(Numb. 329.)

PHILOSOPHICAL
TRANSACTIONS.

For the Months of January, February, *and* March, 1711.

DE
MENSURA SORTIS,
SEU; DE
Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus.

Autore Abr. De Moivre, *R. S. S.*

Nobilissimo Viro

Francisco Robartes,

Mathematicarum Scientiarum Fautori summo.

HORTATU *tuo, Vir Nobilissime, Problemata quædam ad Aleam spectantia solvi, principiaque exposui quibus eorum solutio innitatur; nunc autem ea Regalis Societatis jussu in lucem emitto.* Hugenius, *primus quod sciam regulas tradidit ad istius generis Problematum Solutionem, quas nuperrimus autor Gallus variis exemplis pulchre illustravit; sed non videntur viri clarissimi ea simplicitate ac generalitate usi fuisse quam natura rei postulabat: etenim dum plures quantitates incognitas usurpant, ut varias Collusorum conditiones repræsentent, calculum suum nimis perplexum reddunt; dumque Collusorum dexteritatem semper æqualem ponunt, doctrinam hanc ludorum intra limites nimis arctos continent. Methodus qua potissimum utor, est Doctrina Combinationum, qua probe intellecta, facilis se prodit Solutio plurium Problematum alioqui difficillimorum; verum huic methodo non ita memet adstrinxi, quin aliquando Series infinitas etiam adhibuerim, præsertim ubi* prioritas *ludendi consideranda venit. Series autem istæ vel sponte abrumpuntur, vel* summantur *exacte, vel ad verum convergunt. Problemata* * *tria quæ tu, Vir Clarissime, mihi solvenda proposuisti, non sine magna voluptate confeci; & si quid laudis, ex his rebus mihi sit accessurum, eorum Solutioni, credo, præcipue debebitur. Si tibi liceret, per tempus quod in Reipublicæ emolumentum tam utiliter impendis, ea prosequi quæ tibi animi oblectandi gratia tentata sunt & felici admodum successu comperta, nihil ad perfectionem hujus doctrinæ desideraretur; simulque pateret quam singulari ingenii acumine emineas, quamque hujusmodi contemplationes cum severioribus & majoris momenti studiis minime sint incongruæ.*

Vir Honoratissime,

Tui Observantissimus,

atque Obsequentissimus,

Abr. De Moivre.

* Prob. 16, 17, 18.

SI p ſit numerus caſuum quibus eventus aliquis contingere poſſit, & q numerus caſuum quibus poſſit non-contingere; tam contingentia quam non-contingentia eventus ſuum habent probabilitatis gradum: Quod ſi caſus omnes quibus eventus contingere vel non-contingere poteſt, ſint æque faciles; probabilitas contingentiæ, erit ad probabilitatem non-contingentiæ ut p ad q.

Si A & B, colluſores duo ita de eventibus certent, ut ſi caſus p contingant, A vicerit; ſin caſus q contingant, B vicerit, atq; ſit a ſumma depoſita, ſors ſeu expectatio ipſius A erit $\frac{pa}{p+q}$, ſors vero ſeu expectatio ipſius B erit $\frac{qa}{p+q}$, adeoque ſi A vel B expectationes ſuas vendant, æquum eſt ut pro illis recipiant $\frac{pa}{p+q}$ & $\frac{qa}{p+q}$ reſpective.

Si præmium aliquod a proponatur victori concedendum, ita ut ſi caſus p contigerint, præmium concedatur ipſi A, ſin vero caſus q contigerint, præmium ipſi B concedatur, atque A & B hoc pactum ineant, ut ante eventum, præmium dividatur pro ratione ſortium, A debebit ſumere partem $\frac{pa}{p+q}$, B vero partem $\frac{qa}{p+q}$.

Si eventus duo nullo modo ex ſe invicem pendeant, ita ut p ſit numerus caſuum quibus eventus primus contingere poſſit, & q numerus caſuum quibus poſſit non-contingere; & ſit r numerus caſuum quibus eventus ſecundus contingere poſſit, & s numerus caſuum quibus poſſit non-contingere: Multiplicetur $p+q$ per $r+s$, & Productum Multiplicationis, *viz.* $pr+qr+ps+qs$ erit numerus caſuum omnium quibus contingentia & non-contingentia eventuum inter ſe variari poſſunt.

Ergo ſi A & B inter ſe ita de his eventibus certent, ut A contendat fore ut uterque contingat, ratio ſortium erit ut pr ad $qr+ps+qs$.

Sed si A contendat fore ut alteruter contingat, ratio sortium erit ut $pr + qr + ps$ ad qs.

Si vero A contendat fore ut eventus primus contingat, secundus autem non contingat, ratio sortium erit ut ps ad $pr + qr + qs$.

Et eodem argumentandi modo, si tres vel plures sint eventus de quibus, A & B certent, ratio sortium invenietur Multiplicatione sola.

Si eventus omnes habeant datum numerum casuum quibus contingere possint, & datum itidem numerum casuum quibus possint non-contingere, & sit a numerus casuum quibus eventus aliquis possit contingere, & b numerus casuum omnium quibus possit non-contingere, & sit n numerus eventuum omnium; elevetur $a + b$ ad potestatem n.

Et si A cum B certet ea conditione ut si eventus unus vel plures contigerint, ipse A vicerit; sin nullus, tum B vicerit; ratio sortium erit ut $\overline{a+b}|^n - b^n$ ad b^n; etenim terminus unicus in quo a non reperitur est b^n.

Si A cum B certet ea conditione, ut si eventus duo vel plures contigerint, A vicerit; sin nullus vel unus, tum B vicerit; ratio sortium erit ut $\overline{a+b}|^n - b^n - nab^{n-1}$, ad $b^n + nab^{n-1}$: Etenim termini duo in quibus aa non reperitur, sunt b^n & nab^{n-1}; & sic deinceps de cæteris.

PROB. I.

A & B *una tessera ludunt, ea conditione, ut si* A *bis vel pluries, octo jactibus tesseræ monada jecerit, ipse* A *vincat; sin semel tantum, vel non omnino,* B *vincat; quænam erit ratio sortium?*

SOLUTIO

Quoniam est casus unicus quo monas contingere potest, & quinque casus quibus potest non-contingere, fiat $a = 1$, & $b = 5$.

Rursus

Rursus quoniam sunt octo jactus tesseræ, fiat $n = 8$, & erit $\overline{a+b}|^n - b^n - nab^{n-1}$ ad $b^n + nab^{n-1}$ ut 663991 ad 1015625. hoc est, ut 2 ad 3 circiter.

PROB. II.

A & B singulis globis ea conditione certant, ut qui globum propius ad metam miserit, unum ludum vincat; jam post ludos aliquot peractos, ipsi A desunt ludi 4 quo minus victor abeat, ipsi vero B, 6: at ea est ipsius A in mittendis globis dexteritas, ut sors illius foret ad sortem ipsius B ut 3 ad 2, si de unico ludo contenderent; quænam est ratio sortium in casu proposito?

SOLUTIO

Quoniam ipsi A desunt 4 ludi quominus victor abeat, ipsi vero B 6, sequitur fore ut certamen futuris concludatur ludis ad plurimum 9, videlicet summa deficientium ludorum minus unitate; ergo elevetur $a+b$ ad potestatem nonam, hæc erit, $a^9 + 9a^8b + 36a^7bb + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5 + 84a^3b^6 + 36aab^7 + 9ab^8 + b^9$. Et sumantur pro A termini omnes in quibus a habet 4 vel plures dimensiones, & pro B termini omnes in quibus B habet 6 vel plures dimensiones, ergo ratio sortium erit ut $a^9 + 9a^8b + 36a^7bb + 84a^6b^3 + 126a^5b^4 + 126a^4b^5$ ad $84a^3b^6 + 36aab^7 + 9ab^8 + b^9$. Exponatur a per 3, & b per 2, & habebitur ratio sortium in numeris, videlicet 1759077 ad 194048.

Et generaliter, posito quod p & q sint numeri deficientium ludorum respective; elevetur $a+b$ ad potestatem $p+q-1$, & sumantur pro A & B respective tot termini quot ipsis desunt ludi reciproce, hoc est, pro A sumantur tot termini quot sunt unitates in q, pro B vero tot termini quot sunt unitates in p.

PROB.

PROB. III.

Si A *&* B *singulis globis ludant, & ea sit ipsius* A *in mittendis globis dexteritas, ut possit ipsi* B *duos ludos ex tribus largiri; quæritur quænam foret ratio sortium si de ludo uno contenderent.*

SOLUTIO.

Sint sortes quæsitæ ut z ad 1, & elevetur $z+1$ ad Cubum; hic erit, $z^3+3zz+3z+1$. Jam cum A possit duos ludos ex tribus ipsi B largiri, A in se id suscipere poterit, ut tres ludos continuos vincat, adeoque sortes hoc in casu erunt ut z^3 ad $3zz+3z+1$. Ergo $z^3=3zz+3z+1$. Sive $2z^3=z^3+3zz+3z+1$. Ergo $z\sqrt[3]{2}=z+1$, adeoque $z=\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$: Igitur sortes quæsitæ erunt $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ & 1 respective.

Et generaliter, si ea sit ipsius A dexteritas, ut possit æquali sorte in se suscipere ut n vices continuas vincat, A poterit deponere $\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}$ contra 1, fore ut semel vincat.

PROB. IV.

Si A *possit æqua sorte unum ex tribus ludis ipsi* B *largiri, quæritur ratio sortium ipsorum* A *&* B *cum de ludo unico contendunt, hoc est requiritur ratio dexteritatum.*

SOLUTIO

Sit ratio dexteritatum ut z ad 1. Si autem *A* unum ludum ex tribus ipsi *B* largiatur, ergo suscipit *A* se ter victurum, priusquam *B* bis vicerit; elevetur itaque $z+1$ ad potestatem quartam,

quartam, videlicet, $z^4 + 4z^3 + 6zz + 4z + 1$, ergo ratio sortium erit ut $z^4 + 4z^3$ ad $6zz + 4z + 1$; Ergo cum æqua sorte contendant, fiat $z^4 + 4z^3 = 6zz + 4z + 1$; Qua æquatione soluta, obtinebitur $z = 1.6$ prope. Ergo ratio dexteritatum erit circiter ut 8 ad 5.

PROB. V.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile eventus ut aliquis contingat, posito quid sint casus a *quibus primo tentamine contingere possit, & casus* b *quibus possit non-contingere, ita ut si* A *&* B *de eventu contendant, possint* A *&* B *æqua sorte eventum affirmare & negare.*

SOLUTIO.

Sit x numerus tentaminum quibus eventus aliquis possit æquali expectatione contingere vel non-contingere, ergo per jam demonstrata erit $\overline{a+b}|^x - b^x = b^x$, sive $\overline{a+b}|^x = 2b^x$, ergo $x = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } \overline{a+b} - \text{Log. } b}$.

Insuper resumatur æquatio $\overline{a+b}|^x = 2b^x$, & sit $a : b :: 1 : q$, & æquatio migrat in istam, $\overline{1 + \frac{1}{q}}|^x = 2$. Elevetur $1 + \frac{1}{q}$ ad potestatem x, ope Theorematis *Neutoniani*, & fiet $1 + \frac{x}{q} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2qq} + \frac{x}{1} \times \frac{x-1}{2} \times \frac{x-2}{3q^3}$ &c. $= 2$. In hac æquatione si sit $q = 1$, erit $x = 1$; si q sit infinita, erit x infinita. Sit x infinita, ergo æquatio superior fiet, $1 + \frac{x}{q} + \frac{xx}{2qq} + \frac{x^3}{6q^3}$ &c. $= 2$. Iterum sit $\frac{x}{q} = z$, & erit $1 + z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3$ &c. $= 2$. Sed $1 + z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3$ &c. est numerus cujus Logarithmus Hyperbolicus est z, ergo $z = \text{Log. } 2$. Sed Logarithmus Hyperbolicus ipsius 2 est .7 proxime, ergo $z = .7$ proxime.

