NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES DE BRUXELLES.

TOME II.

BRUXELLES,
P. J. DE MAT, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE
ET DE L'UNIVERSITÉ DE LOUVAIN.

1822.

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES

DE LA

FOCALE PARABOLIQUE,

PAR M^{R} G. DANDELIN,

OFFICIER DU GÉNIE, AU SERVICE DE S. M. LE ROI DES PAYS-BAS.

LU A LA SÉANCE DU I^{er} AVRIL 1822.

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES PROPRIÉTÉS REMARQUABLES

DE LA

FOCALE PARABOLIQUE.

I.

Détermination des Foyers dans une Section Conique.

1. PAR l'axe du cône supposé droit, menons un plan perpendiculaire à celui de la section; il le coupera suivant une droite AD et le cône suivant deux arêtes SA et SE. Imaginons maintenant une sphère qui se meut dans l'intérieur du cône, en lui demeurant toujours tangente : Il y aura généralement deux positions de cette sphère dans lesquelles elle touchera le plan de la section, et les points de contact F et D seront sur la droite AD, en vertu de la symétrie du cône, de la section et de la sphère par rapport au plan ASE. Fig. 1.

Soient maintenant RDK, F*cd* les traces de la sphère dans ces deux positions, et désignons par T′ un point quelconque de la section conique dont la projection sur le plan SAE soit T. l'arête du cône, qui passe par T, touchera les sphères en deux points M′ et N′, dont les projections M et N se trouveront sur les traces *cd* et RK des plans des deux cercles de contact des sphères et du cône.

Or à présent si l'on suppose deux rayons FT′ et DT′, menés des points F et D au point T′ de la section conique, on voit que le premier est égal à N′T′, puisque ce sont deux tangentes menées du point T′ à la sphère, et que par une semblable raison $DT'=M'T'$. Donc $FT'+DT'=M'T'+N'T'=M'N'=Kd$; mais cette dernière quantité est constante, puisqu'elle dépend seulement de l'angle au centre du cône et de la position des deux sphères, et que ces trois élémens sont indépendans de la position du point T′ sur le contour de la section; donc on peut en conclure que la somme des rayons vecteurs, menés des points F et D à un point quelconque de cette section, est constante.

Cette propriété, qui appartient exclusivement aux sections coniques, démontre que les points F et D sont les foyers de la courbe que nous considérons et qui est ici une ellipse.

2. En appliquant à l'hyperbole et à la parabole un raisonnement exactement semblable, on conclura généralement l'énoncé du théorême suivant :

Si l'on fait mouvoir dans un cône droit une sphère et que dans une position quelconque de cette dernière, supposée tangente au cône, ou lui mène un plan tangent, l'intersection de ce plan et du cône aura pour foyer le point de contact de la sphère et du plan.

3. Si ce plan est assujetti à passer par un point constant situé sur le cône et à être perpendiculaire au plan de ce point et de l'axe du cône, pour chaque position de la sphère on n'aura plus qu'une position du plan tangent qui puisse donner une section, et d'après ce que nous avons vu, les foyers de ces diverses sections seront tous sur le plan de l'axe et du point fixe : ainsi dans cette hypothèse, la série des foyers fournira une courbe plane continue : c'est cette courbe que Mr Ad. Quetelet à nommée focale, et dont je vais exposer quelques propriétés très remarquables.

II.

Des diverses Générations de la focale, de sa forme et de quelques-unes de ses propriétés.

4. ASE étant la trace du cône sur le plan de la focale et A le point fixe, la première manière de décrire la focale qui se présente, c'est de faire mouvoir un cercle dans l'angle ASE, et dans chaque position de lui mener une tangente : les points de contact F, D, etc. obtenus de cette manière sont sur la focale. Cette construction, qui résulte immédiatement de ce que nous venons de dire, est très propre à indiquer la forme de la courbe. Fig. 1.

On voit d'abord qu'elle est comprise tout entière dans les deux portions P′SQ′ et PSQ de son plan, puisque le cercle mobile et par conséquent le point de contact n'en sortent point.

Lorsque le rayon du cercle est nul, le cercle se confond avec son centre qui est alors en S. Le point de contact coïncide par conséquent avec S et la courbe passe par ce dernier point.

Elle passe aussi en A; mais là, pour conserver sa loi de continuité, elle doit être tangente à l'arête AS, sans quoi elle sortirait de l'angle ASE, ce qui est impossible.

5. D'un autre côté il est évident que la courbe a deux branches infinies, l'une dans l'angle PSQ, l'autre dans l'angle P′SQ′; et l'on voit, en examinant attentivement les diverses positions du cercle mobile par rapport au point A, que ces deux branches, pour venir se rejoindre en A, doivent se croiser quelque part en B, et former ainsi une feuille ou nœud.

6. On voit aussi directement par cette construction que les branches de la courbe ont pour asymptote l'arête SQ; car soit E le point d'intersection de cette arête et de la tangente AE, on aura dans l'angle PAQ :

$$AS = SR - RA = SK - AD = (SE + EK) - (AE - DE)$$

d'où

$$2\,DE = AS + AE - SE.$$

Et dans l'angle P′AQ′

$$2\,DE = AS + SE - AE;$$

or plus le point E s'éloigne du sommet du cône, plus SE approche d'être égale à AE, donc il est clair que dans l'un et l'autre angle plus on éloignera le point E et plus DE approchera de $\frac{AS}{2}$, qu'il ne peut atteindre qu'à l'infini.

Maintenant soit ρ le rayon du cercle RDK, et nommons y la ligne DQ″, perpendiculaire sur SQ, nous aurons dans les deux angles

$$y = \frac{\overline{DE}^2.}{\sqrt{\rho^2 - \overline{DE}^2}.}$$

comme DE a une limite, et que ρ n'en a d'autre que l'infini, il est évident qu'on peut rendre ρ assez grand, pour que y soit plus petit que toute quantité possible donnée : ainsi donc passé une certaine valeur de ρ, la courbe approche autant que possible de l'arête SQ, mais sans jamais la joindre, puisque y ne devient nul que quand ρ est infini, ce qui suppose ainsi le centre O à l'infini.

La droite SQ est donc asymptote des deux branches de la courbe.

7. Delà résulte encore la découverte d'un nouveau point singulier; car on voit que la courbe, coupant son asymptote en S (4), ne peut chercher à la rejoindre en Q′, sans lui présenter sa concavité; et qu'ensuite elle ne peut éviter de la rencontrer, qu'en se contournant de nouveau de manière à lui présenter sa convexité. Le passage d'un de ces états à l'autre démontre l'existence d'un point d'inflexion au moins. Nous le déterminerons plus tard et nous passerons pour le présent aux diverses générations de la courbe.

Fig. 1. D'abord par le point A menons une droite AB, perpendiculaire à l'axe du cône, puis par le milieu B de cette droite, menons BV parallèle à l'arête SQ, nous aurons :

$$2\,BV = QE = QK - EK = AR - EK = AD - DE = AV + VD - (VE - VD).$$

et comme $AV = VE$, on en déduit

$$2\,BV = 2\,DV, \text{ ou } BV = DV.$$

8. Si donc du point A on mène la droite AE quelconque, et qu'à partir du point V, on prenne des deux côtés une longueur égale à BV, les deux points ainsi construits seront à la focale.

Cette construction, la plus simple et la plus élégante de toutes à été employée la première par Mr Quetelet, qui l'a tirée à priori de l'état de la section considérée dans le cône. Elle conduit directement à celle-ci :

9. Menez un cercle tangent en B à la droite BV, et par le point A conduisez lui une tangente AD. Le point de contact D est à la focale, puisque l'on a évidemment $BV = DV$, ce qui rentre dans la construction précédente.

