Conjetura de los Números Semiperfectos

(Conjetura de Santo Domingo)

Por: José Acevedo J.

Dado un número semiperfecto (N_s) que a la vez es múltiplo de un número perfecto (N_p), esto es:

$N_s = a * N_p$; tal que $a > 0$ en el conjunto de los naturales.

Podemos decir que:

Si $(a * N_p)/2$ es par, existen por lo menos **a** maneras diferentes de representar el producto $(a * N_p)$ con los divisores propios de este producto.

Ejemplo:

48 = 8 * 6

Los divisores propios de 48 son: 24, 16, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1.

Combinando sus divisores propios para que nos den el número dado, tenemos:

1) 24 + 16 + 8 = 48
2) 24 + 16 + 6 + 2 = 48
3) 24 + 16 + 4 + 3 + 1 = 48
4) 24 + 12 + 4 + 8 = 48
5) 24 + 12 + 4 + 6 + 2 = 48
6) 24 + 8 + 6 + 2 + 4 + 3 + 1 = 48
7) 16 + 8 + 12 + 4 + 6 + 2 = 48
8) 16 + 8 + 12 + 3 + 1 + 6 + 2 = 48

4 * 28 = 112

112 se puede expresar como:

1) 56 + 28 + 16 + 8 + 4
2) 56 + 28 + 16 + 7 + 1 + 4
3) 56 + 28 + 14 + 2 + 8 + 4
4) 56 + 28 + 14 + 2 + 7 + 1 + 4

Si $(a * N_p)/2$ es impar, el número de combinaciones que se pueden obtener con los divisores propios del número dado, que sumados den dicho número, es siempre menor o igual al coeficiente **a**.

Ejemplo:

3 * 6 = 18

Los divisores propios de 18 son: 9, 6, 3, 2, 1

1) 9 + 6 + 3 = 18
2) 9 + 6 + 2 + 1 = 18

Como se puede notar el número de combinaciones posible es menor el coeficiente impar 3.

Números Dúos Perfectos:

Dentro de los números abundantes y más específicamente dentro del conjunto de los números semiperfectos, existe todo un conjunto de números con propiedades singulares, a estos números el autor los ha denominado como **números dúos perfectos**.

Si N_p es un número perfecto, entonces $2N_p$ es un número dúo perfecto.

Para denominar un número dúo perfecto usaremos la notación N_q, por lo que:

$N_q = 2N_p$

Ejemplos:

$N_p = 6$, entonces $N_q = 2(6) = 12$

Los divisores propios de 12, son:

6, 4, 3, 2, 1

Si sumamos tales números obtenemos:

6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16, entonces 16 > 12, por lo que el 12 es un número abundante.

Es aquí donde nos preguntamos, ¿Qué hace que un número sea dúo perfecto si la suma de sus divisores propios es siempre mayor que dicho número?

Si observamos los divisores propios de 12, notaremos que hay tres números pares y sólo dos impares, esta cantidad es constante para los impares que siempre serán un primo de Mersenne y el uno; si tomamos sólo los divisores pares de 12 y lo sumamos, entonces la suma de todos ellos será igual a 12.

6 + 4 + 2 = 12

Otra característica distintiva de los números dúo perfectos es que sólo uno de sus divisores propios lo convierte en números abundantes, es decir que existen sólo dos posibles maneras de expresar el números dúo perfecto mediante la suma de sus divisores propios, de aquí el nombre de dúo perfecto. Al divisor que convierte el número dúo perfecto en abundante lo denominaremos sobrante (D_s), para encontrar el número sobrante dentro de los divisores propios de un número N_q, usaremos la siguiente fórmula:

$D_s = P_m + 1$

Donde:

D_s = divisor sobrante y P_m = primo de Mersenne.

El divisor sobrante de 12 es 4.

$P_m = 3$

$D_s = P_m + 1$

Si apartamos este número de los divisores propios de 12, la suma de los restantes será igual a 12, es decir que existen dos maneras diferentes de expresar los números N_q por medio de la suma de sus divisores propios, de aquí su otro nombre, dúos perfectos.

12 = 6 + 3 + 2 + 1

$N_p = 28$, entonces $N_q = 2(28) = 56$

Los divisores propios de 56 son:

28 14 8 7 4 2 1, entonces 28 + 14 + 8 + 7 + 4 + 2 + 1 = 64 (56 es un número abundante).

Sumando sólo los divisores propios pares de 56.

28 + 14 + 8 + 4 + 2 = 56, entonces 56 es un número dúo perfecto.

$P_m = 7$

$D_s = P_m + 1$, entonces $D_s = 7 + 1 = 8$

28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1 = 56

$N_q = 992$

992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2

992 = 496 + 248 + 124 + 62 + 31+ 16 + 8 + 4 + 2 + 1

En resumen podemos decir que un número natural es dúo perfecto si la suma de todos sus divisores propios pares es igual al número dado y al mismo tiempo posee un único divisor sobrante D_s.

Como podemos observar los números primos de Mersenne están estrechamente ligados con los números dúos perfectos por lo que podemos relacionarlos mediante la siguiente fórmula:

$N_q = P_m (P_m + 1)$

Como:

$P_m = 2^x – 1$, tal que x es un número primo.

Podemos decir que:

$N_q = 2^x (2^x – 1)$

Otra propiedad de los números dúos perfectos la podemos encontrar en la suma de números pares consecutivos.

Supongamos que se nos pide encontrar la suma de los primeros 5 pares consecutivos, la respuesta no se hace esperar y procedemos a sumar los 5 primeros pares, es decir:

2 + 4 + 6 + 8 +10 = 30

Ahora imaginemos que se nos pide sumar todos los pares del 2 hasta el 100, esta vez dar la respuesta nos tomaría mucho más tiempo si seguimos el procedimiento anteriormente mostrado, razón por la cual debemos buscar una manera más eficiente de efectuar los cálculos.

Sea m el último de los términos pares y m/2 igual al número de términos, se cumple entonces que:

$K = m * (m/2 + 1)/2$

$K = (m + 2) * m/4 = (m + 2)/2 * m/2$

Donde:

m = último término de la serie.

k = suma de todos los términos pares (iniciando desde el 2).

Como m es un número par, la formula se reduce a:

$K = (z + 1) * z$

Esta última fórmula coincide con la dada para obtener números dúos perfectos, cuya relación es:

$N_q = P_m (P_m + 1)$, por lo que podemos decir que los números dúos perfectos pueden ser expresados como sumas de números pares consecutivos, cuyo primer término es el 2. Dicho en otras palabras, siempre que la cantidad de términos sea un número primo de Mersenne, la suma, partiendo desde el 2, será un número dúo perfecto.

Ejemplos:

2 + 4 + 6 = 12; suma de 3 términos pares consecutivos.

2 + 4 + 6 + 8 +10 +12 + 14 = 56; suma de 7 términos pares consecutivos.

Para obtener el número 992, se necesita la suma de 31 términos pares consecutivos, partiendo desde el 2.

Otra propiedad que poseen los números dúos perfectos es que la suma de todos sus divisores propios siempre nos da una potencia de 2.

Ejemplos:

Nq = 12, entonces 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16

Nq = 56, entonces 28 + 14 + 7 + 8 + 4 + 2 + 1= 64

Es decir que:

$Nq + Ds = 2^y$

Nota:

En otros escritos el autor ha llamado a los números dúos perfectos como números cuasi perfectos, este último nombre no resulta ser el más apropiado ya que puede causar confusión con otro conjunto de números cuyas propiedades son muy diferentes de los que aquí se han mostrado.