

Excerpta ex Epistolis non-nullis, ultrò citròque ab Illustrissimis Viris, *Slusio & Hugenio*, ad Editorem scriptis, de famigerato *Alhazeni* Problemate circa Punctum Reflexionis in Speculis cavis aut convexis; & primò quidem ex Prima *Hugenii*, 26 Junii 1669. scripta:

— **M**itto Tibi hac occasione Constructionem Problematís *Alhazeni* nuper à me inventam, & à Collegis meis felicem satis judicatam. Problema est;

Dato speculo cavo aut convexo, itemque oculo & puncto rei visæ, invenire Punctum Reflexionis.

Esto speculum ex sphaera quæ Centrum habeat *A* punctum, oculus vero sit in *B*, & punctum visibile in *C*, planumque ductum per *A, B, C*, faciat in sphaera circulum

Vid. Tab. II.
Fig. I.

Dd, in quo inveniendâ sint Reflexionis puncta. Per tria puncta *A, B, C*, describatur circuli circumferentia; cujus sit centrum *Z*, occurrat autem ei producta *AE*, perpend. *BC* in *R*, & sit duabus *RA, OA*, tertia proportionalis *NA*, eritque *NM*, parallela *BC*, altera asymptoton. Rursus sint proportionales *EA, $\frac{1}{2}AO, AI$* , & summâ *IX* equali *IN*, ducatur *YM* parallela *AZ*; eaque erit altera asymptotos. Denique sumtis *IX, IS*, quæ singulæ possint dimidium quadratum *AO*, unâ cum quadrato *AI*; erunt puncta *x & s* in hyperbola, aut sectionibus oppositis *Dd*, ad inventas asymptotos describendis, quarum intersectiones cum circumferentia *DO*, ostendent puncta Reflexionis quæsita. Constructio hæc, in omni Casu, quo Problema Solidum est, locum habet, præterquam in uno, ubi non hyperbola sed parabola describenda est; cum nimirum circumferentia per puncta *A, B, C* descripta, tangit rectam *AE*.

Hæc *Dn. Hugenius*, quorum cum fecisset Editor copiam *Dn. Slusio* 24 Sept. 1670; hic d. 22. Novemb. ejusdem anni hoc modo respondit;

— Ut ad jucundissimas tuas respondeam, quas nuper admodum accepi, cum variis de rebus agant, ab illa incipiam quæ mihi statim in oculos incurrit, ab *Alhazeni* nimirum Problemate, cujus constructionem à Viro Nobilissimo ad vos transmissam ut vidi, protinus eandem esse cum mea suspicatus sum; sed inspectis Adversariis