10. Pour abréger nous appellerons désormais la ligne BV la directrice de la focale et le point A son sommet.

En reprenant la construction (8), que nous avons donnée pour la focale, on observera que si du point B on mène deux droites BD et BF aux points D et F, l'angle DBF est droit quelque soit la position de la droite AE. Or à mesure que l'on diminue l'angle BAE, les droites BD et BF deviennent de plus en plus courtes. D'un autre côté, le point B appartient à la courbe, comme on le voit en construisant les points de la focale qui se trouvent sur AB, par la méthode indiquée n° 8; les droites BD, BF sont donc des cordes : plus elles deviennent courtes entre leurs points extrêmes et plus elles se rapprochent de l'état de tangente à la courbe, et enfin elles le deviennent tout-à-fait et en même-temps, lorsque l'angle BAD est nul, ou infiniment petit : mais nous venons d'observer que quelque soit cet angle, l'angle DBF est toujours droit, donc il doit l'être encore à la limite des variations de BAD, ce qui prouve : 1° Que la courbe a dans ce point deux tangentes distinctes, et par conséquent que ses deux branches s'y croisent (5), 2° que ces deux tangentes sont perpendiculaires l'une à l'autre : ce qui peut servir à les construire toutes deux, quand on en connait une.

11. Nous nommerons désormais ce point *le nœud de la courbe.*

12. En corrélant les diverses parties de la figure 2, on voit que le nœud, le sommet et la directrice d'une focale étant donnés, la construction du cône générateur et des divers autres élémens de la formation de la courbe est facile à faire et résulte directement de ce que nous avons démontré. La réciproque a aussi manifestement lieu.

13. Sur le milieu de AB menons IH perpendiculaire à AB, et soit H son point de rencontre avec la focale; menons aussi AHV, le triangle HVB sera isoscèle (8), ainsi que le triangle ABH. D'après cela nous avons :

$$BHV = HBV = 2HAB,$$

mais $$ABV = ABH + HBV;$$

donc $$ABV = 3\,HAB:$$

ainsi l'angle HAB vaudra le tiers de ABV ou de α; mais

ABV = BSQ + un angl. droit ; donc puisque BSQ est le demi-angle au centre du cône ou $\frac{1}{2}$ ASQ, il vient :

$$3\,\text{HAB} = \frac{2\text{ ang. droits} - \text{ASQ.}}{2}$$

14. Ceci fournit le moyen de diviser un angle quelconque en trois parties égales ; car si cet angle est α, on n'a qu'à construire la figure précédente de manière à ce que l'on ait

$$\frac{2\text{ ang. droits} - \text{ASQ.}}{2} = \alpha.$$

D'où l'on tire ASQ = 2 ang. droits — 2α., alors l'angle HAB donnera le tiers de α, puisque l'équation finale du nº 13 devient alors 3 HAB = α.

Fig. 3. 15. Maintenant soit S le sommet, N le nœud, et NX la directrice d'une focale : prenons sur la courbe un point A et menons le rayon AS, qui coupe en C la directrice. Il est évident qu'en vertu de l'égalité des lignes AC et CN, la droite CD perpendiculaire sur la droite AN passe par le milieu de cette dernière et coupe en deux parties égales l'angle ACN et son égal SCX'. D'où il suit que cette droite est tangente à une parabole dont le foyer serait S et la directrice NX. Comme cette tangente figurera souvent dans le cours de ce mémoire, nous l'appellerons tangente corrélative du point A, ou simplement corrélative de A, et le point *a* de son contact avec la parabole, sera le point corrélatif ou simplement le corrélatif de A.

16. Ainsi nous en conclurons déjà que tout cercle, qui passe par un point de la focale et son nœud, a son centre

sur la corrélative de ce point, et réciproquement tout cercle dont le centre est sur la corrélative d'un point et qui passe par ce point, passe aussi par le nœud.

17. Nous pouvons déduire de là une nouvelle construction de la focale : sur une tangente quelconque Da, à la parabole, menons du point N une perpendiculaire ND à cette tangente, et prenons AD$=$DN, le point A sera sur la focale. Il est facile de voir en même-temps que la série des points D construits de cette manière est aussi une focale.

18. Soit B un second point de la focale, sa corrélative Fb coupera quelque part en V celle du point A, et il est clair que le cercle dont le centre est à l'intersection des deux corrélatives et qui passe par le nœud de la courbe, passe aussi par les deux points A et B. Pour abréger encore, nous appellerons ce point V sommet ou centre corrélatif des deux points A,B, tandis que nous donnerons à l'arc du cercle, compris entre les deux points, le nom de corde corrélative de ces deux points; il est naturel que le reste du cercle s'appelle prolongement de cette corde. On voudra bien excuser ces dénominations, sans lesquelles il serait difficile de présenter d'une manière claire plusieurs théorêmes intéressans de la focale et entre autres le suivant :

19. Soient pris sur la courbe six points désignés par Sans Fig.

A, B, C, D, E, F.

fesons passer par ces points, pris deux à deux, les six cordes corrélatives

AB, BC, CD, DE, EF, FA,

dont les centres seront

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f.$$

ces six centres seront les sommets d'un hexagone circonscrit à la parabole, et d'après un théorême connu des sections coniques, les trois diagonales ad, be, cf, se couperont en un seul point que j'appelle M'; cela posé :

Les deux cordes corrélatives AB et DE ont leurs centres a et d sur la diagonale ad. Elles se coupent d'abord en N d'après leur définition (18), elles ont encore un autre point commun, lequel doit être tellement placé, que sa distance à un point quelconque pris sur ad, doit être égale à la distance de ce point au point N. Or, le point M' se trouve sur la droite ad, donc en désignant par N' l'intersection des cordes corrélatives AB et DE, on aura $M'N'=M'N$. si N'' est aussi l'intersection des cordes BC et EF, et que N''' soit celle des cordes CD et FA, on aura aussi

$$M'N''=M'N,\ \text{et}\ M'N'''=M'N;$$

d'où il suit que si on décrit du point M' comme centre, un cercle dont le rayon soit M'N, il passera par les trois points N', N'' et N''', ou en d'autres termes :

19. Si l'on inscrit dans la focale un hexagone composé de cordes corrélatives, et que l'on suppose ces cordes prolongées suffisamment pour que celles qui forment les côtés opposés de l'hexagone se coupent deux à deux, on aura trois points d'intersection, lesquels avec le nœud de la focale se trouveront sur la même circonférence.

20. Ce théorême est curieux par la singulière ressemblance

de son énoncé avec celui de l'hexagone mystique de Pascal. Nous ferons plus tard usage de cette analogie, pour le moment nous suivrons les générations de la courbe.

21. Si l'on suppose que le point B soit rendu variable sur la focale, et qu'il se rapproche du point A, on verra que dans ce mouvement l'arc *ba* de la parabole, ainsi que la longueur des droites *a*V et *b*V iront toujours en diminuant et enfin lorsque le point B se confondra avec A, les points V, *a* et *b* n'en feront qu'un. Or, on voit que dans le cours de ces variations le point V ne cesse pas d'être le centre de la corde corrélative AB ; lorsqu'enfin l'arc BA de la courbe devient infiniment petit, la corde corrélative se confond avec lui, et comme alors son centre est en *a*, on voit que le cercle, dont cette corde n'est qu'un élément, est tangent à la focale en A, et a son centre en *a* sur la corrélative du point A, donc : Fig. 3.

Le cercle tangent en un point quelconque de la courbe et qui passe par le nœud, a pour centre le corrélatif du point de contact.

Il résulte de là aussi que si l'on fait mouvoir un cercle dont le centre soit toujours sur une parabole, et dont la circonférence soit assujettie à passer par un des points de la directrice de cette parabole, l'enveloppe des mouvemens de ce cercle sera une focale.

Ce théorême commun à quelques autres courbes offre, outre une nouvelle génération de la focale, le moyen d'en tracer les tangentes et les normales d'une manière générale.

22. En effet, si par un point A quelconque on veut mener une tangente à la courbe, on observera d'abord que le problême est résolu en trouvant la normale; 2° que cette normale (21) passe par le point corrélatif a; 3° que ce point corrélatif (15) se trouve sur la droite Da, menée perpendiculairement sur le milieu de AN, et 4° que cette droite étant tangente à la parabole, le point de contact ou corrélatif cherché se trouve sur la perpendiculaire Sa menée par le foyer de la parabole sur le rayon SC, d'après une propriété connue de la parabole.

