z_2 = \underline{\underline{C^{te}}}$$

$$(p_1 - p_a) + \varpi z_1 = (p_2 - p_a) + \varpi z_2$$

ou $\boxed{z + \frac{p}{\varpi} = C^{te}}$ pour l'unité de poids

z ↓ énergie de position ; $\frac{p}{\varpi}$ ↓ énergie de pression

(toutes les particules ont même énergie)



Principe de PASCAL :

a) $\boxed{p_2 = p_1 + \varpi (z_1 - z_2)}$ →

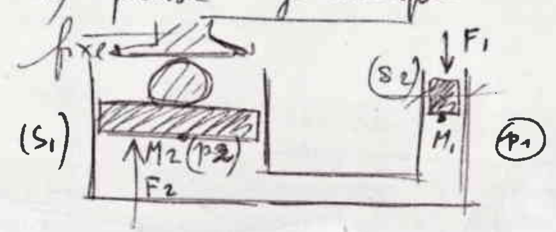
$$p_2 + \Delta p_2 = p_1 + \Delta p_1 + \varpi (z_1 - z_2)$$

$$\rightarrow \Delta p_2 = \Delta p_1$$

les liquides incompressibles transmettent les pressions.

(les solides rigides transmettent les forces)

b) presse hydraulique



$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

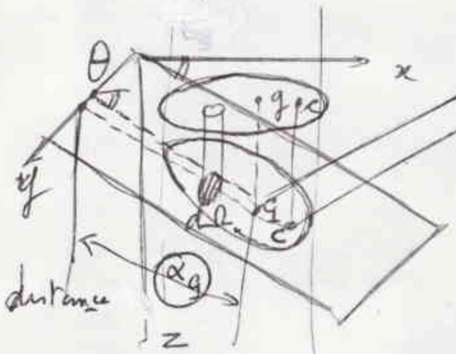
RESULTANTE DES PRESSIONS SUR UNE PAROI

Paroi plane

force élémentaire : $dR = p \cdot d\Omega$

résultante $\vec{R}$ normale à la paroi

appliquée au centre de pression



résultante $R = \int_{\Omega} \varpi z \, d\Omega = \varpi \int_{\Omega} z \, d\Omega = \varpi \Omega \dfrac{\int z \, d\Omega}{\int d\Omega}$

$\Longrightarrow \quad z_g = Gg \qquad \boxed{R = \varpi \cdot \Omega \cdot z_g}$

$= p_g \cdot \Omega$

point d'application

LES ECOULEMENTS SOUS PRESSION

Problèmes techniques et pratiques.

(A) le calcul des réseaux de Canalisations

1°/ Les réseaux

2°/ Généralités sur les methodes de calcul

(B) Problèmes relatifs aux conduites simples et complexes

1°/ Conduite debouchant à gueule bée

2°/ Conduite reliant 2 réservoirs

(C) Problèmes relatifs à les conduites ramifiées ou maillé

1°/ Conduites ramifiées

2°/ Vanne alimentée par 2 réservoirs

3° Conduite multiple

4° Maille – méthode de Hardy-Cross

(D) Problèmes spéciaux

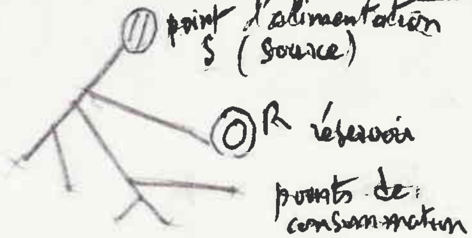
1°/ Service en route

2°/ Conduites de refoulement

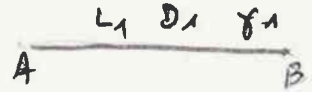
CHAPITRE 4

(A) LE CALCUL DES RESEAUX DE CANALISATIONS

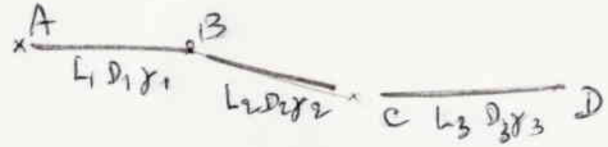
1°/ Les réseaux



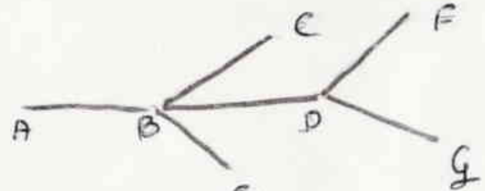
conduite simple



Conduites complexes / mixtes



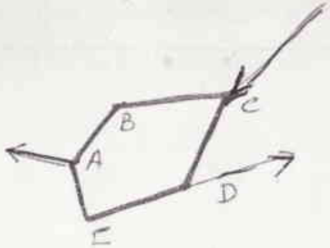
Conduites ramifiées



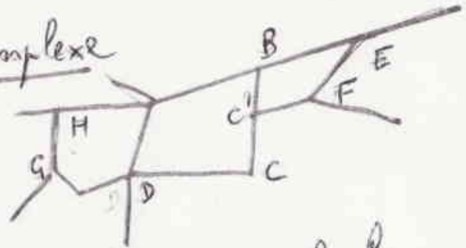
conduites multiples

mailles

maille simple (polygone)



maille complexe



2°/ Généralités sur les méthodes de calcul

Données : niveaux des reservoirs
points à alimenter
longueur des conduites

Inconnues : Φ des conduites

le débits sont des données inconnues

Méthode de calcul

a) en un point de ramification (noeud) la somme algebrique les débits est nulle

$$\boxed{\sum Q = 0}$$

b) le long de chaque tronçon la perte de charge obéit à la loi de base
si l'on fait le tour d'une maille la perte de charge est nulle

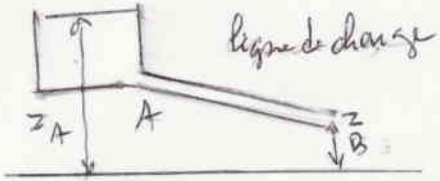
$$E_2 = E_1 + \left(\text{perte de charge}\right)_{A_1}^{A_2}$$

Canalisation		
Φ 100 mm		γ
U	$J = \frac{\Delta H}{L} = \gamma Q^2$	Q

abaques à points alignés

B Problèmes relatifs à des conduites simples et mixtes

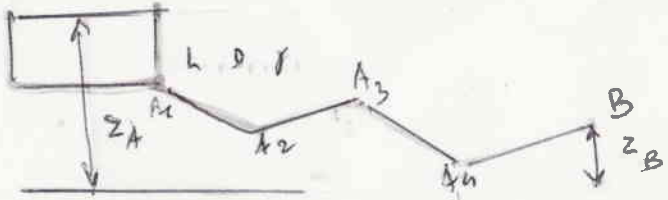
1°/ Conduites débouchant à gueule bée



$$\text{charge en } B = z_B + \alpha \frac{V^2}{2g}$$

2°/ Conduite mixte

$$\Delta H = \sum_A^B$$

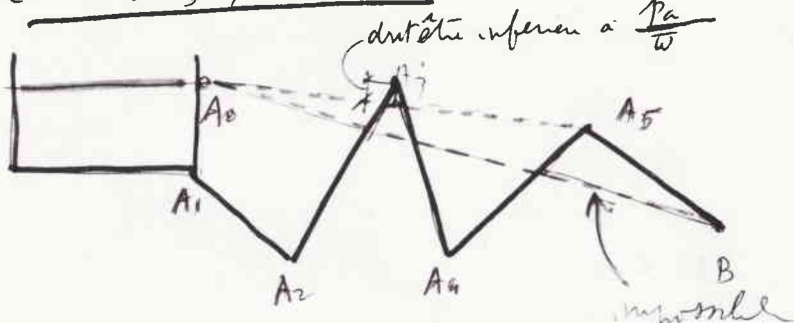


$$z_A = z_B + \underbrace{\alpha \frac{U^2}{2g}}_{\text{négligé}} + \left(\text{pertes de charge}\right)_A^B$$

$$\Delta H = Q^2 \sum \gamma_i L_i \longrightarrow \boxed{Q^2 = \frac{\Delta H}{\sum \gamma_i L_i}}$$

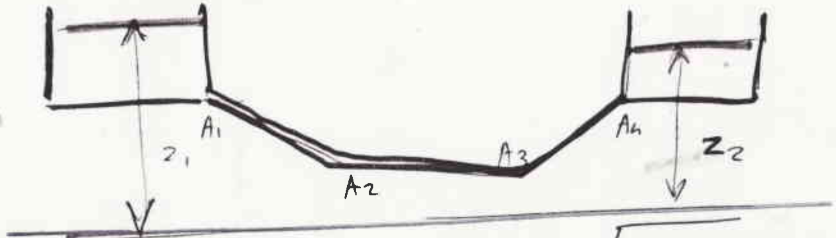
longueur équivalente $\quad L_e \cdot \gamma_e = \sum \gamma_i L_i$

Cas de tronçons ascendants



écoulement libre de A_5 à B

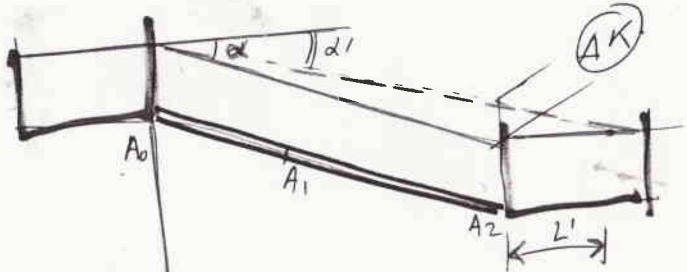
2°/ Conduite reliant 2 réservoirs



$$z_1 - z_2 = \sum \gamma_i L_i Q^2 = \Delta H \longrightarrow Q_2 \sqrt{\frac{\Delta H}{\sum \gamma_i L_i}}$$

Conduite simple avec pertes de charge locales entre R_1 et R_2

1ère approximation $\qquad \operatorname{tg}\alpha = J = \gamma Q^2$



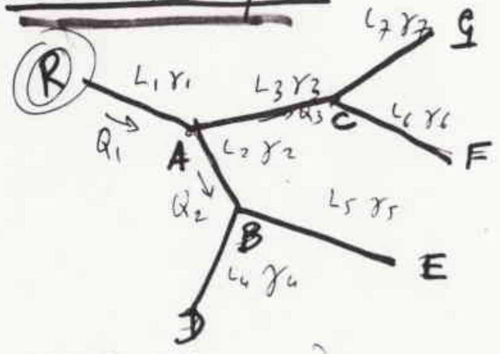
$K_0 = 0,5$
$K_1 = 5$ (par ex.)
$K_2 = 1$

$\Delta K = \sum \Delta K_i = \frac{U^2}{2g} \sum k_i \qquad$ (si ϕ = cte).

$\boxed{(z_1 - z_2) - K = Q'^2 \gamma L} \qquad$ (Q' = 2e approximation)

C) Problèmes relatifs aux conduites ramifiées et maillés

1° Conduites ramifiées



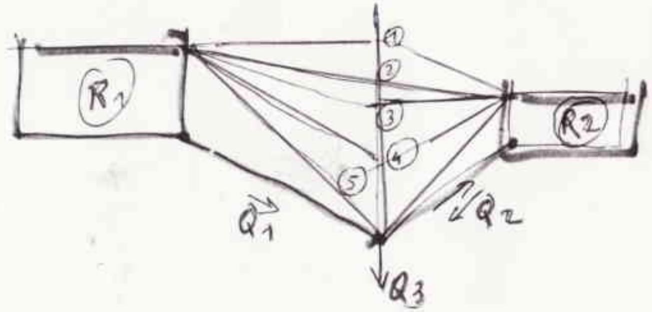
$$\left\{\begin{aligned} Q_1 &= Q_2 + Q_3 \\ Q_2 &= Q_D + Q_E \\ Q_3 &= Q_F + Q_G \end{aligned}\right\} \text{ 3 relations}$$

écrivons aussi 4 relations : théorème de Bernoulli entre (R) et chaque extrémité

$$\begin{aligned} \Delta z_D &= \gamma_1 L_1 Q_1^2 + \gamma_2 L_2 Q_2^2 + \gamma_4 L_4 Q_4^2 \\ '' &= \\ '' &= \\ \Delta z_G &= \gamma_1 L_1 Q_1^2 + \gamma_3 L_3 Q_3^2 + \gamma_7 L_7 Q_7^2 \end{aligned}$$

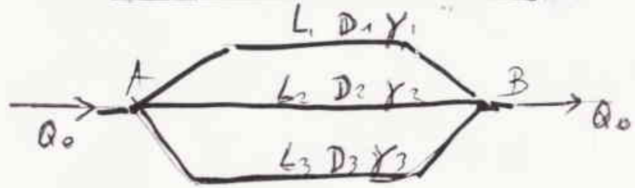
7 relations en 7 inconnues (les Q_i).

2° Vanne alimentée par 2 réservoirs



poly. p 33

3° Conduites multiples



$$\boxed{Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3}$$

$$[\Delta H]_A^B = \gamma_1 L_1 Q_1^2 = \gamma_2 L_2 Q_2^2 = \gamma_3 L_3 Q_3^2$$

$$\longrightarrow \frac{1}{Q_1\sqrt{\gamma_1 L_1}} = \frac{1}{Q_2\sqrt{\gamma_2 L_2}} = \frac{1}{Q_3\sqrt{\gamma_3 L_3}}$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

avec $$\frac{1}{Q_1\sqrt{\gamma_1 L_1}} = \frac{1}{Q_2\sqrt{\gamma_2 L_2}} = \frac{1}{Q_3\sqrt{\gamma_3 L_3}}$$

$$\rightarrow \quad \frac{Q_1}{(\gamma_1 L_1)^{-1/2}} = \frac{Q_2}{(\gamma_2 L_2)^{-1/2}} = \frac{Q_3}{(\gamma_3 L_3)^{-1/2}} =$$

$$= \frac{Q_0}{\sum (\gamma_i L_i)^{-1/2}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{Q_i = Q_0 \cdot \frac{(\gamma_i L_i)^{-1/2}}{\sum (\gamma_i L_i)^{-1/2}}}$$

<u>Conduite équivalente à la conduite multiple</u>

$$(\gamma_e' L_e)^{-1/2} = \sum (\gamma_i L_i)^{-1/2}$$

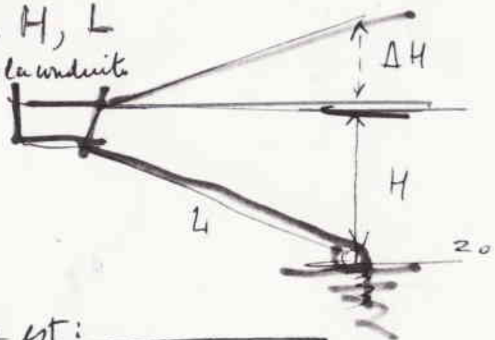
$$[\Delta H]_A^B = \gamma_e L_e Q_0^2$$

$$= \gamma_i L_i Q_i^2$$

29/ Conduites de refoulement :

données Q_0, H, L

inconnue : diamètre de la conduite



On a :

$$\Delta H = \gamma L Q_0^2$$

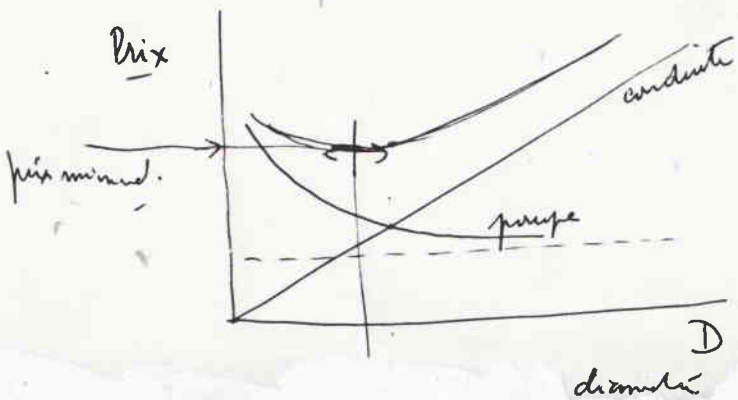
la puissance de la pompe est :

$$\boxed{N = \frac{\varpi Q_0}{\eta}\left(H + \gamma L Q_0^2\right)}$$

η = rendement ; énergie à fournir par unité de poids.