Igitur ubi q est 1, erit $x = 1q$; & ubi q est infinita, erit $x = .7q$ proxime.

Jam ergo definivimus limitas arctissimos intra quos ratio x ad q consistet, etenim ratio illa orditur ab æqualitate, & cum ad infinitum est provecta, desinit tandem in ratione 7 ad 10 proxime.

EXEMP. I.

Inveniendum sit quotenis jactibus A *suscipere in se possit, ut duas monadas duabus tesseris jaciat.*

SOLUTIO.

Quoniam A habet casum unicum quo duas monadas jacere possit, & 35 quibus illas non jaciat, erit $q=35$; Multiplicetur igitur 35 per .7, & productum 24.5 indicabit numerum jactuum quæsitum fore inter 24 & 25.

EXEMP. II.

Inveniendum sit quotenis jactibus A *suscipere in se possit, ut tres monadas tribus tesseris jaciat.*

SOLUTIO.

Quoniam A habet casum unicum quo monadas tres, tribus tesseris jacere possit, & casus 215 quibus illas non jaciat; Multipliceter 215 per .7, & productum 150.5 indicabit numerum jactuum quæsitum fore inter 150 & 151.

LEMMA.

Invenire numerum casuum quibus datus punctorum numerus dato tesserarum numero, jaci possit.

SOLUTIO.

Sit $p + 1$ datus punctorum numerus, n numerus tesserarum, f numerus facierum in tessera: fiat $p - f = q$, $q - f = r$,

$r - f$

$r - f = s$, $s - f = t$, &c. Numerus casuum quaesitus erit,

$$+ \frac{p}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \text{ \&c.}$$
$$- \frac{q}{1} \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1}.$$
$$+ \frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}.$$
$$- \frac{s}{1} \times \frac{s-1}{2} \times \frac{s-2}{3} \text{ \&c.} \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}.$$
&c.

Quam seriem continuari oportebit, donec aliqui factorum fiant vel aequales nihilo, vel negativi.

N. B. Tot factores singulorum productorum, $\frac{q}{1} \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3}$ &c. $\frac{r}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3}$ &c. $\frac{s}{1} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{s-2}{3}$ &c. sumendi sunt, quot sunt unitates in $n - 1$.

PRAXIS

Requiratur, v. g. numerus casuum, quibus 16 puncta 4 tesseris jaci possint.

$$+ \frac{15}{1} \times \frac{14}{2} \times \frac{13}{3} = + 455$$
$$- \frac{9}{1} \times \frac{8}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{4}{1} = - 336$$
$$+ \frac{3}{1} \times \frac{2}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{1} \times \frac{3}{2} = + 6$$

Jam $455 - 336 + 6 = 125$. Ergo 125 est numerus casuum quaesitus.

Requiratur numerus casuum quibus 15 puncta 6 tesseris jaci possint.

$$+ \frac{14}{1} \times \frac{13}{2} \times \frac{12}{3} \times \frac{11}{4} \times \frac{10}{5} = + 2002$$
$$- \frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{1} = - 336$$

Jam $2002 - 336 = 1666$ numerus casuum quaesitus.

Requi-

Requiratur numerus casuum quibus 27 puncta 6 tesseris jaci possint.

$$+ \frac{26}{1} \times \frac{25}{2} \times \frac{24}{3} \times \frac{23}{4} \times \frac{22}{5} = + 65780$$

$$- \frac{20}{1} \times \frac{19}{2} \times \frac{18}{3} \times \frac{17}{4} \times \frac{16}{5} \times \frac{6}{1} = - 93024$$

$$+ \frac{14}{1} \times \frac{13}{2} \times \frac{12}{3} \times \frac{11}{4} \times \frac{10}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} = + 30030$$

$$- \frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{2} \times \frac{4}{3} = - 1120$$

Jam $65780 - 93024 + 30030 - 1120 = 1666$ numerus casuum quæsitus.

COROLLARIUM.

Puncta omnia æqualiter ab extremis distantia habent eundem numerum casuum quibus producantur, adeoque si numerus punctorum datus vicinior sit majori extremo quam minori, subtrahatur numerus iste ex summa extremorum, & inveniatur numerus casuum quibus residuus numerus producatur, & fiet operatio brevior.

EXEMP. III.

Invenire quotenis jactibus A suscipere in se possit ut 15 puncta 6 tesseris jaciat.

SOLUTIO.

Quoniam *A* habet casus 1666 quibus jacere possit 15 puncta, & 44990 quibus illa non jaciat, dividatur 44990 per 1666, & quotus 27 erit $= q$. Ergo multiplicetur 27 per .7, & productum multiplicationis 18.9 indicabit numerum jactuum quæsitum esse 19 fere.

PROB.

PROB. VI.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile, ut eventus aliquis bis contingat, posito quod sint casus a *quibus primo tentamine contingere possit, & casus* b *quibus possit non-contingere; ita ut si* A *&* B *de eventu contendant, possint* A *&* B *æqua sorte eventum affirmare & negare.*

SOLUTIO

Sit x numerus tentaminum, ergo per jam demonstrata patebit fore $\overline{a+b}|^x = 2b^x + 2axb^{x-1}$. Sive faciendo $a:b::1:q$, $\overline{1+\frac{1}{q}}|^x = 2 + \frac{2x}{q}$. 1°. Sit $q=1$, & erit $x=3$. 2°. Sit q infinita, & erit x infinita: Pone x infinitam, & $\frac{x}{q} = z$, & erit $1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3$, &c. $= 2 + 2z$, adeoque $z = \text{Log. } 2. + \text{Log. } \overline{1+z}$; jam si Log. 2. vocetur y, æquatio ista in hanc Fluxionalem transformabitur $\frac{z\dot{z}}{1+z} = \dot{y}$. Si autem valor ipsius z investigetur per Potestates ipsius y, invenietur $z = 1.678$ proxime, ergo x semper consistet intra limites $3q$ & $1.678q$; sed x citissime converget ad $1.678q$, adeoque si q ad 1 habuerit rationem non adeo parvam, poterit assumi $x = 1.678q$. Si vero sit aliqua suspicio ne x sit justo minor, substituatur ipsius valor in æquatione $\overline{1+\frac{1}{q}}|^x = 2 + \frac{2x}{q}$, & notetur error, si quis sit notatu dignus, tunc augeatur x aliquantulum, & substituatur valor sic auctus pro x in prædicta æquatione, & notetur novus error, & ope duorum errorum, valor ipsius x poterit satis accurate corrigi.

EXEMP. I.

Inveniendum ſit quotenis vicibus, A *in ſe ſuſcipere poſſit, ut tres monadas, tribus teſſeris bis jaciat.*

SOLUTIO.

Quoniam A caſum habet unicum quo tres monadas jaciat, & 215 quibus illas non jaciat, erit $q = 215$: Ergo multiplicetur 215 per 1.678, & productum multiplicationis 360.7 indicabit numerum jactuum quæſitum, fore inter 360 & 361.

EXEMP. II.

Inveniendum ſit quotenis vicibus, A *in ſe ſuſcipere poſſit ut* 15 *puncta,* 6 *teſſeris bis jaciat.*

SOLUTIO.

Quoniam A habet caſus 1666 quibus jacere poſſit 15 puncta, & 44990 quibus illa non jaciat ; dividatur 44990 per 1666, & quotus 27 erit $= q$: Ergo multiplicetur 27 per 1.678, & productum multiplicationis 45.3, indicabit numerum jactuum quæſitum, fore inter 45 & 46.

PROB. VII.

Invenire quotenis tentaminibus futurum ſit probabile, ut eventus aliquis, ter, quater, quinquies, &c. contingat, poſito quod ſint caſus a *quibus primo tentamine contingere poſſit, & caſus* b *quibus poſſit non-contingere.*

SOLUTIO.

Sit x numerus tentaminum quæſitus ; & ex jam demonſtratis ſi de triplici eventu contendatur, facto $a : b :: 1 : q$, erit

$1 +$

$\overline{1+\frac{1}{q}}\Big|^{x} = 2 \times \overline{1+\frac{x}{q}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2qq}}$. Si de quadruplici, $\overline{1+\frac{1}{q}}\Big|^{x} = 2 \times \overline{1+\frac{x}{q}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2qq}+\frac{x}{1}\times\frac{x-1}{2}\times\frac{x-2}{3q^{3}}}$. Et continuatio istarum æquationum est manifesta. Jam in priori æquatione, si sit $q = 1$, erit $x = 5q$; si vero q sit infinita, vel ad unitatem habuerit rationem satis magnam, æquatio prædicta, ponendo $\frac{x}{q} = z$, migrabit in istam $z = \text{Log. } 2 + \text{Log. } \overline{1+z+\frac{1}{2}z^{2}}$, vel in istam Fluxionalem posito Log. $2 = y$, $\frac{\frac{1}{2}z^{2}\dot{z}}{1+z+\frac{1}{2}zz} = \dot{y}$; ubi reperietur $z = 2.675$ proxime; ergo x semper consistet intra $5q$ & $2.675q$.

In æquatione posteriori, si q sit $= 1$, erit $x = 7q$; si vero x sit infinita, vel ad unitatem habuerit rationem satis magnam, erit $z = \text{Log. } 2 + \text{Log. } \overline{1+z+\frac{1}{2}z^{2}+\frac{1}{6}z^{3}}$, vel $\frac{\frac{1}{6}z^{3}\dot{z}}{1+z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^{3}} = \dot{y}$, ubi reperietur $z = 3.6719q$ proxime; & par est ratio omnium sequentium, & limites semper approximant ad rationem numeri binarii ad unitatem.

TABELLA LIMITUM.

Si de eventu simplici contendatur, numerus tentaminum erit intra	$1q$ & $0.693q$
Si de duplici, intra	$3q$ & $1.678q$
Si de triplici, intra	$5q$ & $2.675q$
Si de quadruplici, intra	$7q$ & $3.6719q$
Si de quintuplici, intra	$9q$ & $4.67q$.
Si de sextuplici, intra	$11q$ & $5.668q$

Si de pluribus, quorum numerus sit n, contendatur; modo n & q ad unitatem habuerint rationem satis magnam, conjectura de numero tentaminum non multum a vero aberrans facile fiet, ponendo numerum tentaminum $= \frac{2n-1}{2}q$. Etenim x cito converget ad limitem minorem.

PROB.

PROB. VIII.

Tres collusores A, B, C, *singulis globis certant, ea conditione ut qui primus datum ludorum numerum vicerit depositum lucretur; jam post ludos aliquot peractos, desunt ipsi* A, 1; *ipsi* B, 2; *ipsi* C, 3 *ludi; rationes vero dexteritatum sunt ut* a, b, c *respective, quæritur ratio expectationum.*

SOLUTIO

Elevetur $a+b+c$ ad potestatem quartam (etenim 4 ad plurimum ludis certamen necessario concludetur) hæc erit, $a^4+4a^3b+6aabb+4ab^3+b^4+4a^3c+12aabc+6aacc+12abcc+6bbcc+4ac^3+c^4$.