23. Si l'on voulait, d'après ce procédé, construire les tangentes ou les normales à la courbe au point N, il faudrait observer que la droite AN se confond pour ce point avec l'élément de la courbe, que par conséquent la corrélative aD s'y confond avec la normale, ou en d'autres termes que cette normale est tangente à la parabole.

Comme cette tangente a deux positions Nn, Nn', il y a deux normales à la courbe en N, ce que nous savions déjà : d'un autre côté, l'angle nNn' étant droit, puisque le point N est sur la directrice de la parabole, il en résulte que ces deux normales sont rectangulaires entr'elles, et parconséquent que chacune d'elles est à la fois normale à l'une des branches de la courbe et tangente à l'autre.

24. Les théorêmes des nos 20, 22 et 23 peuvent encore être déduits comme corollaires de la solution du problême suivant.

Fig. 4. Construire les points d'intersection de la focale et d'un cercle abN quelconque, mais assujetti à passer par le nœud N.

Soient a et b les points cherchés, menons les droites aS et bS au sommet de la courbe. Nous aurons d'abord, puisque a et b sont sur la focale, $ar = \mathrm{N}r$ et $b\mathrm{P} = \mathrm{NP}$; d'où il suit immédiatement que le cercle décrit de O pour centre, et qui serait tangent à la directrice le serait aussi aux deux droites Sa, Sb; car menons par exemple aN et le rayon Or, en vertu de l'égalité des triangles rON et Oar, on aura ang. OrN = ang. Ora, d'où suit l'égalité des deux perpendiculaires Oc et Oc'.

Ainsi il sera bien facile de construire ces points a et b; on mènera au cercle cc'O les deux tangentes du sommet de la focale et on aura quatre points aux extrémités de ces droites, considérées comme cordes du cercle donné : deux de ces quatre points seulement appartiennent à la focale. On distinguera facilement ceux-ci des autres à la seule inspection de la figure qu'on aura construite.

Il résulte de là que tout cercle, qui passe par le nœud de la focale, la coupe généralement en deux points; mais la position du cercle $cc'e$ introduit quelques modifications dans les valeurs des ordonnées de ces points. Les voici :

I. Tant que le point S est hors du cercle $cc'e$, les deux points sont réels.

II. Quand S est dans le cercle, il n'y a plus de tangente et le cercle proposé ne coupe plus la courbe qu'en N.

III. Quand S est sur la circonférence du cercle $cc'e$, comme pour NA, il n'y a plus qu'une tangente et partant les deux points d'intersection se réunissant en un seul, le cercle pri- Fig 4 bis.

mitif ou donné est tangent à la courbe dans ce point A. Dans ce cas, en voit que le centre O′ de ce cercle tangent est sur la parabole dont le foyer est S et la directrice XN. La seule vue de la figure fera conclure de suite tout ce que nous avons démontré à ce sujet.

Fig. 5. IV. Quand outre cette dernière condition, le cercle $cc'O$ est encore tangent en S à la droite SN, le cercle donné ne coupe plus la focale ailleurs qu'en N; et il lui est évidemment tangent dans cet endroit, puisque tous ses points d'intersection avec la focale s'y réunissent. On voit d'ailleurs qu'il y a dans ce cas deux positions de cercle tangent, et que les deux lignes NO, NO′ sont tangentes aux deux points O et O′ de la parabole, puisque $SO = OC$, et que $SO' = O'P$, tandis que les angles SON et NOC sont égaux, ainsi que SO′N, NO′P. Ce qui confirme tout ce que nous avons dit (23). Il résulte encore de ce que nous venons de voir que les cercles Scc', SPQ sont les seuls des cercles tangens à la focale, qui ne la coupent qu'en N, puisqu'il est évident, d'après la solution que nous avons donnée du problême précédent, que cela ne peut arriver qu'autant qu'un cercle donné soit tel que son cercle auxiliaire $cc'O$ comprenne le point S (11), et dans ce cas il n'est pas tangent à la courbe; ou que ce cercle $cc'O$ soit tangent en S à la droite SN, ce qui rentre dans le cas que nous venons d'examiner.

Fig. 6. 25. En revenant sur la propriété (17) que nous avons reconnue à la focale, nous aurions pu donner une autre solution du problême précédent, la voici :

Par le centre C du cercle donné, menons deux tangentes à la parabole CC′ et CC″, puis par le nœud abaissons deux perpendiculaires sur ces deux tangentes. Ces perpendiculaires NN' et NN'' couperont le cercle en deux points qui seront à la focale, puisqu'en effet les cordes sont coupées en deux parties égales par les rayons ou tangentes CC' et CC'', ce qui rentre dans la construction du nº 17.

Si nous menons maintenant les droites $N'C'$ et $C'N$, ainsi que les rayons CN et CN', la droite $N'C'$ étant normale à la focale et la droite CN' l'étant au cercle, l'angle $CN'C'$ de ces deux lignes est égal à celui suivant lequel le cercle coupe la focale; or cet angle $CN'C' = CNC'$, donc ce dernier est la mesure de l'angle d'intersection de la focale et du cercle.

Le même raisonnement s'applique aux points C'' et N'': donc le cercle corrélatif de deux points de la focale coupe cette courbe suivant deux angles, dont chacun a respectivement pour mesure l'angle dont le sommet serait en N, dont un des côtés passerait par le centre du cercle, et l'autre côté par le corrélatif de celui des points de la focale qu'on considère.

26. Si l'on voulait que ces deux angles d'intersection fussent égaux, il faudrait que les angles CNC', CNC'' fussent égaux, ce qui exige que les points C' et C'', ainsi que N soient sur une même droite.

27. Si l'on voulait en outre que le cercle proposé fut orthogonal à la focale, il faudrait que l'angle $C'NC$ fut droit: cette condition suffit pour déterminer le point C, en la combinant avec la précédente. Nous pourrions le faire dès à présent; mais comme nous devons revenir plus tard sur ce cercle, nous nous bornerons à observer que la droite $C'C''$ devant passer par N, le point C doit se trouver sur la droite

CS perpendiculaire à SN, et passant par n et n', deux conditions qui n'en font qu'une seule, et dont la démonstration se trouve dans tous les traités des courbes du 2e degré.

Fig. 3. 28. En se rappellant ce que nous avons dit (22), on voit de suite que l'angle BbF, formé par la normale à la focale en B et la tangente corrélative de ce point ou l'élément b de la parabole, est égal à l'angle FbN formé par cet élément avec la droite FN. Il en résulte donc que si on suppose la parabole réfléchissante et le rayon bN un rayon lumineux incident venant de N, le rayon réfléchi se relèvera suivant la direction bB, d'où il suit que la série des rayons réfléchis de cette manière sur toute l'étendue de la parabole, représentera la série entière des normales à la focale, ou en d'autres termes, que la développante de cette dernière courbe n'est autre que la caustique par réflexion de la parabole $bann'$ supposée réfléchissante, le point N étant le point lumineux, ou le centre de départ des rayons de lumière. On verra dans la suite le parti qu'on peut tirer de cette propriété pour résoudre le problème des cercles osculateurs à la focale. (Voyez les notes placées à la fin de ce mémoire).

III.

Analogies et relations entre la focale et l'hyperbole.

Tous les théorèmes, que je vais exposer, supposent la connaissance de la théorie des projections stéréographiques, et comme Mr Hachette, dans son supplément à la géométrie descriptive de Monge, s'en est amplement occupé, je renverrai à cet ouvrage pour tous les principes que j'en ai tirés et que je puis avoir employés pour la démonstration des théorèmes que je vais exposer.

29. Soit dans l'espace une sphère quelconque, projetons stéréographiquement sur cette sphère la focale NSNAB, et désignons par K et K′ les deux cercles tangens à la focale en N, Fig. 3.
et dont les centres sont en n' et n. La focale ainsi projetée formera sur la sphère une courbe, que nous appellerons sphéri-focale, et qui aura comme l'autre un nœud que nous nommerons n''; les propriétés de cette sphéri-focale auront beaucoup de rapport avec celles de la focale.