sariis meis, non leve discrimen reperi, ut mox videbis, & jam sanè vidisses nisi me prolixitas ante hac à scribendo deterruisset. Nequid tamen dissimulem, cum Nobilissimi Hugonii constructionem ad calculos revocarem, eandem omnino mecum analysin secutum esse deprehendi; sed cum ex illa dua nascantur effectiones, utraque per hyperbolam circa asymptotos; ille unam, ego alteram, uti facilio- Vid. Tab. II. rem, selegeram. Evidens est autem, nihil aliud quæri Fig II, III, IV. hoc Problemate (si illud ad terminos merè Geometricos revocemus) nisi in dato circulo, (cujus centrum A , radius AP) punctum aliquod ut P , à quo ductis ad puncta data $E B$, inaequaliter à centro A distantia, rectis PE, PB , recta AP producta bisecet angulum EPB . Quod quidem varios casus recipit. Vel enim normalis ex A in rectam EB , nimirum AO , cadit inter E & B ; vel ultra B . Si ultra, vel rectangulum EOB æquale est quadrato AO , vel majus vel minus. De casu æqualitatis videbimus infrà; nunc verò tres alios casus eadem ferè constructione complectemur. Per tria puncta AEB transeat circulus, ad cujus circumferentiam producat AO in D . Ac si quidem punctum O cadat inter E & B , recta AO versus O producenda erit; sin autem ultra B , sitque rectangulum EOB majus quadrato AO , producenda erit versus A ; at si rectangulum quadrato minus fuerit, circulus in ipso puncto D , rectam AO secabit. Tum ducta AX parallela EB , secante circulum datum in N , fiat ut rectangulum DAO ad quadratum AN , ita $\frac{1}{2}$ AX ad AH , quæ sumenda erit versus X , si O cadat inter E & B , aut rectangulum EOB minus sit quadrato OA ; at ex parte contraria, si sit majus. Ponatur nunc OQ æqualis AH (in directum EB primo & secundo casu, tertio verò, versus E ;) Tum fiant proportionales XAN, HK , sumenda omni casu versus X : sectaque AO in V , ut sit eadem ratio KA ad AV , quæ AD ad AX ; jungatur KV , ac producat EM parallela OA , indefinitè productæ, in puncto L ; erunt omni casu KL & QL asymptoti Hyperbolæ, quæ per punctum O descripta, proposito satisfaciet: Hoc tantum discrimine, quòd primo & secundo Casu hyperbola per O , Problema solvet in speculo convexo, secto vero ei opposita in concavo; at 3^o. casu contrà, Hyperbola per O serviet concavo, ejus opposita convexo. Atque id quidem, cum punctum V cadit inter A & O ; nam si ultra O caderet, unica Hyperbola inter eadem QL, KL descripta, tam speculo convexo quàm concavo satisfaceret. Cæterum si V caderet in ipsum punctum O , Problema

tunc

tunc planum esset, & ipsa recta LQ , LK illud absoluerent. Unde patet, Problematis hujus dari casus infinitos, qui per locum planum solvi possunt: quo magis venià digni videntur ij, qui illud per eundem locum universè solvi possit censuerunt, quòd ipsi aliquoties calculus feliciter cecidisset. Nulla enim dari potest trium punctorum A, E, B positio, (de casu æqualitatis rectanguli EOB , & quadrati OA mox videbimus,) quæ non admittat circulum aliquem ex centro A describendum, ad cujus circumferentiam Problema per locum planum solvi queat. Hujus autem circuli radius, si tanti est, ita invenietur: In primo & secundo casu superioris constructionis fiat ut quadratum AX unà cum duplo rectangulo OAD , ad duplum quadratum AD ; ita quadratum AO ad quadratum AN , erit AN radius quæsitus. At in 3^o casu, faciendum est, ut quadratum AX minus duplo rectangulo OAD , ad duplum quadratum AD ; ita quadratum AO ad quadratum AN .

Construendus nunc superest alius casus, æqualitatis nempe rectanguli EOB & quadrati AO , sive in quo circulus, per puncta A, B, E descriptus, tangit rectam AO . Rectè autem monuit Clarissimus Hugenius, hoc casu describendam esse Parabolam, quod tamen non ita intelligendum est, quasi per Hyperbolam solvi non possit, cum & Hyperbolam & Ellipsin, imò infinitas (si quis metodo nostrà uti velit) admittat; sed quod Parabolam quoque recipiat, quam alii casus respiciunt. Eadem ratione temperandum est quod ait; Constructionem suam omni casu quo problema solidum est, locum habere; intelligit enim, levi mutatione semper inveniri Hyperbolam quæ proposito serviat: quod casus à nobis superius constructos cum ejus constructione comparanti planum fiet. Ut autem ad casum æqualitatis redeam, & ne quid temerè asseruisse videar, Ecce tibi, non unam, sed duas parabolas, ac præterea

Vid. Tab. II.
Fig. V.