Termini $a^4+4a^3b+12aabc+4a^3c+12abcc$, ubi a ad dimensionem æque altam ac est numerus ludorum ipsi A desideratus, vel altiorem ascendit; & ubi b & c ad pauciores dimensiones, quam sunt numeri ludorum ipsis B & C desiderati, ascendunt; componunt partem expectationis ipsius A. Eodem modo termini $b^4+4b^3c+6bbcc$ componunt partem expectationis ipsius B. Et termini $4bc^3+c^4$ componunt partem expectationis ipsius C: Reliqui omnes termini sunt communes, & ita dividi debent, ut partes illæ omnes quæ favent uni collusorum illi ipsi tribuantur.

Jam cum ipsi A desit 1 ludus, ipsi B 2, ipsi C 3, partes illæ omnes in quibus a dimensionem 1am vel altiorem assecutus fuerit, priusquam b 2am & c 3am assecuti fuerint, ipsi A favent; & eadem est ratio partium quæ ipsis B & C favent, adeoque si terminus $6aabb$ in partes suas $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $bbaa$, sit divisus, partes 5 priores ipsi A sunt tribuendæ pars unica posterior ipsi B; ergo jam $5aabb$ addi debebit expectationi ipsius A, & $1aabb$ expectationi ipsius B. Si terminus $4ab^3$ in partes suas $abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$, sit divisus, pars prima & secunda favent ipsi A, pars tertia & quarta favent ipsi B, adeoque $2ab^3$ utrique est tribuenda. Si terminus $12abbc$ in partes

partes suas sit divisus partes 8 ipsi A, partes vero 4 ipsi B sunt tribuendæ si terminus $4ac^3$ in partes suas sit divisus, partes 3 ipsi A sunt tribuendæ, pars vero unica ipsi C, adeoque expectationes totales jam erunt

1^a. $a^4 + 4a^3b + 5aabb + 2ab^3 + 12aabc + 4a^3c + 6aacc + 8abbc + 3ac^3$.

2^a. $b^4 + 4b^3c + 6bbcc + aabb + 2ab^3 + 4abbc$.

3^a. $4bc^3 + ac^3 + c^4$.

Sit n numerus deficientium ludorum, p numerus collusorum, rationes expectationum ut a, b, c, d, &c. elevetur $a + b + c + d$, &c. ad potestatem $n + 1 - p$, & eodem modo procedatur.

PROB. IX.

A & B assumentes uterque 12 *nummos, ludunt tribus tesseris, hac conditione, ut si* 11 *puncta jaciantur,* A *tradat unum nummum ipsi* B, *at si* 14 *puncta jaciantur,* B *tradat unum nummum ipsi* A, *& ut ille ludum victurus sit qui primus nummos habuerit omnes: Quæritur ratio sortis ipsius* A *ad sortem ipsius* B.

SOLUTIO.

Sit p numerus nummorum quos uterque singulatim assumit, sint a & b numerus casuum quibus A & B respective nummum unum obtinere possunt, & ratio sortium erit ut a^p ad b^p; hoc in casu est $p = 12$, $a = 27$, $b = 15$; sive cum sit $27 : 15 :: 9 : 5$, fiat $a = 9$, $b = 5$, adeoque ratio expectationum erit ut 9^{12} ad 5^{12}, sive ut 244140625 ad 282429536481 qualem *Hugenius* fore asseruit.

SOLUTIO GENERALIOR.

Sit p numerus nummorum ipsius A, q vero numerus nummorum ipsius B; & A in se suscipiat ut prius nummos q, quam

B nummos p lucretur, erunt ſortes ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$, ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$. Fingatur enim A nummos habere E, F, G, H, &c. quorum numerus p; & B nummos habere I, K, L, &c. quorum numerus q; fingatur inſuper, valorem cujuſlibet nummi eſſe ad valorem ſequentis ut a ad b, ita ut E, F, G, H, I, K, L, ſint in progreſſione Geometrica; his ita poſitis, poterunt A & B qualibet vice deponere nummos quorum valor ſit proportionalis numero caſuum quibus alter alterum vincere poſſit; etenim prima vice poterit A deponere H, B vero I; at H ad I ex hypotheſis eſt ut a ad b; ergo jam A & B æquali conditione certant; ſi vicerit A, poterit ille deponere I, B vero K; ſed I ad K ex Hypotheſi eſt ut a ad b; ſin B vicerit, poterit A deponere G, B vero H, quorum ipſorum G & H ratio eſt ut a ad b, & ſic deinceps. Ergo quamdiu A & B certant, ſemper certant æquali conditione: Igitur eorum expectationes ſunt inter ſe ut ſumma terminorum E, F, G, H, &c. quorum numerus eſt p, ad ſummam terminorum I, K, L, quorum numerus eſt q; hoc eſt, ut $a^q \times \overline{a^p - b^p}$ ad $b^p \times \overline{a^q - b^q}$, quod facile conſtabit, ſi ſummentur progreſſiones iſtæ Geometricæ: Jam poſito, quemlibet nummum eſſe ad ſequentem ut a ad b, non exinde mutantur probabilitates vincendi, ergo poſito, valorem nummorum eſſe æqualem, probabilitates vincendi, ſeu ſortes ipſorum A & B etiamnum erunt in illa ipſa ratione quam determinavimus.

Maxime cavendum eſt ne Problemata propter ſpeciem aliquam affinitatis inter ſe confundantur. Problema ſequens videtur affine ſuperiori.

PROB.

PROB. X.

C *assumptis* 24 *calculis, tres tesseras jaciat; jam quoties* 27 *puncta jecerit, tradat calculum unum ipsi* A, *quoties vero* 14 *puncta jecerit, tradat calculum unum ipsi* B, *at* A *&* B *hoc pacto certent, ut qui prior calculos* 12 *habuerit, depositum obtineat; quæritur ratio expectationum.*

Problema illud a superiore in hoc differt, quod 23 ad plurimum tesserarum jactibus, ludus necessario finietur; cum ludus ex lege superioris problematis, posset in æternum continuari, propter reciprocationem lucri & jacturæ se invicem perpetuo destruentium.

SOLUTIO.

Elevetur $a+b$ ad potestatem 23^{am}, & termini 12 priores erunt ad 12 posteriores, ut expectatio ipsius A ad expectationem ipsius B.

PROB XI.

Tres collusores A,B,C, *assumentes duodecim calculos, quorum* 4 *albi, &* 8 *nigri sint, ludant hac conditione, ut qui primus ipsorum, velatis oculis, album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes* A, *secunda penes* B, *tertia penes* C; *& tum sequens rursus penes* A, *& sic deinceps ordine: Quæritur quænam futura sit ratio sortium ipsorum* A, B, C.

SOLUTIO.

Sit n numerus calculorum omnium, a numerus alborum, b numerus nigrorum, 1 summa deposita, seu præmium victori concedendum.

1°. A

1°. A habet casus a quibus album, & casus b quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex prima electione oriunda est $\frac{a}{a+b}$ sive $\frac{a}{n}$. Igitur si $\frac{a}{n}$ ex 1 subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $1 - \frac{a}{n} = \frac{n-a}{n} = \frac{b}{n}$.

2°. B habet casus a quibus album, & casus $b-1$ quibus nigrum eligat; sed prima electio est penes A, & incertum est utrum ille victurus sit nec ne, adeoque præmium respectu ipsius B non est 1, sed tantummodo $\frac{b}{n}$, igitur illius expectatio ex secunda electione oriunda est $\frac{a}{a+\overline{b-1}} \times \frac{b}{n} = \frac{ab}{n \times \overline{n-1}}$ Subtrahatur $\frac{ab}{n \times \overline{n-1}}$ ex $\frac{b}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{nb-b-ab}{n \times \overline{n-1}} = \frac{b \times \overline{b-1}}{n \times \overline{n-1}}$.

3°. C habet casus a quibus album, & casus $b-2$, quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex tertia electione est $\frac{a \times b \times \overline{b-1}}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2}}$

4°. Eodem modo A habet casus a quibus album, & casus $b-3$ quibus nigrum eligat, adeoque ejus expectatio ex quarta electione erit $\frac{a \times b \times \overline{b-1} \times \overline{b-2}}{n \times \overline{n-1} \times \overline{n-2} \times \overline{n-3}}$ Et sic deinceps de cæteris.

Scribatur ergo series

$\frac{a}{n} + \frac{b}{n-1} P + \frac{b-1}{n-2} Q + \frac{b-2}{n-3} R + \frac{b-3}{n-4} S$ &c. ubi P, Q, R, S, &c. denotant terminos præcedentes cum suis signis; & sumantur tot termini hujus seriei quot sunt unitates in $b+1$ (etenim non plures erunt electiones quam sunt unitates in $b+1$) Et summa tertiorum omnium, intermissis binis, terminorum, inci-

incipiendo ab $\frac{a}{n}$, erit tota expectatio ipsius A, summa tertiorum itidem omnium incipiendo a $\frac{b}{n-1}$ P, erit tota expectatio ipsius B; summa tertiorum omnium incipiendo a $\frac{b-1}{n-2}$ Q, erit tota expectatio ipsius C.

Si plures sint collusores, A, B, C, D, &c. sive calculum unum, sive plures, sive eundem calculorum numerum, sive diversum unaquaque vice elegerint, illorum expectationes, ope praecedentis seriei, facili negotio itidem determinabuntur.

Sed ut ad casum in Problemate propositum revertamur, fiat $a = 4$, $b = 8$, $n = 12$, & series generalis jam in istam migrabit, $\frac{4}{12} + \frac{8}{11}P + \frac{7}{10}Q + \frac{6}{9}R + \frac{5}{8}S + \frac{4}{7}T + \frac{3}{6}V + \frac{2}{5}X + \frac{1}{4}Y$.

Sive in alteram istam (multiplicando terminos omnes per numerum istum qui tollendis fractionibus magis idoneus judicabitur, nempe hoc in casu per 450)

$115 + 120 + 84 + 56 + 35 + 20 + 10 + 4 + 1$.

adeoque tribuantur ipsi A, $115 + 56 + 10 = 231$; ipsi B, $120 + 35 + 4 = 159$; ipsi C, $84 + 20 + 1 = 105$. Adeoque expectationes erunt ut 231, 159, 105; sive ut 77, 53, 35.

COROLLARIUM

Si numerus casuum quibus A, B, C, vel collusores quotcunque vincere possunt, tandem aliquando exhauriatur, expressiones sortium erunt finitae.

PROB. XII.

Si collusores tres, A, B, C, vicibus suis Dodecaedron 4 albis faciebus, & 8 nigris, jaciant, ea conditione ut qui primus faciem albam jecerit, vincat; quæritur ratio expectationum.

SOLUTIO.

