VEGA

MATHEMAT

I.

Vorlesungen
über die
Mathematik.
Erster Band,
welcher
die allgemeine Rechenkunst enthält.

Mit hoher Bewilligung herausgegeben
von
Georg Vega,
Unterlieutenant des k. k. Artilleriekorps.

Wien,
gedruckt bey Johann Thomas Edlen von Trattnern,
k. k. Hofbuchdruckern und Buchhändlern.
1782.

Dem
sämtlichen kaiserlichen königlichen
Artilleriekorps.

Gegenwärtige Vorlesungen sind Ihnen gewidmet, und Ihr Urtheil solle ihren Werth bestimmen. Ich habe sie zum Drucke befördert, weil sie schon von einigen aus Ihnen, denen ich sie vorläufig mitgetheilet, des Druckes würdig gefunden worden. Dieser Theil enthält nur die nothwendigsten Gründe der allgemeinen Rechenkunst; jene der gemeinen und höheren Meßkunst nebst einer Anwendung sollen darauf folgen. Meine Absicht ist denjenigen einen sichern Leitfaden in die Hände zu geben, welche in einer schicklichen von den übrigen Dienstgeschäften freyen Zeit die unentbehrlichsten Kenntniße der höheren und angewandten Mathematik sich zu erwerben wünschen. Könnte ich wohl diesen Wunsch bey Ihnen vermissen, da es Ihnen bekannt ist, daß man sich kaum erkühnen darf ohne diesen Kenntnissen ein Artilleriebuch zu öffnen?

Bezout, Papacino, Tempelhoff, Caravelli, haben schon lange der Artillerie diesen Weg gebahnet; Sie kennen den Werth dieser Schriften; und eben dieses flammte mich an ihren Fußstapfen zu folgen, ohne doch ihnen sklavisch nachzuahmen.

Neue Sätze liefere ich Ihnen nicht; so ein Werk läßt keine andere Neuigkeit zu, als jene, die aus der Verschiedenheit des Zusammenhanges, der Entwicklung, und Anwendung einiger Sätze entspringt.

Ihren Einsichten und Kenntnissen überlasse ich es über gegenwärtige Vorlesungen ein Urtheil zu fällen; sollten sie Ihren Beyfall erhalten, so ist meine Mühe belohnt, und mein Eifer zur Fortsetzung dieses Werkes verdoppelt.

Der Verfasser

Inhalt

Inhalt des ersten Bandes.

Erste Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit ganzen Größen.

Zweyte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

Dritte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

Vierte Vorlesung.

Von den Verhältnißen und Proportionen.

Fünfte Vorlesung.

Von den Aufgaben, die durch Gleichungen des ersten und zweyten Grades aufgelöset werden.

Sechste Vorlesung.

Von den Reihen.

Siebente Vorlesung.

Von den höheren Gleichungen.

I. Anhang.

II. Anhang.

Folgende Druckfehler wird der Leser zu verbessern die Güte haben.

Seite.	Zeile von ob	Zeile von unt.	Anstatt	Soll seyn
3	..	2	daß	das
12	..	8	cx den $n$ten Potenz nämlich	cx der $n$ten (Potenz nämlich)
28	..	13	$-12ab = -12ab + 8ab$	$-12ab = -20ab + 8ab$
43	5	..	$\frac{3\;1\cdot3\;2}{6\;4\;2}$	$\frac{2\;1\cdot3\;2}{6\;4}$
44	..	13	Nach dem Worte vermindert muß eingesetzt werden	und zwar gleichviel vermehret, und gleichviel vermindert,
47	5	..	$\frac{a^2x^2 - x^4}{a^2x - ax^2}$	$\frac{a^2x^2 - x^4}{a^2x + ax^2}$
49	..	3	86 . 10000	86 . 1000
60	..	4	$\frac{3045}{15,000}$	$\frac{3045}{15000}$
68	13	..	$a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{2}{2}}$
68	..	4	$a^{\frac{2}{2}}bc^{\frac{1}{3}}$	$a^{\frac{2}{3}}bc^{\frac{1}{3}}$
103	3	..	das zweyte	das erste
159	11	..	$1 : 0 = x\infty$: vermög	$1 : 0 = \infty : x$ vermög
159	12	..	$1 \pm 0 : 1 = \infty \pm x\infty$: ver-	$1 \pm 0 : 1 = \infty \pm x : \infty$ ver-
170	..	6	$\frac{a^{\overline{n-2}}}{x^n}$	$\frac{a^{\overline{n-1}}}{x^n}$
175	5	..	$-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6\cdot a^{\frac{5}{2}}}$	das Zeichen (—) wird hinweggelassen.
204	5	..	log. vulg. 4,1816	log. vulg. 4,4816
211	4	..	$\frac{1}{1}m$	$\frac{1}{4}m$
215	8	..	multiplicirt mQ	multiplicirt mit mQ
219	2	..	$(3^n - 2)$	$(3^n - 1)$
231	..	9	—	=
288	..	7	2 (in dem Nenner	6

Erste Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit ganzen Größen.

Vorläufige Einleitung.

§. 1.

Alle diejenigen Dinge, welche einer Vergrößerung, oder Verminderung fähig sind, werden wir in der Folge Größen nennen. Zahlen, z. B. Geschwindigkeiten, Kräften, Zeiten, Entfernungen, Bewegungen, u. s. w. sind Größen, weil sie für sich allein betrachtet, vermehret, und vermindert werden können.

2. Diejenige Wissenschaft nun, welche die Eigenschaften, und den Zusammenhang (nexum) der Größen untersucht, und sich hauptsächlich beschäftigt, aus einigen bekannten Größen andere unbekannte zu erfinden, wird die Größenlehre oder Mathematik genennt. Sie besteht aus verschiedenen Theilen, die von den Gegenständen, von denen diese Theile handeln, ihre Benennungen erhalten; so heißt derjenige Theil der Mathematik die allgemeine Rechenkunst, oder Algebra, der sich mit jeder Größe beschäftigt, die als ein Ganzes betrachtet werden

kann, welches aus abgesönderten, und durch eigene Gränzen bestimmten Theilen besteht. Ein anderer Theil der Mathematik beschäftigt sich mit der blossen Ausdehnung, das ist, mit allen denjenigen Größen, die aus ununterbrochen aneinander hangenden Theilen zusammengesetzet sind, und heißt die **Meßkunst**, oder Geometrie. Es sey z. B. bey zweyen gleichseitigen viereckigten Pyramiden die erste aus gleichgroßen Kugeln zusammengesetzt, und die zweyte vom dichten Mauerwerke aufgeführt; würde uns nun jemand die Anzahl der in einer Seite befindlichen Kugeln der ersten Pyramide ansagen, und von uns verlangen, daß wir daraus die Anzahl aller in der Pyramide befindlichen Kugeln bestimmen sollten, so müßten wir die Zuflucht zu der allgemeinen Rechenkunst nehmen; würde uns hingegen nur die Länge einer Seite bey der zweyten Pyramide bekannt seyn, und von uns verlanget werden, aus dieser gegebenen Seite den Inhalt des in der Pyramide befindlichen Mauerwerks zu finden, so müßten wir uns zur Meßkunst wenden. Ein dritter Theil beschäftigt sich mit der Bewegung, und heißt die **Bewegungslehre**, oder Mechanik. Ein vierter Theil untersucht die Eigenschaften, und Wirkungen des Lichts, und heißt die **Optik** u. s. w.

3. Gleichnamige Größen sind jene, die einerley Namen führen, oder wenigstens unter einerley Begriffe betrachtet werden, z. B. zwey **Klafter**, und vier Klafter sind gleichnamige Größen; imgleichen können zwey Pistolen, und drey Musqueten fünf gleichnamige Dinge seyn, wenn man sie als Schießgewehre betrachtet.

4. **Gleiche** Größen sind solche, deren eine für die andere gesetzet werden kann; **ähnliche** Größen hingegen sind jene, welche auf eine gleiche Art bestimmet sind, und nur bloß in ihrer wirklichen Größe von einander unterschieden werden. So können z B. unsere sechs, und zwölfpfündigen Kugeln für ähnliche Dinge angesehen werden, weil sie auf eine gleiche Art bestimmet sind, und nur bloß wegen ihrer Größe von einander unterschieden werden.

5.

5. Eine einzige Größe in ihrer Gattung betrachtet, wird eine **Einheit** genennt; und mehrere gleichnamige Größen, oder Einheiten zusammengenommen machen eine Zahl aus; eine **Zahl** ist also eine Menge von Einheiten.

6. Weil eine jede Größe, oder eine jede Einheit aus Theilen zusammengesetzet ist, oder doch als zusammengesetzet betrachtet werden kann, so ist es klar, daß eine Einheit in Rücksicht ihrer Theile auch als eine Zahl betrachtet werden könne, z. B. eine Klafter, als eine einzige in ihrer Gattung genommen, ist eine Einheit: betrachtet man nun, daß die Klafter aus sechs Schuhen bestehe, so ist die Klafter eine aus sechs Schuhen, oder Einheiten zusammengesetzte Zahl.

7. Die Zeichen, deren man sich in der Mathematik bedienet, sind folgende:

1 (eins), 2 (zwey), 3 (drey), 4 (vier), 5 (fünf), 6 (sechs), 7 (sieben), 8 (acht), 9 (neun), 0 (null). Dieß sind die Zeichen der Zahlen, man nennt sie Ziffern: 0 bedeutet für sich selbst nicht, sondern vermehret nur den Werth der vorhergehenden Ziffern, wie es weiter unten erhellen wird; die übrigen aber sind bedeutliche Ziffern.

$+$ heißt **mehr**, und bedeutet, daß diejenigen Größen zusammengezählet, oder addiret werden sollen, zwischen die es gesetzet ist, z. B. $6 + 3$ (sechs mehr drey) sind 9.

$-$ heißt **weniger**, und zeiget an, daß diejenige Größe abgezogen werden müße, welche dieses Zeichen vor sich hat; z. B. $8 - 5$ (acht weniger fünf) sind 3.

$>$ zwischen zwey Größen gesetzt zeiget an, daß die vorhergehende größer sey, als die nachfolgende: $6 > 5$ (sechs größer als fünf).

$<$ zwischen zwey Größen gesetzt zeiget an, daß die vorhergehende Größe kleiner sey, als die nachfolgende; $4 < 7$ (vier kleiner als sieben).

$\times$ oder . sind Zeichen der Multiplikation; z. B. 2×3 oder $2 \cdot 3$ (zwey multiplicirt mit drey) sind 6, daß ist 2 soll 3 mal, oder 3 soll 2 mal genommen werden; die Multiplikation der zusammengesetzten Größen wird auch also angezeigt; $4 \cdot (3 + 2)$ oder $4 \times (3 + 2)$, oder auch nur also $4\,(3 + 2)$, zuweilen auch $4 \cdot \overline{3 + 2}$.

: ist ein Zeichen der Division, und zeiget an, daß man mit derjenigen Größe dividiren solle, vor der dieses Zeichen steht; z. B. $8 : 2$ (acht dividiret, oder getheilt durch zwey) ist gleich 4; man pflegt auch dieses also anzuzeigen; $\frac{8}{2}$ (acht getheilt durch zwey).

= zeiget an, daß diejenigen Größen einander gleich sind, zwischen denen dieses Zeichen steht; z. B. $6 = 4 + 2$, oder $4 + 2 = 9 - 3$, oder $4 + 2 = (5 - 3) \cdot (7 - 4)$ die noch übrigen gewöhnlichen Zeichen werden in der Folge angezeiget werden.