30. D'abord tous les cercles, passant par N et tangens à la focale, se projetteront sur la sphère suivant des cercles passant par n'' et tangens à la sphéri-focale. Les cercles K et K′ jouissent de cette propriété comme les autres, mais en outre on remarquera que ces deux cercles divisent la sphère en quatre régions, dont deux seulement renferment des points de la sphèri-focale: Fig. 6.
en effet, d'après tout ce que nous avons dit de ces cercles, on voit que chacun d'eux enveloppe entièrement la feuille NSN et la sépare entièrement du reste de la courbe; ainsi il en sera de même de leurs projections sur la sphère: d'après cela, soient R et r les deux régions marquées sur la sphère par le cercle K, et R′ et r' celles marquées sur la sphère par K′; supposons que R et R′ soient les régions qui contiennent la feuille de la sphéri-focale, on voit que la portion sphérique commune à ces deux régions contient entièrement ce nœud. De même la portion de sphère, commune aux deux régions r et r', contient entièrement le reste de la courbe; ainsi il reste deux régions, savoir, celle commune à R et r' et celle commune à R′ et r entièrement vides, et celles-là comme les

autres sont opposées par le sommet : toute cette remarque est importante.

30. Le théorème (19) transcrit littéralement convient à la sphéri-focale comme à la focale. Ceci n'a pas besoin de démonstration ; mais il est important de le faire observer, puisque c'est ce théorème qui va être employé.

Sans Figure. 31. Prenons le nœud n'' pour sommet d'un nouveau système de projections stéréographiques et projetons la sphéri-focale sur le plan correspondant à ce nouveau sommet, tous les cercles qui passent par n'' se projetteront évidemment suivant des droites, et par conséquent les quatre régions R, R', r, r' se projetteront suivant des angles. Soient maintenant K et K' les cercles qui forment ces quatre régions, ces cercles étant tangens à la sphéri-focale en n'', seront projetés suivant des tangentes à la projection de la sphéri-focale ; mais le point de contact n'' des cercles avec la sphéri-focale se projette évidemment à l'infini, donc les deux projections de ces cercles ne touchent la projection de la courbe qu'à l'infini ; ainsi 1° cette projection a deux asymptotes rectilignes.

32. Si l'on inscrit à la sphéri-focale un hexagone, composé d'arcs de cercles passant par le nœud n'', les côtés de cet hexagone se couperont deux à deux en trois points, qui seront avec le nœud n'' sur une même circonférence (30 et 19). Observant que les six cercles se projettent suivant six droites, ainsi que le système qui contient leurs intersections, nous en conclurons que dans la projection de la sphéri-focale, l'hexagone rectiligne inscrit jouit de cette propriété : que ses côtés opposés se coupent deux à deux suivant trois points, lesquels sont en ligne droite : donc cette nouvelle projection

est une courbe du 2^e degré; et puisqu'elle a des asymptotes, c'est une hyperbole. Construisons les foyers, le grand axe et le cercle décrit sur le grand axe dans cette hyperbole; en projetant ces élémens sur la sphère, nous aurons deux points qui seront les foyers de la sphéri-focale, et deux cercles dont l'un passera par le nœud de la courbe et représentera le grand axe. Ce sera le cercle diamètre de la sphéri-focale, et il contiendra les foyers; l'autre sera tangent à la courbe et coupera le cercle diamètre perpendiculairement dans les points, où celui-ci coupe la courbe aussi à angles droits.

33. Si maintenant on remonte au premier système de projection, nous pourrons projeter ces deux points et ces deux cercles sur le plan de la focale, et nous aurons deux points auxquels nous donnerons aussi le nom de foyers et deux cercles, auxquels les observations et les noms, que nous avons appliqués aux précédens, sont également convenables.

34. Ainsi en passant des propriétés de l'hyperbole à celles de la sphéri-focale, et en revenant de cette dernière courbe à la focale par le moyen de nos deux systèmes de projections stéréographiques, nous pourrons former le tableau suivant, dans lequel l'énoncé seul des théorèmes porte avec lui sa démonstration. Nous nommerons auparavant dans la focale et la sphéri-focale du nom de cercle directeur, le cercle qui dans chacune de ces courbes correspond à celui décrit sur le grand axe de l'hyperbole.

35. TABLEAU COMPARATIF.

De quelques propriétés corrélatives de l'hyperbole, de la sphéri-focale et de la focale.

HYPERBOLE.	SPHÉRI-FOCALE.	FOCALE.
L'hexagone inscrit y jouit de cette propriété, que les côtés opposés s'y coupent en trois points situés sur une même droite.	Dans l'hexagone inscrit, composé d'arcs de cercles qui passent par le nœud, les côtés opposés se coupent en trois points qui avec le nœud sont sur une même circonférence.	Même énoncé que pour la sphéri-focale.
2. Les trois diagonales de l'hexagone circonscrit se croisent dans un même point.	2. Dans un hexagone, circonscrit à la sphéri-focale et composé d'arcs de cercle, passant par le nœud, si on joint les sommets opposés par des arcs de cercles assujettis aussi à passer par le nœud, ces trois arcs se couperont dans un seul point.	2. Même énoncé que pour la sphéri-focale.
3. Une corde passant toujours par un point fixe, les tangentes menées à ses extrémités se coupent toujours sur une même droite.	3. Un cercle passant par le nœud et un point fixe, coupe la focale en deux points, par lesquels si on mène deux cercles tangens à la courbe et passant par le nœud, l'intersection de ces deux cercles sera toujours sur la même circonférence.	3. Même énoncé que pour la sphéri-focale.
4. Si par les foyers de l'hyperbole on mène des perpendiculaires aux tangentes, les points d'intersec-	4. Si par les foyers de la sphéri-focale on mène des cercles qui passent par le nœud et soient perpendicu-	4. Même énoncé.

tion seront sur un cercle qui a pour diamètre le grand axe de l'hyperbole.	laires aux cercles tangens à cette courbe et passant par son nœud, les points d'intersection seront tous sur la circonférence du cercle directeur (34).	
5. Les rayons vecteurs, partant des foyers et se réunissant en un même point de l'hyperbole, font des angles égaux avec la tangente en ce point.	5. Les deux cercles, passant par le nœud et les deux foyers, pour aller se couper sur un point de la sphérifocale, font des angles égaux avec le cercle tangent à la courbe en ce point et passant par le nœud.	5. Même énoncé.
6. Le grand axe de l'hyperbole coupe l'angle des asymptotes en deux également et il est perpendiculaire à la courbe, du reste c'est la seule ligne droite qui jouisse de cette double propriété.	6. Le cercle diamètre coupe l'angle des cercles K et K′ (31) en deux parties égales et il est perpendiculaire à la courbe, du reste c'est le seul cercle passant par le nœud qui jouisse de cette double propriété.	6. Le cercle diamètre coupe l'angle des cercles K et K′ (29 et 30) en deux parties égales. Comme il est en outre le seul perpendiculaire à la courbe, on voit que c'est celui dont nous avons déjà parlé (26, 27), et cette observation peut servir à le déterminer entièrement.

En effet, nous avons déjà vu (26 et 27) que le centre C de Fig. 6.
ce cercle perpendiculaire à la courbe doit être sur la ligne C S *n*; mais puisqu'il doit partager en deux l'angle des cercles K et K′, il faut que son rayon CN coupe en deux l'angle des rayons N*n*′ et N*n*, ce qui assigne à ce rayon deux positions et indiquerait deux centres l'un en C et l'autre quelque part en *o*; mais ce dernier se trouvant nécessairement dans la parabole, le cercle qui aurait un tel centre et qui passerait par le nœud, ne couperait pas la focale d'après ce que nous avons vu, ainsi il ne satisferait pas aux conditions de cercle

diamètre : Donc le cercle NN″N′, dont le centre est en C, satisfait seul à ces conditions, c'est donc le cercle diamètre.

36. Connaissant celui-ci, il sera bien facile de trouver le cercle directeur, puisque (32) ce dernier touche la courbe aux mêmes points où le cercle diamètre la coupe, c'est-à-dire en N′ et N″, et que dans ces points il est perpendiculaire au cercle diamètre. Je remarquerai d'ailleurs que le centre u de ce cercle directeur est sur la ligne NS, puisqu'il doit couper les cercles K et K′ sous des incidences perpendiculaires, comme dans l'hyperbole le cercle décrit sur le grand axe coupe à angles droits les asymptotes.