Théoriquement le problème est satisfait quel que soit D
En pratique on recherche la moindre dépense totale :

a) coût de l'installation
b) entretien et exploitation



Durée normale d'amortissement = 10 ans

Prix de la conduite : $\boxed{P_c = p_c L D}$

p_c = prix/ml pour $\phi = 1m$. (1,05) à (1,20) entretien

Prix du groupe moto pompe :

$$\boxed{P_m = p_m \cdot N}$$

avec $p_m = p_1 + p_2 + p_3$

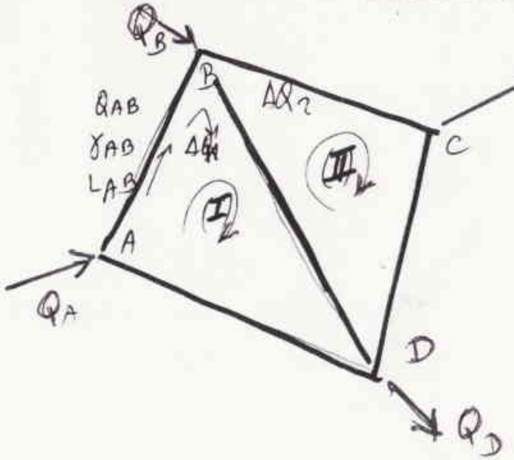
- p_1 → achat
- p_2 → entretien
- p_3 → énergie par unité de puissance

N = puissance

On veut que $(P_c + P_m)$ soit minimal

On a $\gamma = \dfrac{8\lambda}{g\pi^2} \dfrac{1}{D^5}$

(60) Mailles : méthode de Hardy-Cross.



inconnues : q_{ij} de chaque tronçon

règle des mailles :

(I) $\sum q_{ij}^2 \cdot \eta_{ij} = A_1$ ($\neq 0$ en général.)

(II) $\sum q_{ij}^2 \, \eta_{ij} = A_2$ ($\neq 0$)

on prend $\boxed{q'_{ij} = q_{ij} + \Delta q_{ij}}$

négligeable

$$\sum q'^2_{ij}\,\eta_{ij} = \sum q_{ij}^2\,\eta_{ij} + 2\sum q_{ij}\,\Delta q_{ij}\,\eta_{ij} + \cancel{\sum \eta_{ij}\,\Delta q_{ij}^2} = 0$$

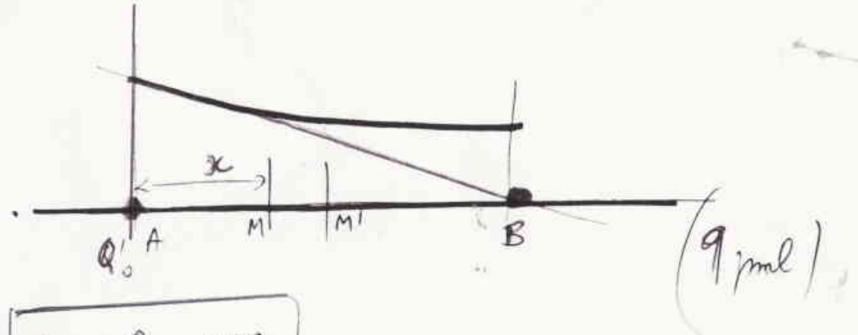
Δq_{ij} est le même pour tous les tronçons de (I)

$$\rightarrow \Delta q = \frac{-\sum q_{ij}^2 \cdot \eta_{ij}}{2\sum \eta_{ij} \cdot q_{ij}}$$

somme algébrique

somme arithmétique.

(D) Problèmes spéciaux. 1°/ service en route :



$\boxed{Q_M = Q_0 - qx}$

$$[\Delta H]_M^{M'} = \gamma\, Q_M^2\, dx = \gamma (Q_0 - qx)^2\, dx$$

$$[\Delta H]_A^M = \int_0^x \gamma (Q_0 - qx)^2\, dx =$$

$$= \gamma \left(Q_0^2 x - Q_0 q x^2 + q^2 \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \gamma x \left(Q_0^2 - Q_0 q x + q^2 \frac{x^2}{3}\right)$$

si $\boxed{q = \frac{Q_0}{L}}$ $\rightarrow$

Remarque : en pratique λ ne dépend pas de R_e

(Donc pour un matériau donné $\boxed{\lambda = cte}$ pour un diamètre donné

$$\rightarrow P = p_e L D + p_m \frac{\varpi Q_0}{\eta}\left[H + \frac{8}{g\pi^2}\frac{1}{D^5} L Q_0^2\right]$$

et pour avoir le prix minimal : $\boxed{\frac{dP}{dD} = 0} \rightarrow$

$$L\left[p_e + p_m \cdot \frac{8\varpi Q_0^3}{\eta g \pi^2} \cdot \frac{(-5\lambda)}{D^6}\right] = 0 \rightarrow$$

diamètre économique $\boxed{D = \sqrt[6]{\frac{p_m}{p_e} \cdot \frac{40\lambda}{\eta g \pi^2}} \cdot \sqrt[2]{Q_0} = K\sqrt{Q_0}}$

avec $K = \sqrt[6]{\frac{p_m}{p_e} \cdot \frac{40\lambda}{\eta g \pi^2}}$

si Q_0 en m^3/s on trouve $1{,}25 < K < 1{,}75$

au début au rech. (formule de BAZIN)

$\boxed{D = 1{,}5\sqrt{Q_0}}$ ← conduites de refoulement

$\rightarrow \frac{D^2}{Q} = 2{,}25$ avec $Q = V \cdot \pi \cdot \frac{D^2}{4}$

$\rightarrow \frac{D^2}{Q_0} = \frac{4}{\pi U} \rightarrow U = 0{,}58\ m/s$

M. VIBERT a repris cette formule avec les critères économiques de 1970 →

$$\boxed{D_{mètre} = 1{,}547 \left(\frac{n \cdot e}{f}\right)^{0{,}154} \cdot Q^{0{,}46}}$$

avec Q en m^3/s

n = rapport d'utilisation

si la pompe tourne 18^h/jour → $n = 0{,}75$

e = prix au kWh

f = prix du kg de conduite

vitesse économique : → $U = 1{,}40\ m/s$

Chapitre 5 (80) (81)

ORIFICES ET AJUTAGES

(A) Orifices

1°/ Definition

2°/ Formules fondamentales

Lois des vitesses

— des débits

3°/ Problèmes classiques

a) Vanne de fond

b) Orifice de grande hauteur

c) Vidange d'un reservoir par le fond

4°/ Orifices divers.

(B) Ajutages

1°/ ajutage exterieur

a) allure du phénomène

b) etude quantitative

c) pression en B'

2°/ ajutage rentrant

3°/ conduites motrices forcées (exercice)

5ème leçon

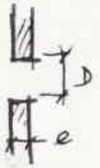
ORIFICES - AJUTAGES

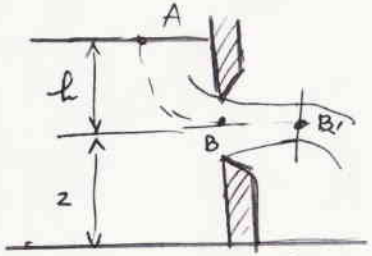
A ORIFICES

Trou dans une paroi de reservoir

1°/ Définition

Orifice en mince paroi : $\boxed{e < \frac{D}{2}}$





section contractée

2°/ Formules fondamentales

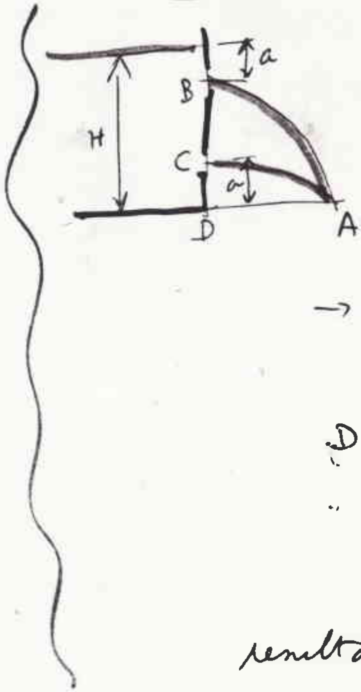
$E = z + h$

$= z + \frac{p}{\varpi}$

formule de TORRICELLI :

a) loi de vitesse $\boxed{V_{B'} = \sqrt{2gh}}$

Exercice



$V_B = \sqrt{2ga}$

durée de chute de B au niveau de D $= t_B$

sur la verticale $\overline{BD} = \frac{1}{2} g t_B^2$

$\rightarrow \quad t_B = \sqrt{\frac{2(H-a)}{g}}$

$DA = V_B \cdot t_B$

$= \sqrt{2ga} \cdot \sqrt{\frac{2(H-a)}{g}} = 2\sqrt{a(H-a)}$

résultat symétrique en a et (H-a)

b) Loi des DEBITS

$\boxed{s' = \nu s}$ (ν = coeff^t de contraction)

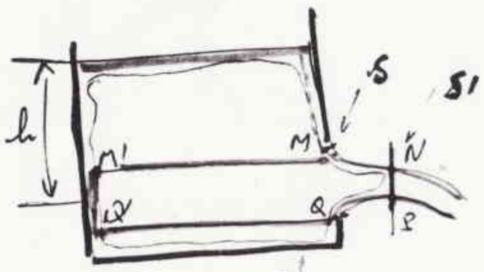
$0{,}59 < \nu < 0{,}71$

$Q = V_{B'} \cdot s'$

$$\boxed{Q = \mu\sqrt{2gh} \times (\nu s) = m s \sqrt{2gh}}$$

avec $\mu \sim 0{,}99$ avec $m = \mu . \nu$

avec $0{,}57 < m < 0{,}70$



$\frac{dmV}{dt} = \sum$ forces extérieures

sur M'Q' la force de pression est $(\varpi h + p_a)s$

sur MNPQ la force est $p_a . s$

différence $\boxed{\varpi h s}$

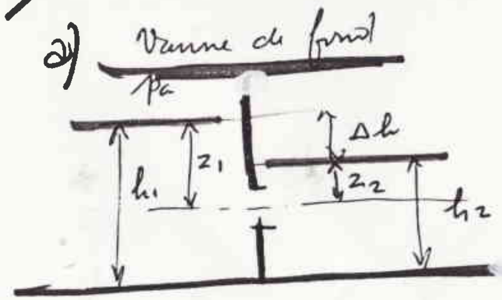
EULER

or $\frac{dmV}{dt} = \frac{\rho q dt \cdot V}{dt} = \rho . V . s' . V = \rho s' V^2 = \rho s' 2gh$

→ $\varpi h s = \rho s' 2gh$ → $\boxed{s = 2s'}$ → $\boxed{\nu = 0{,}5}$

3°) Problèmes classiques

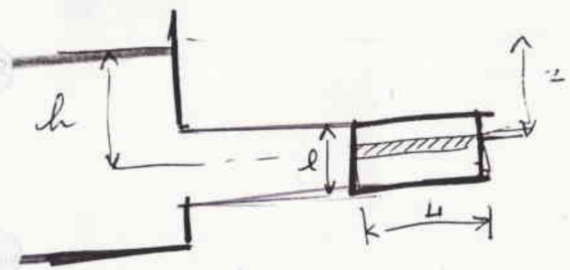
a) Vanne de fond



$$z_1 + \frac{p_a}{\varpi} = \frac{V_{B'}^2}{2g} + z_2 + \frac{p_a}{\varpi}$$

$$z_1 - z_2 = \Delta h = \frac{V_{B'}^2}{2g} \rightarrow \boxed{V_{B'} = \sqrt{2g\,\Delta h}}$$

b) Orifice de grande hauteur on intègre.



$dq = m(L dz)\sqrt{2gz}$ (Torricelli)

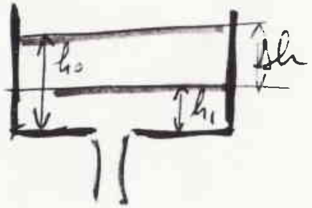
$Q = \int_{z_1}^{z_2} mL \sqrt{2g} . \sqrt{z} . dz$ avec $z_2 - z_1 = \ell$

$$\rightarrow Q = m L l \quad \frac{z_2^{3/2} - z_1^{3/2}}{z_2 - z_1}$$

$$\boxed{Q = m\, s \sqrt{2gh}}$$

la loi est generale

c) Vidange d'un reservoir par le fond:



$$Q.dt = dV = -S.dh$$

$$ms\sqrt{2gh}\, dt = Q.dt$$

$$dt = -\frac{S\,dh}{ms\sqrt{2gh}} = -\frac{S}{ms\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{2S}{\sqrt{2g}\, ms}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}\right)$$

Durée de vidange. $h_1 = 0$

$$\rightarrow T = \frac{2 \times \text{volume du reservoir}}{Q_0} = \frac{2 S h_0}{ms\sqrt{2gh_0}}$$

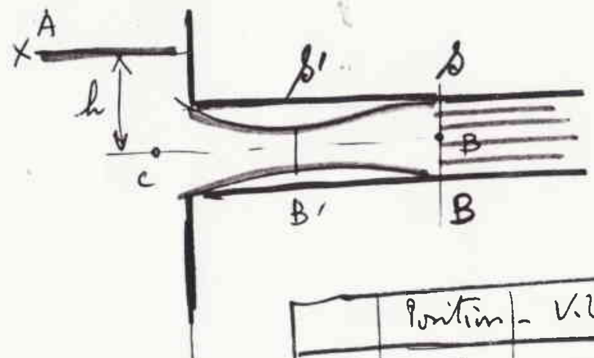
4°/ Orifices divers:

Orifice à veine moulée: $Q = m'\sqrt{2gh}$

$m' = 0,98$

B $\boxed{\text{AJUTAGES :}}$

1) Ajutage extérieur : a) allure du phenomene



	Position	Vitesse	Pression
A	h	0	p_a
C	0	V_c	$p_a + \varpi h$
B'	0	$V_{B'}$	$p_{B'}$
B	0	V_B	p_a

b) étude quantitative (ajutage [illegible])

$$h = \frac{V_B^2}{2g} + \text{perte de charge locale à la sortie du réservoir} = \frac{1}{2}\frac{V_B^2}{2g}$$

$$\rightarrow \frac{V_B^2}{2g} = \frac{2}{3}h \rightarrow \boxed{V_B = 0{,}82\sqrt{2gh}}$$

et $\boxed{Q_B = 0{,}82\, s\sqrt{2gh}}$

(au lieu de $0{,}62\, s\sqrt{2g}$ pour un orifice)

c) Pression en B' (au point de contraction)

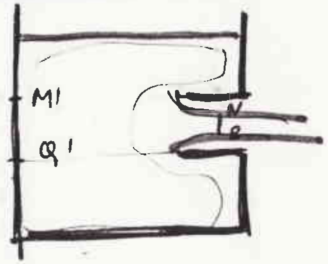
$$Q = V_B \cdot s = V_{B'} \times 0{,}62\, s$$

$$V_{B'} = \frac{V_B}{0{,}62} = 1{,}32\sqrt{2gh}$$

$$\frac{p_{B'}}{\omega} + \frac{V_{B'}^2}{2g} = \frac{p_a}{\omega} + \frac{V_B^2}{2g} \rightarrow \frac{p_a}{\omega} - \frac{p_{B'}}{\omega} = h\left[(1{,}32)^2 - (0{,}82)^2\right] \# h.$$

2° ajutage rentrant :

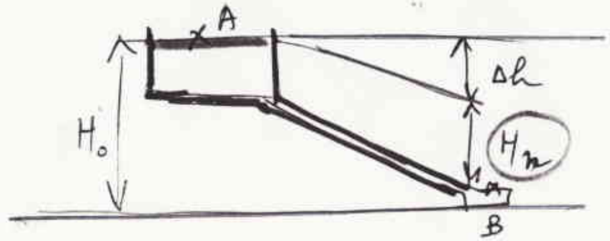
$\boxed{Q = 0{,}5\, s\sqrt{2gh}}$



l'expérience confirme le calcul.