8. **Grundsätze**, das ist, solche Sätze, von deren Wahrheit uns die blosse Vernunft überzeiget, und aus denen die meisten Wahrheiten in der Mathematik erwiesen werden, sind vorzüglich folgende.

I. Das Ganze ist allen seinen Theilen zusammengenommen gleich, z. B. 1 fl. = sechzig kr.

II. Das Ganze ist größer als jeder seiner Theile. 1 fl. > 1 Gr. oder auch 1 fl. > als zwanzig kr.

III. Gleiches kann für Gleiches gesetzet werden. Statt achtzehn Schuhen kann man drey Klafter setzen.

IV. Wenn man zu Gleichen Gleiches addiret, so sind die Summen (vermög §. 17.) wenn man von Gleichen Gleiches abzieht, so sind die Unterschiede (21); wenn man endlich gleiche Größen mit gleichen multiplicirt, oder auch dividirt, so erhält man in jenem Falle gleiche Produkte, (26) und in diesem gleiche Quotienten (31) z B.

zu $6 = 4 + 2$	von $6 = 4 + 2$
addiret $3 = 3$	subtrahiret $3 = 3$
so ist $6 + 3 = 4 + 2 + 3$	so ist $6 - 3 = 4 + 2 - 3$

Mul-

$$\begin{array}{rl} & 4 = 3 + 1 \\ \text{Multipliciret mit} & 2 = 2 \\ \hline \text{so ist} & 4 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \\ \text{oder} & 8 = 6 + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 9 = 6 + 3 \\ \text{Dividiret durch} & 3 = 3 \\ \hline \text{so ist} & 9 : 3 = 6 : 3 + 3 : 3 \\ \text{oder} & 3 = 2 + 1. \end{array}$$

V. Wenn man zu Gleichen Ungleiches addiret, oder es davon abzieht, mit Ungleichen Gleiches multipliciret, oder dividiret, so erhält man jederzeit ungleiche Summen, Unterschiede, Produkte, und Quotienten.

Z. B. $4 + 3 = 7$; wenn ich nun auf der einen Seite 3. und auf der anderen nichts wegnehme, so werden die Größen alsdann einander nicht mehr gleich, sonder $4 < 7$ seyn; eben so wird $4 + 3 + 2 > 7 + 1$ seyn, wenn ich auf der einen Seite 2, und auf der anderen nur 1 hinzusetze.

VI. Wenn zwey Größen einer dritten Größe gleich oder ähnlich sind, so sind sie auch untereinander gleich oder ähnlich; z. B. weil es wahr ist, daß eine Klafter 6 Schuhen gleich ist, und es ebenfalls wahr ist, daß auch zwey und siebenzig Zolle sechs Schuhen gleich sind, so ist es auch richtig, daß eine Klafter zwey und siebenzig Zollen gleich ist.

VII. Wenn eine Größe kleiner, oder größer ist, als die eine von zwey gleich großen Größen, so ist sie auch kleiner oder größer als die andere; z. B. $8 = 5 + 3$, nun ist $9 > 8$, es ist also auch $9 > 5 + 3$.

9. Jede Zahl kann durch Zusammensetzung der Zahlzeichen ausgedrücket werden: jede Ziffer, wenn sie allein steht, bedeutet blosse Einheiten; 3 bedeutet drey, 7 bedeutet sieben Einheiten, u. s. w. Werden mehrere Ziffern nebeneinander ohne Zeichen zusammengefügt; z. B. 5342, so bedeutet die

erste Ziffer rechts blosse Einheiten, die zweyte Ziffer gegen der Linken bedeutet zehnfache Einheiten, oder Zehner, die dritte zehnfache Zehner, oder Hunderter, die vierte zehnfache Hunderter, oder Tausender, die fünfte zehnfache Tausender, die sechste hundertfache Tausender, die siebente tausendfache Tausender, oder Millionen; nach einfachen Millionen kommen wieder Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender der Millionen; nach diesen stehen in der dreyzehnten Stelle millionenfache Millionen, welche man Kürze halber Billionen nennt; millionenfache Billionen heißt man Trillionen, u. s. w. der Werth der Ziffer wird also um zehnmal Größer, wenn sie um eine Stelle weiter links fortgerücket wird; bey der Zahl 44 bedeutet die erste Ziffer rechts blosse Einheiten, die zweyte hingegen Vierzig oder viermal zehn Einheiten, zusammen vier und vierzig.

Wenn in einer Zahl entweder Einheiten, oder Zehner, oder Hunderter u. s. w. nicht ausgesprochen werden, so muß an die Stelle der mangelnden Ziffer eine Nulle (0) gesetzet werden, damit die folgenden Ziffern gegen der Linken ihren wahren Werth erhalten; z. B. fünfhundert und drey muß geschrieben werden 503; denn wollte man es 53 schreiben, so würde 5 nur fünfzig, und nicht fünfhundert bedeuten; eben so wird sechstausend und sechzehn also geschrieben 6016.

10. Nun wird es nicht mehr schwer seyn, jede durch Ziffern ausgedrückte Zahl auszusprechen; man macht in dieser Absicht nach den ersten drey Ziffern rechts einen Punkt, dann nach den drey folgenden einen Strich; dann wieder nach den drey folgenden einen Punkt, dann zwey Striche; ferner wieder einen Punkt, endlich drey Striche, u. s. w. in der letzten Klasse links werden zuweilen zwey, oder auch nur ein Ziffer stehen. Z. B. um die Zahl 97805310002453204 auszusprechen, theile man sie also ab, 97.805,,310.002,453.204; nun bedeuten die nach den Punkten stehenden Ziffern Tausender, und die nach den Strichen stehenden Ziffern bedeuten, Millionen, Billionen, Trillionen, Quadrillionen u. s. w. je nachdem

dem 1, 2, 3 oder 4 Striche vorhanden sind. Dann fängt man links an die in jeder Klasse befindlichen 3 Ziffern auszusprechen, und setzet jederzeit am Ende der Klasse das zu dem Zeichen zugehörige Wort, Tausend, Million, Billion, u. s. w. hinzu; so wird obige Zahl also ausgesprochen: sieben und neunzig Tausend, acht Hundert, und fünf Billionen, drey Hundert zehntausend, und zwey Millionen, viermal Hundert drey und funfzig Tausend, zwey Hundert und vier. Imgleichen wird folgende Zahl 300,,,004.200,,036.710,000.205 also ausgesprochen: drey Hundert Trillionen, vier Tausend zwey Hundert Billionen, sechs und dreyßig Tausend sieben Hundert zehn Millionen, zwey Hundert und fünf.

In folgender Tafel kann man den Werth der Ziffern mit einem Blicke übersehen, der ihnen vermög ihrer Stellung zugetheilet wird; es bedeutet nämlich

die	21.	20.	19.	18.	17.	16.	15.	14.	13.	12.	11.	10.	9.	8.	7.	6.	5.	4.	3.	2.	1te Stelle
u. s. w.	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten	Hunderttausender	Zehntausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einheiten
der Trillionen				der Billionen						der Millionen						Bloße					

II. Eben so leicht ist es jede vorgegebene Zahl mit Ziffern zu schreiben; denn man schreibe nur die bedeutlichen Ziffern auf, und an jede Stelle, wo keine Hunderter, Zehner oder Einheiten ausgesprochen werden, schreibe man eine Nulle, so wird die Zahl gehörig mit Ziffern ausgedrücket seyn. Will man nun untersuchen, ob bey dem Ansetzen der Ziffern kein Fehler eingeschlichen sey, so theile man die angeschriebene Zahl nach der angeführten Art in Klassen ein, und spreche sodann die Ziffern aus; und so wird es sich zeigen, ob die angeschriebene Zahl mit der gegebenen einerley sey. Z. B. um folgende Zahl mit Ziffern auszudrücken: sechs und zwanzig tausend und vier Millionen, neunmal Hundert, und sechs Tausend, und acht; so schreibe man 26; nach diesen folgen die Hunderter, und Zehner der Millionen, weil aber keine ausgesprochen werden, so setze man an ihre Stellen zwey Nullen, und sodann die vier Einheiten der Millionen an, nämlich 26004 Millionen; nach den Millionen folgen die Hunderttausender, in unserem Beyspiele neun, man setze also 9 an; nach diesen kommen Zehntausender, in unserem Falle keine, man schreibe also 0; nach diesen kommen Einheiten der Tausender, diese werden auch angesetzt, und dann erhält man 26004906 Tausend; endlich schreibe man an die Stellen der nicht ausgesprochenen blossen Zehner, und Hunderter zwey Nullen, und setze die acht letzten Einheiten an, so sieht die vorgegebene Zahl also aus 26004906008.

Anmerkung. Die Rechenkunst mit den angeführten Zehnzahlzeichen heißt die dekadische Rechenkunst von dem griechischen Worte Δεκα (Zehn); es ware nicht unumgänglich nothwendig zehn Zahlzeichen zu erwählen, deren Werthe von der Rechten zur Linken wachsen sollten; man hätte deren mehr, oder auch weniger annehmen können; so könnte man durch diese zwey Zeichen 1 und c alle mögliche Zahlen ausdrücken, wenn man 1 eins, und c für sich selbst nichts bedeuten, sondern nur den Werth des bedeutlichen Zeichens 1 jederzeit um das doppelte vermehren läßt, wenn es dadurch um eine Stelle weiter gegen der Rechten fortgerücket wird; als

1 = i	16 = cccci	31 = iiiii
2 = ci	17 = iccci	32 = ccccci
3 = ii	18 = cicci	33 = iccccı
4 = cci	19 = iicci	34 = ciccci
5 = ici	20 = ccici	35 = iiccci
6 = cii	21 = icici	36 = ccicci
7 = iii	22 = ciici	37 = icicci
8 = ccci	23 = iiici	38 = ciicci
9 = icci	24 = cccii	39 = iiicci
10 = cici	25 = iccii	40 = cccici
11 = iici	26 = cicii	41 = iccici
12 = ccii	27 = iicii	64 = cccccci
13 = icii	28 = cciii	128 = ccccccci
14 = ciii	29 = iciii	256 = cccccccci.
15 = iiii	30 = ciiii	u. s. w.

Es bedeutet nämlich i an der ersten Stelle links eins, an der zweyten Stelle gegen der Rechten zwey, an der dritten vier, an der vierten acht, an der 5ten sechzehn, an der 6ten zwey und dreyßig, an der 7ten Stelle vier und sechzig u. s. w. Und nun ist es leicht eine jede auf diese Art ausgedrückte Zahl zu finden, wenn man für jeden i den Werth setzt, der ihm vermög seiner Stelle entspricht, und alle diese Werthe zusammen zählt, so findet man, daß cciccii Hundert = 100 bedeute, weil der erste i links 4, der zweyte 32, der dritte 64 gilt, und diese Werthe 4 + 32 + 64 = 100 sind. Eben so leicht ist es eine jede gegebene Zahl mit diesen Zeichen ausdrücken, wenn man nur die gegebene Zahl in lauter solche Theile zerfället, deren einer = 1 seyn kann, und die übrigen alle aus der wiederholten Multiplikation des 2 entstanden sind: um 53 z. B. mit diesen zwey Zeichen auszudrücken, so zerfälle man 53 in 32 + 16 + 4 + 1 und schreibe es also 53 = icicii; ingleichen um Tausend zu schreiben, zerfälle man Tausend in folgende Theile 8 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512, und schreibe es also CCCIↃIIII; eben so wird man finden, daß eine Millon, nämlich 1000000 = CCCCCIↃↃↃↃↃ sey.