hyperbolas oppositas quæ propositum absolvunt. Sint, ut priùs, puncta data E, B , circulus ex centro A , ac alius per tria puncta A, E, B , cujus tangens sit AO , centrum D . Ductà diametro $NADX$, fiant tres proportionales XA, NA, ZA , cujus dimidium sit AL . Fiant iterum tres proportionales $2OA, NA, IA$, cujus dimidium sit KA , & perficiatur rectangulum $LAOV$; productæque LV in S , donec VS sit tertia proportionalis ipsarum AI, OV ; axe SL , latere recto AI , vertice S , describatur parabola; hæc enim circulum secabit in punctis P, P quæsitis. Tantundem faciet alia, si perfectò rectangulo $DAHC$, & productà KC in T , ita

ut CT sit tertia proportionalis ipsarum AZ, DC , describatur circa axem TK , vertice T , latere recto, ZA : occurret enim circulo in vid. Tab. II. Fig. VI. iisdem punctis PP . Facilior adhuc est constructio per sectiones oppositas; factis enim, ut prius, tribus proportionalibus XA, NA, ZA , demittatur ZI normalis, tertia proportionalis duplæ AO , & AN . Erit itaque ZI major ZA , cum dupla AO minor sit XA : Tum in puncto I , inclinentur utrinque angulo semirecto ad lineam IZ , rectæ IQ, IM , & ab utraque parte indefinitè producantur; demum circa illas tanquam asymptotos describatur per A hyperbola, & alia ipsi opposita; hæc enim satisfaciet Problemati in speculo convexo, illa in concavo. Cùm verò, ut ostendimus, ZI semper major sit rectâ ZA , recta IM nunquam transibit per A . Non dabitur itaque casus, quo ex hac constructione, velut in præcedentibus, Problema per ipsas asymptotos solvi possit: Et tamen hoc quoque aliquando locum planum admittit; cùm scilicet accidit, ut recta XO ducta ad centrum D tangat circulum NPP ; ipsum enim punctum contactus quæstionem solvit. Et hæc quidem de Problemate, quod hætenus multorum ingenia exercuit, & cujus solutionem ante aliquot annos absolvi, urgente Clar. Gutisconvio, Lovaniensi Matheseos Professore, qui sibi usui futurum aiebat; moliebatur enim nescio quid in Catopiricis: Sed mors manum iniecit, neque enim, ut hoc obiter addam, quidquam hujusmodi in schedis ejus repertum esse intellexi.

Hætenus Dn. Slusius; cujus Epistolæ Apographum cùm, Authore conscio, Editor communicasset Dn. Hugenio, simulque ex aliis laudati Slusii literis, 9 Martii 1671. datis, innuisset, invenisse ipsum duas alias ejusdem Problematis Analyses, priori illâ faciliores, & constructione inter se, & ab illa, diversas; quin imò præparationem quandam Generalem, ex qua Problematum omnium, quæ ad Punctum Reflexionis in Speculis Sphæricis, concavis & convexis, determinandum spectant, Analysis facile deduci possit: Dn. Hugenius Gallicè rescripsit 7 Novem. 1671. (tardiùs, ob incommodam puto valetudinem,) in hæc sententiam;

Obstrictum me tibi fateor, eò quod Slusianam Problematis Alhazeni constructionem impertiri voluisti. Exurgit illa, ut rectè notavit, ex eadem Analysis cum mea, ab eaque non longe discrepat; videtur tamen, meam esse naturalem magis, idque ob Hyperbolæ Asymptotæ dispositionem, nec tamen plus operæ requirit quam Slusiana.

Oportet

Oportet equidem, ut ipse hac de re cum eo agam, qui est Geometrarum, quos novi, omnium doctissimus candidissimusque; saltem ut copiam ab ipso petam facilioris adhuc illius Analyticos, quam invenisse se de hoc Problemate affirmat.

Sic Dn. Hugenius; qui cum aliis fortè negotiis, vel etiam adversà valetudine impeditus, ipsi Dn. Slusio de hoc argumento scribere differret, Slusius verò dicti Hugenii mentem ab harum Editore accepisset, ipse (Slusius, inquam.) literas hîc subjunctas, Editori missas, reposuit.