Ratiocinia circa hanc Propositionem eadem sunt atque illa quibus uti sumus in præcedenti, sed cum jactus Dodecaedri nihil detrahant de numero facierum, pro $b-1$, $b-2$, $b-3$, $b-4$, &c. $n-1$, $n-2$, $n-3$, $n-4$, &c. substituantur b & n respective, & series præcedentis Problematis evadet $\frac{a}{n} + \frac{ab}{nn} + \frac{abb}{n^3} + \frac{ab^3}{n^4} + \frac{ab^4}{n^5} + \frac{ab^5}{n^6}$ &c. quæ series in infinitum est continuanda. Et sumendo tertios quosque terminos, expectationes erunt

$$\frac{a}{n} + \frac{ab^3}{n^4} + \frac{ab^6}{n^7} \text{ \&c.}$$
$$\frac{ab}{nn} + \frac{ab^4}{n^5} + \frac{ab^7}{n^8} \text{ \&c.}$$
$$\frac{abb}{n^3} + \frac{ab^5}{n^6} + \frac{ab^8}{n^9} \text{ \&c.}$$

Sed termini ex quibus expectationes singulæ componuntur sunt in progressione geometrica, & ratio cujuslibet termini ad sequentem eadem est in singulis seriebus, nempe ut n^3 ad b^3; ergo summæ serierum sunt ut primi serierum termini, nempe ut $\frac{a}{n}$, $\frac{ab}{nn}$, $\frac{abb}{n^3}$, sive ut nn, bn, bb. Hoc est, in casu istius Problematis, ut 9, 6, 4.

COROLLARIUM.

Si plures sint collusores, A, B, C, D, &c. iisdem conditionibus ac supra certantes, sumantur tot termini in ratione n ad b, quot sunt collusores, & termini illi denotabunt expectationes collusorum respective.

PROB. XIII.

A & B ludant binis tesseris, hac conditione, ut A vincat si punctum senarium jecerit; B, si septenarium. A primo jactum unum instituat, deinde B duos jactus simul; tum rursus A duos jactus, atque sic deinceps, donec hic vel ille victor evadat: Quæritur ratio sortis ipsius A, ad sortem ipsius B.

SOLUTIO.

Ponatur a numerus casuum quibus A vincere possit, & b numerus casuum quibus B vincere possit, n numerus variationum in tesseris datis; sit insuper $n - a = d$, & $n - b = e$; sit etiam 1 præmium victori concedendum.

1°. A habet casus a quibus vincere possit, & casus $n - a$ quibus non vincat, adeoque illius expectatio ex primo jactu oriunda est $\frac{a}{n}$; igitur si $\frac{a}{n}$ ex 1 subtrahatur, valor residuarum expectationum erit $1 - \frac{a}{n} = \frac{n-a}{n} = \frac{d}{n}$.

2°. Si B ad jactum suum perveniat, ejus expectatio ex jactu ipsius oriunda, erit $\frac{b}{n}$; sed quoniam incertum est utrum ille ad jactum suum sit perventurus nec ne, expectatio $\frac{b}{n}$ minuenda est in ratione d ad n; Etenim præmium illius respectu, non 1, sed tantummodo $\frac{d}{n}$ censendum est, adeoque expectatio ipsius B priusquam A jactum suum instituat, erit $\frac{bd}{nn}$; subtrahatur $\frac{bd}{nn}$ ex $\frac{d}{n}$, & valor residuarum expectationum erit $\frac{d}{n} - \frac{bd}{nn} = \frac{nd-bd}{nn} = \frac{ed}{nn}$.

3°. Eodem argumentandi modo, expectatio ipsius B huic novissimæ deinceps subsequens, est $\frac{bed}{n^3}$.

4°. Et

4°. Et expectatio ipſius A huic ſubſequens, eſt $\frac{aeed}{n^4}$.

5°. Et expectatio ipſius A huic demum ſubſequens eſt $\frac{aeedd}{n^5}$. Et ſic deinceps de cæteris; adeoque erunt

Expectationes omnes ipſius A

$$
\begin{array}{l}
\quad\; \frac{a}{n} \\
+ \frac{aeed}{n^4} + \frac{aeedd}{n^5} \\
+ \frac{ae^4d^3}{n^8} + \frac{ae^4d^4}{n^9} \\
+ \frac{ae^6d^5}{n^{12}} + \frac{ae^6d^6}{n^{13}} \\
\qquad \&c.
\end{array}
$$

Jam ſepoſito parumper primo termino $\frac{a}{n}$, columna prima perpendicularis conſtituit progreſſionem geometricam infinite decreſcentem, cujus ſumma eſt $\frac{aeed}{n^4-eedd}$ Reſumatur primus terminus $\frac{a}{n}$, iſque addatur ſummæ progreſſionis, & aggregatum erit $\frac{naeed + an^4 - aeedd}{n \times \overline{n^4-eedd}}$.

Columna ſecunda conſtituit progreſſionem alteram Geometricam, cujus ſumma eſt $\frac{aeedd}{n \times \overline{n^4-eedd}}$.

Summa igitur expectationum ipſius A eſt $\frac{aeed + an^3}{n^4-eedd}$.

Expectationes omnes ipſius B

$$
\begin{array}{l}
\frac{bd}{nn} + \frac{bed}{n^3} \\
\frac{beed^3}{n^6} + \frac{be^3d^3}{n^7} \\
\frac{be^4d^5}{n^{10}} + \frac{be^5d^5}{n^{11}} \\
\qquad \&c.
\end{array}
$$

Summa

Summa primæ columnæ est $\frac{bdnn}{n^4 - eedd}$:

Summa secundæ columnæ est $\frac{bden}{n^4 - eedd}$:

Adeoque summa expectationum ipsius B erit $\frac{bdnn + bden}{n^4 - eedd}$.

Ergo ratio expectationum erit, ut $aeed + an^3$ ad $bdnn + bden$.

Si pro a, b, n, d, e, scribantur 5, 6, 36, 31, 30, respective, exprimetur ratio quæsita in numeris, nempe ut 10355 ad 12276.

COROLLARIUM.

Si numerus casuum quibus collusores vincere possunt, numquam exhauriatur, adeo ut ludus possit in infinitum continuari, ita tamen ut collusores, propter istam continuationem, ponantur aliquando in iisdem circumstantiis in quibus antea fuerunt; expressiones sortium finitæ erunt.

PROB. XIV.

Assumptis 12 *calculis*, 4 *albis*, *&* 8 *nigris*, *certet* A *cum* B *fore ut velatis oculis*, *si* 7 *calculos exemerit*, *eorum* 3 *albi*, *sint futuri*: *Quæritur ratio expectationis ipsius* A *ad expectationem ipsius* B.

SOLUTIO.

1°. Inveniantur casus omnes quibus 7 calculi ex 12 eximi possint; casus erunt 792, ut patet ex Doctrina combinationum.

$$\frac{12}{1} \times \frac{11}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{9}{4} \times \frac{8}{5} \times \frac{7}{6} \times \frac{6}{7} = 792.$$

2°. Seponantur 3 albi, & inveniantur casus omnes quibus 4 nigri ex 8 iis adjungi possint; casus illi erunt 70.

$$\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{5}{4} = 70.$$

Quoniam

Quoniam autem 4 ſunt caſus quibus 3 albi ex 4 poſſint eligi, multiplicetur 70 per 4, adeoque caſus erunt 280, quibus 3 albi cum 4 nigris poſſint eximi.

3°. Ex lege ludorum, ille qui in ſe ſuſcipit ut effectum aliquem producat, etiamnum victor cenſetur, ſi effectum pluries produxerit quam in ſe ſuſceperit, niſi contrarium expreſſe ſit cautum, adeoque ſi 4 albi cum 3 nigris eximantur, A victor cenſendus erit; Igitur ſeponantur 4 albi, & inveniantur caſus omnes quibus 3 nigri ex 8, 4 albis adjungi poſſint; caſus illi erunt 56.

$$\frac{8}{1} \times \frac{7}{2} \times \frac{6}{3} = 56.$$

4°. Igitur A caſus habet $280 + 56 = 336$, quibus victor evadat: Subtrahantur caſus illi ex 792, & caſus reſidui erunt 456 quibus B victor evadere poſſit: Ergo ratio ſortis ipſius A, ad ſortem ipſius B, erit ut 336 and 456, ſive ut 14 ad 19.

GENERALITER.

Sit n numerus calculorum omnium, a numerus alborum, b numerus nigrorum, c numerus quem A eximat; & erit

Numerus Caſuum omnium

$$\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5} \times \frac{n-5}{6}$$ &c. quæ ſeries continuari debet ad tot terminos quot ſunt unitates in c.

Numerus caſuum quibus A calculos c eximere poteſt abſque ullo albo

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \times \frac{b-3}{4} \times \frac{b-4}{5} \times \frac{b-5}{6} \text{ \&c.}$$

Numerus caſuum quibus A calculum unum album eximere poteſt

$$\frac{b}{1} \times \frac{b-1}{2} \times \frac{b-2}{3} \times \frac{b-3}{4} \times \frac{b-4}{5} \text{ \&c.} \times \frac{a}{1}$$

Numerus

Numerus casuum quibus A calculos duos albos eximere potest

$$\frac{b}{1}\times\frac{b-1}{2}\times\frac{b-2}{3}\times\frac{b-3}{4}\ \&c.\ \times\frac{a}{1}\times\frac{a-1}{2}.$$

Numerus casuum quibus A calculos tres albos eximere potest

$$\frac{b}{1}\times\frac{b-1}{2}\times\frac{b-2}{3}\ \&c.\ \times\frac{a}{1}\times\frac{a-1}{2}\times\frac{a-2}{3}.$$

Numerus casuum quibus A calculos quatuor albos eximere potest

$$\frac{b}{1}\times\frac{b-1}{2}\ \&c.\ \times\frac{a}{1}\times\frac{a-1}{2}\times\frac{a-2}{3}\times\frac{a-3}{4}.$$

Et sic deinceps.

PROB. XV.

A, B, C, *tres collusores, quorum dexteritas sint æquales, deponant singuli* 1, *& istis conditionibus certent*; 1°. *Ut illorum duo ludum incipiant*; 2°. *Ut victus locum suum tertio cedat, ita ut ille tertius jam cum victore contendat, quæ conditio in posterum semper sit observanda*; 3°. *Ut victus semper multetur summa* p *quæ deposito augendo inserviat*; 4°. *Ut ille depositum sic gradatim auctum, totum obtineat, qui alteros duos successive vicerit. Quæritur quanto melior vel deterior sit sors ipsorum* A *&* B, *quos ludum incipere ponimus, quam ipsius* C.

SOLUTIO.

Ponatur ludum in infinitum continuari posse, hoc pacto.

A vin-

A vincit B		$3 + p$
C vincit A		$3 + 2p$
B vincit C		$3 + 3p$
A vincit B		$3 + 4p$
C vincit A	Depoſitum	$3 + 5p$
B vincit C		$3 + 6p$
A vincit B		$3 + 7p$
C vincit A		$3 + 8p$
B vincit C		$3 + 9p$
&c.		&c.

Sit R ſpectator aliquis, qui poſtquam A vicerit B ſemel, roget A an velit ſummas quas ſe obtenturum ſperat ipſi vendere, & quanti illas æſtimet, cui A annuens reſpondeat.

Cum jam vicerim B, eſt mihi æqua ſors utrum obtineam vel non obtineam $3 + 2p$, adeoque ſumma iſta valet $\frac{3+2p}{2}$.

Si jam acciderit ut C me vincat, ſed tamen vices meæ certandi cum C revertantur, erit tunc mihi ſors æqua utrum obtineam, vel non obtineam $3 + 5p$, adeoque expectatio vincendi ipſum C tunc temporis valebit $\frac{3+5p}{2}$. Sed cum ſint 7 adverſus 1 fore ut vices illæ non revertantur (etenim C vincere me debet, B vincere C, ego B rurſus,) ſumma iſta quam me obtenturum ſpero valet $\frac{3+5p}{2 \times 8}$.

Ad eundem modum, A computatione rurſus inita deprehendet, valorem deinceps ſummæ quam ſe obtenturum ſperat, eſſe $\frac{3+8p}{2 \times 8 \times 8}$.