12. Gleichwie man jede Anzahl gleichnamiger Größen durch die Ziffern vorstellen kann, so pflegt man auch auf eine noch allgemeinere Weise jede Größe durch einen der Buchstaben $a, b, c, d, \ldots x, y, z$, oder auch durch A, B, C u. s. w. auszudrücken; durch die Ziffer 7 z. B. kann ich nur 7 Klafter, sieben Schritte, sieben Pfunde, sieben Kugeln bezeichnen; durch einen der Buchstaben a oder x oder B kann ich 7, 10, oder 100 Klafter, 7, 50, oder 1000 Schritte, 7, 50, oder 250 Pfunde, u. s. w. ausdrücken: eben so kann durch $a + x$ jede Summe zweyer Größen vorgestellet werden, und dieser Ausdruck selbst $a + x$ kann wieder durch einen einzigen Buchstaben, der aber von diesen beyden verschieden seyn muß, z. B. durch b, n, oder S, oder y, bezeichnet werden.

13. Jede durch die Buchstaben ausgedrückte Größe werden wir eine **algebraische Größe** nennen; sie ist

I. Zusammengesetzt, wenn mehrere Größen durch die Zeichen $+$ und $-$ verbunden werden; doch wird im Anfange das Zeichen $+$ sehr selten ausdrücklich, $-$ aber jederzeit angesetzt; die mit diesen Zeichen verbundenen Größen werden **Glieder** (*termini*) genennt. Z. B. $ab - c + 3dm$ ist eine aus drey Gliedern zusammengesetzte algebraische Größe.

II. **Einfach**, wenn ein oder mehrere Buchstaben, und Ziffern ohne $+$ oder $-$ mit einander verbunden sind, so sind ab, oder $-2cdx$, oder $\frac{ay}{x}$ einfache algebraische Größen. Da man nun $a + b$ durch x oder auch $ab - 100\,cx + 3dm$ durch z bezeichnen, nämlich $ab - 100\,cx + 3dm = z$ setzen kann, so ist es offenbar, daß man jede zusammengesetzte algebraische Größe auch als einfach vorstellen kann. Die einfachen Größen werden auch einnamig, so wie die zusammengegesetzten zwey, drey, vier, mehrnamig genannt, wenn sie aus zwey, drey, vier, oder mehr Gliedern zusammengesetzt sind.

III. Positiv, wenn sie das Zeichen + negativ wenn sie das Zeichen — vor sich hat.

14. Es ist gar nicht schwer, von den Positiven, und negativen Größen sich einen deutlichen Begriff zu machen; eine jede wirkliche Größe wird eine positive Größe genennt, und eine jede Größe, welche dieser positiven Größen gerade entgegengesetzt ist, heißt eine negative Größe; da man nun jener das Zeichen + vorzusetzen pflegt, so muß diese durch — bezeichnet werden, weil + und — einander gerade entgegengesetzt sind. Bedeutet nun die positive Größe $+ a$ ein gewisses Vermögen, einen Gewinn, eine Bewegung vorwärts, eine Richtung gegen der Rechten, so bedeutet $- a$ eine dem Vermögen gleichgrosse Schuld, oder einen Verlurst, eine Bewegung rückwärts, eine Richtung gegen der Linken u. s. w. Wenn man also zwey gleiche Größen, deren eine positiv, die andere negativ ist, zusammenzählt, so tilgen sie einander; z. B. ich habe drey Gulden im Vermögen, und bin 3 fl. schuldig, so ist mein Vermögensstand gleich Null, nämlich 3 fl. — 3 fl. = 0. Ist hingegen eine aus beyden größer, so tilget die kleinere so viel Einheiten in der größeren, so viel sie selbst Einheiten enthält; z. B. ich habe dreyßig Gulden im Vermögen, und bin zwanzig Gulden schuldig, so ist mein Vermögensstand gleich zehn Gulden, nämlich 30 fl. — 20 fl. = 10 fl. Imgleichen ich habe 30 fl. im Vermögen, und bin 50 fl. schuldig, so ist mein Schuldenstand gleich 20 fl., nämlich 30 fl. — 50 fl. = — 20 fl. Es ist also allgemein $5ab - 2ab = 3ab$; $-5ab + 2ab = -3ab$; $3ab - 3ab = 0$.

15. Die Ziffern findet man bey algebraischen Größen

I. Mit den Zeichen + und — verbunden, und dann heißen sie Glieder der algebraischen Größe, z. B. $ab - 15 + x$; $20 + a - y$.

II.

II. Vorwärts ohne Zeichen mit den Buchstaben verbunden; sie heißen **Coefficienten**, und zeigen an, daß dieß ganze Glied mit seinem Zeichen so oft zu sich selbst gezählet sey, als sich die Einheit in dem Coefficienten befindet, mit einem Worte; sie zeigen an, daß das ganze Glied mit diesem Coefficienten multipliciret sey; z. B. $4ab = ab + ab + ab + ab = 4 . ab$; ist nun $ab = 2 . 3 = 6$, so ist $4\,ab = 4 . 2 . 3 = 4 . 6 = 24$. Imgleichen $- 3bc = - bc - bc - bc$; also auch $3a - 2b = a + a + a - b - b = 3 . a - 2 . b$. Wenn nun ein Glied keinen ausdrücklichen numerischen Coefficienten vor sich hat, so wird daselbst jederzeit ein 1 verstanden; so ist $ab = 1\,ab$; $2x - cd = 2x - 1\,cd$. u. s. w.

III. Einem Buchstaben rückwärts etwas oben angeschrieben, $a^2\,b^3$, und dann heißen sie **Exponenten**; sie zeigen an, daß der Buchstab so oft durch die Multiplikation angesetzet sey, als der Exponent die Einheit in sich enthält; z. B. $a^3 = a . a . a$; $4^3 = 4 . 4 . 4 = 16 . 4 = 64$; $a^3\,b^2 = a . a . a . b . b$; ist nun $a = 2$ und $b = 3$, so ist $a^3 b^2 = 2^3\,3^2 = 2 . 2 . 2 . 3 . 3 = 8 . 9 = 72$. Eben so ist $a^n = a$ (n mal) geschrieben. Jeder Buchstab, bey dem kein Exponent ausdrücklich angesetzet ist, hat 1 zu seinem Exponenten; so ist $a b^2 = a^1\,b^2$; denn der Exponent 1 wenn er allein ist, wird fast niemals, — 1 aber jederzeit angesetzt: man kann sagen $a^1 = a$, man kann aber nicht sagen $a^{-1} = a$. Die Größen mit den Exponenten z. B. $5\,a^3\,b^6c\,x^n$ werden also ausgesprochen: fünf a der dritten b der sechsten $c\,x$ der $n$ten Potenz nämlich; $a^n\ x^{m+1}$ heißt a der $n$ten x erhoben zu $m + 1$. u. s. w.

16. Die Glieder einer zusammengesetzten algebraischen Größe sind.

I. **Gleichnamig**, oder ähnlich, wenn sie aus den nämlichen Buchstaben mit den nämlichen Exponenten bestehen, in den Zeichen + und — nur, und in den Coefficienten können sie verschieden seyn. So sind $ab - 3\,ab + 5\,ab$ gleichnamige Glie-

Glieder; imgleichen sind $3a^2b^m - 2a^2b^m + 100a^2b^m$ gleichnamige Größen.

II. **Ungleichnamig**, oder unähnlich, wenn sie entweder verschiedene Buchstaben, oder auch zwar einerley Buchstaben aber mit verschiedenen Exponenten haben; so sind die Glieder der zusammengesetzten Größe $3ab - 2abc + 3a^2b + 3ab^2$ lauter ungleichnamige Größen.

Von der Addition.

17. **Addiren** heißt eine Größe finden, die mehreren gegebenen Größen zusammen genommen gleich ist, diese gefundene Größe wird der Betrag, oder die Summe genennt. Die zu addirenden Größen müßen gleichnamig seyn; 3 Pfunde, und 4 Gulden können unmöglich in eine Summe gebracht werden, denn die Summe würde weder Pfunde noch Gulden bedeuten. Doch geschieht es zuweilen, daß ungleichnamige Größen gleichnamig werden, wenn sie auf eine gleiche Gattung gebracht werden, und dann können sie auch in eine Summe zusammengezählt werden: 2 fl. und 5 Gr. sind ungleichnamige Größen; löset man nun die 2 fl. in 40. Gr. auf, so werden diese zwey Größen 40 und 5 Gr. gleichnamig, und können addiret werden.

18. Bey der Addition der Zahlen beobachte man folgende Regeln.

I. Man schreibe die gegebenen Zahlen also, daß die Einheiten unter den Einheiten, die Zehner, unter den Zehnern, die Hunderter unter den Hundertern stehen, u. s. w. und ziehe einen Querstrich darunter.

II. Dann zähle man erstens die Einheiten, zweytens die Zehner, drittens die Hunderter zusammen u. s. w. und setze jeden Betrag unter dem Striche an die gehörige Stelle. Z. B.

o und 1 ist 1, und 2 sind 3, und 3 sind 6; dieser Betrag der Einheiten wird an die Stelle der Einheiten gesetzt; dann zählt man die Zehner 2 und 1 sind 3, und 5 sind 8, und 1 sind 9, dieser Betrag wird an die gehörige Stelle der Zehner gesetzt, u. s. w.

30413
152
47311
2020
79896

III. Besteht der Betrag einer Stelle aus zwey, oder mehr Ziffern, so wird nur die mindere, daß ist die rechts stehende Ziffer, wenn es auch nur eine Nulle, wäre an das gehörige Ort gesetzt, und das übrige zur folgenden Stelle gezählet, z. B.

8 und 9 sind 17, und 4 sind 21, und 7 sind 28, und 9 sind 37: die 7 Einheiten werden an die Stelle der Einheiten gesetzt, und die 3 Zehner zur folgenden Stelle der Zehner gezählt, nämlich 3 und 7 sind 10, und 4 sind 14, und 5 sind 19, und 5 sind 24, und 6 sind 30; o wird an die Stelle der Zehner gesetzt, und 3 zur folgenden Stelle der Hunderter gezählt; 3 und 8 sind 11 und 8 u. s. w.

87469
857
9854
76849
78
175107

IV. Wenn in einer Stelle der zu addirenden Zahlen lauter Nullen wären, und von dem Betrage der vorhergehenden Stelle hätte man auch nichts übriges, so wird in dem Betrage eine Nulle gesetzt.

204804
302608
901602
1409014

V. Sind endlich die zu addirenden Zahlen ungleichnamig, und doch so beschaffen, daß man sie auf eine gleiche Gattung bringen könne; z. B. Gulden, Kreuzer, Pfenninge; Stunden, Minuten, und Sekunden; Klafter, Schuhe, und Zolle, u. s. w. so hat man bey ihrer Addition noch folgendes zu beobachten: man setzt nämlich die zu addirenden Zahlen also, daß die gleichnamigen Gattungen untereinander, die Gulden unter den Gulden, die Kreuzer, unter den Kreuzern stehen, u. s. w. und fängt bey der kleinsten Gattung rechts zu addiren

an,

en, und fährt immer weiter gegen der linken von Gattung zu Gattung fort, so oft nun der Betrag einer kleinern Gattung einer, oder mehreren Einheiten der gleich darauf folgenden größeren Gattung gleich wird, so werden diese Einheiten zu der darauf folgenden Stelle gezählt, und nur der Ueberrest, wenn einer vorhanden ist, an das gehörige Ort gesetzt, wie es folgende Beyspiele zeigen.