Quant aux foyers, il y a plusieurs manières de les construire, qui pour la plupart se rapportent à ce que l'hyperbole, que nous avons considérée, est équilatère ; la construction suivante est la plus simple.

Soit A le point où le cercle directeur rencontre la directrice AN de la focale; cette directrice ou asymptote de la focale est comprise parmi les cercles tangens, dont nous avons parlé au nº 4 du paragraphe 35, donc si par le point A, le nœud N et un des foyers F, nous fesons passer un cercle AFN, ce cercle sera perpendiculaire à NA et aura ainsi son centre sur la droite AN, par conséquent ce cercle est déterminé; d'un autre côté, le point F doit se trouver sur ce cercle diamètre, ainsi l'intersection des deux cercles connus N′FN″ et AFN le donnera. Une construction semblable, par rapport au point A′, donnera le second foyer F′.

38. Supposons que la droite FA coupe quelque part encore le cercle directeur, par exemple, en a; l'angle aFN étant tou-

jours droit, on pourrait décrire un cercle aFN, dont le centre serait sur aN. Supposons qu'on ait même le diamètre aN, ce diamètre pourrait être considéré comme un cercle de rayon infini, coupant le cercle aFN sur la circonférence du cercle directeur; ainsi, d'après ce que nous avons vu (35 n° 4), cette droite aN serait au nombre des cercles tangens à la focale, ce qui supposerait que par le point N on peut mener deux asymptotes à la focale, ce qui est impossible : donc le point a n'existe point, et la droite AF est tangente en A au cercle directeur, ce qui fournit un nouveau moyen fort élégant de déterminer les foyers.

39. Je terminerai ici la théorie de ce qu'on peut appeler proprement les propriétés de figure de la focale. Les théorèmes, que je viens d'exposer, ne sont cependant pas les seuls qu'on puisse déduire de la théorie que je viens d'établir; mais je craindrais de devenir d'une prolixité fatigante, si je cherchais à étendre davantage cet article; il me suffit d'avoir présenté une suite de théorèmes, d'où l'on peut en cas de besoin tirer toutes les générations de la courbe, et même partir pour en reconnaître de nouvelles propriétés, que je n'ai peut-être pas aperçues. Je terminerai donc ici ce mémoire, en donnant une formule quadratique pour la focale, laquelle m'a été fournie par Mr A. Quetelet, dans un mémoire qu'il a bien voulu me confier et qui contient sur les courbes du 3e degré en général des choses curieuses et qui mériteraient d'être plus développées par lui; je copie exactement ses paroles.
» Dans la focale régulière, c'est-à-dire celle engendrée dans Fig. 7.
» un cylindre, on a pour l'expression du rayon vecteur
» DN ou DN′, l'angle NDD′ étant φ et le rayon vecteur ρ,

$$\rho = (\sec.\varphi \pm \tan g.\varphi.)\,DD'.$$

» Maintenant, l'expression de l'aire comprise entre deux rayons
» vecteurs est

$$A = \tfrac{1}{2}\int \rho^2\, d\varphi + C.$$

» substituant la valeur de ρ, en remarquant que

$$\frac{\rho^2}{\overline{DD'}^2} = (\sec.\varphi \pm \operatorname{tang}.\varphi)^2$$

» devient

$$\frac{\rho^2}{\overline{DD'}^2} = 2\sec.^2\varphi - 1 \pm 2\sin.\varphi\,\frac{1}{\cos.^2\varphi};$$

» on a

$$\frac{A}{\overline{DD'}^2} = \int \sec.^2\varphi\, d\varphi \pm \int \frac{\sin.\varphi.}{\cos.^2\varphi.}\, d\varphi - \tfrac{1}{2}\int d\varphi + C:$$

» d'où l'on tire, en intégrant et désignant $\overline{DD'}$ par H,

$$\frac{A}{H^2} = \operatorname{tang}.\varphi \pm \sec.\varphi - \frac{\varphi}{2} + C,$$

» ou bien

$$A = \mp H\rho - H^2\frac{\varphi}{2} + CH^2.$$

» Afin de déterminer la valeur de la constante C, supposons
» l'angle φ nul, l'aire correspondante sera également nulle,
» et nous aurons, comme alors $\rho = H$,

$$o = \mp H^2 + CH^2;$$

» d'où $CH^2 = \pm H^2$, et l'expression de A devient

$$A = \mp H\rho \pm H^2 - H^2.\frac{\varphi.}{2.}$$

40. Cette intégrale nous conduit à une formule graphique
Fig. 7. remarquable et que l'on verra facilement en être la conséquence.
Soit donc DNN' un rayon vecteur, du point D comme centre

décrivons les arcs NE, D'LF, N'G, et par les points, où ces arcs rencontrent la droite DG parallèle à D'K, menons à cette dernière les perpendiculaires EH, FI, GK, nous aurons alors les relations suivantes.

La surface de la portion DND' de la focale est égale à la différence entre le rectangle FEHI et le secteur DD'L.

La surface de la portion DD'N' est égale à la différence entre le rectangle FIKG et le même secteur DD'L.

D'où il suit que la surface ND'N', c'est-à-dire la différence des deux aires ci-dessus, est équivalente à la différence du rectangle FIKG au rectangle EHIF. Cette surface est donc exactement quarrable.

Au fur et à mesure que le point N monte, le point E approche de D, et il s'y confond tout-à-fait lorsque le rayon vecteur devient parallèle à la directrice; alors on a, pour la surface de la demi-feuille DND', le quarré DFID' moins le quart du cercle DD'F; d'où il suit que cette demi-feuille est égale au triangle mixtiligne FID'LF.

On remarquerait sans peine aussi que la surface, comprise entre la branche supérieure D'*n'* de la courbe, l'asymptote et le prolongement du rayon DD', vaut le quarré DFID' plus le quart du cercle DD'F. Conséquemment cette même surface avec la surface de la demi-feuille vaut deux fois le quarré DFID'.

Ces trois théorèmes ont été présentés par Mr A. Quetelet sous un jour un peu différent; mais j'ai cru pouvoir les développer ainsi pour obtenir un peu plus de briéveté. Du reste si ma construction n'est pas précisément la sienne, il y trouvera toujours son idée primitive.

NOTE SUR LES CAUSTIQUES PAR RÉFLEXION.

41. Si d'un point supposé lumineux on conçoit des rayons incidens, qui aillent se rendre sur une surface réfléchissante, ils s'y relèveront tous en fesant avec la surface, c'est-à-dire avec son plan tangent, des angles de réflexion égaux aux angles d'incidence. Si ensuite on suppose que par le point lumineux on ait mené un plan de manière à couper la surface suivant une courbe, on pourra isoler par la pensée les rayons compris dans ce plan, de tous les autres; et ces rayons par leurs intersections consécutives formeront une courbe du genre des développantes et que l'on nomme caustique par réflexion de la courbe d'intersection du plan et de la surface donnée.

Fig. 8. 42. Cela accordé, soit ABCD une portion quelconque de la courbe réfléchissante, soit L le point lumineux, LB et LC deux rayons incidens infiniment proches, BR et CR les deux rayons réfléchis, puis BG et CG deux normales à la courbe: par les trois points B, C et G fesons passer un cercle, et remarquons que, l'angle BLC étant infiniment petit par hypothèse, l'arc BC l'est aussi, ainsi que l'angle BGC, et que par conséquent le point R est un point de la caustique cherchée. Cela posé, prolongeons BR jusqu'en E et menons FC et EC, nous aurons les équations suivantes;

$$GBL + CLB = CGB + GCL$$
$$GCR + BRC = CGB + GBR;$$

ajoutant ces deux équations et remarquant qu'en vertu de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion

$$\mathrm{GBL} = \mathrm{GBR}, \text{ et } \mathrm{GCL} = \mathrm{GCR},$$

il vient

$$\mathrm{BRC} + \mathrm{BLC} = 2\mathrm{BGC}.$$

De cette équation il résulte d'abord que si l'un de ces angles est plus grand que BGC, l'autre sera plus petit; d'où il suit que si l'un des deux points L ou R est hors du cercle, l'autre sera dedans, ou bien qu'ils se trouveront tous deux à la fois sur la circonférence.

