Los Números Perfectos y Cuasi Perfectos

Por: José Acevedo J.

Números Perfectos

En matemáticas se le llama número perfecto a aquel natural que es igual a la suma de sus divisores propios, es decir todos los números naturales que lo dividen diferentes del número dado, si tomamos el 28 y buscamos sus divisores propios, sin incluir el 28, tenemos:

1, 2, 4, 7, 14

28 = 1 + 2 + 4 + 7 +14

Por lo tanto, siguiendo la definición de números perfectos, podemos afirmar que el 28 es uno de ellos.

Los primeros cuatro números perfectos son:

$6 = 2^1.(2^2-1)$

$28 = 2^2.(2^3-1)$

$496 = 2^4.(2^5-1)$

$8128 = 2^6.(2^7-1)$ 64

Incluso existe una fórmula que nos genera números perfectos pares:

$Np = 2^{n -1} (2^n – 1)$

Siempre que $(2^n – 1)$ sea un número primo la fórmula nos generará un número perfecto, a tales números primos se le conoce con el nombre de primos de Mersenne, en honor al monje del siglo XVII que estudió las propiedades de dichos números, Marin Mersenne. Los números perfectos pares tienen muchas propiedades interesantes entre ellas podemos citar:

a) Son números triangulares.
b) Son números Hexagonales.

c) Son números combinatorios.
d) El dígito correspondiente a las unidades siempre es 6 ó 8.

Hasta la fecha, julio del 2011, se desconoce si existen números perfectos impares, de existir tales números deben ser muy grandes, otra cuestión que permanece abierta (no se ha podido demostrar) es la existencia de infinitos números perfectos. Quién sabe, quizás tú amigo lector sea quien dé respuesta a tales interrogantes.

Números Cuasi Perfectos

Como ya vimos, un número es perfecto si la suma de sus divisores propios es igual al número dado, existen otros números cuya suma (divisores propios) es mayor que el número dado y otros en que la suma es menor, a tales números se les denominan: abundantes (si la suma de sus divisores propios es mayor que el número dado) y deficientes (si la suma de sus divisores propios es menor que el número dado).

Dentro de los números abundantes, existe todo un conjunto de números con propiedades singulares, a dichos números los llamaremos números cuasi perfectos.

Si N_p es un número perfecto, entonces $2N_p$ es un número cuasi perfecto.

Para denominar un número cuasi perfecto usaremos la notación N_q, por lo que:

$N_q = 2N_p$

Ejemplos:

$N_p = 6 \rightarrow N_q = 2(6) = 12$

Los divisores propios de 12, son:

6, 4, 3, 2, 1

Si sumamos tales números obtenemos:

6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 → 16 > 12, por lo que el 12 es un número abundante.

Es aquí donde nos preguntamos, ¿Qué hace que un número sea cuasi perfecto si la suma de sus divisores propios es siempre mayor que dicho número?

Si observamos los divisores propios de 12, notaremos que hay tres números pares y sólo dos impares, esta cantidad es constante para los impares que siempre serán un primo de Mersenne y el uno; si tomamos sólo los divisores pares de 12 y lo sumamos, entonces la suma de todos ellos será igual a 12, de aquí el nombre de cuasi perfecto.

6 + 4 + 2 = 12

Entonces podemos decir que un número N_q es cuasi perfecto si la suma de sus divisores propios pares es igual al número N_q.

Otra característica distintiva de los números cuasi perfectos es que sólo uno de sus divisores propios lo convierte en números abundantes, a este divisor lo denominaremos sobrante (D_s), para encontrar el número sobrante dentro de los divisores propios de un número N_q, usaremos la siguiente fórmula:

$D_s = P_m + 1$

Donde:

D_s = divisor sobrante y P_m = primo de Mersenne.

El divisor sobrante de 12 es 4.

$P_m = 3$

$D_s = P_m + 1$

Si apartamos este número de los divisores propios de 12, la suma de los restantes será igual a 12.

$12 = 6 + 3 + 2 + 1$

$N_p = 28 \rightarrow N_q = 2(28) = 56$

Los divisores propios de 56 son:

28 14 8 7 4 2 1 $\rightarrow$ $28 + 14 + 8 + 7 + 4 + 2 + 1 = 64$ (56 es un número abundante).

Sumando sólo los divisores propios pares de 56.

$28 + 14 + 8 + 4 + 2 = 56$ $\rightarrow$ 56 es un número cuasi perfecto.

$P_m = 7$

$D_s = P_m + 1 \rightarrow D_s = 7 + 1 = 8$

$28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 56$

$N_q = 992$

$992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$

$992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 31+ 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

Como podemos observar los números primos de Mersenne están estrechamente ligados con los números cuasi perfectos por lo que podemos relacionarlos por la siguiente fórmula:

$N_q = P_m (P_m + 1)$

Como:

$P_m = 2^x – 1$, tal que x es un número primo.

$N_q = 2^x (2^x – 1)$