8	fl.	12	Gr.	2	kr.	3	₰
10	=	18	=	1	=	2	=
2	=	17	=	2	=	3	=
26	=	9	=	1	=	1	=
48	fl.	18	Gr.	2	kr.	1	₰

22	Stund	45	Minut.	27	Sek.
13	=	14	=	30	=
6	=	0	=	20	=
42	St.	0	M.	17	Sek.

In dem ersten Beyspiele sagt man: 1 und 3 und 2 und 3 sind 9 ₰, daß ist 2 kr. 1 ₰; 1 ₰ wird angesetzt, und 2 kr. zur folgenden Stelle addiret: 2 und 1 und 2 und 1 und 2 sind 8 kr., oder 2 Gr. 2 kr.; 2 kr. werden in dem Betrage angesetzt, und die 2 Gr. zur folgenden Stelle der Gr. addirt, nämlich 2 und 9 und 7. und 8. u. s. w.

19. Will man nun versichert seyn, daß man bey dem Zusammenzählen der Ziffern nicht gefehlet habe, so wiederhole man es noch einmal, und man addire itzt von oben herunter, wenn man ehevor von unten aufwärts zusammengezählet hat. Geschieht es endlich, daß sehr viele Zahlen zu addiren sind, so zerfälle man die Arbeit in mehrere Theile, zähle jeden Theil besonders zusammen, und addire endlich diese besonderen Summen in eine Hauptsumme. Z. B. um die Summe dieser Zahlen 253 + 580 + 379 + 804 + 1205 + 6439 +

37 + 856 + 955 + 342 + 750 zu erhalten, ordne man sie also:

253	1205	955		2016
580	6439	342		8537
379	37	750	endlich ist	2047
804	856			
2016	8537	2047	die Haupt	12600 Summe.

20. Bey der Addition der algebraischen Größen beobachte man folgende Regeln.

I. Man schreibe die algebraischen Größen untereinander, oder auch nur in einer Linie mit ihren Zeichen dahin, und ziehe darunter einen Querstrich.

II. Suche man die gleichnamigen Glieder auf (16) und sehe auf ihre Zeichen.

III. Sind die Zeichen nun gleich; nämlich in beyden gleichnamigen Gliedern + oder in beyden —, so addire man nur die Coefficienten mit Beybehaltung der Buchstaben des einen Gliedes, und des gemeinschaftlichen Zeichens; sind die Zeichen verschieden, so ziehe man den kleinern Coefficienten von dem größeren ab, mit Beybehaltung der Buchstaben, und des Zeichens des größeren Coefficienten; sind endlich bey zwey gleichnamigen Gliedern gleiche Coefficienten und verschiedene Zeichen, so lasse man diese zwey Glieder hinweg (14)

IV. Die ungleichnamigen Glieder schreibe man in dem Betrage mit ihren Zeichen dahin. Beyspiele.

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} 3ab + 2ac + 3d^2g \\ 2ab - 5ac - 3dg^2 \end{array}\right\} \text{zu addiren} \\ \hline 5ab - 3ac + 3d^2g - 3dg^2 \ \text{Betrag} \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} 8\,ax - 3\,bc - 5\,dx \\ -\,ax + 7\,bc + 2\,dx \\ \hline 7\,ax + 4\,bc - 3\,dx \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 2\,a^3 + 6ab^2 \end{cases}$$

IV. $a^2 + 2ax + x^2 - a^2 + 2ax - x^2 = 4ax$

V. $a^m b^2 + 2c^3 x^{m+1} - 3c^3 x^{m+1} + 10a^m b^2 = 11a^m b^2$
$- c^3 x^{m+1}$

Von der Subtraktion.

21. Subtrahiren, oder abziehen heißt, eine Größe von der anderen wegnehmen, damit man ihren Unterschied erkenne; dieses nämlich, was nach geschehener Subtraktion übrig bleibt, wird der Unterschied, oder die Differenz genennet: wenn ich 3 von 5 wegnehme, so bleiben noch 2 übrig; 2 ist also die Differenz zwischen 3 und 5. Die Größen, deren Differenz man sucht, müßen gleichnamig, oder wenigstens also beschaffen seyn, daß man sie auf eine gleiche Gattung bringen könne. Zwey Ellen können von drey Pfunden nicht abgezogen werden; aber zwischen 2 kr. und 3 gr. kann man wohl die Differenz bestimmen, wenn man 9 kr. statt 3 gr. setzt.

22. Bey der Subtraktion der Zahlen beobachte man folgende Regeln.

I. Man schreibe die kleinere Zahl unter die größere also an, daß die Einheiten unter den Einheiten, die Zehner unter den Zehnern stehen, u. s. w. und ziehe einen Querstrich.

II. Dann ziehe man die Einheiten der unteren Zahl von den Einheiten der oberen Zahl, die Zehner von den Zehnern, die Hunderter von den Hundertern ab, u. s. w. und schreibe ihre Unterschiede an die gehörigen Stellen an, wo aber kein Unterschied übrig bleibt, setze man eine o hin. Z. B. 2 von 5 bleiben 3, welche an die Stelle der Einheiten in dem Unterschiede angeschrieben werden; 4 von 4 bleibt o, welches an die gehörige Stelle der Zehner gesetzt wird; 3 von 7 bleiben 4, und

$$\begin{array}{r} 8745 \\ 8342 \\ \hline 403 \end{array}$$

endlich 8 von 8 bleibt 0; diese letzte Nulle wird nicht mehr angesetzt, weil keine bedeutliche Ziffer links mehr übrig ist.

III. Wenn eine bedeutliche Ziffer von 0, oder eine größere Ziffer der unteren Zahl von einer kleinern Ziffer der oberen Zahl abzuziehen ist, so borge man von der nächstfolgenden Ziffer der oberen Zahl eine Einheit, und bemerke diese Ziffer mit einem Punkte, damit man nicht vergesse, daß die bemerkte Ziffer um 1 weniger gelte: diese geborgte Einheit, wenn sie herübergetragen wird, gilt 10 Einheiten (9); derowegen vermehre man die 0, oder die Ziffer, von der eine größere abzuziehen ist, um 10 Einheiten, und ziehe sodann die darunter stehende Ziffer ab. Z. B. 2 von 0 kann man nicht abziehen, derowegen borge man von 6 eine Einheit, und sage, 2 von 10 bleiben 8; ferner 4 von 5 (weil 6 itzt um 1 weniger gilt) bleibt 1; 8 von 2 kann man wieder nicht abziehen, man sage also 8 von 12 bleiben 4; 3 von 3 bleibt 0; und endlich Nichts von 6 bleiben 6.

$$\begin{array}{r} 6\dot{4}2\dot{6}0 \\ 3842 \\ \hline 60418 \end{array}$$

IV. Ist die Ziffer, von welcher man eine Einheit borgen muß, eine 0, so borge man über alle Nullen, wenn mehrere links aufeinander folgen, von der nächstfolgenden bedeutlichen Ziffer eine Einheit, bemerke alle Nullen, über welche man geborget hat, und auch die bedeutliche Ziffer mit Punkten, so gilt die bemerkte bedeutliche Ziffer um 1 weniger, die Nullen aber gelten jede 9; denn es ist augenscheinlich, daß, z. B. bey 7004, wenn ich 8 davon abziehe, und deßwegen von 7 über die Nullen eine Einheit borge, daß, sage ich, aus 700 nur 699 wird, wenn ich eine Einheit zum 4 übertrage. Im folgenden Beyspiele sagt man: 8 von 15 bleiben 7; 0 von 0 bleibt 0; 3 von 7 bleiben 4, 7 von 10 bleiben 3, 5 von 12 bleiben 7, 3 von 10 bleiben 7, 6 von 9 bleiben 3, 9 von 9 bleibt 0, nichts von 9 bleiben 9, nichts von 5 bleiben 5.

$$\begin{array}{r} \dot{6}\dot{0}\dot{0}\dot{0}\dot{1}\dot{3}07\dot{1}5 \\ 96357308 \\ \hline 5903773407 \end{array}$$

V. Sind die Zahlen, deren Unterschied gesucht wird, ungleichnamig, aber doch also beschaffen, daß man sie auf eine gleiche Gattung bringen könne, so merke man noch dieses, daß ein von der größeren zur kleineren Gattung übertragener 1 jederzeit so viel Einheiten gelte, als Einheiten der kleineren Gattung einer einzigen Einheit der größeren Gattung gleich sind. 1 Gulden an die Stelle der Gr. getragen gilt 20, eine Stunde an die Stelle der Sekunden getragen gilt 3600. Beyspiele

von	36 fl.	4 kr.	1 ℌ
abzuziehen	9 "	16 "	3 "
Differenz	26 fl.	47 kr.	2 ℌ

von	13 Stunden,	0 M.	0 Sek.
abzuziehen	10 "	29 "	40 "
Differenz	2 St.	30 M.	20 Sek.

In dem zweyten Beyspiele muß man von 13 Stund 1 borgen; dieß an die Stelle der Minuten getragen gilt 60 Minuten; von diesen 60 M. wieder 1 geborgt, und an die Stelle der Sek. getragen gilt 60 Sek. dann sagt man 40 von 60 bleiben 20 Sek. 29 von 59 bleiben 30 Min. und endlich 10 von 12 bleiben 2 Stunden.