$m \# 0{,}5$

3° Conduites motrices ou forcées :



$$H_0 = \underbrace{\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega}}_{= H_n} + \left[\Delta H\right]_A^B$$

rendement $\eta = \frac{H_n}{H_0} = 1 - \frac{\Delta H}{H_0}$

Choix du diamètre :

On prend souvent $\eta = 0,9$ $\rightarrow$ $\boxed{\Delta H = 0,1\, H_0}$

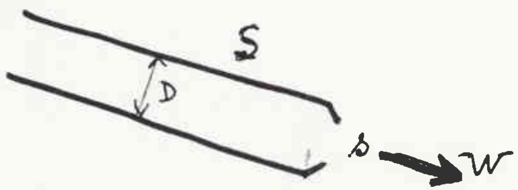
Exercice

Energie de vitesse - Ajutage variable

$V = \sqrt{2g\, H_0}$

$V = \rho\sqrt{2g\, H_0} = \sqrt{2g\, H_n}$ $\qquad \boxed{H_n = \rho^2 . H_0}$

ρ = coeff^t de réduction
(ne pas confondre avec le rendement)



perte dans l'ajutage

$$H_0 = \alpha \frac{W^2}{2g} + \left[\gamma L\, Q^2 + \sum k_i \frac{V^2}{2g} + \frac{\lambda W^2}{2g}\right]_A^B$$

$Q = V . S = m\, s . W$

$S = \frac{\pi D^2}{4}$ $\rightarrow$ $V^2 = \frac{Q^2}{S^2} = \frac{16\, m^2 s^2\, W^2}{\pi^2 D^4}$

$$\rightarrow H_0 = (\alpha + \lambda)\frac{W^2}{2g} + s^2\left(2g\,\gamma L\, m^2 + \frac{16\, m^2 \sum k_i}{\pi^2 D^4}\right)\frac{W^2}{2g}$$

posons $A = \alpha + \lambda$

$$B = 2g\,\gamma L\, m^2 + \frac{16\, m^2 \sum k_i}{\pi^2 D^4}$$

$$\rightarrow \boxed{H = A\frac{W^2}{2g} + B s^2 \frac{W^2}{2g}}$$

$$\rightarrow W = \sqrt{\frac{2g\, H_0}{A + B s^2}} = \rho\sqrt{2g\, H_0}$$

ρ = coefficient de réduction $= \frac{1}{\sqrt{A + B s^2}}$

$$Q = m\, s\, W = \frac{m\sqrt{2g\, H_0}}{\sqrt{\frac{A}{s^2} + B}} = m\, s\, \rho\sqrt{2g\, H_0}$$

Puissance disponible:

$$P = \varpi Q H_n$$

$$= \varpi Q \rho^2 H_0$$

$$= \varpi m s \rho^3 H_0 \sqrt{2g H_0}$$

ou $\boxed{P = K s \rho^3}$

avec $K = \varpi \; m \; H_0 \sqrt{2g H_0}$

K ne dépend que des données initiales

maximum de P_n quand s varie:

$$\frac{dP_N}{ds} = K . \frac{A - 2Bs^2}{(A + Bs^2)^{5/2}}$$

$$\rightarrow \boxed{s = \sqrt{\frac{A}{2B}}}$$

93

Si $\boxed{\alpha = 1}$ et si les pertes de charge locales sont negligeables:

$$P_n = Q \times \frac{2H}{3} = \frac{2}{3} Q . H$$

Chapitre 6

L'écoulement libre

A] Aspects généraux.

1°/ Définition

2°/ Propagation d'une petite perturbation

3°/ Régime laminaire ou turbulent
Régime fluvial ou torrentiel

4°/ Distribution des vitesses et des pressions

5°/ "Charge et" charge spécifique"

B] Le régime uniforme

1°/

2°/ Régime uniforme laminaire

3°/ — — turbulent

C] Problèmes pratiques.

L'ECOULEMENT LIBRE

A/ Aspects généraux : (jusqu'à p 101)

1°/ Définition

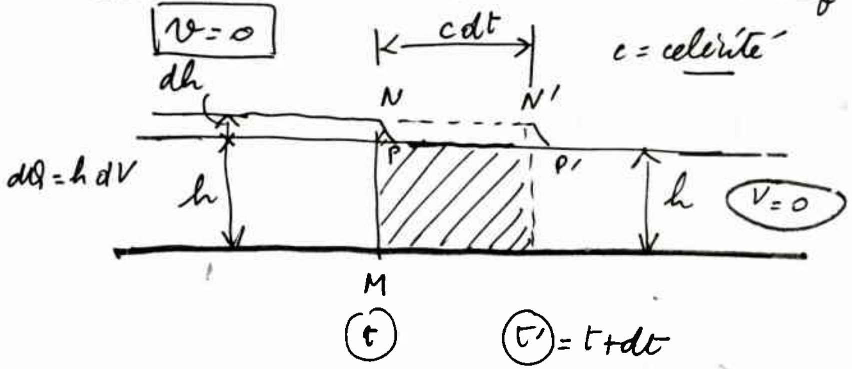
L'écoulement libre est un écoulement où le fluide, au niveau supérieur est au contact de l'atmosphère.—

à la surface libre $p = cte = p_a$

2°/ Propagation d'une petite perturbation

$\boxed{1^{er} \text{ Cas}}$ vitesse initiale nulle dans un bief :

$\boxed{v=0}$ c = célérité



Raisonnons sur l'unité de largeur

(masse hachurée : $\rho \times c \times dt \times h$

accélération $\gamma = \dfrac{dV}{dt}$

force : $\dfrac{1}{2}\left[(h+dh)^2 \varpi - h^2 \varpi\right] = \varpi h \, dh$

$\rightarrow \varpi h \, dh = \rho c h \, dV$

ou $\boxed{g \cdot dh = c \cdot dV}$ (1)

Equation de continuité :

$dQ.dt = h.dV.dt$

$\rightarrow c.dt.dh = dQ.dt = h.dV.dt$

$\rightarrow \boxed{c \, dh = h \, dV}$ (2)

(1) et (2) $\rightarrow \dfrac{dV}{dh} = \dfrac{g}{c} = \dfrac{c}{h} \rightarrow \boxed{c = \sqrt{gh}}$

$\boxed{2^{ème} \text{ Cas}}$ Si au départ V n'est pas nul le raisonnement reste le même :

Avant perturbation : h, V

après —— $h+dh, V+dV$

mais pour un observateur fixe la perturbation se déplace avec la célérité $c+V$ si elle va vers l'aval

ou $c-V$ —— —— l'amont

3/ Régime laminaire ou turbulent : régime fluvial ou torrentiel.

a) $R_h = \left(\frac{\text{section mouillée}}{\text{périmètre mouillé}}\right)$

si $R_e < 500$ le régime est laminaire

$R_e > 500$ —— turbulent

avec $\boxed{R_e = \frac{UR}{\nu}}$

b) autre classification

nombre de FROUDE : $\boxed{F_r = \frac{u}{\sqrt{gh}}} = \frac{U}{c}$

avec $c = \sqrt{gh}$

si $\boxed{F_r < 1}$: cas d'une perturbation de sens contraire à la vitesse : elle peut remonter le courant (régime fluvial) - mascaret.

$u < c$

si $\boxed{F_r > 1}$: la perturbation ne peut remonter le courant (régime torrentiel)

$u > c$

si $\boxed{F_r = 1}$ régime critique

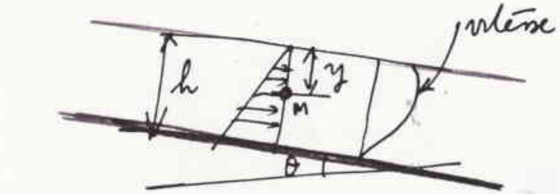
Cas du régime critique : $\boxed{u_c = \sqrt{gh}}$

$u_c h_c = q_c$

$u_c^2 = g h_c = \left(\frac{q_c}{h_c}\right)^2 \rightarrow \boxed{q_c^2 = g h_c^3}$

4/ Distribution des vitesses et des pressions :

pression : $p = \varpi y . \cos\theta$



formule BAZIN : → vitesse moyenne :

$U = V_M - 14\sqrt{RI}$

↑ vitesse maxi

I = pente longitudinale

R = rayon hydraulique.

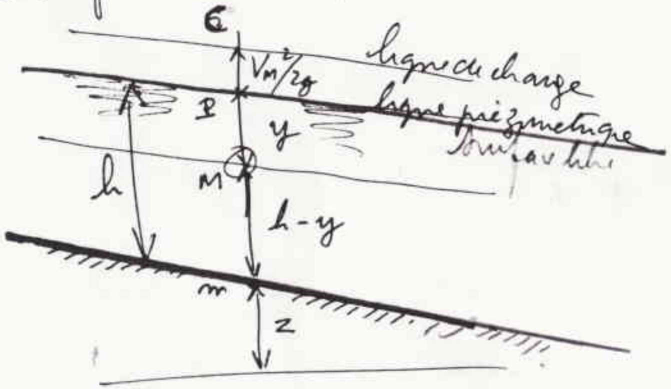
8/ Charge et charge spécifique:

a) charge de la particule fluide de poids unité

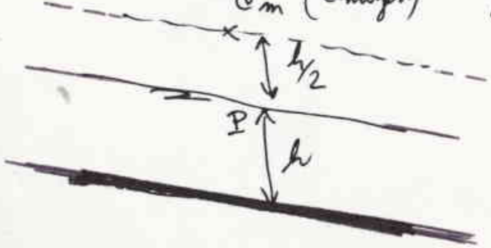
$$(E_m) = \underbrace{\left[z + (h-y)\right]}_{\text{position}} + \underbrace{y}_{\text{pression}} + \underbrace{\frac{V_M^2}{2g}}_{\text{vitesse}} =$$

$$= z + h + \frac{V_M^2}{2g}$$

la ligne piézométrique est confondue avec la surface libre



particule fluide moyenne:



e_m (Cmoyen) si $\overline{C_m P} < \frac{h}{2}$ régime fluvial

si $\overline{C_m P} > \frac{h}{2}$ — torrentiel

si $\overline{C_m P} = \frac{h}{2}$ - régime critique

b/ Charge spécifique: z=0 →

$$\boxed{H = h + \frac{V^2}{2g}}$$

notion introduite en 1911 par **BAKHMETEFF**

B] Le régime uniforme

1°/ généralités

2°/ régime uniforme laminaire : $R_e < 500$

loi de POISEUILLE

$$V_r = \frac{1}{4}\frac{\Delta p^*}{\ell}(R^2 - r^2) \quad \text{avec} \quad p^* = p + \varpi z$$

remplaçons $\frac{\Delta p^*}{\ell}$ par $\varpi \frac{\Delta z}{\ell} = \rho g \frac{\Delta z}{\ell} = \rho g j$

(régime uniforme : $I = j$

$$\rightarrow \boxed{V_r = \frac{1}{4\frac{\mu}{\rho}}\, j\, (R^2 - r^2)}$$

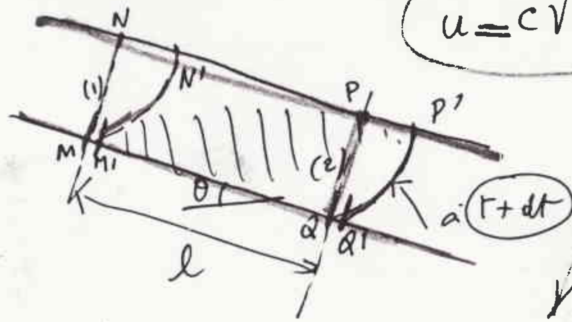
$$\rightarrow Q = j \cdot R^4 \frac{\pi g}{16}$$

(voir écoulement dans les tuyaux)

→

3°/ Régime uniforme turbulent : a/ loi de CHEZY

$$u = C\sqrt{R_h\, j}$$



avec $j = \frac{\Delta z}{\ell}$ et $C = F(\varepsilon, F_r, R_e)$

R_e joue peu → $C = C(\varepsilon, F_r)$

(travail force de pesanteur : $(\ell S \varpi) I$

— — de frottement : $P \times \ell \; f(K, U)$

périmètre

coeff de rugosité

$$\ell S \varpi I = P \times \ell \times F(K, U)$$

avec $R = \frac{S}{P}$ → $RI = \frac{f(K,U)}{\varpi}$

expériences → $\frac{f(K,U)}{\varpi} = b\, U^2$ (BAZIN)

b dépend de la rugosité et de R_h.

$RI = b\, U^2$; posons $C = \sqrt{\frac{1}{b}}$

b) formules pratiques :

Chezy : $U = C\sqrt{RI}$.

avec $\left(\begin{array}{l} C = 20 \text{ paroi rugueuse} \\ C = 100 \text{ — lisse} \end{array} \right.$

Bazin : $C = \dfrac{87\sqrt{R}}{\gamma + \sqrt{R}}$

$\gamma = 0{,}06$	paroi unie
$= 0{,}46$	moellons
$= 1{,}3$	terrain naturel
$= 1{,}75$	← très rugueux

Manning - Strickler : $\boxed{C = \dfrac{1}{n} R^{1/6}}$

ou $\boxed{U = K\, R^{2/3}\, I^{1/2}}$

tables, abaques.

c) Débitance :

$$Q = K\, I^{1/2}\, R^{2/3}\, S$$

La section droite étant définie
R, S sont des fonctions de h : $\left| \begin{array}{l} R(h) \\ S(h) \end{array} \right.$

$\rightarrow Q = K . I^{1/2}\, f(h)$

ou $\boxed{\dfrac{Q}{\sqrt{I}} = K . f(h)}$ Débitance

prisme section aussi :

Conduite formée : Conduite circulaire

Voir : chapitre.

C Problèmes pratiques :

1ère catégorie :

Débit d'un canal donné ?

S donné

h —

P périmètre mouillé donné

I donné

$$Q = K R^{2/3} I^{1/2} \times S$$

2e catégorie : Q donné devrait la section

I donné

Vitesse minimale et maximale de l'eau :

terrain de terres : terres détrempées : $v < 0{,}10$ m/s

sables $v < 0{,}50$ m/s

---

roches. 2 à 4 m/s

exercice

Chapitre 7

L'ECOULEMENT LIBRE

REGIME VARIÉ

(A) Etude générale de l'écoulement libre en régime varié.

1°/ Définitions, Notions générales

2°/ Equations – a) charge spécifique – canal de largeur infinie

b) Variation du tirant d'eau en fonction du débit et de la charge spécifique

(B) Etudes particulières

1°/ Remous dû à un barrage.