Et ſequentis $\frac{3+11p}{2 \times 8 \times 8 \times 8}$. Et ſic in infinitum.

R com-

R computationem hanc justam esse comperiens, pendat ipsi A summas, $\frac{3+2p}{2}$, $\frac{3+5p}{2\times8}$, $\frac{3+8p}{2\times8\times8}$, $\frac{3+11p}{2\times8\times8\times8}$, &c. quæ ope sequentis Theorematis in summam unam redigantur.

THEOREMA.

$$\frac{n}{b}+\frac{n+d}{bb}+\frac{n+2d}{b^3}+\frac{n+3d}{b^4}\ \&c.\ \text{ad inf.} = \frac{n}{b-1}+\frac{d}{\overline{b-1}|^2}.$$

Distinguatur series $\frac{3+2p}{2}+\frac{3+5p}{2\times8}$ &c. in partes duas

$$\frac{3}{2}\times\overline{1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8\times8}+\frac{1}{8\times8\times8}+\frac{1}{8\times8\times8\times8}\ \&c.}$$

$$+\frac{p}{1}\times\overline{2+\frac{5}{8}+\frac{8}{8\times8}+\frac{11}{8\times8\times8}+\frac{14}{8\times8\times8\times8}\ \&c.}$$

Pars 1a constituit progressionem geometricam, cujus summa est $\frac{12}{7}$.

Pars 2a sepositis communi multiplicatore $\frac{p}{2}$, & termino primo 2, summatur per Theorema præmissum, & fit $\frac{5}{7}+\frac{3}{49}=\frac{38}{49}$, cui jam addito primo 2, summa erit $\frac{136}{49}$, qua multiplicata per $\frac{p}{2}$, productum $\frac{68}{49}p$, exhibebit summam secundæ seriei. Ergo R pendet ipsi A $\frac{12}{7}+\frac{68}{49}p$.

Eodem modo R ad B se convertens, illum roget utrum velit summas quas ille se obtenturum speratat, ipsi vendere, cui B assentiens, & eadem innixus ratione qua ipse A, requirat summam $\frac{3}{7}+\frac{31}{49}p$, quam R justam esse deprehendens, ipsi B pendat.

Denique R eodem cum C pacto inito, pendat ipsi pro summis quas ille se obtenturum sperat, $\frac{6}{7}+\frac{48}{49}p$.

Sit S ſpectator alius, quem A roget (poſtquam vicerit B ſemel) utrum velit ipſius jacturas ſuſtinere, hoc eſt utrum velit multari ſummis p, pro ipſo A, quoties acciderit ut ipſe ſit multandus, & quanto pretio velit hanc in ſe ſortem ſuſcipere, cui S reſpondeat.

Quoniam tibi ſors eſt æqua utrum vincas C vel non, adeoque utrum multeris ſumma p, vel non, hujus multæ ſortem, ſi in manum mihi dederis $\frac{1}{2}p$, ſuſtinebo.

Quod ſi illud evenerit ut C te vincat, & B vincat C, adeo ut ſecunda vice tibi cum C certandum ſit, tunc multæ ejuſdem ſortem ſi dederis mihi $\frac{1}{2}p$, pariter ſuſtinebo: Verum cum ſint 3 adverſus 1 fore ut illud non eveniat, hujus multæ ſortem, nunc ſi mihi in manum dederis $\frac{1}{8}p$, ſuſtinebo.

Et eodem argumentandi modo, huic proximam ſortem ſi mihi dederis $\frac{1}{16}p$.

Et huic deinceps proximam, ſi dederis $\frac{1}{64}p$, &c.

Jam A ipſi S aſſentiens, tradat ipſi S ſummas, $\frac{1}{2}p * + \frac{1}{8}p + \frac{1}{16}p * + \frac{1}{64}p + \frac{1}{128}p * + \frac{1}{512}p + \frac{1}{1024}p$, &c. quæ ſummæ in unam redactæ fiunt $\frac{5}{7}p$.

Et eodem modo B & C pacto inito cum S, ipſi tradant $\frac{3}{7}p$ & $\frac{6}{7}p$, reſpective, ut ſuas multarum ſortes ſuſtineat.

A recipit ab R	$\frac{12}{7} + \frac{68}{49}p.$
A tradit ipſi S	$\frac{35}{49}p.$
Ipſi A ſupereſt	$\frac{12}{7} + \frac{33}{49}p.$

Sed A depoſuerat 1, priuſquam ludus inciperetur: Ergo lucratur A $\frac{5}{7} + \frac{33}{49}p.$

B reci-

$$\begin{array}{ll} \text{B recipit ab R} & \frac{3}{7} + \frac{31}{49} p. \\ \text{B tradit ipsi S} & \frac{21}{49} p = \frac{3}{7} p. \\ \hline \text{Ipsi B superest} & \frac{3}{7} + \frac{10}{49} p. \end{array}$$

Sed B deposuerat $1 + p$, (videlicet 1 priusquam ludus inciperetur, & p postquam semel victus fuerat ab A,) ergo B lucratur $- \frac{4}{7} - \frac{39}{49} p$.

Summa igitur lucrorum ipsorum A & B est $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p$.

Jam posueramus A vicisse ipsum B semel, priusquam collusores pacta inirent cum R & S; sed priusquam ludus inchoaretur, B poterat æqua sorte expectare ut vinceret ipsum A; adeoque summa lucrorum $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p$ in duas partes æquales dividenda, adeo ut utriusque lucrum censendum sit $\frac{1}{14} - \frac{3}{49} p$.

Ergo concludere jam licet, jacturam ipsius C, esse $\frac{1}{7} - \frac{6}{49} p$, sive lucrum $- \frac{1}{7} + \frac{6}{49} p$.

Sed ut corroboretur computatio nostra, videamus quale futurum sit lucrum ipsius C, eadem methodo qua usi fuimus pro invienendis lucris ipsorum A & B.

$$\begin{array}{ll} \text{C recipit ab R} & \frac{6}{7} + \frac{48}{49} p. \\ \text{C tradit ipsi B} & \frac{42}{49} p. \\ \hline \text{Ipsi C superest} & \frac{6}{7} + \frac{6}{49} p. \\ \text{Sed C deposuerat} & \frac{7}{7} \\ \text{Ergo C lucratur} & - \frac{1}{7} + \frac{6}{49} p. \end{array}$$

Jam

Jam fiat $\frac{1}{7} - \frac{6}{49}p = 0$, & invenietur $p = \frac{7}{6}$, ergo si multa ad summam quam singuli deponunt sit ut 7 ad 6, collusores æquali conditione certant.

Si multa sit ad summam quam singuli deponunt in minori ratione quam 7 ad 6, A & B potiori conditione certabunt, C deteriori.

Si multa sit ad summam quam singuli deponunt in majori ratione quam 7 ad 6, A & B deteriori conditione certant, C potiori.

COROL. I.

Postquam A vicerit B semel, probabilitates vincendi erunt ut $\frac{12}{7}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{3}{7}$, sive ut 4, 2, 1; ita ut maxima probabilitas sit ipsius A, proxima ipsius C, minima ipsius B.

COROL. II.

Spectator R priusquam ludus inchoetur, id suscipere in se poterit, ut summa 3 de qua collusores contendunt, & multas omnes pendat, si sibi initio in manus datum sit $3 + 3p$.

COROL. III.

Si dexteritates collusorum sint in ratione data, sortes collusorum eadem ratiocinatione determinabuntur.

COROL. IV.

Si multa sit negativa, ita ut victus portiunculam depositi 3 sumat, v. g. $\frac{3}{10}$, & ludus sit finiendus statim atque depositum exhaustum fuerit, sortes collusorum eadem ratiocinatione determinabuntur.

COROL. V.

Si plures sint collusores, A, B, C, D, & & non prius ludo desistant quam illorum unus alios omnes successive vicerit, ratio sortium etiam invenietur.

COROL-

COROL. VI.

Si multa non ſit definita, ſed continuo creſcat vel decreſcat, qua libuerit lege, ratio ſortium etiam determinabitur, ſi non per expreſſiones finitas, at ſaltem per ſeries ad verum perpetuo convergentes.

PROB. XVI.

A & B, quorum dexteritates ſint æquales inter ſe, dato Globorum numero certent; jam poſt ludos aliquot peractos, deſit ipſi A ludus 1 quominus victor evadat, ipſi B vero 2: Quæritur ratio illorum ſortium.

SOLUTIO.

Sit m numerus globorum omnium, ita ut uterque habeat $\frac{1}{2}m$; ſit p numerus caſuum quibus duo vel plures ex globis ipſius B propius ad metam accidere poſſint; ſit q numerus caſuum quibus unus vel plures ex globis ipſius B propius ad metam accidere poſſint, adeo ut $q-p$ ſit numerus caſuum quibus unus ex globis ipſius B (excluſive pluribus) poſſit ad metam propius accidere; ſit s numerus variationum omnium quas globi omnes ſubire poſſint; ſit 1 depoſitum totum.

Patet B habere caſus p quibus obtineat 1, & caſus $q-p$ quibus obtineat $\frac{1}{2}$, adeoque illius expectationem eſſe $\frac{p+\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}p}{s}=\frac{\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}q}{s}$.

Jam conſtat ex Doctrina combinationum, globos omnes m variari poſſe vicibus, $m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}$, &c. quæ ſeries continuari debet, donec ultimus terminus fiat æqualis unitati, adeoque eſſe $s=m\times\overline{m-1}\times\overline{m-2}\times\overline{m-3}$ &c.

Conſtat ex eadem Doctrina globos numero $\frac{1}{2}m$, poſſe permutari binos, vicibus $\frac{1}{2}m\times\frac{1}{2}\overline{m-1}$, dum globi reliqui omnes

 ipſorum

ipſorum A & B, quorum numerus $m - 2$ poſſunt variari vicibus $\overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. adeoque eſſe $p = \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. Igitur $s : p :: m \times \overline{m-1} : \frac{1}{2}m \times \frac{1}{2}\overline{m-1} :: m-1 : \frac{1}{4}m - \frac{1}{2}$, & $p = \frac{\frac{1}{4}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$.

Liquet globos numero $\frac{1}{2}m$, poſſe ſumi ſigillatim vicibus $\frac{1}{2}m$, dum globi reliqui omnes ipſorum A & B quorum numerus $m - 1$, variari poſſunt vicibus $\overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. adeoque eſſe $s : q :: m : \frac{1}{2}m :: 1 : \frac{1}{2}$; Eſt igitur $q = \frac{1}{2}s = \frac{\frac{1}{2}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$.

Ergo $\frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q}{s} = \frac{\frac{3}{8}m - \frac{1}{2}}{m-1}$, ſubtrahatur hoc ex 1, & reſiduum $\frac{\frac{5}{8}m - \frac{1}{2}}{m-1}$ erit expectatio ipſius A, adeoque ratio ſortium ipſorum A & B erit ut $\frac{5}{8}m - \frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{8}m - \frac{1}{2}$, ſive ut $5m - 4$ ad $3m - 4$.

COROL. I.

Si numerus globorum eſſet infinitus, ratio ſortium fieret tandem ut 5 ad 3.

COROL. II.

Si dexteritates ſint in ratione data, ratio ſortium eadem ratiocinatione invenietur.

PROB.

PROB. XVII.

A & B quorum dexteritates sint æquales inter se, dato globorum numero certent; jam post ludos aliquot peractos, desit ipsi A ludus 1 quominus victor evadat, ipsi vero B 3: Requiritur ratio sortium ipsorum A & B.