23. Die Probe einer richtig gemachten Subtraktion ist diese: man addire den Unterschied, und die untere kleinere Zahl zusammen, so muß diese Summe die obere Zahl zum Vorschein bringen; denn wenn man die obere Zahl als ein Ganzes ansieht, so sind die untere Zahl, und der Unterschied Theile dieses Ganzen, welche vermög Grundsatz I. zusammengenommen dem Ganzen gleich seyn müßen.

es ist von	104307
abzuziehen	98312
Differenz	5995
Probe	104307

24. Den Unterschied zwischen einer jeden gegebenen, und der nächst darauf folgenden Zahl, welche aus 1 und lauter Nullen besteht, werden wir in der Folge die dekadische Ergänzung nennen; einige heißen dieß Complementum arith-

meticum; so ist die dekadische Ergänzung von 46 = 54; dek. Erg. 487 = 513. Man findet die dekadische Ergänzung einer Zahl sehr leicht, wenn man alle ihre Ziffern links angefangen von 9, und die letzte rechts stehende bedeutliche Ziffer von 10 in Gedanken abzieht, diese Unterschiede in der gehörigen Ordnung anschreibt, und die Nullen, die sich etwann rechts bey der Zahl befinden, auch hinsetzt. So findet man die dek. Erg. von 39708264 = 60291736, in dem man sagt: 3 von 9 bleiben 6; 9 von 9 bleibt 0; 7 von 9 bleiben 2; 0 von 9 bleiben 9; 8 von 9 bleibt 1; 2 von 9 bleiben 7; 6 von 9 bleiben 3, und endlich 4 von 10 bleiben 6. Imgleichen um die dek. Erg. von 9856300 = 143700 zu finden, sage man: 9 von 9 bleibt 0, welches nicht angeschrieben wird; 8 von 9 bleibt 1; 5 von 9 bleiben 4; 6 von 9 bleiben 3, und endlich 3 von 10 bleiben 7, wozu noch die zwey Nullen hinzugesetzet werden müßen. Der Nutzen der dekadischen Ergänzung ist folgender: wenn zwey, oder drey, oder mehr Zahlen zu addiren wären, die alle aus gleich viel Ziffern bestehen, und von dieser Summe zwey, oder drey, oder mehr Zahlen zu subtrahiren sind, die auch aus eben so viel Ziffern bestehen, so schreibe man die zu addirenden Zahlen untereinander, und setze unter diese die dekadischen Ergänzungen der zu subtrahirenden Zahlen, dann addire man dieß alles zusammen, und lasse nur bey dem Betrage der letzten links stehenden Kolonne so viele Zehner in Gedanken hinweg, als dekadische Ergänzungen vorhanden sind, so wird die auf diese Art erhaltene Summe das gehörige Resultat seyn, welches man erhalten hätte, wenn man die zu addirenden Zahlen in eine, die zu subtrahirenden in die andere Summe zusammengezählet, und dann diese letzte Summe von der ersten abgezogen hätte: z. B. um das Result 872 + 946 — 871 zu finden, schreibe man also.

$$\begin{array}{rl} 872 & \\ 946 & \Big\} \text{zu addiren} \\ 129 & \text{dek. Ergänz.} \\ \hline 947 & \text{Resultat} \end{array}$$

Dann sage man: 9 + 6 + 2 sind 17, 7 wird angesetzt, und 1 zur folgenden Stelle addirt; 1 + 2 + 4 + 7 sind 14; 4 wird angesetzt, und 1 wieder zur

fol-

folgenden Stelle gezählt; nämlich $1 + 1 + 9 + 8$ sind 19, wovon 10 hinweggelassen, und nur 9 in dem Resultate angeschrieben werden. Eben so findet man $8043 + 7146 + 8072 + 1204 - 9824 - 8740 = 5901$, wenn man es auf folgende Art entwickelt.

In dem Betrage der letzten Kolonne $1 + 1 + 8 + 7 + 8 = 25$ werden nämlich zwey Zehner, daß ist, 20 hinweggelassen, und nur 5 angesetzet.

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r}8043\\7146\\8072\\1204\end{array}\right\} & \text{zu addiren}\\ \left.\begin{array}{r}176\\1260\end{array}\right\} & \text{dek. Ergänzung}\\ \hline 5901 & \text{Resultat.}\end{array}$$

25. Bey der Subtraktion der algebraischen Größen merke man nur folgendes: man verändere die Zeichen aller Glieder derjenigen Größe, die abzuziehen ist, nämlich + in —, und — in +, und addire sodann nach den Regeln der algebraischen Addition diese veränderte Größe zu derjenigen, von der sie abzuziehen ist, so wird dieß das gehörige Resultat, oder der verlangte Unterschied seyn. Wenn $+ x$ von a abzuziehen ist, wird an dem Ausdrucke des Unterschieds $a - x$ niemand zweifeln; nur wenn $- x$ von a abzuziehen ist, könnte es Anfängern seltsam scheinen, daß der Ausdruck des Unterschieds $a + x$ sey; allein ich behaupte, wenn $- x$ von a abzuziehen ist, daß der Unterschied $a + x$ sey, nämlich daß man bey der Subtraktion auch das Zeichen — in + verwandeln müße; denn der Unterschied muß also beschaffen seyn, daß er zur abzuziehenden Größe addirt diejenige Größe zum Vorschein bringt, von der man abgezogen hat (23): nun aber bringt $a + x$ zu der abzuziehenden Größe $- x$ addiret die Größe a zum Vorschein, von der man abgezogen hat; es ist also, wenn man $- x$ von a abzieht, der Unterschied $= a + x$; was man itzt von x erwiesen hat, ist bey einer jeden anderen auch zusammengesetzten Größe richtig, weil x jede einfache, oder zusammengesetzte Größe vorstellen kann. Die algebraische Subtrak-

tion einer Größe ist also nichts anders, als eine mit veränderten Zeichen verrichtete Addition eben dieser Größe. Beyspiele

I. $8a - (4a - 2a) = 8a - 4a + 2a = 6a$; denn das Zeichen $-$ vor eine in Klammern eingeschlossene Größe gesetzt zeiget an, daß alle Glieder dieser Größe abzuziehen sind.

II. $a^2b - 4c - (5a^2b - dc - 4c) = a^2b - 4c - 5a^2b + dc + 4c = dc - 4a^2b$.

III. Von . .	$5a^mx^2 - 20 + 7ab^3x - 4b^mcx^2$
ist abzuziehen . .	$2b^mcx^2 + 5a^mx^2 + 8 - 2a^3bx$
die Zeichen geänd.	$-2b^mcx^2 - 5a^mx^2 - 8 + 2a^3bx$
Differenz	$= -28 + 7ab^3x - 6b^mcx^2 + 2a^3bx$

IV. Wenn 16 von 12 abzuziehen sind, so ist die Differenz $= -4$; wären aber -16 von 12 abzuziehen, so ist die Differenz $= 28$; wären endlich 16 von -12 zu subtrahiren, so ist die Differenz $= -28$.

Von der Multiplikation.

26. Eine Größe mit der anderen **multipliciren**, heißt die eine Größe so oft zu sich selbst addiren, als die andere Größe die Einheit in sich enthält, z. B. 8 mit 6, oder 6 mit 8 multipliciren heißt 8 sechsmal, oder 6 achtmal zu sich selbst addiren; dasjenige, so bey diesem Verfahren zum Vorschein kömmt, heißt das **Produkt**; und die Größen, welche miteinander multipliciret werden, heißen die **Faktoren**. Im obigen Beyspiele sind 6 und 8 die Faktoren, und 48 ist das Produkt, indem man sagt: 6 mal 8 sind 48. Der Faktor von einer gegebenen Größe heißt sonst auch eine jede Größe, die in der gegebenen genau enthalten ist; so sind von 30 die Faktoren folgende Zahlen: 2, 3, 5, 6, 10, 15.

27.

27. Die Produkte der einfachen Zahlen findet man in beygesetzter Tafel, wenn man die kleinere Zahl rechts, die größere links, und dann den Ort aufsucht, in welchem die vertikale Kolonne von der einen mit der horizontalen Kolonne von der anderen größeren Zahl zusammenstößt, denn an diesem Orte ist das Produkt anzutreffen. Diese Produkte der einfachen Zahlen, die man das Einmaleins nennt, muß man gut in das Gedächtniß eindrücken,

1	2							
2	4	3						
3	6	9	4					
4	8	12	16	5				
5	10	15	20	25	6			
6	12	18	24	30	36	7		
7	14	21	28	35	42	49	8	
8	16	24	32	40	48	56	64	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81

wenn man im Rechnen geschwinde fortkommen will. Bey den einfachen Zahlen, die schon über 5 steigen, kann sich ein schwacher Kopf im Nothfalle mit der **Fingerregel** in etwas helfen, sie ist folgende; um so viel Einheiten der erste Faktor über 5 steiget, eben so viel Finger richte man in der Rechten in die Höhe; und um so viel Einheiten der andere Faktor über 5 steiget, eben so viel Finger richte man auch in der Linken in die Höhe; die aufgerichteten bedeuten Zehner, die übrigen niedergedrückten Finger aber bedeuten blosse Einheiten; nun multiplicire man die Zahl der niedergedrückten Finger der einen Hand mit der Zahl der niedergedrückten Finger der andern Hand; dieses kleine Produkt addire man in Gedanken zu der Anzahl der Zehner von den aufgerichteten Fingern, so hat man das Produkt der zwey Zahlen, deren eine größer als 5, und die andere wenigstens 5 gleich ist; z. B. man solle das Produkt 7 mal 8 finden: 7 ist nun um 2, und 8 um 3 größer als 5; man richte also in der einen Hand 2, und in der anderen 3 Finger in die Höhe, diese aufgerichteten 5 Finger, bedeuten 5

Zehner, oder 50: die Zahl der übrigen niedergedrückten Finger ist in der einen Hand 3, und in der anderen 2, diese zwey Zahlen miteinander multipliciret, geben 2 mal 3 ist 6; und endlich diese 6 zu den vorigen 50 in Gedanken addirt geben 56 für das Produkt 7 mal 8.

28. Bey der Multiplikation der Zahlen beobachte man folgende Regeln.

I. Man schreibe den kleineren Faktor unter den größeren, wie in der Subtraktion, und ziehe einen Querstrich darunter; oder man schreibe beyde Faktoren in einer Linie, und setze das Multiplikationszeichen dazwischen.

II. Dann multiplicire man mit dem kleineren Faktor, wenn er nur aus einer Ziffer besteht, alle Einheiten, Zehner, Hunderter, u. s. w. des größeren Faktors; jedes Produkt, wenn es nur aus einer Ziffer besteht, schreibe man unter die gehörige Stelle: besteht aber das Produkt aus zwey Ziffern, so wird nur die minder rechtsstehende, wenn sie auch nur ein 0 wäre, angesetzt, und die größere Ziffer zu dem Produkte der folgenden Stelle in Gedanken addirt. Z. B. 1 mal 3 ist 3; 3 mal 2, oder 2 mal 3 sind 6; 3 mal 3 sind 9; 2 mal 3 sind 6; 3 mal 8 sind 24.

$$\begin{array}{r} 82321 \\ 3 \\ \hline 246963 \end{array}$$

Imgleichen 7 mal 9 sind 63, das ist 3 Einheiten und 6 Zehner; die 3 Einheiten werden angesetzt, und die 6 Zehner indessen in Gedanken behalten; dann sagt man: 7 mal 4 (Zehner) oder 4 mal 7 sind 28 (Zehner) und die vorigen 6 dazu addiret sind 34 (Zehner) oder 4 Zehner, und 3 Hunderter; die 4 Zehner werden angesetzt, und 3 zum folgenden Produkte der Hunderter addirt, indem man sagt, 7 mal 8 sind 56, und 3 sind 59; 9 werden angesetzt, und 5 zum folgenden Produkte addiret, 6 mal 7 sind 42, und 5 sind 47.

$$\begin{array}{r} 6849 \\ 7 \\ \hline 47943 \end{array}$$

III. Besteht auch der kleinere Faktor aus mehr Ziffern, so multiplicire man mit jeder Ziffer dieses Faktors den ganzen größeren Faktor, jedes Partialprodukt aber rücke man so weit

gegen

gegen der Linken, daß seine erste Ziffer rechts gerade unter die nämliche Ziffer des unteren Faktors zu stehen kömmt, aus der dieses Partialprodukt entstanden ist, und addire endlich alle diese Partialprodukte zusammen, so wird die Summe das wahre Hauptprodukt geben; als:

7496	Faktoren	6843	3452
45		143	346
37480	Partial-	20529	20712
29984	produkte	27372	13808
		6843	10356
337320	Hauptprodukt	978549	1194393

IV. Giebt es bey dem oberen Faktor in der Mitte Nullen, so setze man in dem Produkte auch an die gehörige Stelle eine Nulle, wenn von dem vorhergehenden Produkte nichts übriges geblieben, weil jede Zahl mit 0 multiplicirt 0 zum Produkte giebt. Giebt es bey dem unteren Faktor in der Mitte Nullen, so multiplicire man nur mit den bedeutlichen Ziffern, und rücke jedes Partialprodukt gehörig hineinwärts. Haben endlich einer, oder alle zwey Faktoren am Ende Nullen, so unterschreibe man nur die bedeutlichen Ziffern der zwey Faktoren gehörig untereinander, und verrichte die Multiplikation mit selben, als wenn keine Nullen am Ende wären, und füge endlich zu dem Hauptprodukte alle die Nullen, die in beyden Faktoren am Ende sich befinden; als:

800402	3045	360	27
34	2003	3200	900
3201608	9135	72	24300
2401206	6090	108	
27213668	6099135	1152000	

V. Besteht ein Faktor aus 1 mit etwelchen angehängten Nullen, so findet man das Produkt, wenn man die Nullen zu dem anderen Faktor hinzufügt. So ist das Produkt 47.100 = 4700, weil die Einheit nichts multipliciret, das ist die Gestalt der Ziffern nicht verändert; 47 multiplicirt mit 1 bleibt immer 47.