2°/ Ressaut

3°/ Remous dû à un pont

(107)

CHAPITRE 7

L'ECOULEMENT LIBRE

Régime varié :

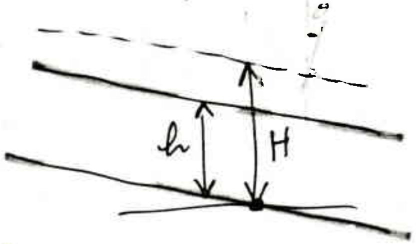
A/ Etude générale.

1°/ Définitions - notions générales :

- mouvements accélérés
- —— retardés
- mouvement graduellement varié (l'application de la formule de CHEZY est possible entre 2 sections
- mouvement rapidement varié (on appl. en général la formule d'EULER)

2°/ Equations générales :

a) Charge spécifique (rappel)
Cas du canal de largeur infinie

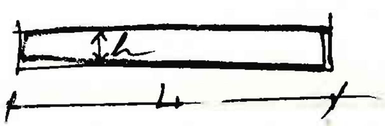


$$H = h + \frac{U^2}{2g}$$

$$E = z + \frac{p}{\varpi} + \frac{U^2}{2g}$$

(en toute rigueur : $H = h \cos\theta + \alpha\left(\frac{U^2}{2g}\right)$

$$R = \frac{Lh}{L+2h}$$



(108)

$q = U.h$ = débit / unité de largeur

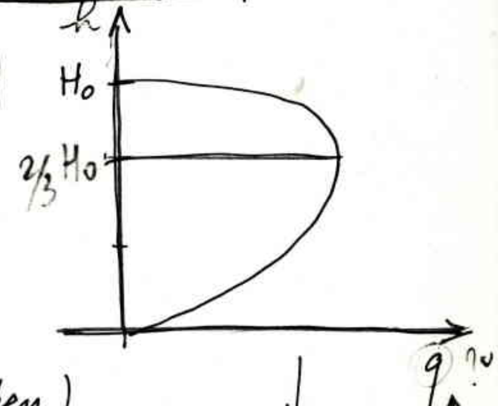
$$\frac{U^2}{2g} = H - h \rightarrow U = \sqrt{2g(H-h)}$$

$$\rightarrow q = h\sqrt{2g(H-h)}$$

Rem : Section quelconque : $Q = S\sqrt{2g(H-h)}$

b) Variation du tirant d'eau h en fonction du débit q et de la charge spécifique :

b1) ① à charge spécifique cte $\boxed{H = H_0}$



$U = C\sqrt{hI}$ (Chézy)

I variable : — prenons U comme paramètre :

$$h = H_0 - \frac{U^2}{2g} \rightarrow q = U.h = U\left(H_0 - \frac{U^2}{2g}\right) \quad (1)$$

d'où courbe

maxi de débit : $\frac{dq}{dh} = 0$ ou $\frac{dq}{dU} = 0$

(1) → (2) $\frac{dq}{dU} = \left(H_0 - \frac{U^2}{2g}\right) - \frac{U^2}{g} = 0 \xrightarrow{\text{d'où}} \boxed{H_0 - \frac{3U^2}{2g} = 0}$

pour le minimum

→ $h_c = H_0 - \frac{U_c^2}{2g} = \frac{U_c^2}{2g} = \frac{2}{3} H_0$ et → $\boxed{U_c = \sqrt{gh}}$

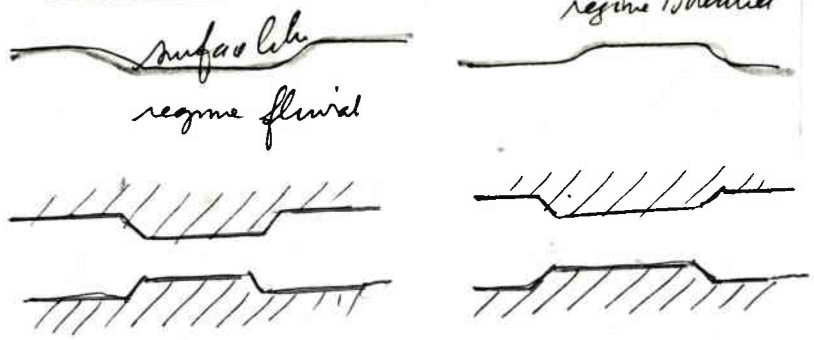
régime critique :

On a alors $q_c = U_c \cdot h_c = \sqrt{gh} \cdot h = \sqrt{gh^3}$

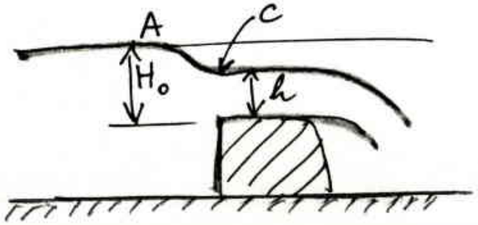
d'où $\boxed{q^2 = g h^3}$

et → $h = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$

1ère application : rétrécissement dans un canal



2ème application : déversoir à seuil épais



$h = \frac{2}{3} H_0$

Voir plus loin

Le régime stable correspond au débit maximal (principe de BOUSSINESQ)

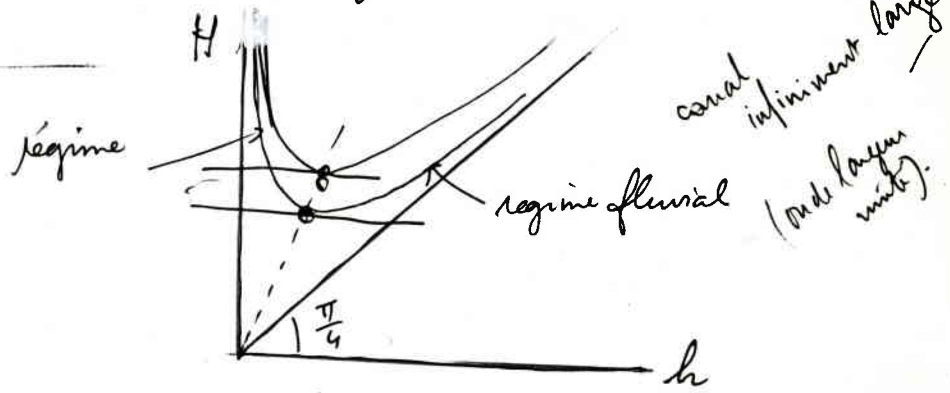
$h = \frac{2}{3} H_0$

b) 2) Variation du tirant d'eau avec la charge spécifique H à débit constant :

$$\boxed{q_0 = h\sqrt{2g(H-h)}}$$

$q_0 = Uh$ → $h = q_0/U$

→ $H = h + \frac{U^2}{2g} = \frac{q_0}{U} + \frac{U^2}{2g}$



si $\frac{dH}{dh} = 0$ (ou $\frac{dH}{dU} = 0$)

→ $\frac{dH}{dU} = -\frac{q_0}{U^2} + \frac{U}{g} = 0$ → $\boxed{U^3 = g q_0 = ghU}$

(1/1)

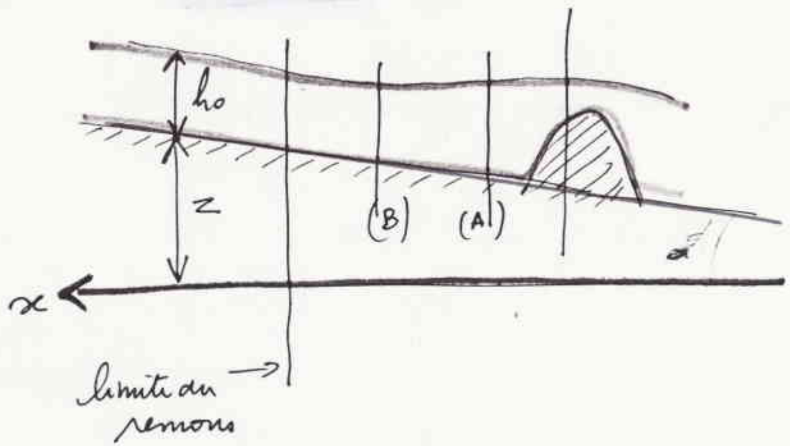
On retrouve le régime critique

Remarque : surface :

$$F(q, h, H) = q - h\sqrt{2g(H-h)} = 0$$

B] Etudes particulières :

1°/ Remous dû à une surélévation aval (barrage)



méthode de BERNOULLI

$$\boxed{e = z + h + \alpha \frac{U^2}{2g}} \qquad (1)$$

z = cote du plafond du canal

$\alpha \sim 1$

loi de Chezy : $\dot{J} = \frac{U^2}{C^2 R} = \frac{Q_0^2}{C^2 S^2 R} = \frac{Q_0^2 P}{C^2 S^3}$ (2)

J = pente de la ligne de charge

(1) → $\frac{de}{dx} = \underbrace{\frac{dz}{dx} + \frac{dh}{dx}} + \frac{d\left(\frac{U^2}{2g}\right)}{dx} = \dot{J}$

or $\frac{d(z+h)}{dx} = \frac{dy}{dx}$ y = cote de la ligne d'eau

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(z+h)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \dot{J} - \frac{d\left(\frac{Q_0^2}{S^2 \cdot 2g}\right)}{dx} \qquad \text{2 termes}$$

pour AB = Δx →   les 2 termes

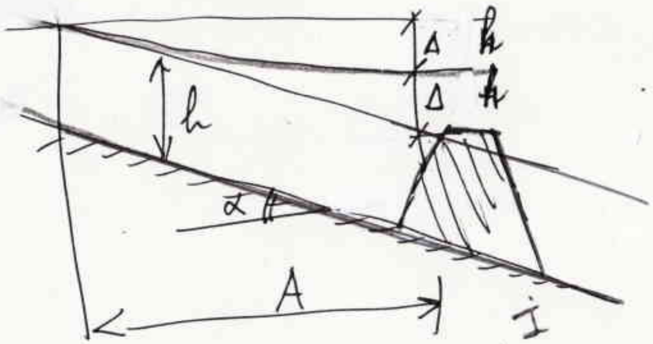
$$\boxed{\left[\Delta y\right]_A^B = Q_0^2 \int_A^B \frac{P}{C^2 S^3}\, dx - \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_B^2} - \frac{1}{S_A^2}\right)}$$

(équation simplifiée du régime varié)

en pratique procédé numérique
— graphique

═

Méthode simplifiée : dite de la parabole



$$A = 2\,\frac{\Delta h}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\,\Delta h}{I}$$ (H) α petit [illegible] tg α

parabole : $z = Kx^2$ pour $\begin{cases} x = \dfrac{2\Delta h}{I} \\ z = \Delta h \end{cases}$

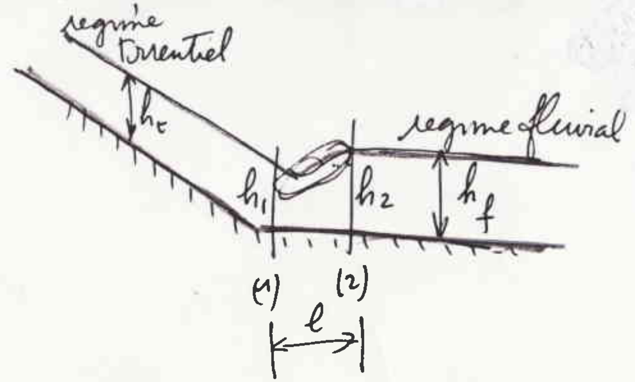
$$\rightarrow K = \frac{I^2}{4\Delta h}$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{4\Delta h}{I^2}\cdot z$$

$$\rightarrow (\Delta h)_x = \frac{(2\Delta h - x I)^2}{4\Delta h}$$

2) Etude du ressaut

TP ENITA



perte de charge importante

Canal infiniment large:

forces: $\frac{\varpi h_1^2}{2} - \frac{\varpi h_2^2}{2}$

débit de quantité de mouvement $\rho q U_2 - \rho q U_1$

$$\rho q U_2 - \rho q U_1 = \frac{\varpi h_1^2}{2} - \frac{\varpi h_2^2}{2} \quad \text{(Euler)}$$

On pose $\boxed{M = \rho q U + \frac{\varpi h^2}{2}}$ "impulsion totale"

$$M = \varpi \left(\frac{q^2}{gh} + \frac{h^2}{2} \right)$$

$$= \varpi q^2 \left(\frac{1}{gh} + \frac{h^2}{2q^2} \right)$$

La fonction M a même valeur dans la section (1) et dans la section (2) du ressaut.

remarque → pour q donné

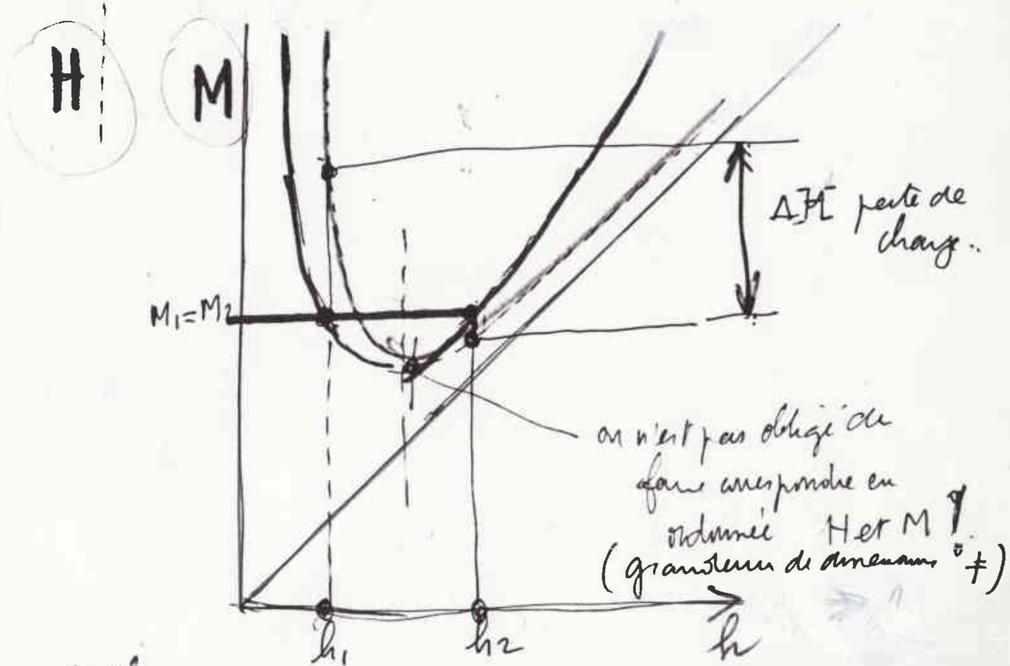
$$\frac{dM}{dh} = \rho \left(-\frac{q^2}{h^2} + \frac{2gh}{2} \right)$$

minimum : $\frac{q^2}{h^2} = gh \to gh^3 = q^2$

$$gh^3 = u^2 h^2$$

$$\boxed{u = \sqrt{gh}}$$

regime critique



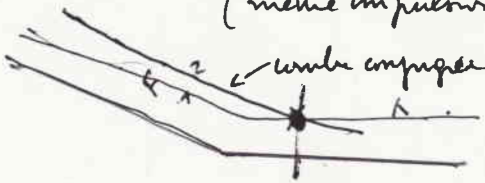
$H = h + \frac{U^2}{2g}$

Pour le régime critique :

$$M_c = \rho q U_c + \frac{\varpi h_c^2}{2}$$

localisation du ressaut :

On utilise la ligne d'eau du régime conjugué du régime torrentiel réel (même impulsion totale).



courbe conjuguée (sur la courbe $M = c^{te}$)

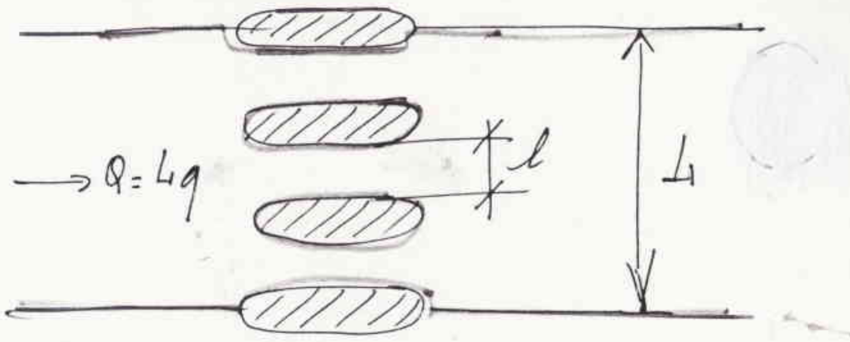
longueur du ressaut : 5 à 7 $(h_2 - h_1)$

on admettra 6 $(h_2 - h_1)$

(Voir notes personnelles)

3°/ Remous dû à un pont : ✗

TD



q = débit par unité de largeur.

l = débouché linéaire d'une travée

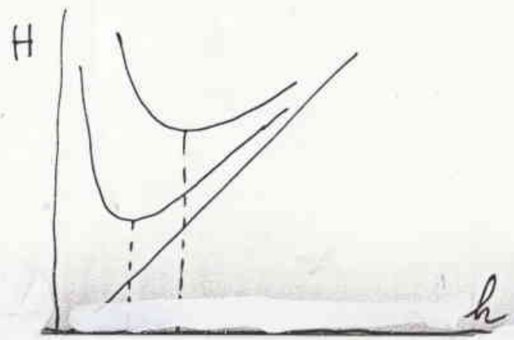
n = nombre d'intervalles.

nl = débouché linéaire total.