SOLUTIO

Sit ut in præcedenti Problemate m numerus globorum omnium; sit r numerus casuum quibus 3 vel plures ex globis ipsius B ad metam propius accidere possint, p numerus casuum quibus 2 vel plures, q numerus casuum quibus 1 vel plures propius ad metam possint accidere; sit s numerus variationum omnium quas globi omnes possint subire.

Ergo B casus habet r quibus obtineat 1, casus $p-r$ quibus obtineat $\frac{1}{2}$, & casus $q-p$ quibus obtineat $\frac{3m-4}{8m-8}$, ut patet ex præcedenti, adeoque summa illius expectationum erit

$$\frac{r \times 1 + \overline{p-r} \times \frac{1}{2} + \overline{q-p} \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s} = \frac{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p + \overline{q-p} \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s}.$$

Jam globi numero $\frac{1}{2}m$ possunt permutari terni, vicibus $\frac{1}{2}m \times \overline{\frac{1}{2}m-1} \times \overline{\frac{1}{2}m-2}$, dum globi omnes reliqui ipsorum A & B quorum numerus $m-3$, possunt variari vicibus $\overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. Igitur est $r = \frac{1}{2}m \times \overline{\frac{1}{2}m-1} \times \overline{\frac{1}{2}m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. Sed est $s = m \times \overline{m-1} \times \overline{m-2} \times \overline{m-3} \times \overline{m-4}$, &c. ergo $r = \frac{\frac{1}{8}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$.

Sed ex precedenti Problemate est $p = \frac{\frac{1}{4}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$, & $q = \frac{\frac{1}{2}ms - \frac{1}{2}s}{m-1}$.

Sub-

Substitutis igitur valoribus istis pro r, p, q, fiet expectatio ipsius B $= \frac{9mm - 26m + 16}{32mm - 64m + 32}$. Subtrahatur hæc ab $\frac{1}{s}$, & erit expectatio ipsius A$= \frac{23mm - 38m + 16}{32mm - 64m + 32}$; adeoque ratio sortium ipsorum A & B, erit ut $23mm - 38m + 16$ ad $9mm - 26m + 16$, quæ convenit numero globorum cuicunque, binario excepto.

Verum ut ratio sortium ipsorum A & B quum singulis globis certant, sive quum numerus globorum est 2, inveniatur; resumatur expressio generalis expectationis ipsius B, videlicet $\frac{\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}p + \overline{q - p} \times \frac{3m-4}{8m-8}}{s}$, & ponantur r & $p = 0$, & erit expectatio ipsius B $= \frac{q \times \frac{3m-4}{8m-8}}{} = \frac{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}}{m - 1} \times \frac{3m - 4}{8m - 8} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$, qua substracta ex 1, erit expectatio ipsius A $= \frac{7}{8}$, ergo ratio sortium ipsorum A & B hoc in casu erit ut 7 ad 1, quod aliunde constat ex principiis jamdudum expositis.

COROL. I.

Si numerus globorum esset infinitus, ratio sortium fieret tandem ut 23 ad 9.

COROL. II.

Si desint ipsi A ludi quotvis quominus victor evadat, & ipsi B ludi itidem quotvis, ratio sortium eadem ratiocinatione invenietur.

COROL. III.

Si dexteritates sint in ratione data, ratio sortium etiam invenietur.

PROB.

PROB. XVIII.

Certet A cum B, fore ut ipse, dato tentaminum numero, tessera dato facierum numero constante, facies quascunque datas jecerit: Quæritur expectatio ipsius A.

SOLUTIO.

Sit $p+1$ numerus facierum in tessera, n numerus tentaminum datus, f numerus facierum quas jaci oporteat.

Numerus casuum quibus A monada semel vel pluries, tentaminibus numero n, jacere possit, est $\overline{p+1}|^n - p^n$, ut patet ex jam demonstratis.

Expungatur binarius e numero facierum, ita ut numerus facierum reducatur ad p; & erit numerus casuum quibus A monada semel vel pluries, tentaminibus numero n, jacere possit $p^n - \overline{p-1}|^n$.

Ergo, jam restituto binario, numerus casuum quibus A monada & binarium jacere possit, est differentia istorum casuum, videlicet $\overline{p+1}|^n - 2p^n + \overline{p-1}|^n$.

Expungatur nunc ternarius, & erit numerus casuum quibus A monada & binarium jacere possit, $p^n - 2\times\overline{p-1}|^n + \overline{p-2}|^n$.

Ergo, jam restituto ternario, numerus casuum quibus A monada, binarium, & ternarium jacere possit, est $\overline{p+1}|^n - 3\times p^n + 3\times\overline{p-1}|^n - \overline{p-2}|^n$. Et sic deinceps de cæteris.

Scribantur ergo ordine potestates omnes, (mutatis alternatim signis) $\overline{p+1}|^n - p^n + \overline{p-1}|^n - \overline{p-2}|^n + \overline{p-3}|^n$ &c. Et præfigantur illis coefficientes potestatis designatæ per f, & summa terminorum erit numerator expectationis ipsius A, cujus denominator erit $\overline{p+1}|^n$

N n EX-

EXEMP. I.

Sit 6 numerus facierum in tessera, & 2 numerus facierum datarum quas jaci oporteat tentaminibus 8, & erit expectatio ipsius A, $\frac{6^8 - 2 \times 5^8 + 4^8}{6^8}$.

EXEMP. II.

Sit 6 numerus facierum in tessera, & 6 numerus facierum quas jaci oporteat tentaminibus 12, & erit expectatio ipsius A,

$$\frac{6^{12} - 5 \times 5^{12} + 15 \times 4^{12} - 20 \times 3^{12} + 15 \times 2^{12} - 6 \times 1^{12}}{6^{12}}$$

EXEMP. III.

Contendat A cum B fore ut ipse, tentaminibus numero 43, tessera faciebus 36 constante, facies duas datas jecerit, sive ut binis tesseris vulgaribus jecerit duas monadas simul, atque etiam duos binarios simul, & erit expectatio ipsius A

$$\frac{36^{43} - 2 \times 35^{43} + 34^{43}}{36^{43}}.$$

N. B. Facilis erit additio & subtractio partium ex quibus expectationes istæ componuntur, ope Tabulæ Logarithmorum.

PROB. XIX.

Invenire quotenis tentaminibus futurum sit probabile ut collusorum alter A facies quascunque datas jaciat, tessera constante dato facierum numero.

SOLUTIO

Sit ut prius $p + 1$ numerus facierum in tessera, n numerus tentaminum datus, f numerus facierum quæsitus. Ponatur

$$\text{Log.}\ \frac{1}{1 - \sqrt[f]{\frac{1}{2}}} = a, \quad \&\ \text{Log.}\ \frac{p+1}{p} = \beta, \quad \&\ \text{erit}\ n = \frac{a}{\beta}\ \text{prope},$$

DE-

DEMONSTRATIO.

Si numerus facierum quas jaci oporteat sit 6, expectatio ipsius A erit $\frac{\overline{p+1}|^n - 6p^n + 15 \times \overline{p-1}|^n - 20 \times \overline{p-2}|^n + 15 \times \overline{p-3}|^n - 6 \times \overline{p-4}|^n + \overline{p-5}|^n}{\overline{p+1}|^n}$

Fingatur terminos $p+1$, p, $p-1$, $p-2$, &c. esse in progressione Geometrica, quæ suppositio non multum a vero aberrabit, si præsertim p ad 1 habuerit rationem satis magnam, & ponatur $\frac{p^n}{\overline{p+1}|^n} = \frac{1}{r^n}$; ergo expectatio ipsius A erit

$$1 - \frac{6}{r^n} + \frac{15}{r^{2n}} - \frac{20}{r^{3n}} + \frac{15}{r^{4n}} - \frac{6}{r^{5n}} + \frac{1}{r^n} = \frac{1}{2}.$$

Extrahatur utrinque radix sexta, & fiet $1 - \frac{1}{r^n} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$,

ergo $r^n = \frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}}$, ponatur jam Log. $r = \beta$, & Log. $\frac{1}{1 - \sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = \alpha$, & erit $n\beta = \alpha$, adeoque $n = \frac{\alpha}{\beta}$, & eadem erit demonstratio de cæteris casibus.

Si sit aliqua suspicio ne valor indicis n sic inventus non sit satis accuratus, tunc substituatur valor iste pro n, & notetur error, tunc mutetur aliquantulum valor iste, & notetur novus error, & ope duorum errorum valor indicis n satis accurate corrigetur, si Regula falsi adhibeatur.

Potest valor indicis n sic inventus corrigi per seriem infinitam, ex natura Problematis depromptam, talem ut primus terminus hujus seriei sit valor iste quem assignavimus; sed correctio per differentiam errorum sufficit ad usus practicos.

EXEMP. I.

Invenire quotenis jactibus vulgaris tesseræ, probabile sit ut A facies omnes jaciat.

Log.

$$\text{Log. } \frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \quad \text{Log. } \frac{6}{5} = 0.0791812,$$

ergo $n = \frac{0.9621753}{0.0791812} = 12 +$. Ergo concludere jam licet numerum jactuum quæſitum fore 12 circiter, ſi vero 12 ſubſtituatur pro n in æquatione caſui huic competente, invenietur expectatio ipſius A .437 prope, quæ aliquanto debita nempe .5 minor eſt; ergo ponatur 13 pro n, & invenietur expectatio ipſius A .513, quæ eſt debita major; ergo poterit A in ſe ſuſcipere ut facies omnes tentaminibus 13 jaciat, idque potiori conditione.

EXEMP. II.

Invenire quotenis tentaminibus futurum ſit probabile ut A teſſera faciebus 216 conſtante, facies ſex datas jaciat, ſive ut tribus teſſeris vulgaribus * *Triadas* omnes jaciat.

$$\text{Log. } \frac{1}{1-\sqrt[6]{\frac{1}{2}}} = 0.9621753, \ \text{Log. } \frac{216}{215} = 0.0020152, \text{ ergo}$$

$$n = \frac{0.9621753}{0.0020152} = 477 \text{ prope.}$$

---

* *Raffles.*

DE
Duratione Ludorum.

PROB. XX.

A & B quorum dexteritates sint in ratione data, videlicet, ut a *ad* b, *ea conditione ludant, ut quoties* A *ludum unum vicerit,* B *tradat ipsi nummum unum; quoties vero* B *vicerit,* A *ipsi tradat nummum unum: & non prius ludo desistant, quam eorum alter nummos omnes alterius lucratus fuerit. Adstent vero spectatores duo* R *&* S, *quorum* R *affirmet certamen finitum iri intra datum ludorum numerum,* S *neget: Quæritur expectatio ipsius* S.

SOLUTIO.

Casus I.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; sit etiam 2, numerus de quo R & S contendant: Jam propter 2, numerum ludorum de quo contenditur, elevetur $a+b$ ad potestatem 2, quæ erit $aa+2ab+bb$: terminus $2ab$ ipsi S favet, reliqui adversantur, adeoque illius expectatio erit $\frac{2ab}{\overline{a+b}|^2}$.