D'un autre côté, on a

$$\mathrm{BRC} = \mathrm{BEC} + \mathrm{ECR} = \mathrm{ECR} + \mathrm{BGC},$$

$$\mathrm{BGC} = \mathrm{BFC} = \ldots\ldots \mathrm{BLC} + \mathrm{LCF},$$

d'où,

$$\mathrm{BGC} - \mathrm{BRC} = -\mathrm{BGC} - \mathrm{ECR} + \mathrm{BLC} + \mathrm{LCF}.$$

et

$$2\,\mathrm{BGC} - \mathrm{BLC} - \mathrm{BRC} = \mathrm{LCF} - \mathrm{ECR}.$$

Or, d'après ce que nous venons de voir, le premier membre de cette équation est nul, donc $\mathrm{LCF} = \mathrm{ECR}$.

Comme les sinus des arcs égaux sont égaux, on a

$$\sin.\,\mathrm{LCF} = \sin.\,\mathrm{ECR}\ ;$$

mais on a aussi

$$\sin.\,\mathrm{LFC} = \sin.\,\mathrm{REC}\ ;$$

et puisque les deux triangles LCF, RCE fournissent les deux analogies :

$$\frac{CR}{RE}=\frac{\sin. REC.}{\sin. RCE.}, \quad \frac{LF}{CL}=\frac{\sin. LCF.}{\sin. LFC.}$$

on a en conséqnence,

$$\frac{CR}{ER}=\frac{CL}{LF}.$$

Fig. 9. Maintenant, au lieu de BC infiniment petit, supposons BC nul; RC deviendra RB, FC sera FB, et le cercle BGC sera le cercle décrit sur le rayon osculateur à la courbe au point B. Du reste l'équation finale, que nous avons trouvée, ne change pas de l'infiniment petit à zéro, donc on a

$$\frac{BR}{RE}=\frac{LB}{LF}.$$

Si l'on désigne par i la longueur LB du rayon incident, par R celle BR du rayon réfléchi, par c la corde FB ou BE, interceptée par le cercle sur le rayon incident, l'équation précédente donne cette formule pour la valeur du rayon réfléchi;

$$R=c.\frac{i}{2i-c}.$$

Cette formule peut servir dans tous les cas à déterminer fort simplement le rayon réfléchi, lorsqu'on connait le cercle osculateur à la courbe au point d'incidence. Elle conduit à la formule graphique suivante.

Fig. 9. Du point L sur le rayon incident prenez LF′=FL, mais de l'autre côté; menez F′E et LR parallèle à F′E, le point R sera à la caustique. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

En appliquant cette construction à la parabole génératrice de la focale et prenant le nœud pour point lumineux, on pourra donc construire la caustique par réflexion de cette parabole, c'est-à-dire la développante de notre focale : c'est ce que j'avais annoncé (28).

En reprenant notre formule $R = c\,\frac{i}{2i - c}$, on voit que R ne peut-être infini qu'autant que l'on ait $2i - c = o$, ou $2i = c$, c'est-à-dire, que le point lumineux tombe sur le milieu de la corde FB; ou en d'autres termes que le cercle ayant pour diamètre la première moitié du rayon osculateur à partir du point d'incidence, doit passer par le point lumineux.

Cette condition établie, nous pouvons revenir à la recherche du point d'inflexion, que nous avons reconnu à la focale.

Nous observerons d'abord que, pour ce point d'inflexion, le rayon osculateur de la focale doit être infini, donc le rayon réfléchi par la parabole au point corrélatif de ce point d'inflexion doit être infini. Ainsi le cercle décrit sur la première moitié du rayon osculateur de ce point corrélatif, et à partir de ce point, doit passer par le nœud de la focale. Écrivons cette condition en analyse : pour cela, supposons que la parabole soit rapportée à un système d'axes rectangulaires, dont l'origine soit à la rencontre de la directrice de la focale et de la perpendiculaire qu'on peut lui mener par le point S. Cette perpendiculaire et la directrice seront prises l'une pour axe des y et l'autre pour axe des x; désignons de plus par Y la distance du foyer à la directrice, et par X l'abscisse du point N; et soient maintenant x et y les coordonnées du corrélatif du point d'inflexion cherché, a et b celles du centre d'osculation au point (x, y), ρ la valeur du rayon osculateur, on aura

$$x - a = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dy^2 + dx^2.}{d^2y} = x. \frac{x^2 + Y^2.}{Y^2.}$$

$$y - b = - \frac{dy^2 + dx^2.}{d^2y} = - \frac{x^2 + Y^2.}{Y}$$

et $$\rho^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{(x^2 + Y^2.)^3.}{Y^2.}$$

L'équation de la parabole étant $x^2 + Y^2 = 2Yy$, dans notre système de coordonnées.

Cela étant, il est facile de voir que si l'on divise en quatre parties égales le rayon du cercle osculateur, le premier point de division à partir de la courbe aura pour coordonnées,

$$a' = x + \frac{a - x}{4}, b' = y + \frac{b - y.}{4.}$$

mais, d'après ce que nous avons vu, le cercle qui passe par x, y et qui a son centre en (a', b') doit passer par (X, o), nous devons donc avoir,

$$(x - a')^2 + (y - b')^2 = (X - a')^2 + b'^2;$$

ou en substituant pour a' et b' leurs valeurs,

$$\left(\frac{x - a}{4}\right)^2 + \left(\frac{y - b}{4}\right)^2 = \left(X - x - \frac{a - x}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{b - y}{4}\right)^2.$$

développant cette équation et substituant les valeurs de $x-a$, et de $y-b$, que nous avons trouvées, il vient

$$(1)\quad y^2+(X-x)^2+[yY+(X-x)x]\frac{x^2+Y^2}{2Y^2}=0.$$

C'est la condition à laquelle doivent satisfaire les coordonnées du corrélatif du point d'inflexion de la focale: en combinant cette équation avec celle de la parabole $Y^2+x^2=2Yy(2)$, on trouvera les valeurs absolues de x et y, et le problème sera résolu. Mais on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici la solution graphique de ce problème.

Si dans l'équation (1) on substitue la valeur de $\frac{Y^2+x^2}{2Y}$ tirée de l'équation (2), on aura :

$$y^2+(X-x)^2+[yY+(X-x)x]\frac{y}{Y}=0.\ (3)$$

mais l'équation (2) donne $yY=x^2+Y^2-Yy$; mettant cette valeur pour yY dans l'équation (3), il vient :

$$Y\,(x-X)^2+Xyx+Y^2y=0.\ (4)$$

Cette équation, qui appartient aux coordonnées du point corrélatif cherché, appartient à une hyperbole qui se construit de la manière suivante : par le foyer élevons Sξ perpendiculaire sur SN, puis prenons SG$=$Sξ, et prenons ξH perpendiculaire à ξN, puis GH perpendiculaire à SG. Ces deux droites seront les asymptotes de l'hyperbole, du reste cette hyperbole passe par le point N, puisque dans (4) pour $y=o$, on a $x=$X. Ainsi, on connait tout ce qui est nécessaire pour Fig. 3

construire cette hyperbole, une de ses branche *abc* coupe en *b* la parabole, et le point *b* est le corrélatif du point d'inflexion cherché. La recherche de la position B de ce point sera donc réduite à construire, d'après la méthode que nous avons donnée, le point de la focale correspondant au corrélatif *b*. On voit la construction dans la figure.

Ce problème forme le complément de ce que nous avons découvert sur la focale. J'aurais pu cependant ajouter encore différentes propriétés plus ou moins curieuses de cette courbe, mais il m'a paru qu'un mémoire du genre de celui-ci ne pouvait pas être trop court, et qu'il suffisait d'indiquer les théorèmes principaux, sans s'attacher à des détails d'autant plus fastidieux que le lecteur peut facilement les remplacer lui-même, surtout dans un sujet où tout le monde pourrait obtenir les résultats que j'ai obtenus, et les présenter peut-être d'une manière satisfaisante.