Principe : q' = débit sous le pont

$$\boxed{q' = q \cdot \frac{L}{nl}}$$

4 cas sont à envisager



Voir poly. p 109

exemple :

Chapitre 8

LES DEVERSOIRS

A Généralités

1) Définitions
2) Classification
3) Allure du phénomène
4) Forme de la nappe déversante

B DEVERSOIR EN MINCE PAROI

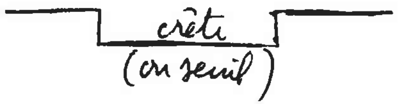
1) Expression du débit
2) Application (irrigation)
3) Variation du coefficient m_1
4) Déversoirs triangulaires
5) Déversoirs avec loi de débit fixée à l'avance.

C DEVERSOIRS A SEUIL EPAIS

1) Expression du débit
2) Largeur du déversoir d'un barrage

A — GENERALITES (les déversoirs).

1) **Définition** : orifice ouvert à sa partie supérieure



2) **Classification**

a) suivant la longueur du seuil

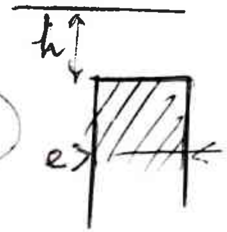
déversoir en mince paroi

$h > 2e$

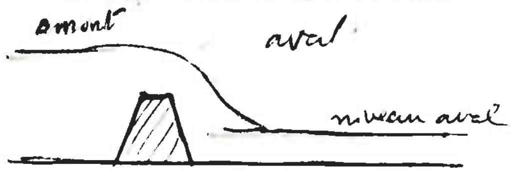
(h = charge) ou $e < \frac{h}{2}$

déversoir à seuil épais :

$h < 1{,}5\ e$ $\quad e > \frac{2h}{3}$



b) Suivant le niveau aval

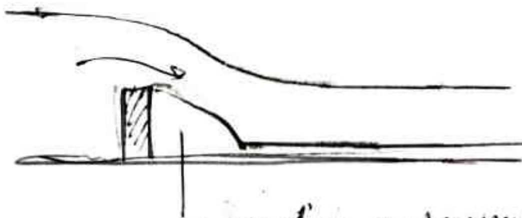


déversoir dénoyé

déversoir noyé

3) Allure du phénomène

4) forme de la nappe déversante

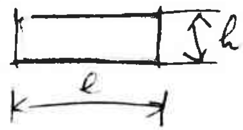


masse d'air emprisonnée (ou d'eau)
(aération latérale)

B — Le déversoir en mince paroi

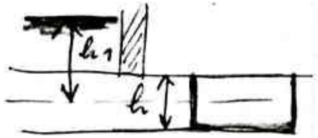
1) Expression générale du débit

h = charge au-dessus du seuil



Voir orifices

$$Q = \underbrace{m}_{m\,ec}\ \underbrace{(l.h)}_{\text{section } S}\ \sqrt{2gh_1}$$



si $h_1 \to h/2$ $\to$ $Q = \frac{m}{\sqrt{2}}\ l h\ \sqrt{2gh}$

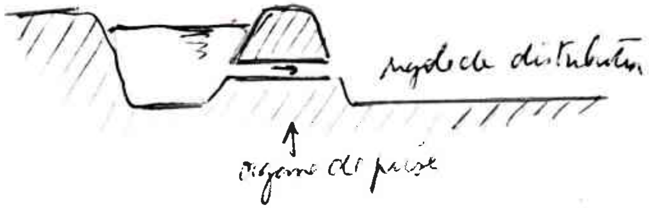
exercice $m_2 = 0{,}4$

$$\rightarrow Q = m_1 \cdot l \sqrt{2g} \cdot h^{3/2} \quad \text{avec } m_1 = 0{,}44$$

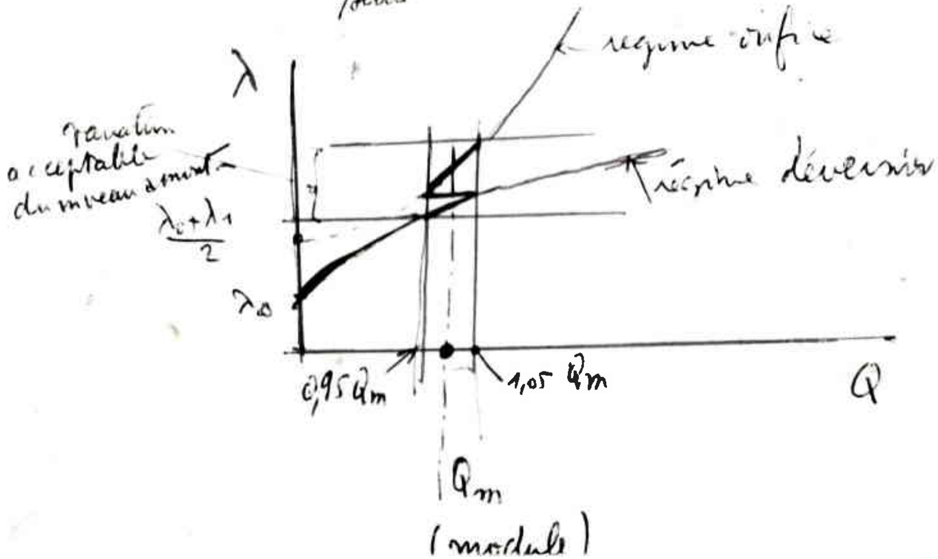
vérifié par l'expérience.

2) Application pratique à l'irrigation :

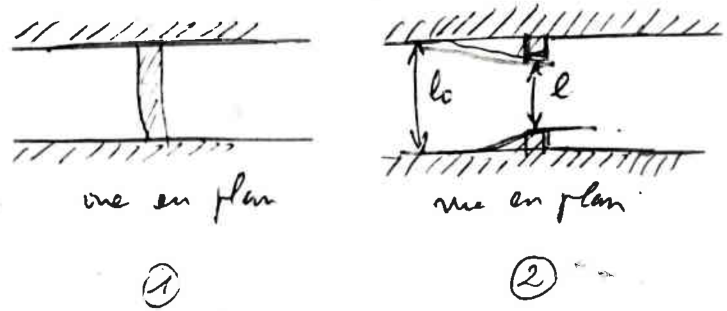
canal d'alimentation (tertiaire)



module à masque fonctionnement



3) Variation du coefficient de débit m_1



Cas 1 Formule de BAZIN (sans contraction)

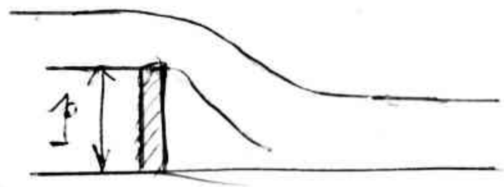
(sans contraction latérale)

$$m_1 = \left(0{,}405 + \frac{0{,}003}{h}\right)\left[1 + 0{,}55\left(\frac{h}{p+h}\right)^2\right]$$

voir figure

Formule de REHBOCK

$$m_1 = \left[0{,}45 + \frac{1}{1000h + 1{,}6}\right]\left(1 + 0{,}55\left(\frac{h}{p+h}\right)^2\right)$$

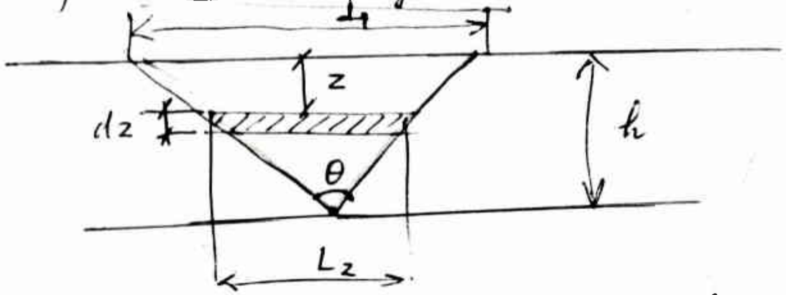


Cas 2

(avec contraction latérale)

$$m_1 = \left[0{,}405 - 0{,}03\,\frac{l_0 - l}{l_0} + \frac{0{,}0027}{h}\right]\left[1 + 0{,}55\left(\frac{l}{l_0}\right)^2\left(\frac{h}{p+h}\right)^2\right]$$

4) Déversoirs triangulaires



expression du débit en fonction de la charge

$$L_z = L \cdot \frac{h-z}{h}$$

$$dQ = m_1 L_z dz \sqrt{2gz} = m_1 L \, \frac{h-z}{h}\sqrt{2gz}\, dz$$

$$\rightarrow Q = \frac{m_1 L \sqrt{2g}}{h}\int_0^h (h-z)\sqrt{z}\, dz$$

$$= m_1 \frac{L}{h}\sqrt{2g}\left[h \cdot \frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{2}{5} z^{5/2}\right]_0^h =$$

$$= m_1 \frac{L}{h}\sqrt{2g} \times \frac{4}{15} \times h^{5/2} \quad \text{avec } \frac{L}{h} = 2\, tg\frac{\theta}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{8}{15}\, m_1\, tg\frac{\theta}{2}\, h^2\sqrt{2gh}}$$

Q est proportionnel à $h^{5/2}$

5) Détermination du profil d'un déversoir dont le débit obéit à une loi $Q = F(h)$ donnée à l'avance.

$$Q = F(h) = \int_0^h m_1 f(z)\sqrt{2g(h-z)}\, dz$$

$$= 2\int_0^h m_1 \left[f(z).dz\right]\sqrt{2g(h-z)} =$$

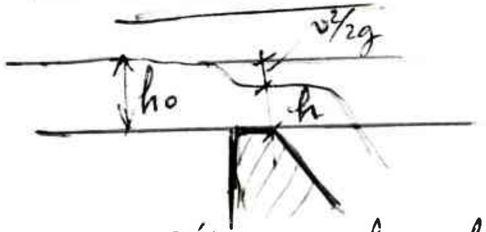
$$= 2m_1\sqrt{2g}\int_0^h f(z)\sqrt{h-z}\, dz = F(h)$$

pour obtenir $f(z)$ il faut résoudre cette équation !!

C DEVERSOIRS A SEUIL EPAIS

– Etude du débit à écoulement libre à charge spécifique constante $\rightarrow h = \frac{2}{3} h_o$ (régime critique)

– Etude directe



Débit : $h_o = h + \frac{v^2}{2g}$ (Bernoulli)

Principe de BOUSSINESQ
le régime stable $\Longleftrightarrow$ à Q maxi

$$Q = h \times l \sqrt{2g(h_o - h)}$$

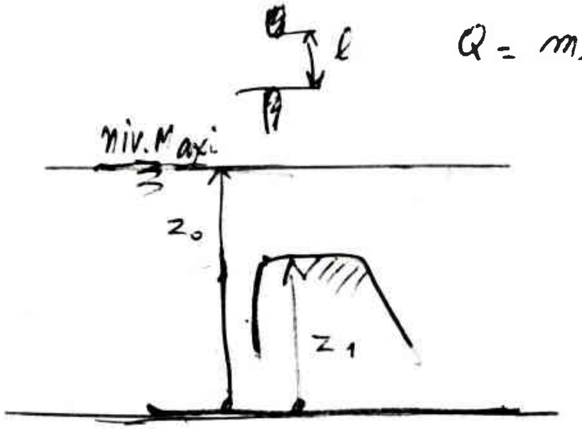
$$\frac{dQ}{dh} = 0 \rightarrow l\sqrt{2g}\left[\sqrt{h_o - h} - \frac{h}{2\sqrt{h_o - h}}\right] = 0$$

ou $2(h_o - h) - h = 0 \rightarrow \boxed{h = \frac{2}{3} h_o}$

$$\rightarrow Q = \frac{2}{3} h_o l \sqrt{2g \frac{h_o}{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} l h_o \sqrt{2gh_o}$$

$\boxed{Q = 0{,}385\, l h_o \sqrt{2gh_o}}$ loi semblable à celle du déversoir

Calcul de la largeur d'un déversoir de barrage



$$Q = m_1 l (z_o - z_1)\sqrt{2g(z_o - z_1)}$$

Il faut connaître Q_o

CHAPITRE 9

LES ECOULEMENTS SOUTERRAINS

A) Aspects généraux des écoulements souterrains

1) Le sol milieu poreux — porosité totale
2) l'eau dans le sol (eau libre, eau liée).
3) écoulement | libre
| sous pression

B) Loi de DARCY

1) L'écoulement souterrain est laminaire
2) Débit : loi de DARCY
3) Les 3 vitesses : (apparente
(réelle
(vitesse de filtration
4) Généralisation de la loi de DARCY
| expression vectorielle
| cas des sols anisotropes :
le tenseur de perméabilité

C) Applications élémentaires de la loi de DARCY

1) Écoulement vertical
2) — horizontal
3) Nappes cylindriques.
4) — de révolution

D) Théorie des écoulements à potentiel

(rappel : à traiter cela n'a pas été fait)

1) Généralités
- Définition
- Propriétés fondamentales de la fonction potentielle
- Mouvements à potentiel simples.