Casus II.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & sit 3 numerus ludorum de quo R & S contendant; elevetur itaq; $a + b$ ad potestatem 3^{am}, quæ erit $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$. Jam termini duo $+ a^3 + b^3$, omnino ipsi S adversantur, reliqui duo $3aab + 3abb$, partim favent, partim adversantur; dividantur ergo termini isti in partes suas, videlicet $3aab$ in aab, aba, baa, atque $3abb$ in abb, bab, bba, & partes $aba + baa + abb + bab$, sive $2aab + 2abb$ ipse S favent, reliquæ adversantur. Adeoque expectatio ipsius S erit $\frac{2aab + 2abb}{\overline{a+b}|^3}$, sive (divisis numeratore & denominatore per $a + b$) $\frac{2ab}{\overline{a+b}|^2}$, quæ eadem est ac in casu præcedenti.

Casus III.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 4 numerus ludorum de quo spectatores contendant; elevetur itaque $a+b$ ad potestatem 4^{am}, quæ erit $a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4$; termini $a^4 + 4a^3b + 4ab^3 + b^4$ omnino ipsi S adversantur, terminus unicus $6aabb$ partim favet, partim adversatur: dividatur ergo terminus iste in partes suas, $aabb$, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, $bbaa$, & partes quatuor, $abab$, $abba$, $baab$, $baba$, sive $4aabb$, ipsi S favent; adeoque illius expectatio erit $\frac{4aabb}{\overline{a+b}|^2}$.

Casus IV.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 5 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & expectatio ipsius S invenietur eadem ac in præcedenti casu.

Casus V.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 6 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & expectatio ipsius S invenietur $\frac{8a^3b^3}{\overline{a+b}|^6}$

Generalius.

Sit 2 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & $2+d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant, erit

$$\frac{\overline{2ab}|^{1+\frac{1}{2}d}}{\overline{a+b}|^{2+d}}$$ expectatio ipsius S.

Ubi nota d numerum esse parem; quod si d sit numerus impar, expectatio ipsius S eadem erit ac si numerus ille unitate esset diminutus.

Casus VI.

Sit 3 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & $3+d$ numerus ludorum de quo spectatores contendant, & invenietur expectatio ipsius S $= \frac{\overline{3ab}|^{1+\frac{1}{2}d}}{\overline{a+b}|^{2+d}}$.

Ubi nota d numerum esse parem; quod si d sit numerus impar, expectatio ipsius S eadem erit ac si numerus ille unitate esset diminutus.

Casus VII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 4 numerus ludorum de quo spectatores contendant, & invenietur expectatio ipsius S $\frac{4a^3b+6aabb+4ab^3}{\overline{a+b}|^4}$.

Casus

Casus VIII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & *6* numerus ludorum de quo spectatores contendant, & invenietur expectatio ipsius S $\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{\overline{a+b}|^6}$

Tabula expectationum ipsius S, pro numero nummorum 4.

4.	$\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{\overline{a+b}|^4}$
6.	$\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{\overline{a+b}|^6}$
8.	$\frac{48a^5b^3 + 68a^4b^4 + 48a^3b^5}{\overline{a+b}|^8}$
10.	$\frac{164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6}{\overline{a+b}|^{10}}$
12.	$\frac{560a^7b^5 + 792a^6b^6 + 560a^5b^7}{\overline{a+b}|^{12}}$
	&c.

Tabula iste facile continuabitur, si sequentia adnotentur

1°. Coefficientem termini primi in quolibet numeratore esse summam coefficientem terminorum omnium in numeratore præcedenti. 2°. Coefficientem termini secundi esse aggregatum summæ istius, & coefficientis termini secundi præcedentis. 3°. Coefficientem termini tertii eundem esse, ac coefficientem termini primi. 4°. Producta literalia, ex præcedentibus, prima ex primis, secunda ex secundis, formari, multiplicatis præcedentibus per *ab*. 5°. Denominatores omnes esse potestatem illam binomii $a + b$, quæ designatur per numerum ludorum de quo R & S contendunt.

Hic

Hic obiter venit obſervandum coefficientes omnes, primi ex primis, ſecundi ex ſecundis, generari poſſe. Etenim ſi ex ultimo præcedente quadruplicato, ſubtrahatur penultimus duplicatus, orietur coefficiens quæſitus.

Regula generalis.

Sit n numerus nummorum quos uterque colluſorum habeat, $n+d$ numerus ludorum de quo ſpectatores contendant.

Elevetur $a+b$ ad poteſtatem n, & reſecentur termini duo extremi; multiplicetur reſiduum per $aa+2ab+bb$, & rejiciantur termini extremi; fiat rurſus multiplicatio reſidui per $aa+2ab+bb$, & rejiciantur extremi, & ſic deinceps fiant tot multiplicationes quot ſunt unitates in $\frac{1}{2}d$; & productum ultimum erit numerator expectationis ipſius S; denominator vero ſemper erit $\overline{a+b}|^{n+d}$.

N. B. Si d ſit numerus impar, ſubſtituatur $d-1$ pro d.

Si n ſit numerus impar, dividi poterunt numerator & denominator expectationis per $a+b$, & fiet expectatio ſimplicior.

EXEMP. I.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque colluſorum habeat, & 10 numerus ludorum de quo ſpectatores contendant, ſint autem dexteritates in ratione æqualitatis; quæritur expectatio ipſius S.

Eſt $n=4$, & $n+d=10$; igitur eſt $d=6$, & $\frac{1}{2}d=3$. Elevetur itaque $a+b$ ad poteſtatem 4^{am}, & reſectis ſemper extremis, fiant 3 multiplicationes per $aa+2ab+bb$.

$$\begin{array}{l} a^4 \mid + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 \mid + b^4 \\ \quad aa + 2ab + bb \\ \hline 4a^5b \mid + 6a^4bb + 4a^3b^3 \\ \quad + 8a^4bb + 12a^3b^3 + 8aab^4 \\ \quad\quad + 4a^3b^3 + 6aab^4 \mid + 4ab^5 \\ \hline 14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4 \\ \quad aa + 2ab + bb \\ \hline 14a^6bb \mid + 20a^5b^3 + 14a^4b^4 \\ \quad + 28a^5b^3 + 40a^4b^4 + 28a^3b^5 \\ \quad\quad + 14a^4b^4 + 20a^3b^5 \mid 14aab^6 \\ \hline 48a^5b^3 + 68a^4b^4 + 48a^3b^5 \\ \quad aa + 2ab + bb \\ \hline 48a^7b^5 \mid + 68a^6b^4 + 48a^5b^5 \\ \quad + 96a^6b^4 + 136a^5b^5 + 96a^4b^6 \\ \quad\quad + 48a^5b^5 + 68a^4b^6 \mid + 48a^3b^7 \\ \hline 164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6 \end{array}$$

Et erit expectatio ipsius S $= \dfrac{164a^6b^4 + 232a^5b^5 + 164a^4b^6}{\overline{a+b}|^{10}}$, & propter a & b æquales, erit ista expectatio $\dfrac{164 + 232 + 164}{2^{10}} = \dfrac{560}{1024}$ $= \dfrac{35}{64}$.

EXEMP. II.

Sit 5 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat, & 10 numerus ludorum de quo spectatores contendant, ita ut S neget certamen finitum iri intra ludos 10; sit autem dexteritas ipsius A ad dexteritatem ipsius B ut 2 ad 1.

Est $n = 5$, & $n + d = 10$; est igitur $d = 5$. Et propter d imparem, fingatur $d = 4$, ergo $\frac{1}{2}d = 2$. Elevetur itaque $a + b$ ad potestatem 5^{am}, & resectis semper extremis, fiant 2 multiplicationes per $aa + 2ab + bb$.

a^5

$$\begin{array}{l} a^5 \mid + 5a^4b + 10a^3bb + 10a^2b^3 + 5ab^4 \mid + b^5 \\ \qquad\qquad aa + 2ab + bb \\ \hline 5a^6b \mid + 10a^5bb + 10a^4b^3 + 5a^3b^4 \\ \qquad + 10a^5bb + 20a^4b^3 + 20a^3b^4 + 10aab^5 \\ \qquad\qquad + 5a^4b^3 + 10a^3b^4 + 10aab^5 \mid + 5ab^6 \\ \hline \qquad 20a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 20aab^5 \\ \qquad\qquad aa + 2ab + bb \\ \hline \qquad 20a^7bb \mid + 35a^6b^3 + 35a^5b^4 + 20a^4b^5 \\ \qquad\qquad + 40a^6b^3 + 70a^5b^4 + 70a^4b^5 + 40a^3b^6 \\ \qquad\qquad\qquad + 20a^5b^4 + 35a^4b^5 + 35a^3b^6 \mid + 20a^2b^7 \\ \hline \qquad\qquad 75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6 \end{array}$$

Ergo expectatio ipsius S erit $\frac{75a^6b^3 + 125a^5b^4 + 125a^4b^5 + 75a^3b^6}{\overline{a+b}|^9}$

Sive divisis numeratore & denominatore per $a + b$, propter numerum n imparem, fiet expectatio $= \frac{75a^5b^3 + 50a^4b^4 + 75a^3b^5}{\overline{a+b}|^8}$ $= 25a^3b^3 \times \frac{3aa + 2ab + 3bb}{\overline{a+b}|^8}$.

Et positis 2 & 1 pro a & b respective, fiet expectatio $= \frac{8 \times 25 \times 19}{6561} = \frac{3800}{6561}$.

PROB.

PROB. XXI.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum quæ faciat ut R possit æqua sorte affirmare certamen finitum iri intra ludos 4, S negare.

SOLUTIO.

Expectatio ipsius S, jam inventa, est $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{\overline{a+b}|^4}$, & quoniam, ex Hypothesi, R & S æqua sorte contendunt, ponatur $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{\overline{a+b}|^4} = \frac{1}{2}$, sive $a^4 - 4a^3b - 6aabb - 4ab^3 + b^4 = 0$. Addatur $12aabb$ utrobique, & fiet $a^4 - 4a^3b + 6aabb - 4ab^3 + b^4 = 0$. Extrahatur hinc inde radix quadratica, & erit $aa - 2ab + bb = ab\sqrt{12}$, sive facto $a : b :: z : 1$, $zz - 2z + 1 = z\sqrt{12}$, ubi invenietur radix duplex $z = 5.274$, & $\frac{1}{5.274}$. Ergo sive ratio dexteritatis ipsius A ad dexteritatem ipsius B sit ut 5.274 ad 1, vel ut 1 ad 5.274, R & S æqua sorte contendent.

PROB. XXII.

Sit 4 numerus nummorum quos uterque collusorum habeat; Requiritur ratio dexteritatum talis, ut possit R affirmare finitum iri certamen intra 4 ludos, S negare, atque sint sortes ipsorum R & S in ratione data, videlicet ut 3 ad 1.

SOLUTIO.

Expectatio ipsius S ex numero ludorum 4, & ratione dexteritatum oriunda est $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{\overline{a+b}|^4}$. Eadem expectatio propter datam rationem sortium est $\frac{1}{4}$. Ergo fit $\frac{4a^3b + 6aabb + 4ab^3}{\overline{a+b}|^4} = \frac{1}{4}$.