C'est dans la même idée que j'ai quelquefois supprimé les démonstrations de quelques corrollaires, qui dérivent si immédiatement des constructions ou des théorèmes exposés, qu'il m'aurait paru absurde de supposer que ceux qui me feront l'honneur de me lire, pourraient s'apercevoir de ces courtes lacunes. Ma plus grande crainte, en rédigeant ce mémoire, a toujours été au contraire de tomber dans une inutile prolixité.

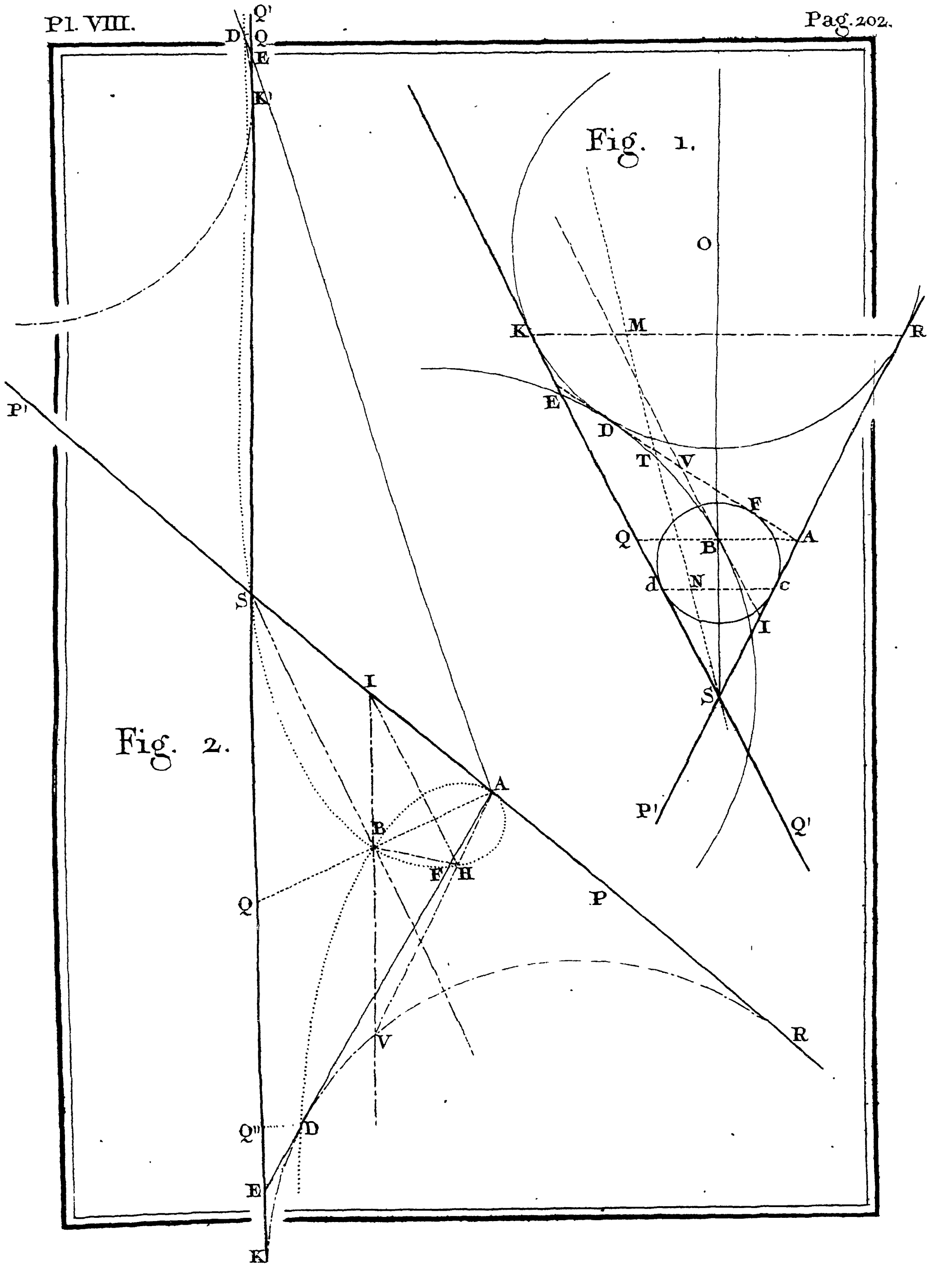


Fig. 1.
O
K
M
R
E
D
T
V
F
Q
B
A
d
N
c
I
S
P'
Q'
Fig. 2.
Q'
D
Q
E
K'
P'
S
I
A
B
F
H
Q
P
R
V
Q''
D
E
K

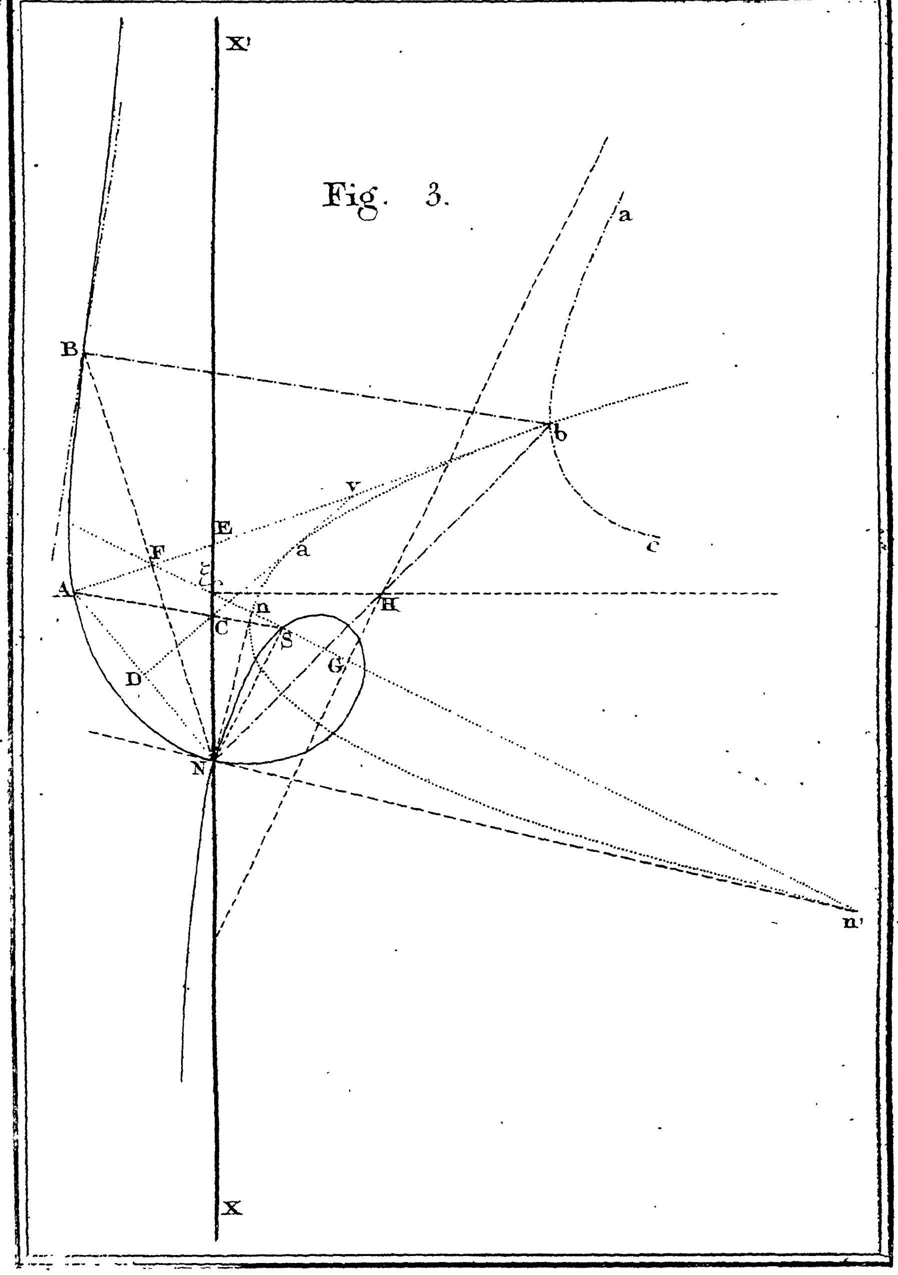


Fig. 3.