2) Propriétés des écoulements à potentiel
- Nullité du vecteur "Tourbillon"
- Fonction de courant, fonction potentielle (fonctions harmoniques)
- Théorème de LAGRANGE
  Énergie des particules fluides
  Théorème
  Origine des mouvements tourbillonnaires

3) Principes généraux de l'étude des fluides incompressibles en écoulement plan irrotationnel
- Double réseau orthogonal
- Potentiel complexe
- Méthodes générales d'étude.
  a) Transformation conforme
  b) Superposition de plusieurs écoulements

130

130

E Application de la théorie des écoulements à potentiel aux écoulements souterrains

1) Equation fondamentale de l'écoulement souterrain

2) Calcul d'un écoulement, Conditions aux limites

3) Exemple d'application de la méthode analytique
Circulation d'eau autour de palplanches. risque de renards

Les écoulements souterrains

A Aspects généraux des écoulements souterrains

1°/ le sol milieu poreux – porosité totale

partie colloïdale $\varphi < 2\mu$
courbe granulométrique
Tamisage.

loi de STOKES

$$V = \frac{2}{9} \frac{g r^2 (\sigma - \rho)}{\mu} = K \cdot d^2$$

σ = masse volumique du solide
ρ = ——— de l'eau.
μ = viscosité dynamique

p. 125

$K_{20°} = 0,886 \cdot 10^6$ MKS.

$$\text{porosité totale} = \frac{\text{volume des espaces lacunaires}}{\text{volume apparent du sol}}$$

$0,3 < p_t < 95$

2°/ eau libre, eau liée

(égoutter de l'eau).

macro porosité
micro

p_a

petits canaux:

macro porosité + micro porosité = porosité totale
(ou porosité d'aération)
ou capacité de libre écoulement
exemple pour un sol.

porosité totale = 0,42
macroporosité = 0,12
micro ——— = 0,30

3°/ écoulement libre, écoulement sous pression

B) Une loi fondamentale : la loi de DARCY

1°/ L'écoulement ~~souterrain~~ est laminaire

$V = 10\ cm/s = 10^{-1}\ m/s$

$D = 1cm = 10^{-2}\ m.$

$\nu_{eau} = 10^{-6}\ m^2/s$ (viscosité)

$\rightarrow R_e = 10^3 < 2000$ → écoulement laminaire.

Lois de POISEUILLE →

$$Q = \frac{\pi}{8\mu}\left(\frac{\Delta p^*}{l}\right) R^4 = \frac{\pi\varpi}{8\mu} J . R^4$$

car $J = \frac{\Delta p^*}{\varpi} / l$

$$Q = \left(\frac{\varpi}{8\mu} R^2\right)\pi R^2 J = C . s . J$$

$s = \pi R^2$

$$C = \frac{\varpi R^2}{8\mu} = \frac{g R^2}{8\nu}$$

La constante C dépend seulement du complexe (sol, eau), i.e. des caractéristiques du sol

soit p_a la "capacité de libre écoulement" (ou "porosité d'aération")

soit S la section du sol considérée

$p_a S = \sum s$

$\rightarrow Q = \sum q = C J \sum s = C J p_a S$

si on posant $C p_a = K$

$$\boxed{Q = K S J} \quad (1)$$

2°/ Débit de l'écoulement : loi de DARCY

loi mémoire de DARCY (1856)

les fontaines publiques de la ville de DIJON

vérif : expérience de CASAGRANDE

30 les 3 vitesses :

135

vitesse de filtration : coeff^t K

sols très perméables : $K = 10^{-3}$ m/s

— normaux $K = 10^{-5}$ m/s

— très peu perméables $K = 10^{-7}$ m/s

vitesse apparente : $Q = KSJ$

C'est : $\frac{Q}{S} = \bar{V} = \underbrace{K.J}$

(vitesse moyenne fictive

vitesse réelle moyenne

section libre $p_a S$

$\rightarrow V' = \frac{K}{p_a}$

$p_a \sim 0{,}08$ à $0{,}15$

vitesse réelle ~ 10 fois la vitesse apparente

136

4° Généralisation de la loi de DARCY

limites
selon HAZEN $D_{10} < 3$ mm

D_{10} = diamètre tel que 10% des particules sont plus fines

La loi de DARCY est la loi de base en hydraulique souterraine

$$V = KJ$$

A l'intérieur d'un sol homogène gorgé d'eau, en un point quelconque M la vitesse apparente d'écoulement est donnée par

$$\boxed{\vec{V} = - K . \overrightarrow{\text{grad}}\, h}$$

K = vitesse de filtration (voir ci-dessous)

$$h = z + \frac{p}{\omega} + \underbrace{\frac{V^2}{2g}}_{\text{négligeables}} = \text{charge}$$

le champ de vitesse dans les écoulements souterrains dérive d'un potentiel

De façon générale, si le sol n'est pas homogène et isotrope

$K(x,y,z)$

est un tenseur défini par 6 composants.

$$\left\| \begin{matrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & K_{zz} \end{matrix} \right\|$$

et la loi de DARCY s'écrit:

$$\vec{V} = - \overline{\overline{K}} . \overrightarrow{\text{grad}}\, h$$

C APPLICATIONS

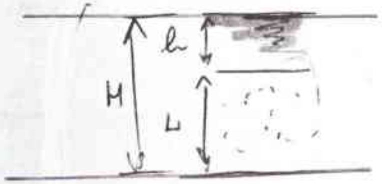
Supposons un sol homogène et isotrope

C) Applications élémentaires de la loi de DARCY

1°) Ecoulement vertical

pente motrice : $I = \dfrac{H}{L}$

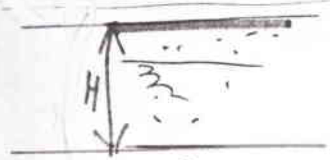
cas d'une colonne de terre verticale



$H = L + h$

$\rightarrow I = \dfrac{H}{L} = \dfrac{L+h}{L}$

1er cas



$H = L \rightarrow I = 1$

mais dans ce cas il faut diminuer H de λ (hauteur d'ascension capillaire)

$\rightarrow I = \dfrac{H-\lambda}{L} = \dfrac{H-\lambda}{H} < 1$

2e cas

avec $\lambda = \dfrac{4A}{\varpi D}$

A = constante capillaire : en MKSA : $A = 0{,}07$ kg/masse/s²

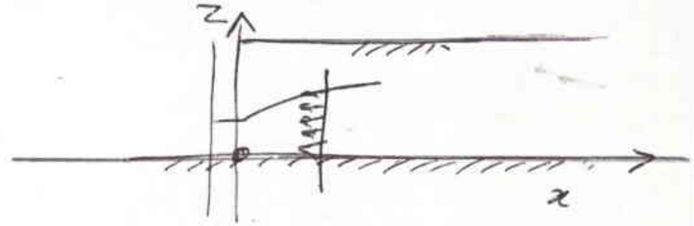
D = diamètre moyen des particules

2) Ecoulement horizontal.

nappes souterraines en mouvement

hypothèse de DUPUIT

$V = -K . \dfrac{dz}{dx}$.



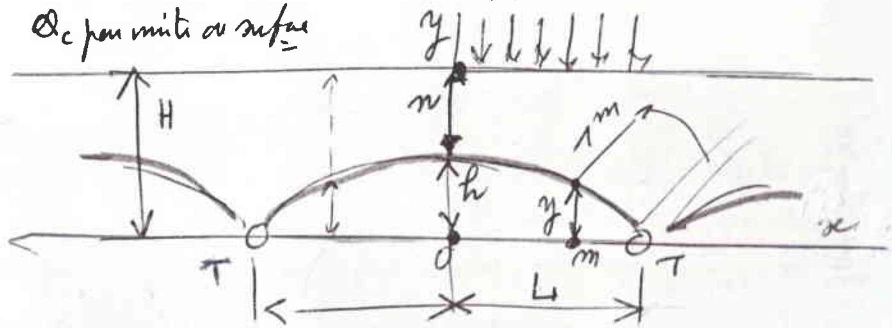
3) Etude des nappes cylindriques :

écoulements plans :

1) écoulement entre 2 fossés

2) nappe drainée verticalement

Q_c par unité de surface



régime permanent

écartement $E = 2L$

q_c = débit caractéristique

$$Q = KSI$$

$Q = q_c \cdot x \cdot 1\,m$

$K = K_s$

$S = y \times 1\,m$

$I = -\frac{dx}{dy}$

$$\rightarrow \boxed{q_c x = K_s \cdot y \frac{dy}{dx}} \qquad (1)$$

$$\rightarrow q_c x^2 + K_s y^2 = cte \qquad (2)$$

$n = m + \lambda$ et $h = H - n$

m = approche maxi de la nappe
λ = hauteur d'ascension capillaire

pour $x = 0 \rightarrow y = h$

$\rightarrow Cte = K_s h^2$

mais la nappe passe par les drains

$\rightarrow Cte = q_c L^2$

$$\rightarrow q_c x^2 + K_s y^2 = q_c L^2$$

ou $\boxed{\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1}$ (3)

$\frac{1}{2}$ ellipse

avec $K_s h^2 = q_c L^2$ on en posant $E = 2L$

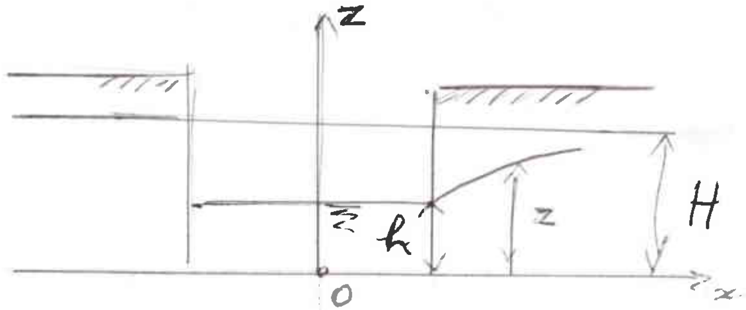
$$\boxed{E^2 = \frac{4Kh^2}{q_c}} \qquad (4)$$

relation entre l'écartement des drains et la charge de la nappe

(4) → $h = \frac{E}{2}\sqrt{\frac{q_c}{K_s}}$

4) Étude des nappes de révolution :

Théorie élémentaire du puits :



$Q = K S I$ avec $S = 2\pi x z$ et $I = \frac{dz}{dx}$

$Q = -K \cdot 2\pi x z \frac{dz}{dx}$ ou

$Q \cdot \frac{dx}{x} = -\pi K \, 2z \, dz$

$$\boxed{Q \cdot \log \frac{x}{x_0} = \pi K (z_0^2 - z^2)}$$

en réalité :

$$Q \log. \frac{x_0}{x} = \pi K (z_0^2 - z^2)$$

- la nappe passe par A ($x_0 = r$; $z_0 = h$)

soit R le rayon d'action du puits

la nappe passe par le point $z = H$; $x =$ [illegible]

→ $$\boxed{Q = \frac{\pi K (H^2 - h^2)}{\log \frac{R}{r}}} \quad (1)$$

pour un puits peu profond et de petit diamètre on peut admettre, en première approximation

$$\frac{R}{r} = 100 \times x \quad (2)$$

(hypothèse de PORCHET)

l'expression $\frac{\pi}{\log \frac{R}{r}} = \frac{3{,}14}{4{,}605} = 0{,}682 \sim \frac{2}{3}$

($\log \frac{R}{r} = \log_{nep} 100 = 4{,}605$ Porcher attribue).

→

$$\rightarrow Q = \frac{2}{3} K \left(H^2 - h^2\right)$$

$$= \frac{2K}{3} \left(H + h\right)\left(H - h\right)$$

avec $H - h = \Delta$

$H + h = 2H - \Delta$

$$\rightarrow \boxed{Q = \frac{2K}{3} \left(2H - \Delta\right)} \quad (3)$$

Remarque prise en compte de l'arrivée d'eau par le fond

on remplace dans la formule (3)

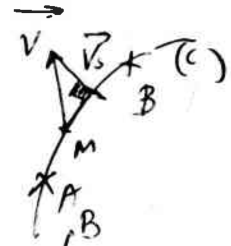
H par $H' = H + \frac{h}{2}$

D) Théorie des écoulements à potentiel

1) Généralités

1,1 Définition Circulation de vitesse :

$$\vec{V} \begin{cases} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{cases}$$



$$\Gamma = \int_A^B \vec{V} \cdot \vec{ds} = \int_A^B V_s \cdot ds = \int_A^B u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

exemples : (1) ligne de courant : cercles concentriques

(1) $V = Kr$

$$\rightarrow \Gamma_1 = \oint_C V\,ds = K r_1 \times 2\pi r_1 = 2\pi K r_1^2$$

(2) même ligne de courant, mais $V = \frac{K}{r}$

$$\rightarrow \Gamma_1 = \oint_C V\,ds = \frac{K}{r_1} \times 2\pi r_1 = 2\pi K$$

$= cte$

(3) écoulement quelconque : Γ varie avec la ligne choisie pour aller de A à B

écoulement à potentiel

si $u\,dx + v\,dy + w\,dz$

est une différentielle totale exacte

$$\rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \; ; \; \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

dans ce cas Γ ne dépend plus du chemin

et il existe une fonction $\varphi(x,y,z)$

telle que

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad \text{ou } \vec{V} = \overrightarrow{grad}\,\varphi$$

(c'est un écoulement à potentiel des vitesses, (écoulement irrotationnel)

Surfaces (lignes) équipotentielles

$\varphi(x,y,z) = 0$ surfaces équipotentielles

écoulements plans

- le vecteur vitesse reste // à un plan fixe
- il garde même grandeur et même direction en tout les points d'une normale à ce plan.

1,2 Propriétés fondamentales de la fonction Potentiel (écoulements plans)

$$\vec{V} \begin{cases} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}$$

$\vec{V}$ est $\perp$ à la ligne équipotentielle passant en M.

en coordonnées polaires : $\vec{V} \begin{cases} V_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \\ V_\theta = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases}$

Soit $\psi(x,y)$ la <u>fonction de courant</u> de l'écoulement

$$\vec{V} \begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \qquad \psi = cte$$

($\vec{V}$ est porté par la tangente de la ligne de courant en M.

Les lignes de courant et les lignes équipotentielles $\varphi(x,y) = cte$ forment 2 réseaux orthogonaux.

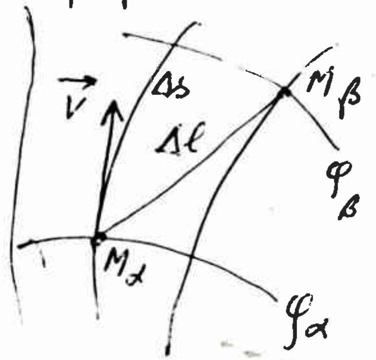
En coordonnées polaires

$$\vec{V} = \begin{cases} V_r = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ V_\theta = -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

Ecartement des lignes equipotentielles:

$\overrightarrow{M_\alpha M_\beta} = \overrightarrow{\Delta l}$

$\vec{V} \begin{vmatrix} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{\Delta l} \begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$



$$\Delta\Gamma = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\Delta l} = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy = \beta - \alpha = \underline{cte}$$

(circulation de vitesse) $= \vec{V} \cdot \overrightarrow{\Delta s}$

or $\overrightarrow{\Delta Q} = \left| \vec{V} \wedge \overrightarrow{\Delta l} \right| = d\psi$

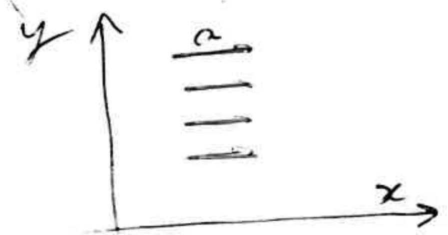
$\vec{V}$ est inversement proportionnelle à l'écartement des equipotentielles

$$\Gamma_{M_\alpha M_\beta} = \int_{M_\alpha}^{M_\beta} u\,dx + v\,dy = \beta - \alpha$$

(1) 1.3

Mouvements à potentiels simples

Écoulement parallèle et uniforme



$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\boxed{\psi(x,y) = ay = cte}$$

$$\vec{V} \begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = a \\ v = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$Q = a(y_1 - y_2)$$

Fonction potentiel : lignes orthogonales $x = cte$

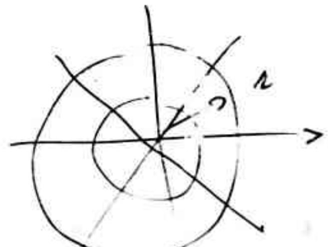
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\boxed{\varphi(x,y) = ax = cte}$$