VI. Sind endlich ungleichnamige Größen, die doch auf eine gleiche Gattung gebracht werden können, zu multipliciren, so findet man ihr Produkt, wenn man die Größen von der höheren Gattung auf die kleinste gegebene Gattung bringt, und sodann diese Zahlen multipliciret; z. B. es sollen 2 St. 10 M. 40 Sek. mit 20 multipliciret werden; nun sind 2 St. = 2.3600 = 7200 Sek., und 10 M. = 10.60 = 600 Sek. folglich sind 2 St. 10 M. 40 Sek. = 7200 + 600 + 40 = 7840 Sek. und diese mit 20 multipliciret geben 156800 Sek. zum Produkte. Imgleichen es sollen 7°, 3′ mit 2°, 5′ multipliciret werden; (es ist gewöhnlich, daß man Klafter mit (°) Schuhe mit (′) Zolle mit (″) Linien mit (‴) und Punkte mit (⁗) bezeichnet; so ist 8°, 3′, 9″, 11‴, 10⁗ = 8 Klafter, 3 Schuhe, 9 Zolle, 11 Linien, 10 Punkten) nun sind 7°, 3′ = 45′; und 2°, 5′ = 17′; folglich ist ihr Produkt = 45.17 = 765; wie viel Stunden, und Minuten obige 156800 Sek. wie viel Klafter, Schuhe, und Zolle die darauf folgende Zahl 765 gebe, wird in der Division gesagt werden, gleichwie die Probe der Multiplikation erst bey der Division kann vorgetragen werden. Indessen kann man, wenn man bey einer Multiplikation eingeschlichene Fehler besorget, selbe noch einmal wiederholen. Das Produkt in dem vorigen Beyspiel findet man auch also:

40 Sek. multipliciret mit 20 geben 800 Sek. oder 13 M. und 20 Sek. die 20 Sek. werden angesetzt, und 13 M. zum folgenden Produkte	2 St. 10 M. 40 Sek. 20 „ ――――――― 43 St. 33 M. 20 Sek.

addirt: 10 M. × mit 20 = 200 und 13 sind 213 M.

oder

oder 3 St. 33 M. und endlich 2 St. $\times$ mit 20 $=$ 40 und 3 sind 43 Stunden. Einige Beyspiele zur Uebung.

Man soll die Brustwehre einer Schanze mit Würsten bekleiden; in der Länge braucht man deren 86, und nach der Höhe 5, wie viel braucht man deren in allen? Antw. 86.5. Es soll die Seite eines Hausdaches mit Ziegeln gedecket werden; nach der Höhe braucht man deren 95, und nach der Länge 258; wie viel für die ganze Seite? Antw. 258.95 $897^{\circ}, 4', 0'' 7''', 5''''$ wie viel machen sie Punkten. Wie oft hat die Pulsader des Mathusalem geschlagen, der 969 Jahre durchgelebet, wenn man jedes Jahr von 365 Tagen, 5 Stunden, 49 Minuten, und die Anzahl der Pulsschläge in einer Minute 65 annimmt?

29. Bey der Multiplikation der algebraischen Größen schreibe man den einen Faktor unter den anderen, oder man schließe sie in Klammern ein, und setze das Multiplikationszeichen dazwischen; dann multiplicire man mit jedem Gliede des einen Faktors alle Glieder des anderen Faktors nach folgenden Regeln.

I. Gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt; $+a . +b = +ab$; $-a . -b = +ab$; $+a . -b$ oder $-a . +b = -ab$.

II. Die Coefficienten werden miteinander multipliciret; $7a . 12b = 84ab$.

III. Die in beyden zu multiplicirenden Gliedern verschiedenen Buchstaben werden ohne Zeichen in alphabetischer Ordnung mit ihren Exponenten aneinander gefügt; $2ay . -6bx = -12abxy$; $3a^2x . 4c^md = 12a^2c^mdx$.

IV. Der Buchstab, der in beyden zu multiplicirenden Gliedern angetroffen wird, soll nur einmal geschrieben, und seine Exponenten algebraisch addiret werden; $a^3b . 2ac^3 = 2a^4bc^3$; $-3a^{-2}b^m . -6a^3b^{-n}c^2 = 18ab^{m-n}c^2$.

V. Wenn sich in dem Produkte gleichnamige Glieder befinden, so reducire man selbe. Beyspiele:

I.

I. $(3a^2 - 2ax + x^2).(2a - 3x) = 6a^3 - 4a^2x + 2ax^2 - 9a^2x + 6ax^2 - 3x^3 = 6a^3 - 13a^2x + 8ax^2 - 3x^3$.

II. $(a^m + b^x - 2c^n).(2a^m - 3b) = 2a^{2m} + 2a^m b^x - 4a^m c^n - 3a^m b - 3b^{x+1} + 6bc^n$.

III. $(2a^{3-2m}bc^{m-2} - 5a^{-2}b^{m+1}c^{-1})(3a^{4m-5}b^{2m}c^{3-4m} - 6) = 6a^{2m-2}b^{2m+1}c^{1-3m} - 15a^{4m-7}b^{3m+1}c^{2-4m} - 12a^{3-2m}bc^{m-2} + 30a^{-2}b^{m+1}c^{-1}$.

30. Um den Grund einzusehen, warum + mit — multipliciret im Produkte — gebe, so sey $3a = 5a - 2a$ mit $4b$ zu multipliciren, so muß das Produkt $12ab = 20ab - 8ab$ seyn; denn wollte man bey dem zweyten Gliede des Produkts + und nicht — $8ab$ setzen, so wäre $20ab + 8ab$ keineswegs $12ab$ gleich, welches doch vermög Grundsatz IV. seyn muß; es ist also $-2ab$ multiplicirt mit $+4b = -8ab$. Eben so leicht ist es einzusehen, daß — multiplicirt mit — im Produkte + gebe; denn es sey wieder $3a = 5a - 2a$ mit $-4b$ zu multipliciren, so ist vermög dem vorhergehenden das Produkt $-12ab = -\overset{20}{\cancel{12}}ab + 8ab$: wollte man hier im zweyten Gliede des Produkts nicht + sondern — $8ab$ setzen, so wäre $-20ab - 8ab$ unmöglich gleich $-12ab$, welches doch vermög eben diesem Grundsatze seyn muß. Es ist also $-2a.-4b = +8ab$; nämlich gleiche Zeichen geben ein positives, ungleiche ein negatives Produkt. Die zweyte und dritte Regel sind für sich deutlich genug. Um den Grund der 4ten Regel einzusehen erinnere man sich nur, daß a^3 z. B. nichts anderes sey, als aaa, und a^2 nichts anders als aa, es ist also $a^3.a^2 = aaaaa$, oder $a^3.a^2 = a\ (3 + 2)$ mal geschrieben, nämlich $a^3.a^2 = a^5 = a^{3+2}$; eben so ist $a^3.a^4 = a^{3+4} = a^7$; es ist also auch $a^m.a^n = a\ (m + n)$ mal geschrieben, nämlich $a^m.a^n = a^{m+n}$.

Von der Division.

31. **Dividiren** heißt untersuchen, wie oft eine Größe in einer anderen enthalten sey, oder auch eine Größe durch die andere dividiren, heißt die erste Größe in so viel gleiche Theile theilen, als die andere Einheiten in sich enthält, z. B. 18 durch 6 dividiren heißt 18 in 6 gleiche Theile theilen. Die Größe welche getheilet wird, heißt der **Dividendus**, die Größe, durch welche der Dividendus getheilet werden soll, heißt der **Divisor**, und dasjenige, was bey diesem Verfahren zum Vorschein kömmt, nämlich diejenige Größe, welche angezeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten sey, nennt man den **Quotienten**; so ist in dem angeführten Beyspiele 18 der Dividendus, 6 der Divisor, und 3 der Quotient, weil 6 in 18 dreymal enthalten ist.

32. Wenn eine Zahl durch eine andere kleinere Zahl zu dividiren ist, welche nur aus einer Ziffer besteht, so beobachte man folgende Regeln.

I. Man schreibe den Dividendus, und dann den Divisor, setze das Divisionszeichen (:) dazwischen, und schreibe auch das Zeichen (=) nach dem Divisor hin, nach welchem der Quotient zu stehen kömmt; z. B. $848 : 4 = 212$, oder man schreibe es auch also $\frac{848}{4} = 212$.

II. Dann untersuche man, wie oft der Divisor in der ersten Ziffer, oder wenn diese kleiner ist, als der Divisor, wie oft er in den ersten zwey Ziffern des Dividendus enthalten sey: man pflegt zu sagen 4 in 8 geht 2 mal; diese 2 schreibe man nach dem Zeichen (=) für die erste Ziffer des Quotienten hin; mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor, das Produkt schreibe man unter die Ziffern des Dividendus, in die man dividiret hat, und ziehe es davon ab: man sagt nämlich 2 mal 4 sind 8, 8 von 8 bleibt nichts. Bey der zweyten Ziffer des Dividendus verfährt man eben so: 4 in 4 geht 1 mal (1 wird in dem Quotienten

tienten für die zweyte Ziffer angesetzt) 1 mal 4 sind 4; 4 von 4 bleibt nichts: ferner 4 in 8 geht 2 mal, u. s. w.

III. Bleibt bey der Subtraktion ein Rest übrig, der doch kleiner ist als der Divisor (würde er etwann größer ausfallen, so ist es ein Zeichen, daß man den Quotienten zu klein angenommen habe, man muß also dafür eine größere, und doch eine solche Ziffer annehmen, daß ihr Produkt in den Divisor von den gehörigen Ziffern des Dividendus abgezogen werden könne) bleibt also ein Rest übrig, so setze man zu diesem Reste die folgende Ziffer des Dividendus hinzu, bezeichne diese Ziffer in dem Dividendus mit einem Striche, und dividire sodann mit dem Divisor in diese Zahl, den Quotienten setze man an die gehörige Stelle, multiplicire damit den Divisor, das Produkt ziehe man von den Ziffern ab, in die man dividiret hat; zu dem Reste setze man wieder die folgende Ziffer des Dividendus herab, u. s. w. Bleibt endlich am Ende der Division noch ein Rest übrig, so setze man ihn nach dem Quotienten, ziehe einen Querstrich, und schreibe den Divisor darunter; dieß nennt man einen Bruch, und zeiget an, daß der Dividendus durch den Divisor nicht genau getheilet werden könne; z. B. man solle 5849 fl. unter sechs Personen theilen, so bekommt eine jede 974 ganze, und fünf sechste Theile eines Guldens.

$$
\begin{array}{l}
584'9' : 6 = 974\tfrac{5}{6} \\
\underline{54} \\
\;\;44 \\
\;\;\underline{42} \\
\;\;\;\;29 \\
\;\;\;\;\underline{24} \\
\;\;\;\;\;\;5
\end{array}
$$

IV. Wenn der Rest mit der folgenden Ziffer des Dividendus vermehret kleiner ist, als der Divisor, so setze man in dem Quotienten an die gehörige Stelle eine Nulle, und nehme sodann die folgende Ziffer des Dividendus herab; ist nun diese Zahl noch immer kleiner, als der Divisor, so setze man wieder in dem Quotienten eine Nulle, ist sie aber grösser, oder doch gleich, so dividire man wie oben z. B.