Antequam ad literas tuas, 22^o mensis elapsi datas, respondeam, officii mei ratio postulat hoc Anni novi principio, ut faustum illum ac felicem cum longa similitum serie, Tibi, Vir Clarissime, ac Societati Illustrissimæ & ὄντως Βροσικῆ, apprecer, quò ea que felicibus adèò auspiciis capta sunt, porro profèqui, ac tandem, magnè Reip. literaria emolumentò, ad exitum perducere Vobis liceat. Literas verò tuas quod attinet, gratias habeo maximas pro iis, qua me solitâ humanitate scire voluisti. Caterum à Cl. Hugenio nihil adhuc accipi, aliis, ut existimo, studiis occupato. Quoniam autem Tu, V. C. videri vis meas esse aliquid putare nugas, accipe, qua circa Alhazeni Problema, curis secundis, meditatùs sum.

Datus sit Circulus, cuius centrum A; puncta data sunt D & d. Supponatur factum quod queritur; sitque Radius incidens DE, re-

flexus Ed; & ex puncto reflexionis E cadat in junctam DA normalis EI, & in eandem, ex d, normalis dN, occurrantque

V. Tab. II.
Fig. VII.

eidem Tangens EC & Radius dE, productus in B. Sit nunc DA = z.

AI = a. NA = n. EI = e. dN = b. BA = y. AE = q. CA = x.

Igitur, cum anguli, DEC, CEB, & sint aequales, & angulus CEA rectus, ex hypothese, erunt tres, DA, CA, BA, harmonice proportionales, (hoc enim facile ostenditur.) Erit itaque ut DA ad BA, ita DC ad CB; sive in terminis Analyticis, z|y|z-x|x-y; & 2zy-xy = zx sive $\frac{2z}{z+y} = x$.

Cum autem Rectangulum CAI, sive xa sit aequale

Quadrato AE sive qq, erit $x = \frac{aq}{z}$, & per consequens $\frac{2z}{z+y} = \frac{aq}{z}$ sive

$\frac{2zq}{z+y} = y$. Porro, est ut dN ad EI, ita NB ad IB; sive b|e|y-n

|y-a. Itaque ye-ne = by-ba; & $y = \frac{ba-ne}{b-e}$. Igitur $\frac{2zq}{z+y} = \frac{ba-ne}{b-e}$

sive 2zbaa-2znae-qqbatqqne = bzqqzqqe. Quae

aquatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, cuius constructio cum Circulo dato,

Problemati satisfacit. Cum verò, ob Circulum, sit qq = a + e, si loco

2bzbaa ponatur ejus valor 2bzqq-2bzee, habebitur alia pariter

ad Hyperbolam circa asymptotos, bzqq-2bzee-2znae-qqba

+qqne = -zqqe. Et hac methodo, atque illà, quam in libello nostro de

Analyxi exposuimus, prodibunt infinita Aequationes ad Hyperbolas & El-

lipses, qua cum Circulo dato Problema absolvent; nisi quod Effectiones pla-

rumque intricatiores evadant quàm ut opera pretium sit illas aggredi: Con-

strui tamen poterunt eo modo, quo usi sumus in Ellipsi, ejusdem libelli nostri

Retulimus, ut vides, calculi nostri summam ad lineam DA; sed satis animadvertis, non majori difficultate referri potuisse ad dA (quae pariter data est,) ductis scilicet lineis, quas in Schemate punctis adumbravimus. Verum novo calculi labore non est opus. Si enim recta dA, ejusque partibus, eisdem ac prius terminos analyticis adhibeas, b.e si ipsam dA facias aequalem z, $Dn = b. nA = n. AI = a. iE = e,$ &c; prodibit eadem Aequatio quae prius; & infinitas alias Hyperbolas & Ellipses obtinebis, quae cum Circulo dato Problemati satisfaciant. Quoslibet essem, si singulos casus prosequi vellem, cum illorum Aequationes solâ signorum + & - variatione discernantur. Unum tamen excipio, nim. cum angulus dAD est rectus; ejus enim aequatio habetur, expunctis à priori aequatione partibus, in quibus n (quae in nihilum abit) invenitur: nempe haec, $2zbaa - qqba = bzqq - zqqe,$ vel (pro $2zbaa$ posito ejus valore) $zbqq - qqba = 2zbee - zqqe.$

Sed animadvertendum est, quòd, licet referendo Analysin ad rectam DA, statim sese offerant in aequatione duae Hyperbolae; & alia totidem à prioribus diversa, cum refertur ad rectam dA; easdem tamen omninò Parabolas haberi, ad utramvis reftarum dA vel DA referatur Analysin: cujus rei ratio levi consideratione Tibi occurret.