Source – Puits (

$- Q_0 = 2\pi r V = cte$ indépendant de r



$$\rightarrow V = \frac{Q_0}{2\pi} \frac{1}{r}$$

$\theta = cte$

Fonction de courant :

$$\rightarrow \psi(r,\theta) = K\theta$$

a $Q_{1,2} = K(\theta_2 - \theta_1)$

et pour tout cercle $Q = 2\pi K$

$$\rightarrow K = \frac{Q_0}{2\pi} \rightarrow \boxed{\psi = \frac{Q_0}{2\pi}\theta}$$

autrement :

$$\begin{cases} V_r = \dfrac{1}{r}\psi'_\theta = \dfrac{Q_0}{2\pi}\dfrac{1}{r} \rightarrow \psi'_\theta = \dfrac{Q_0}{2\pi} \\ \qquad \psi = \dfrac{Q_0}{2\pi}\theta \\ \dfrac{1}{r}V'_\theta = \psi'_r = 0 \end{cases}$$

Si la fonction potentiel existe :

$$\vec{v} \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \psi}{\partial \theta} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} \\ -\dfrac{\partial \psi}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Q_0}{2\pi}\frac{1}{r} \rightarrow \boxed{\varphi = \frac{Q_0}{2\pi}\log r}$$

Puits éq. analogue –

<u>Vortex</u> = <u>tourbillon pur</u>
(vitesse tangentielle). $v = \frac{c}{r}$

lignes de courant : $r = cte$

$$\vec{V} \begin{cases} V_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0 \\ V_t = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{c}{r} \end{cases} \rightarrow \boxed{\psi = -c\log r}$$

Circulation de vitesse le long d'un cercle de centre O

$$\Gamma = 2\pi r\frac{c}{r} = Cte \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow \boxed{C = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}}$$

$$\boxed{\psi = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}\operatorname{Log} r}$$

Fonction potentielle

$$\vec{V} \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{c}{r} \end{cases} \rightarrow \varphi = c.\theta$$

$$\rightarrow \boxed{\varphi = \frac{-\Gamma_0}{2\pi}\theta}$$

ou ± suivant le sens de rotation

2. <u>Propriété des écoulements à potentiel</u>

2,1 <u>nullité du vecteur tourbillon</u>

$$\vec{V} \begin{pmatrix} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Dans un mouvement à potentiel, le vecteur tourbillon est nul (écoulement irrotationnel)

<u>Rem</u> : $\vec{T} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v - \frac{\partial}{\partial y}u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right) = 0$$

2.2 Fonction potentielle et fonction de courant sont harmoniques:

eq. de continuité $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{V} = 0}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\Delta \varphi = 0} \text{ ou } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Fonction de courant

$$\vec{rot}\,\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

$$\boxed{\Delta \psi = 0}$$

2.3 Théorème de LAGRANGE

énergie des particules fluides:

$$\frac{V^2}{R} = N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}$$

T, N composantes de la pression

eq. caractéristique du mouvement à potentiel

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{r} - \frac{\partial V}{\partial n}\right)$$

$$\rightarrow \quad V\frac{\partial V}{\partial n} - N + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

intégrons p.r. à n

(si N dérive d'un potentiel)

$$\rightarrow \quad V^2 + U + \frac{p}{\rho} = cte$$

Dans un écoulement à potentiel, l'énergie de toutes les particules est la même (car on a aussi Bernoulli)

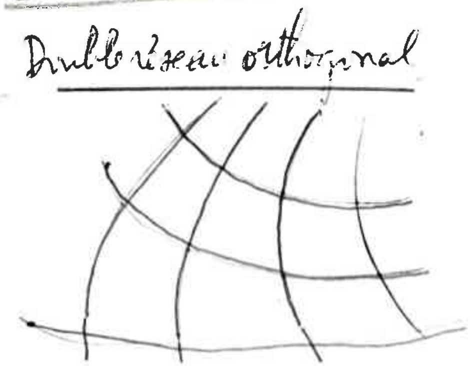
Théorème de Lagrange: Dans un fluide parfait où la densité n'est fonction que de la pression, soumis à un champ de force dérivant d'une fonction de force, si les vitesses dérivent d'un potentiel à un instant donné, il en est de même à tout instant ultérieur

Conséquence : les mouvements tourbillonnaires ne peuvent être engendrés que par les frottements.

---

3) Principes généraux de l'étude des fluides incompressibles en écoulement plan irrotationnel.

3.1 Double réseau orthogonal



3.2 Potentiel complexe

fonction de variable complexe

$$f(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y)$$

avec $z=x+iy$

la fonction $f(z)$ est analytique si elle admet une dérivée, i.e. $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ a une limite indépendante de la façon dont $\Delta z \to 0$

Dans ce cas φ et ψ satisfont à l'équation de Laplace

$f(z) = Z$ avec $Z = X + iY$

et $X = f_1(x,y)$
$Y = f_2(x,y)$

exprime une transformation conforme du plan des z au plan des Z

Potentiel complexe : $\boxed{f(z)=\varphi(x,y)+i\,\psi(x,y)}$

On démontre que $\dfrac{df}{dz} = u - iv$

en effet

$$df=(\varphi'_x\,dx+\varphi'_y\,dy)+i(\psi'_x\,dx+\psi'_y\,dy)$$

$$=dx(\varphi'_x+i\psi'_x)+dy(\varphi'_y+i\psi'_y)=$$

$$=dx(u-iv)+dy(v+iu)$$

mais $v+iu=i(u-iv) \to$

$$df=(u-iv)(dx+i\,dy)=dz(u-iv)$$

exemples :

Ecoulement rectiligne uniforme $f(z) = Vz$

Source : $f(z) = \frac{Q_0}{2\pi} L z$

Vortex : $f(z) = \frac{-i\Gamma_0}{2\pi} L z$

3.3 Methodes générales d'étude

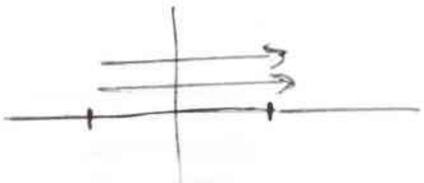
3.3 a) transformations conformes

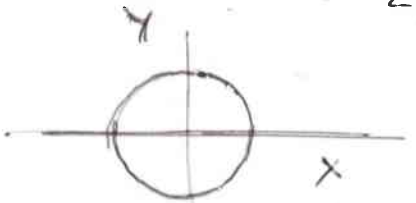
exemple $f(x) = Vz$

transformation $z = Z + \frac{1}{Z}$

(transformation de JOUKOWSKI)

écoulement transformé : $\rightarrow F(Z) = V\left(Z + \frac{1}{Z}\right)$





3.3 b) Superposition de plusieurs écoulements

principe :

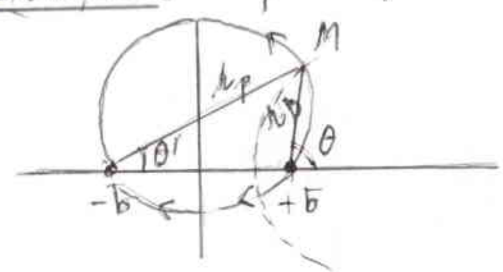
si 2 fonction f_1 et f_2 sont solutions de l'équation de LAPLACE

$$\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 0$$
$$\Delta\psi_1 = \Delta\psi_2 = 0$$

la fonction $f_1 + f_2$ (ou toute combinaison linéaire $af_1 + b\varphi_2$ est aussi une solution de l'équation de Laplace

- les cotes des lignes de courant | équipotentielles | s'ajoutent algébriquement
- les vitesses se composent vectoriellement (les pressions ne s'ajoutent pas)

Exemple : puits + source



$$f_{source} = \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log}(z-b) = \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log} r_s e^{i\theta}$$

$$f_{puits} = -\frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log}(z+b) = \frac{-Q_0}{2\pi} \operatorname{Log} r_p e^{i\theta'}$$

$$f = f_s + f_p = \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{z-b}{z+b} =$$

$$= \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{r_s}{r_p} e^{i(\theta-\theta')} = \frac{Q_0}{2\pi}\left[\operatorname{Log}\frac{r_s}{r_p} + i(\theta-\theta')\right]$$

$$\varphi = \frac{Q_0}{2\pi} \operatorname{Log} \frac{r_s}{r_p}$$

$$\psi = \frac{Q_0}{2\pi} (\theta-\theta')$$ faisceau des cercles passant par s et p

<u>Doublet</u> : si $b \to 0 \to$ doublet

$$\to \frac{Q_0}{2\pi} \cdot 2b = \frac{Q_0 b}{\pi} \to m$$

$$\to \frac{Q_0}{2\pi} \log \frac{z-b}{z+b} \sim \frac{Q_0}{2\pi} \log\left(1 - \frac{2b}{z}\right) \sim \frac{Q_0}{2\pi} \cdot 2b \cdot \frac{1}{z}$$

car $\operatorname{Log}(1+\varepsilon) \sim \varepsilon$

autre exemple

Superposition de l'écoulement autour d'un cercle avec vitesse uniforme V_0 à l'infini et d'un vortex

$$f(z) = V_0\left(z + \frac{a^2}{z}\right) - \frac{i\Gamma_0}{2\pi} \log \frac{z}{a}$$

fonction potentielle

$$\varphi = \frac{\Gamma_0}{2\pi}\theta + V_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta$$

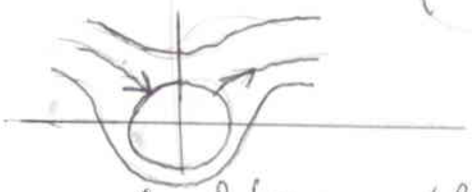
fonction de courant

$$\psi = -\frac{\Gamma_0}{2\pi}\log\frac{r}{a} + V_0\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta$$

ligne de courant $\boxed{\psi = 0}$

cercle de rayon $r = a$

courbe ψ_0 : $\left(\sin\theta = \dfrac{\Gamma_0}{2\pi V_0 r}\dfrac{\log\frac{r}{a}}{\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)}\right)$



si $r \to a$ ceci $\to \frac{1}{2}$

le cercle de rayon a et la courbe ψ_0 se coupent aux points $r = a$ et $\sin\theta = \dfrac{\Gamma_0}{2\pi V_0 a}$

verifier

à la limite $F = \dfrac{m}{z} = m\left(\dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$

$$\varphi = \frac{mx}{x^2+y^2}$$

$$\psi = \frac{-my}{x^2+y^2}$$

E) Application de la théorie des écoulements à potentiel aux écoulements souterrains

1°) Equation fondamentale de l'écoulement souterrain

- existence d'un potentiel des vitesses

la loi de DARCY →

$$\vec{V} = -K\,\overrightarrow{\text{grad}}\,h \quad \text{avec } h = z + \frac{p}{\varpi}$$

SLICHTER (1897) a généralisé cette équation dans un espace à 3 dimensions homogène et isotrope.

$$\vec{V}\begin{cases} u = -K\dfrac{dh}{dx} \\ v = -K\dfrac{dh}{dy} \\ w = -K\dfrac{dh}{dz} \end{cases}$$

or $\operatorname{div}\vec{V} = 0$ (éq. de continuité)

$$\longrightarrow \operatorname{div}\vec{V} = -K\,\operatorname{div}.(\overrightarrow{\text{grad}}\,h) = 0$$

$$= -K\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}\right) = 0$$

ou $\boxed{\Delta h = 0}$ laplacien $= 0$

h est donc une fonction harmonique.

Fonction potentielle et fonction de courant (cas du mouvement plan)

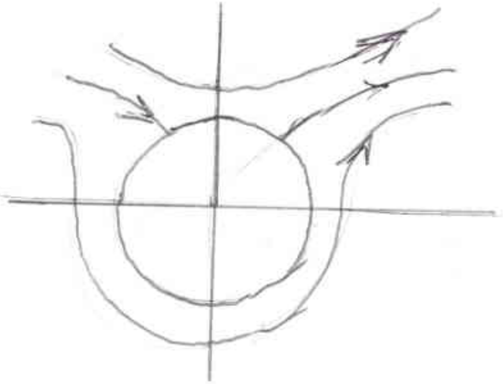
appelons $\boxed{\varphi = Kh}$ la fonction potentielle

et dq le débit traversant la section élémentaire $ds = dl \times 1\,m$

On a $dq = \left|\vec{V} \wedge \vec{dl}\right|$ avec $dl\begin{vmatrix} dx \\ dy \end{vmatrix}$ $\quad V\begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}$

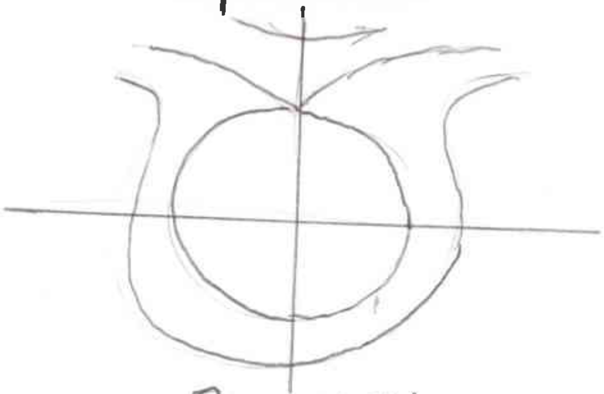
$dq = |v\,dx - u\,dy|$ différentielle totale exacte

$$\rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{\partial q}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial q}{\partial x} \end{cases}$$

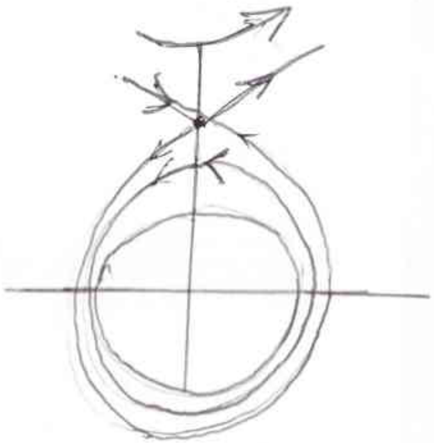


$\Gamma_0 < 4\pi V_0$

2 points d'arrêt



$\Gamma_0 = 4\pi V_0$



$\Gamma_0 > 4\pi V_0$

1 point de vitesse nulle.

De même, la fonction de courant $q(x,y)$ obéit aux équations (φ étant la fonction potentielle) :

$$\frac{dq}{dy} = u = K\frac{dh}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}$$

$$-\frac{dq}{dx} = v = K\frac{dh}{dy} = \frac{d\varphi}{dy}$$

(F) Calcul d'un écoulement

Conditions aux limites

Un écoulement à potentiel ne peut être calculé que si les conditions aux limites sont bien définies et connues

Cas pratiques

- On connaît le potentiel $\varphi = Kh$ sur une des limites du domaine (équipotentielle) : condition de DIRICHLET

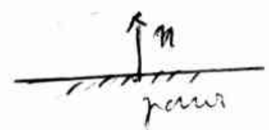
- ou on connaît le gradient $\frac{d\varphi}{dx}$ dans une direction $\vec{n}$ donnée (en général la direction normale) sur une des limites du domaine (ex: on connaît une ligne de courant rectiligne en limite) condition de NEUMANN

Cas courants :

× au contact d'une paroi imperméable

$$\vec{V} = K \cdot \frac{dh}{dn} \quad \text{ou} \quad \frac{dh}{dn} = 0$$

(condition de NEUMANN)



× au contact d'une masse d'eau présentant une surface libre
fond perméable d'une rivière

$$z + \frac{p}{\varpi} = h = cte$$

soit dl le déplacement élémentaire le long du fond

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{dKh}{dl} = 0$$

ou $\varphi = cte$
condition de DIRICHLET.