8 in 8 geht 1mal, 1mal 8 sind 8, 8 von 8 bleibt nichts; 8 in 5 geht 0mal, 8 in 56 geht 7mal, u. s. w. Bleibt endlich kein Rest übrig, und die folgenden Ziffer des Dividendus sind blosse Nullen, so setze man sie alle in den Quotienten, so viele deren in dem Dividendus vorhanden sind; z. B. 452400 : 6 = 75400.

```
85'6' : 8 = 107
8| |
----
 56
 56
----
  0
```

Wenn der Divisor aus mehreren Ziffern besteht, so merke man noch folgendes:

I. Man untersuche, wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer des Dividendus, oder auch, wie oft sie in den ersten zweyen Ziffern enthalten sey, wenn die erste allein zu klein seyn sollte: diesen Quotienten schreibe man nach dem Zeichen hin; dann multiplicire man mit demselben den ganzen Divisor, das Produkt schreibe man gehörig unter die Ziffern des Dividendus, und ziehe es davon ab; zu dem Reste setze man die folgende Ziffer herab, und dividire wieder mit der ersten Ziffer des Divisors u. s. w. bis keine Ziffer mehr in dem Dividendus übrig sey.

II. Eräugnet sich nun, daß kein Rest übrig bleibt, oder auch, daß der mit der folgenden Ziffer vermehrte Rest noch immer kleiner sey, als der Divisor, so setze man, so oft sich dieses eräugnet, in dem Quotienten an die gehörige Stelle eine Nulle. Geschieht nun dieses bey der letzten Ziffer des Dividendus, so setze man in dem Quotienten die Nulle an, und füge darnach den nämlichen Rest als einen Bruch hinzu; z. B.

5 in 43 geht 8 mal; 8 mal 54 sind 432; 432 von 435 bleiben 3; 5 in 3, das ist 54 in 32 geht 0 mal u. s. w.

```
435'2'5'7' : 54 = 8060 17/54
432|||
-------
   325|
   324|
-------
     17
```

Jm-

Imgleichen

III. Ist der Divisor 10, 100, 1000, u. s. w. so schneide man rechts vom Dividendus so viel Ziffern ab, als der Divisor Nullen hat, ziehe unter den abgeschnittenen Ziffern einen Querstrich, und schreibe den Divisor darunter, z. B. $78396 : 100 = 783\frac{96}{100}$; $42083 : 1000 = 42\frac{083}{1000} = 42\frac{83}{1000}$.

$$\begin{array}{l} 25246\acute{4}\acute{3} : 297 = 8500\frac{143}{297} \\ \underline{2376} \\ \;\;1486 \\ \;\;\underline{1485} \\ \;\;\;\;\;143 \end{array}$$

IV. Haben aber beyde Dividendus, und Divisor am Ende Nullen, so lasse man in beyden gleichviel Nullen weg, und dividire nur mit den übrigen Ziffern, so wird man das nämliche erhalten, als wenn man keine Nullen abgeschnitten hätte; z. B. $848000 : 400 = 8480 : 4 = 2120$.

V. Besteht der Dividendus aus mehr ungleichnamigen Zahlen, die doch auf eine gleiche Gattung gebracht werden können, so bringe man alle Zahlen auf die kleinste gegebene Gattung, und dividire diese Zahl durch den Divisor, so erhält man den Quotienten in der kleinsten gegebenen Gattung, den man wieder auf größere Benennungen bringen kann; z. B. $13^\circ, 5', 10''$ sollen in 24 Theile getheilet werden; nun sind $13^\circ = 13.72'' = 936''$; und $5' = 60''$; folglich $13^\circ, 5', 10'' : 24 = 1006'' : 24 = 41\frac{22}{24}$ Zoll $= 3', 5''\frac{22}{24}$, weil 12 Zolle einen Schuh ausmachen.

Beyspiele zur Uebung

I. 68640 kr. wie viel machen sie Gulden? Antw. sie machen $68640 : 60 = 1144$ fl.

II. 137856 Zeitsekunden, wie viel machen sie Stunden, und Minuten? Antw. da eine Stunde 3600 Sek. gleich ist, so sind 137856 Sek. $= 137856 : 3600 = 38$ Stunden, und 1056 Sek. nun dividire man auch diesen Rest mit 60, weil 60 Sek. auf eine Minute gerechnet werden, so sind diese 1056 Sek. $= 1056 : 60 = 17$ Minuten, 36 Sek. es sind also 137856 Sek. = 38 St. 17 M. 36 Sek.

III.

III. 785944 Zolle wie viel sind es Klafter, Schuhe, und Zolle? sie sind gleich 10915°, 5′, 4″, wenn man nämlich die gegebene Zahl mit 72, und den Rest mit 12 dividiret.

33. Die Probe einer gutgemachten Division ist die Multiplikation, wenn man nämlich den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, und zu dem Produkte den überbliebenen Rest addirt, so muß der Dividendus zum Vorschein kommen. Denn der Quotient zeiget mit seinen Einheiten an, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten sey, das ist, wie oft man jenen von diesem abziehen könne; wenn man ihn nun (den Divisor) wieder so oft addiret, als man ihn abgezogen hat, nämlich, wenn man ihn mit dem Quotienten multipliciret, so muß wieder der Dividendus zum Vorschein kommen; z. B. weil 6 in 18 dreymal enthalten ist, das ist 6 von 18 dreymal könne abgezogen werden, so muß, wenn man 6 dreymal zu sich selbst addirt, nämlich, wenn man den Divisor 6 mit dem Quotienten 3 multipliciret, wieder der Dividendus 18 zum Vorschein kommen.

34. Und die Probe einer gutgemachten Multiplikation ist die Division, wenn man nämlich das Produkt durch den einen Faktor dividiret, so wird der Quotient der andere Faktor seyn. Denn multipliciren heißt nichts anders, als den einen Faktor so oft zu sich selbst addiren, als der andere Faktor die Einheit in sich enthält; wenn man also wieder den einem Faktor von dem Produkte so oft abzieht, als der andere Faktor die Einheit in sich enthält, das ist, wenn man das Produkt durch den einen Faktor dividiret, so wird der Quotient der andere Faktor seyn; z. B. $3 \cdot 8 = 24$, und $24 : 8 = 3$, oder $24 : 3 = 8$. Damit nun ein Anfänger die Division durch die Uebung sich geläufig mache, so schreibe er sich öfters 2 Zahlen nach Belieben auf, multiplicire sie untereinander, und dividire das Produkt durch den einen Faktor: denn auf diese Art wird er bey der Division alsogleich die Ziffern wissen, die im Quotienten anzusetzen sind.

35. Wenn man mit einer nämlichen Zahl mehrere Zahlen zu dividiren, oder auch zu multipliciren hätte, so kann man die Arbeit um ein ziemliches erleichtern, wenn man von dieser Zahl die einfachen Produkte bis 9 in eine kleine Tafel zusammensetzt: z. B. wenn mit 864 mehrere Zahlen zu dividiren, oder zu multipliciren wären, so verfertigt man folgende kleine Tafel, wenn man nämlich diese Zahl mit 2, 3, 4, u. s. w. multipliciret.

1	864
2	1728
3	2592
4	3456
5	4320
6	5184
7	6048
8	6912
9	7776

Man findet auch diese Produkte durch die blosse Addition, wenn man nämlich die gegebene Zahl zu sich selbst, zu dieser Summe wieder die nämliche Zahl u. s. w. addirt. Es sey nun 2667168 eine aus den Zahlen, welche durch 864 zu dividiren sind, so wird die Division auf folgende Art verrichtet.

$$
\begin{array}{r}
2667168 : 864 = 3087 \\
\underline{2592} \\
7516 \\
\underline{6912} \\
6048 \\
\underline{6048} \\
0
\end{array}
$$

Da das erstemal 2667 durch 864 zu dividiren sind, so suche man in der Tafel die nämliche Zahl, oder die nächst kleinere auf, wenn sie nicht genau gefunden wird, und setze die dazu gehörige einfache Ziffer in den Quotienten hin; das zu dieser Ziffer gehörige Produkt ziehe man von dem Dividendus ab, zu dem Reste setze man die folgende Ziffer herab, und sehe wieder nach, was für eine einfache Ziffer in der Tafel dieser Zahl entspricht; sind nun alle Produkte in der Tafel größer, als diese zu dividirende Zahl, so setze man in dem Quotienten eine Nulle an; u. s. w.

Imgleichen wenn mehrere Zahlen, worunter eine 6897 ist, mit 864 zu multipliciren wäre, so wird die Arbeit durch Hilfe dieser Tafel also verrichtet.

Es

Es werden nämlich die zu 7, 9, 8, und 6 zugehörigen Produkte der Zahl 864 gehörig untereinander geschrieben, und zusammen addiret.

$$\begin{array}{r} 864 \;.\; 6897 \\ \hline 6048 \\ 7776 \\ 6912 \\ 5184 \\ \hline = 5959008 \end{array}$$

36. Wir haben schon gesagt, daß die Faktoren von einer gegebenen Zahl alle diejenigen Zahlen sind, durch die sich die vorgegebene Zahl genau theilen läßt. Und diejenigen Zahlen, die keine Faktoren außer der Einheit haben, werden **Primzahlen** genennt; dergleichen sind folgende: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 u. s. w. die übrigen Primzahlen bis 10000 findet man in der am Ende beygefügten **Tafel der Primzahlen**. Es ist nicht gar leicht alsogleich zu untersuchen, ob eine vorgegebene Zahl eine Primzahl sey, oder ob sie Faktoren habe; folgende Bemerkungen können dieses Untersuchen in einigen Fällen erleichtern.

I. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer rechts durch 2 theilbar ist, sind durch 2 theilbar; man nennt dergleichen Zahlen die **geraden** Zahlen (numeros pares); und jene Zahlen, deren letzte Ziffer rechts durch 2 nicht theilbar ist, werden **ungerade** Zahlen (numeri impares) genennt.

II. Alle Zahlen, deren Ziffern zusammen addirt eine durch 3 theilbare Summe geben, sind durch 3 theilbar; z. B. da bey der Zahl 4281 die Summe der Ziffern $4 + 2 + 8 + 1 = 15$ eine durch 3 theilbare Zahl ist, so ist auch 4281 durch 3 theilbar, es ist nämlich $4281 : 3 = 1427$. Man kann bey der Addition der Ziffern auch diejenigen hinweglassen, die durch 3 theilbar sind, und nur die übrigen Ziffern addiren; auf diese Art wird das Untersuchen um etwas erleichtert; z. B. da bey der Zahl 29163927 die Summe der nicht durch 3 theilbaren Ziffern $2 + 1 + 2 + 7 = 12$, nämlich eine durch 3 theilbare Zahl ist, so ist auch 29163927 durch 3 theilbar.