Patere nunc, V. Cl. ut superiorem Analysin omnibus, quae circa Speculorum Sphericorum reflexionem proponi solent, Problematibus V. Tab. II. applicem, novo factò Schemate. Sit igitur, ut prius, Circulus, Fig. VIII. cujus centrum A, punctum D datum, & ab eo radius incidens DE, cujus reflexus sit EQ. Junctâ DA, ducatur ad illam Tangens EC, & normalis EI; & producaturs ad eandem, recta QEB; denominentur partes ut prius $DA = z. CA = x. AE = q. BA = y. AI = a. IE = e.$ Igitur, propter tres DA, CA, BA, Harmonice proportionales, & tres CA, AE, AI, Geometricè, semper habebitur aequatio $y = \frac{zq}{2z - q},$ in quocumque Circuli punctum cadat DE. Itaque, si queratur punctum E, in quod si radius DE incidat, reflectatur parallelus diametro LAV normali ad DA; reflexus QE, productus transibit per I, ut patet; & I ac B coincident. Igitur $a = y = \frac{zq}{2z - q};$ sive, $aa - \frac{1}{2} \frac{zq^2}{q} = \frac{1}{2} qq,$ & Problema per plana solvetur.

Si queratur punctum, à quo radius reflectatur parallelus alteri cuilibet lineae, ut AK (ducta ex centro A;): ducatur ad illam, ex puncto I, Tangens KL = d. Evidens est, Triangula AKL, EIB, fore similia, cum omnia latera unius parallela sint lateribus alterius. Itaque AL ad LK ut EI ad IB, sive $q|d|e|a - y;$ & $\frac{qz - de}{q} = y = \frac{zq}{2z - qq};$ & $zq^3 = 2qzaa - 2zdae - q^3a + qqde;$ sive, pro a a posito $qq - ee,$ $zq^3 = 2zq^3 - 2zqee - 2zdae - q^3a + qqde.$ Utraque autem aequatio est ad Hyperbolam circa asymptotos, quae cum Circulo dato Problema absolvit.

Proponatur nunc efficere, ut radius reflexus transeat per datum punctum N (ut in Problemate Alhazeni,) vel ut productus versus punctum reflexionis E occurrat dato puncto N. Ex N cadat in AL normalis NO = n, sitque AO = b. Patet esse, ut AO ad differentiam ipsarum ON, AB, ita EI ad IB, h. e. $b|n - y|e|a - y$; vel $b|y \cdot n|e|a - y$. Igitur $\frac{b^2 - nc}{b - c} = y = \frac{zqq}{2z^2 - qq}$. Unde $2zbaa - 2znae - qqba + qqne = bzqq - zqqe$; nim. illa ipsa equatio Problematis Alhazeni quam supra inuimus: Vel, secundo casu, $\frac{b^2 + nc}{b + c} = y = \frac{zqq}{2z^2 + qq}$, sive $2zbaa + 2znae - qqba - qqne = bzqq + zqqe$. De quibus equationibus plura non addo, cum vel nimia sint fortasse que supra diximus.