× au contact de la surface d'une nappe libre

$$\varphi = K \left(z + \frac{p_a}{\varpi} \right)$$

en tout point de la surface $\frac{d\varphi}{dn} = 0$

sur la direction perpendiculaire

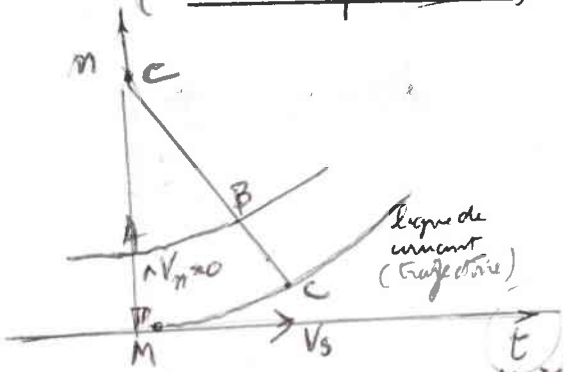
(condition de NEUMANN)

3° Exemples écoulement autour d'une pale planche

Equations dynamiques intrinsèques (mouvement permanent)

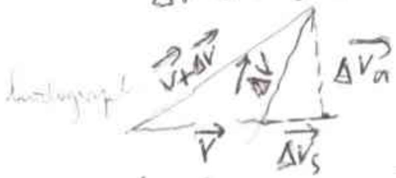
axes Mt, Mn

$$\vec{F} \begin{cases} T \\ N \end{cases}$$



$$\vec{V} \begin{cases} V_s \\ V_n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\gamma} \begin{cases} \gamma_s = \frac{dV_s}{dt} = V_s \frac{\partial V_s}{\partial s} + \cancel{\frac{\partial V_s}{\partial t}} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\ \gamma_n = \frac{dV_n}{dt} = \frac{V_s^2}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{\Delta V_s} + \overrightarrow{\Delta V_n} \quad \text{car} \quad \vec{V} = \vec{V_s} + \vec{V_n}$$



Les équations $\vec{\gamma} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}\, p}$ donnent

$$V \cdot \frac{\partial V}{\partial s} = T - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \qquad (2')$$

$$\frac{V^2}{R} = N - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \qquad (2'')$$

Théorème de LAGRANGE

a) Energie des particules fluides

à l'expression (2) on associe l'équation caractéristique du mouvement à potentiel (nullité du vecteur tourbillon

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}\right) = 0$$

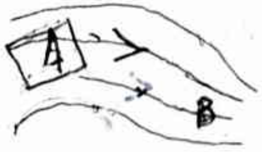
$$\longrightarrow \quad V\frac{\partial V}{\partial n} - N + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = 0$$

Intégrons par rapport à n (si N dérive d'un potentiel) →

$$V^2 + U + \frac{p}{\rho} = C^{te}$$

Dans un écoulement à potentiel l'énergie de toutes les particules de fluide est la même

Théorème de Lagrange - dans une portion du fluide en écoulement A, toutes les particules ont des vitesses qui dérivent d'un potentiel (à un moment donné t_0),



Toutes les particules ont à ce moment là le même énergie.

Cette propriété se conserve pour tout instant ultérieur (t_1) où elles se trouvent en B

ENONCÉ Théorème de Lagrange

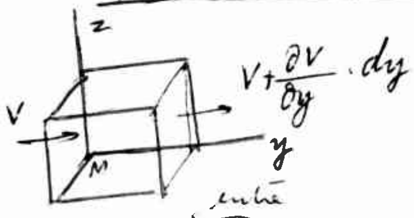
Dans un fluide parfait, où la densité n'est fonction que de la pression, soumis à un champ de force dérivant d'une fonction de force, si les vitesses dérivent d'un potentiel à un instant donné, il en est de même à tout instant ultérieur

Conséquence Origine des mouvements tourbillonnaires

Les mouvements tourbillonnaires ne peuvent être engendrés que par le frottement

Equation de continuité :

(166)



gain en masse =

$$\overbrace{\rho V (dz\,dx).dt}^{\text{entrée}} - \overbrace{\left(\rho V + \frac{\partial \rho V}{\partial y}.dy\right)(dz.dx).dt}^{\text{sortie}} = \frac{\partial \rho V}{\partial y}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

---et de même pour les autres faces

→ au total. $-\left(\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho V}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz\, dt$

Variation de la masse volumique $dx\, dy\, dz\, \frac{\partial \rho}{\partial t}.dt$

(= 0 pour fluides incompressibles)

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho U}{\partial x} + \frac{\partial \rho V}{\partial y} + \frac{\partial \rho W}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Cas des fluides incompressibles :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ou $\boxed{\operatorname{div} \vec{V} = 0}$

(167)

autre méthode pour retrouver l'équation de continuité

Notion de dérivée particulaire

Soit $G(x, y, z, t)$ fonction attachée à l'unité de volume

Soit $I = \iiint_v G\, dv$ étendu au volume v limité par surface S

On suit le volume v du fluide dans son mouvt pendant le temps dt :

$$dI = \underbrace{\iiint_v \left(\frac{\partial G}{\partial t} dt\right) \cdot dv}_{\text{partie commune fixe}} + \underbrace{\iint_S G\left[\vec{V} \cdot \vec{n}\, dt\right] . dS}_{\text{pour l'accroissement de volume}}$$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{dI}{dt}}_{\text{dérivée particulaire}} = \iiint \frac{\partial G}{\partial t} dv + \iint_S G\left[\vec{V} \cdot \vec{n}\right] dS$$

Eq. de continuité Si $G \equiv \rho$ (masse volumique)

$\rightarrow I = \iiint_v \rho\, dv$; $I = C^{te}$ et $\frac{dI}{dt} = 0$

Or : d'après le théorème de RIEMANN OSTROGRADSKY

la dérivée convective → $\iiint_v \operatorname{div} \rho \vec{V} . dv$ →

Annexe

168

Equation de Bernoulli

a) hypothèse de calcul

- fluide parfait, mouvement permanent
- forces de masse dérivant d'un potentiel U, i.e $\vec{F} = \vec{grad\, U}$
- ρ fonction de p seulement
  (pour les fluides incompressibles $\rho = Cte$)

l'équation (2)', soit

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = T - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}$$

(relative à l'unité de masse)
peut être intégrée le long d'une ligne de courant
(ou le long d'une trajectoire puisqu'on est en mouvement permanent)

$$\rightarrow \quad \frac{V^2}{2} + U + \int \frac{dp}{\rho} = Cte$$

(BARRE de St. VENANT)
où ρ n'est fonction que de p

169

Si le fluide est incompressible :
et si les forces de volume se réduisent aux forces de gravité ($-U = +gz$)
↑ potentiel.

$$\rightarrow \quad \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = Cte \quad (3)$$

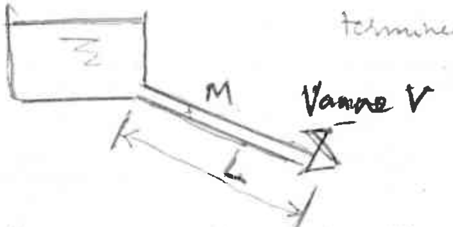
expression relative à l'unité de masse

Chapitre 10

LE COUP DE BELIER

a) Origine

Réservoir F
Conduite de longueur L
terminée par une vanne V



instant 0 : V ouverte
—— T : V fermée

L'énergie cinétique du fluide → pression.
En M, la pression p_M à l'instant 0 devient $p_M + \Delta p_M$ (car Δp_M peut être grand)

Si on suppose l'eau incompressible, on a le coup de bélier de masse
En pratique l'eau et la conduite sont élastiques

b) Etude du coup de bélier de masse

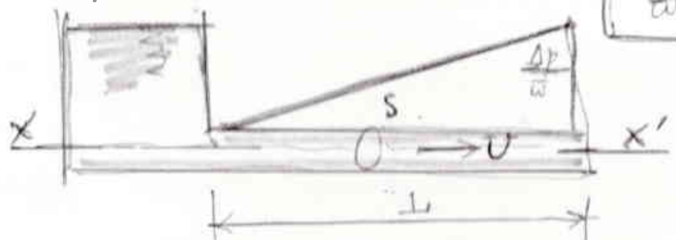
Le théorème d'EULER appliqué à la masse de fluide de la conduite →

variation de quantité de mouvement (pendant ΔT).

$$(\rho L S) U = \Delta(mV)$$

$$\to \frac{\rho L S U}{\Delta T} = \Delta p_o S \quad \to \text{surpression} \quad \boxed{\frac{\Delta p}{\varpi} = \frac{LU}{gt}}$$

temps



en pratique $\boxed{\frac{\Delta p}{\varpi} = \frac{2LU}{gt}}$

application : mesure du débit dans une conduite forcée

172

c] le coup de bélier élastique

1°) Schema de l'étude mathématique

Soit E le coefficient d'élasticité de la conduite

$\frac{1}{\varepsilon}$ ——— de compressibilité de l'eau

D le ϕ de la conduite

e l'épaisseur

équations fondamentales

1] Equation d'EULER selon l'axe :

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial\left(z+\frac{p}{\varpi}\right)}{\partial s} = \frac{\gamma_s}{g} = -\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial V}{\partial t} \qquad (1)$$

$y = \frac{p^*}{\varpi}$

en fait $\frac{\gamma_s}{g} = \frac{1}{g}\left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right)$

négligeable

2] Equation de continuité

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E\rho}\right)\cdot\frac{\partial\left(z+\frac{p}{\varpi}\right)}{\partial t} = -\frac{g}{a^2}\frac{\partial y}{\partial t} \quad (2)$$

car $\frac{ds}{s} = \frac{dp}{E}\cdot\frac{D}{e}$

en posant $\frac{g}{a^2} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{Ee}$

avec $z+\frac{p}{\varpi} = y = \frac{p^*}{\varpi}$

173

Principe du calcul

dérivons (1) par rapport à t
——— (2) ——— s

$\rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial s\,\partial t}$

égalons les 2 valeurs →

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -a^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}} \quad (1)'$$

dérivons (2) par rapport à t
——— (1) ——— s

$\frac{\partial^2 V}{\partial s\,\partial t}$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}} \quad (2)'$$

Ce sont les équations des phénomènes vibratoires.

Intégrons →

174

Vitesses $V = V_0 + \frac{g}{a}\left[f_1\left(t - \frac{s}{a}\right) - f_2\left(t + \frac{s}{a}\right)\right]$

$f_1 + f_2$ fonctions qui dépendent de la loi de fermeture

pressions $z + \frac{p}{\varpi} = y = H_0 + f_1\left(t - \frac{s}{a}\right) + f_2\left(t + \frac{s}{a}\right)$

a est la célérité des ondes dans le phénomène

On a vu que $\frac{g}{a^2} = \frac{1}{\varepsilon} + \frac{D}{E\rho}$

Formule pratique : $a = \frac{9900}{\sqrt{48{,}3 + \frac{KD}{e}}}$

acier $K = 0{,}5$
fonte $K = 1$
plomb $K = 5$
bois $K = 10$

Si $E = \infty \rightarrow K = 0$ ($a =$ Vitesse du son dans l'eau)

Habituellement : $a \sim 1000$ m/s

2. Discussion pratique

a) réflexion d'une onde

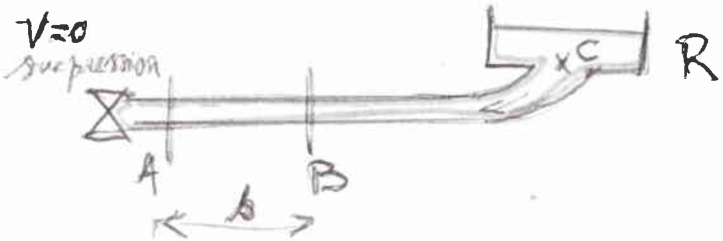
sur vanne, paroi fixe : l'action Δp ne change pas de signe

— V_0 change de signe

sur une surface libre (réservoir)

Δp change de signe

V_0 ne change pas de signe



Voir schéma des pressions et vitesses)

b) fermeture brusque, fermeture lente

fermeture brusque si $T < \frac{2l}{a}$

si $t > \frac{2l}{a}$ (fermeture lente)
la surpression est plus faible

Cas limite $T = \frac{2l}{a}$

$\frac{\Delta p}{\varpi} = \frac{aV_0}{g}$ et $T = \frac{2l}{a}$ → $a = \frac{\Delta p}{\varpi} \cdot \frac{g}{V_0}$

→ $a = \frac{2L}{T}$

d'où $\boxed{\frac{\Delta p}{\varpi} = \frac{2lV_0}{gT}}$

3° Methode de SNYDER-BERGERON

formules d'ALLIEVI : On a vu que

$$\frac{\partial^2(z+\frac{p}{\varpi})}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$$

Solution

$$y = y_0 + \left[F_1\left(t-\frac{s}{a}\right) + F_2\left(t+\frac{s}{a}\right)\right]$$

$$V = V_0 + \frac{g}{a}\left[F_1\left(t-\frac{s}{a}\right) - F_2\left(t+\frac{s}{a}\right)\right]$$

ou

$$y - y_0 = \Delta y = F_1 + F_2$$

$$\frac{a}{g}(V - V_0) = \frac{a}{g}\Delta V = F_1 - F_2$$

éliminant F_1 puis F_2 →

$$\Delta y = -\frac{a}{g}\Delta V + 2F_1\left(t-\frac{s}{a}\right)$$

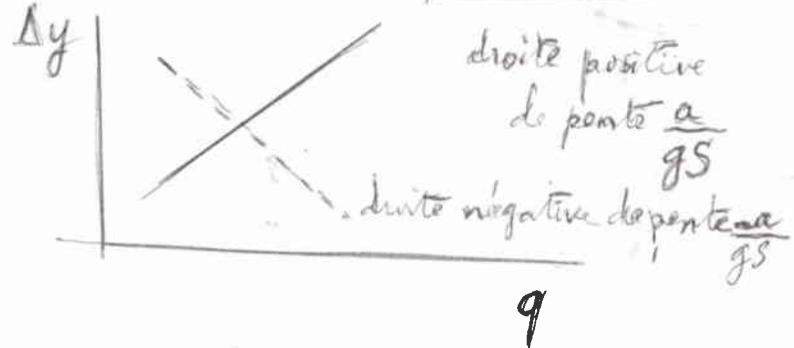
$$\Delta y = \frac{a}{g}\Delta V + 2F_2\left(t+\frac{s}{a}\right)$$

pour un observateur à la vitesse a

$t - \frac{s}{a}$ est constant et $F_1 = cte$

$$\rightarrow \Delta y + \frac{a}{g}\Delta V = 2F_1 = cte$$

ou $V = \frac{q}{S}$ → $$\boxed{\Delta y + \frac{a}{gS}\Delta q = cte}$$



De même observateur à la vitesse $-a$ (dans le sens opposé à l'écoulement)

$F_2 = cte$

$$\rightarrow \Delta y - \frac{a}{gS}\Delta V = F_2 = cte$$

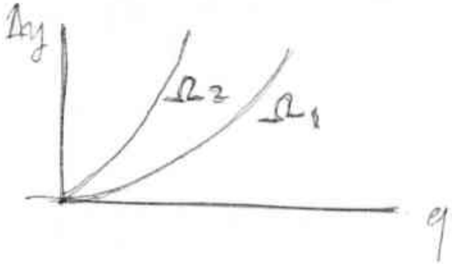
droite de pente $-\frac{a}{gS}$

179

Application $\qquad \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = a$

Caractéristiques d'extrémité

- vanne fermée $\quad$ débit $= 0$
- débouché dans un réservoir : pression $=$ cte
- vannes (voir orifice) : $q_0 = \Omega_0 \sqrt{2gH}$



FIN