Fig. 4.

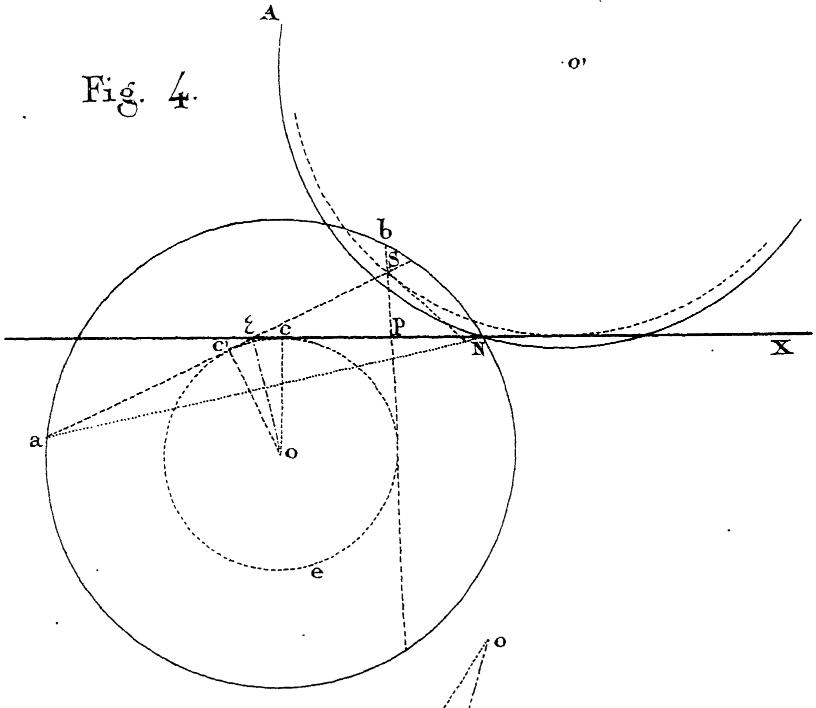
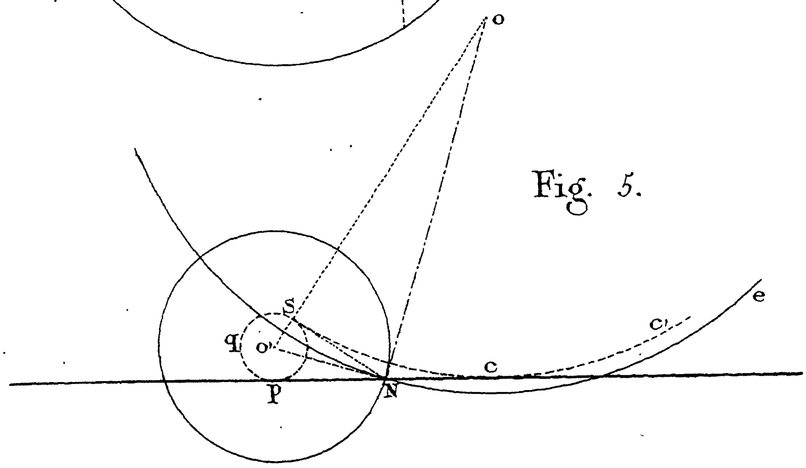


Fig. 5.



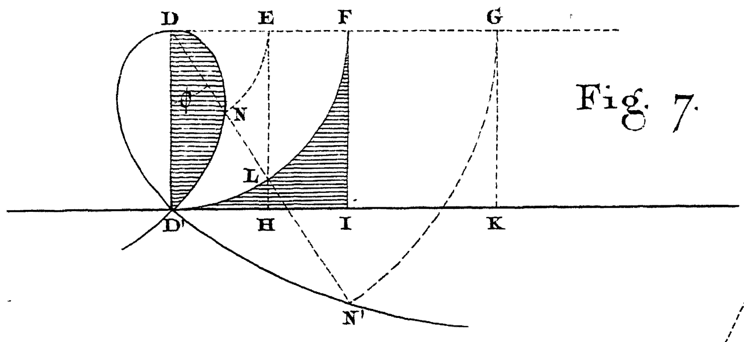


Fig. 7.

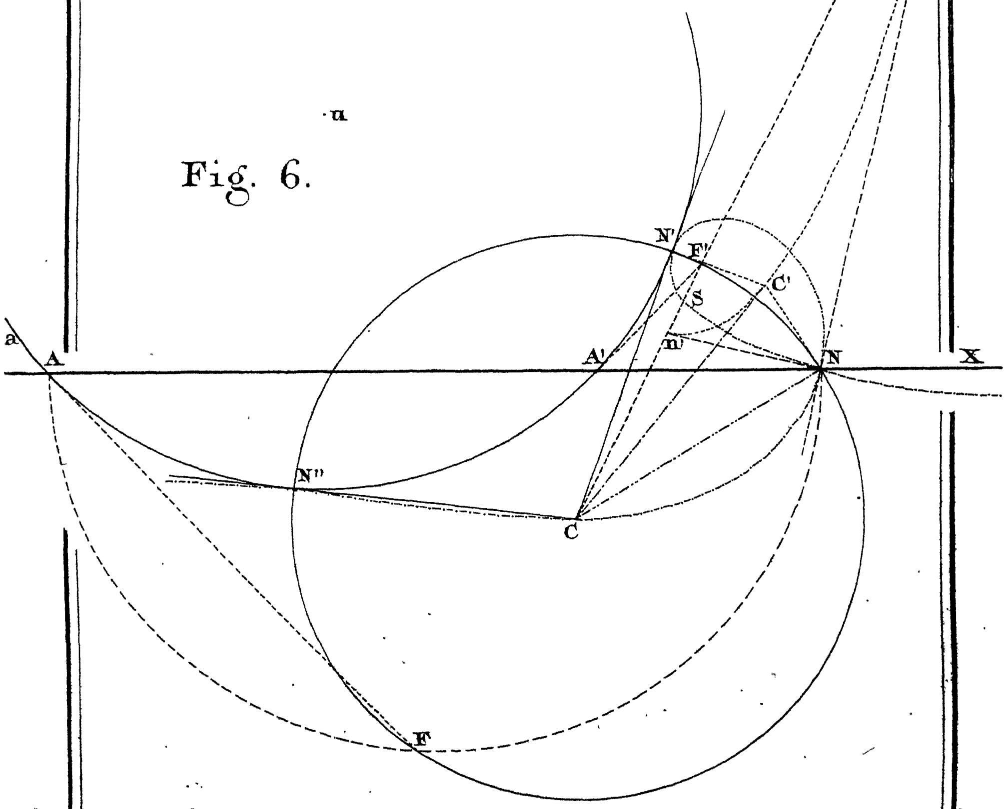


Fig. 6.

Fig. 8.

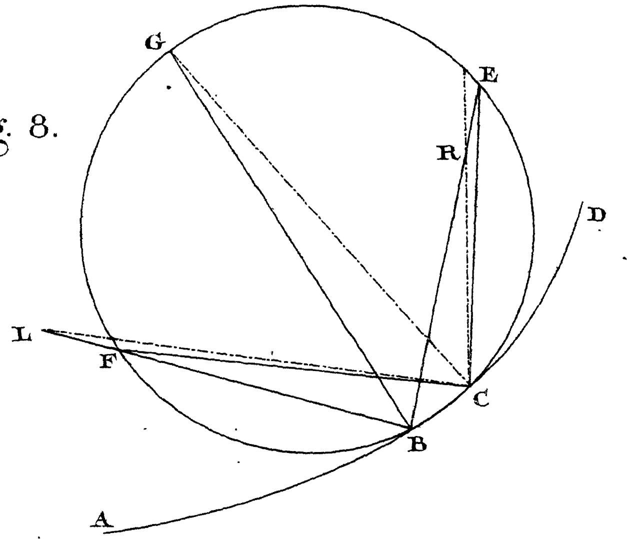


Fig. 9.