Atque hac sunt Problemata, qua circa Punctum reflexionis proponi solent in quibus tamen finitam puncti D dati distantiam supposuimus. Sed facilius erit Analysis, si supponamus Infinitam. Secta enim CA bifariam in G, constat ex proprietate trium, DA, CA, BA, Harmonice proportionalium, tres DG, CG. BG, fore Geometricè proportionales, supposita quacunque puncti D distantia. Itaque, si supponatur Infinita, BG abibit in nihilum, & punctum B cum puncto G coincidet. Igitur AB erit perpetuo equalis BC; erit itaque CA = 2y, & Rectangulum CAI, equale Quadrato AE, dabit, in terminis Analyticis, $2ay = qq$, sive $y = \frac{qa}{2a}$: Cumque distantia puncti D supponatur infinita, erit ED parallela AC. Itaque, si queratur radius reflexus parallelus AL, quoniam eo casu a & y coincidunt, erit $a = y = \frac{qa}{2a}$, sive $aa = \frac{1}{2}qq$: Si queratur ut parallelus sit AK, erit rursus $q|d|e|a - y$; & $\frac{q^2 - dc}{q} = y = \frac{qq}{2a}$, sive $2qaa - 2dae = q^3$. Si petatur ut transeat per N, erit, ut supra, $\frac{b^2 + nc}{b + c} = y = \frac{qq}{2a}$, & $2baa + 2nae = bqqa + qqe$: que equationes sunt quoque ad Hyperbolas circa Asymptotos, nisi N punctum esse supponatur in AL; nam, cum tunc n abeat in nihilum, subiat is ab equatione partibus, in quibus n continetur, residue dant equationem ad Parabolam, ut supra quoque monuimus.

Non expectas, V. Cl. ut cum specula Concava haftenus in exemplum adduxerim, nunc agam de Convexis. Scis enim, eandem esse prorsus Analysis, & Equationes sola signorum + & - variatione distingui. Scis, Parabolam vel Ellipsin, qua uni satisfacit, satisfacere alteri; & si Hyperbola in Convexo problema absolvat, ejus oppositam paria facere in Concavo. His itaque omissis, addo tantum, eadem Analysis haberi in Speculis Concavis focos & spatia, que radii occupant in axe, data qualibet puncti lucentis distantia: Sed mira facilitate, cum radii supponuntur paralleli; quod tamen nonnullo circuitu a quibusdam demonstrari vidi. Nam in Speculo Concavo EE, cujus centrum A, si radius extremus reflecti intelligatur ad axem AR in B, ducta tangente EC, erit CB = BA. Bisecetur semi-axis

AR in Q; erit itaque Q focus. & QB spatium quæsitum. Est autem QB dimidia CR (ob æquales AQ, QR, AB, BC,) h. e. dimidia excessus secantis arcus ER supra sinum totum. Igitur si arcus ER sit (e. g.) grad. 9, erit AC 101246, & BQ $\frac{623}{100000}$ ipsius AR.

Sed nimium Te moror in tricis hisce Geometricis, quibus me defunctum existimabam, nisi quod occurrant sæpe vel aliud agenti. Itaque si Deus vitam & otium dederit, hoc vere fortassis in publicum emittam mea, de Problematum determinatione, περί μοναχοῦ λόγου, de Tangentibus Curvarum, μελετήματα; præsertim cum Cl. Riccius me moneat, à se, studiis aliis occupato, nihil expectandum esse; & nuper ἀπεροδούτως inciderim in methodum facillimam ea demonstrandi, qua longiore circuitu olim inveneram; utràque tamen viâ in brevissimam ac facillimam Regulam desinente. Sed quid futurum sit, Θεῶν ἐν γένοσι κείται: Ego enim Pyrrhoniano more hætenus ἰδὲν ὀρίζω.*

*Quid hic de Tangentibus Curvarum pollicetur Vir Illustrissimus, præstita ab eo vide in Transact. N^o. 95.

Vale, Vir Cl. meque ex asse tuum, ut Soles, amare perge. Dab. Leodii VI. Kalend. Januar. st. n. CIJCICLXXII.

Hæc Dn. Slusius; quæ quomodo placuerint Dn. Hugenio, quidque hic iis rescripserit, aliâ occasione, cum unâ vice omnia huc spectantia tradi commodè nequeant, Deo dante, exhibebimus.

Tab. II.