$\frac{1}{4}$; five $a^4 - 12a^3b - 18aabb - 12ab^3 + b^4 = 0$. Jam facto $a : b :: z : 1$, erit $z^4 - 12z^3 - 18zz - 12z^3 + 1 = 0$. Supponatur hæc æquatio ex binis iftis quadraticis formari, $zz + yz + 1 = 0$. Et $z^2 + pz + 1 = 0$.

$$\text{Ergo } z^4 \begin{matrix} +y \\ +p \end{matrix} z^3 \begin{matrix} +py \\ +2 \end{matrix} zz \begin{matrix} +y \\ +p \end{matrix} z + 1 = 0$$

Comparentur coefficientes terminorum Homologorum, & erit $y + p = -12$, & $py + 2 = -18$, five $py = -20$; unde orietur æquatio $yy + 12y = 20$, cujus radix negativa erit $= -13.483$. Subftituatur valor ifte in locum ipfius y, & erit $zz - 13.483z + 1 = 0$, cujus æquationis radix duplex invenietur 13.407, & $\frac{1}{13.407}$ prope, ergo five a ad b fit ut 13.407 ad 1, five ut 1 ad 13.407, ratio fortium ipforum R & S erit ut 3 ad 1.

PROB. XXIII.

Sit 4 *numerus nummorum quos uterque colluforum habeat; Requiritur ratio dexteritatum quæ faciat ut* R *poffit æqua forte affirmare certamen finitum iri intra ludos* 6, S *negare.*

SOLUTIO.

Expectatio ipfius S ex numero ludorum, & ratione dexteritatum oriunda, erit $\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{\overline{a+b}|^6}$. Ejufdem expectatio propter datam fortium æqualitatem erit $= \frac{1}{2}$. Ergo erit $\frac{14a^4bb + 20a^3b^3 + 14aab^4}{\overline{a+b}|^6} = \frac{1}{2}$, five $a^6 + 6a^5b - 13a^4bb - 20a^3b^3 - 13aab^4 + 6ab^5 + b^6 = 0$, & facto $a : b :: z : 1$.

$$z^6 + 6z^5 - 13z^4 - 20z^3 - 13zz + 6z + 1 = 0.$$

Ponatur hæc æquatio ex binis iftis formari.

$$z^2 + yz + 1 = 0.$$
$$\& \ z^4 + pz^3 + qz^2 + pz + 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Ergo } z^6 + yz^5 + z^4 \\ + pz^5 + pyz^4 + pz^3 \\ + qz^4 + qyz^3 + qzz \\ + pz^3 + pyzz + pz \\ + zz + yz + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Sive } z^6 \begin{matrix} +y \\ +p \end{matrix} z^5 \begin{matrix} +1 \\ +py \\ +q \end{matrix} z^4 \begin{matrix} +2p \\ +qy \end{matrix} z^3 \begin{matrix} +1 \\ +py \\ +q \end{matrix} zz \begin{matrix} +p \\ +y \end{matrix} z + 1 = 0.$$

Et comparatis coefficientibus erit $y+p = 6$, $1 + py + q = -13$, seu $py + q = -14$, $2p + qy = -20$. Unde orietur æquatio $y^3 - 6yy - 16y + 32 = 0$, cujus una radicum erit -2.9644, qua substituta in locum ipsius y, in æquatione $z^2 + yz + 1 = 0$, habebitur æquatio nova $z^2 - 2.9644z + 1 = 0$. Ubi invenietur radix duplex 2.576, & $\frac{1}{2.576}$; ergo sive dexteritas ipsius A ad dexteritatem ipsius B sit ut 2.576 ad 1, seu ut 1 ad 2.576, R & S æqua sorte contendent.

COROLLARIUM.

Omnes hujus generis æquationes, in quibus ratio dexteritatum determinanda venit ex datis numero nummorum & numero ludorum, ad dimensiones dimidio saltem pauciores, quam sit numerus ludorum datus semper reducentur; etenim coefficientes terminorum hinc inde ab extremis æqualiter distantium semper iidem erunt, adeoque si fingatur æquationes istas formari ex $yy + yz + 1 = 0$, & æquatione altera cujus coefficientes hinc inde ab extremis æqualiter distantes sint iidem, comparationes terminorum homologorum non erunt plures quam est dimidius ludorum numerus, adeoque dimensiones quantitatis y dimidio saltem pauciores erunt quam dimensiones quantitatis z.

PROB.

PROB. XXIV.

Positis iisdem ac in Prob. 20. *habeat* A *nummos* p, B *vero nummos* q : *Quæritur expectatio ipsius* S.

SOLUTIO.

Sumatur Binomium $a+b$, & rejectis semper terminis in quibus dimensiones quantitatis a excedunt dimensiones quantitatis b per q, & terminis in quibus dimensiones quantitatis b excedunt dimensiones quantitatis a per p, multiplicentur continuo termini residui per $a+b$, & fiant tot multiplicationes quot sunt unitates in dato ludorum numero unitate diminuto, & habebitur numerator expectationis ipsius S, cujus denominator erit potestas binomii $a+b$ designata per numerum ludorum.

EXEMPLUM.

Sit $p=3$, & $q=2$; numerus ludorum 7.

$$a+b$$
$$a+b$$

$$aa \mid +2ab+bb$$
$$a+b$$

$$2aab+3abb \mid +b^3$$
$$a+b$$

$$2a^3b \mid +5aabb+3ab^3$$
$$a+b$$

$$5a^3bb+8aab^3 \mid +3ab^4$$
$$a+b$$

$$5a^4bb \mid +13a^3b^3+8aab^4$$
$$a+b$$

$$13a^4b^3+21a^3b^4 \mid +8aab^5$$

Ergo erit expectatio ipsius S $= \dfrac{13a^4b^3+21a^3b^4}{\overline{a+b}|^7}$.

PROB.

PROB. XXV.

A & B collusores duo, quorum dexteritates sint in ratione data, hoc pactum ineunt, ut non prius ludo desistant quam datus numerorum ludus sit transactus; sint R *&* S *spectatores duo, quorum* R *contendat fore ut aliquando ante conclusum certamen vel expirante certamine,* A *victorem se præstiterit pluries quam* B *dato ludorum numero; Quæritur expectatio ipsius* R.

SOLUTIO

Sit n numerus ludorum transigendus priusquam A & B ludo desistant, sit $n-d$ numerus ludorum de quo R & S contendant, sit ratio dexteritatum ut a ad b. Elevetur $a+b$ ad potestatem n, tunc si d sit numerus impar, sumantur tot termini istius potestatis quot sunt unitates in $\frac{d+1}{2}$; sumantur etiam tot termini sequentes quot jam sumpti fuerunt, sed mutentur illorum coefficientes, iisque præfigantur coefficientes terminorum præcedentium ordine retrogrado: Si vero d sit numerus par, sumantur tot termini potestatis $\overline{a+b}|^n$ quot sunt unitates in $\frac{d+2}{2}$, sumantur etiam tot termini sequentes quot sunt unitates in $\frac{1}{2}d$, sed præfigantur illis coefficientes terminorum præcedentium ordine retrogrado, omisso ultimo præcedentium, & habebitur numerator expectationis ipsius R, quorum denominator erit $\overline{a+b}|^n$.

EXEMP. I.

Sit 10 numerus ludorum transigendus priusquam A & B ludo desistant, sit 3 numerus ludorum quibus aliquando A superaturus est ipsum B, sit ratio dexteritatum ut 1 ad 1: Elevetur $a+b$ ad potestatem 10^{am}, videlicet $a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 210a^6b^4 + 252a^5b^5 + 210a^4b^6 + 120a^3b^7 + 45aab^8 + 10ab^9 + 1b^{10}$.

1°. Est

1°. Est $n = 10$; 2°. $n - d = 3$; ergo est $d = 7$, & $\frac{d+1}{2} = 4$. Sumantur ergo 4 termini istius potestatis, videlicet $a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3$; sumantur etiam 4 termini sequentes, illisque praefigantur coefficientes terminorum praecedentium ordine retrogrado, & termini sequentes evadent $120a^6b^4 + 45a^5b^5 + 10a^4b^6 + a^3b^7$. Ergo erit expectatio ipsius R =

$$\frac{a^{10} + 10a^9b + 45a^8bb + 120a^7b^3 + 120a^6b^4 + 45a^5b^5 + 10a^4b^6 + 1a^3b^7}{\overline{a+b}|^{10}} = \frac{352}{}$$

EXEMP. II.

Sit $n = 6$, & $n - d = 4$; ergo est $d = 2$, & $\frac{d+2}{2} = 2$. Ergo expectatio ipsius R erit $\frac{a^6 + 6a^5b + a^4bb}{\overline{a+b}|^6}$

N. B. Si d sit numerus impar, poterunt numerator & denominator expectationis ipsius R dividi per $a + b$

PROB. XXVI.

Collusores duo, A *&* B, *quorum dexteritates sint in ratione data, videlicet ut* a *ad* b, *hoc pactum ineant, ut non prius ludo desistant quam datus ludorum numerus sit transactus: Adsint spectatores duo* R *&* S, *quorum* R *affirmet,* S *neget, fore ut aliquando ante finitum certamen, vel expirante certamine,* A *sit superaturus ipsum* B *dato ludorum numero* q; *& fore etiam ut aliquando* B *sit superaturus ipsum* A *dato ludorum numero* p: *Quaeritur expectatio ipsius* R

SOLUTIO

Inveniatur numerus casuum quibus A superare possit ipsum B dato ludorum numero q, per *Prob.* 25.

Inveniatur numerus casuum quibus B superare possit ipsum A dato ludorum numero p, per idem.

Inveniatur denique numerus casuum quibus neuter superare possit alterum datis ludorum numeris, per *Prob.* 24.

Addantur hi casus simul, & ex eorum aggregato subtrahatur $\overline{a+b}|^n$, & habebitur numerator expectationis ipsius R, cujus denominator erit $\overline{a+b}|^n$

EXEMPLUM.

Contendat R fore ut aliquando A ſit ſuperaturus ipſum B 2 ludis, & fore etiam ut aliquando B ſit ſuperaturus ipſum A 3 ludis, & ſit numerus ludorum tranſigendus 7.

Numerus caſuum quibus poſſit A ſuperare ipſum B 2 ludis, eſt $a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 21a^4b^3 + 7a^3b^4 + aab^5$.

Numerus caſuum quibus poſſit B ſuperare ipſum A 3 ludis, eſt $1a^4b^3 + 7a^3b^4 + 21aab^5 + 7ab^6 + b^7$.

Numerus caſuum quibus neuter alterum ſuperare poſſit datis ludorum numeris, eſt $13a^4b^3 + 21a^3b^4$.

Summa omnium iſtorum caſuum erit
$a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 22aab^5 + 7ab^6 + b^7$.
Subtrahatur $\overline{a+b}|^7$ ſeu
$a^7 + 7a^6b + 21a^5bb + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21aab^5 + 7ab^6 + b^7$
Reſiduum erit $1aab^5$.

Ergo expectatio ipſius R erit $\frac{aab^5}{\overline{a+b}|^7}$.

ERRATA.

Pag. 216. *lin*. 12. *dele* omnium. *Pag*. 218. *lin*. 16. *pro* ſimul, *lege* prima vice. *Pag*. 219. *lin*. 7. *lege* ut eventus aliquis. *Pag*. 220. *lin*. 3. *lege* limites. *Pag*. 231. *lin*. 15. *pro* 450, *lege* 495. *Lin*. 16 & 17. *pro* 115, *lege* 165. *Pag*. 239. *lin*. 8. *pro* $\frac{p}{1}$, *lege* $\frac{p}{2}$. *Pag*. 258. *lin*. 10. *pro* $x = 0$, *lege* $= 12aabb$. *Pag*. 262. *lin*. 4. *pro* numerorum ludus, *lege* ludorum numerus.

LONDON: Printed for *H. Clements* at the Half-Moon, and *W. Innys* at the Prince's Arms, in St. *Paul's* Churchyard; and *D. Brown* at the Black Swan without *Temple-Bar*.