III. Wenn die zwey letzten Ziffern einer Zahl durch 4 theilbar sind, so ist auch die Zahl selbst durch 4 theilbar; z. B. bey der Zahl 317572 sind die zwey letzten Ziffern 72 durch 4 theilbar, es ist also auch die Zahl selbst durch 4 theilbar. Imgleichen ist 11108 durch 4 theilbar, weil die zwey letzten Ziffern 08 durch 4 genau sich dividiren lassen.

IV. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl entweder 5 oder 0 ist, so ist die ganze Zahl durch 5 theilbar.

V. Wenn eine Zahl durch 2 und 3, das ist, wenn eine gerade Zahl durch 3 theilbar ist, so ist sie auch durch 2 . 3 nämlich durch 6 theilbar.

VI. Wenn die drey letzten Ziffern einer Zahl sich durch 8 theilen lassen, so ist die ganze Zahl durch 8 theilbar.

VII. Wenn alle Ziffern einer Zahl zusammen addiret eine durch 9 theilbare Summe geben, so ist die ganze Zahl durch 9 theilbar.

VIII. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl eine Nulle ist, so läßt sie sich durch 10 dividiren.

IX. Man addire die Ziffern zusammen, die an der ersten, dritten, fünften Stelle, u. s. w. stehen, dann addire man auch die Ziffern der vorgegebenen Zahl, die an der 2ten, 4ten, 6ten Stelle stehen, und ziehe die eine Summe von der anderen ab; ist nun die Differenz entweder $= 0$, oder eine durch 11 theilbare Zahl, so ist die ganze Zahl durch 11 theilbar; z. B. da bey der Zahl 80421 die Differenz $(8 + 4 + 1) - (0 + 2) = 11$ ist, so ist 80421 durch 11 theilbar. Imgleichen ist auch 1001 durch 11 theilbar, weil $(1 + 0) - (0 + 1) = 0$ ist.

X. Wenn eine vorgegebene Zahl durch 3 und 4 theilbar ist, so ist sie auch durch $3 . 4 = 12$ theilbar; imgleichen wenn eine vorgegebene Zahl durch 2, 3, und 11 theilbar ist, so ist sie auch durch $2 . 3 . 11 = 66$ theilbar u. s. w. ob endlich eine gegebene Zahl durch 7, 13, 17 u. s. w. sich genau theilen lasse, kann man nicht anders leicht entscheiden, als wenn man die Division wirklich versuchet.

37. Es ist zuweilen nothwendig von einer gegebenen Zahl alle Faktoren aufzusuchen; diese findet man, wenn man die gegebene Zahl mit der kleinsten Zahl, durch die sie genau theilbar ist, dividiret, und diesen Faktor seitwärts anmerket; dann dividiret man wieder den Quotienten mit der möglichst kleinsten Zahl, schreibet diesen Faktor unter den anderen, und multiplicieret alle vorhergehenden schon gefundenen Faktoren mit demselben, und dieß setzet man so lange fort, bis man zum Quotienten eine Einheit erhält. Z. B. wenn von 330 alle Faktoren zu suchen wären, so sieht die Arbeit also aus: nämlich 330 wird durch 2 dividiret, dieser Faktor wird seitwärts angesetzet, und der Quotient 165 unter die gegebene Zahl geschrieben; dann wird dieser Quotient durch die kleinste Zahl 3 dividiret, und dieser Faktor unter den anderen geschrieben, und mit selben multipliciret, der Quotient aber 55 unter den vorigen gesetzet, u. s. w. und nun sind die Faktoren von der Zahl 330 folgende Zahlen 1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330.

330	2
165	3, 6
55	5, 10, 15, 30
11	11, 22, 33, 66, 55
1	110, 165, 330

Imgleichen: wenn von 168 alle Faktoren zusuchen sind, so findet man folgende Zahlen, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168.

168	2
84	2, 4
42	2, 8
21	3, 6, 12, 24
7	7, 14, 21, 28, 42
1	56, 84, 168

Will man hingegen nur jene Faktoren haben, aus deren Multiplikation die gegebene Zahl entstanden ist, so nehme man nur die Faktoren, durch die man die gegebene Zahl, und dann die Quotienten dividiret hat, und lasse die Produkte aus jedem nachfolgenden Faktor in die vorhergehenden hinweg; so ist $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. und $168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$; eben so wird man finden, daß $1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ sey.

38. Bey der Division der algebraischen Größen beobachte man folgendes: wenn entweder beyde, Dividendus und Divisor, oder doch einer aus beyden nur aus einem Gliede besteht, so schreibe man den Divisor unter den Dividendus, ziehe einen Querstrich dazwischen, und kürze diesen Ausdruck nach Anweisung der folgenden Vorlesung ab, da man die Faktoren, die in beyden (Dividendus, und Divisor) gemeinschaftlich angetroffen werden, gänzlich hinweg läßt. Z. B.

$$a^2bc^3 : ab^2c^3 = \frac{a^2\,bc^3}{ab^2\,c^3} = \frac{abc^3\,.\,a}{abc^3\,.\,b} = \frac{a}{b}$$

$$a^2x - ax^2 : 2axy = \frac{a^2x - ax^2}{2axy} = \frac{ax\,.\,(a - x)}{ax\,.\,2y} =$$

$\frac{a - x}{2y}$; und merke dabey nur, daß gleiche Zeichen einen positiven, ungleiche einen negativen Quotienten zum Vorschein bringen. $+ ab : + b = + a$, oder $- ab : - b = + a$; $- a : - c = + \frac{a}{c}$; $- ab : + b$, oder $+ ab : - b = - a$; $- ab : + cx$, oder $+ ab : - cx = - \frac{b}{cx}$; denn der Quotient mit dem Divisor multiplicirt muß wieder den Dividendus mit seinem gehörigen Zeichen zum Vorschein bringen.

Wenn aber beyde Dividendus und Divisor zusammengesetzte Größen sind, so kann die Division entweder auf die itzt angeführte Art, oder zuweilen auch nach folgenden Regeln verrichtet werden.

I. Mit einem Gliede des Divisors dividire man ein Glied des Dividendus; mit diesem Quotienten multiplicire man den ganzen Divisor, dieses Produkt ziehe man von dem Dividendus algebraisch ab; den Rest dividire man wieder mit einem Gliede des Divisors, den Quotienten füge man zu dem vorigen mit seinem Zeichen hinzu, mit diesem Gliede multiplicire man wieder den ganzen Divisor u. s. w. Nur muß in diesem Falle das Glied des Dividendus alle Buchstaben desjenigen Gliedes des Divisors enthalten, mit welchem man die Division vornimmt, weil sonst die Division in ganzen Größen nicht statt finden kann.

II. Der Coefficient des Dividendus wird durch den Coefficienten des Divisors getheilet; $28ax : 7a = 4x$.

III. Der Buchstab, der in beyden angetroffen wird, solle im Quotienten angesetzet, und der Exponent des Divisors vom Exponenten des Dividendus algebraisch abgezogen werden.
$-12a^3b^2 : -4a^2b = +3a^{3-2}b^{2-1} = 3ab$; $3a^{-1}x^2 : a^{-2}x^{-1} = 3a^{-1+2}x^{2+1} = 3ax^3$.

IV. Und der Buchstab, der allein in dem zu dividirenden Gliede angetroffen wird, solle mit seinem Exponenten in dem Quotienten angesetzet werden. $6a^mc^3x : 3a^nc^3 = 2a^{m-n}x$.

Beyspiele.

I. $(9b^2x^5 - 3b^2cx^4 + b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3) : (-3b^2x^2 + b^2cx) = -3x^3 + cx$.

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 9b^2x^5 \mp 3b^2cx^4} \\
\qquad -3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 \\
\qquad \underline{\mp 3b^2cx^3 \pm b^2c^2x^2} \\
\qquad\qquad \varnothing
\end{array}$$

In diesem Beyspiele sagt man nämlich $-3b^2x^2$ wird in $9b^2x^5$, als dem ersten Gliede des Dividendus, $-3x^3$ mal enthalten; mit diesem ersten Gliede des Quotienten wird der ganze Divisor multipliciret, das Produkt von dem Dividendus abgezogen, und der Rest wieder mit $-3b^2x^2$ dividiret, u. s. w.

II. $(12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4) : (3a^2b - 6abc + 3bc^2) = 4a^2 - 5c^2$

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 12a^4b \mp 24a^3bc \pm 12a^2bc^2} \\
\qquad -15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\
\qquad \underline{\mp 15a^2bc^2 \pm 30abc^3 \mp 15bc^4} \\
\qquad\qquad \varnothing
\end{array}$$

$$\text{III. } (a^3 - b^3) : a - b = a^2 + ab + b^2$$
$$\begin{array}{l} \pm a^3 \mp a^2b \\ \hline \quad + a^2b - b^3 \\ \quad \pm a^2b \mp ab^2 \\ \hline \qquad + ab^2 - b^3 \\ \qquad \pm ab^2 \mp b^3 \\ \hline \qquad\quad \varnothing \end{array}$$

Mehrere Beyspiele zur Uebung kann sich ein jeder selbst aufsetzen; denn man nehme nur zwey algebraische Größen nach belieben an, multiplicire sie miteinander, und dividire das Produkt durch den einen Faktor, so muß der Quotient der andere Faktor seyn.

39. Die Zerlegung der algebraischen Größen in Faktoren kann am besten durch eine aufmerksame Uebung erlernet werden: so ist, z. B.

$2abx - 3dgx = x.(2ab - 3dg)$.
$6ab - 12bc - 3b = 3b.(2a - 4c - 1)$.
$ax + x = x\ (a + 1)$.
$a^2x - 2abx + b^2x = x.(a - b)(a - b) = x.(a - b)^2$.
$a^2 - x^2 = (a + x).(a - x); \ldots x^2 - 1 = (x + 1).(x - 1)$.
$a^4 - x^4 = (a^2 + x^2).(a^2 - x^2) = (a^2 + x^2).(a + x).$
$\quad (a - x)$.
$- a^3x^2 + a^4x + ax^4 - x^5 = x.(a - x).(a + x).$
$\quad (a^2 - ax + x^2)$.
$4a^2bc - 12a^3c^2 + 5axy - 10ax^2y^3 - 8a^2c - 15a^2xy$
$\quad = 4a^2c\ (b - 3ac - 2) + 5axy\ (1 - 2xy^2 - 3a)$.
$12x^2 - 15xy + 3y^2 = (y - x).(3y - 12x)$.
$m^3 - 3m^2 + 2m = m.(m - 1).(m - 2)$.
$m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m = m.m - 1.m - 2.m - 3$.
$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a + b + c).$
$\quad (a + c - b).(a + b - c).(b + c - a) = (a + b + c).$
$\quad (a + b + c - 2a).(a + b + c - 2b).(a + b + c - 2c)$.

Zweyte

Zweyte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit gebrochenen Größen.

Von den Eigenschaften der Brüche.

40. Ein Bruch ist eine Größe, welche einen, oder mehrere gleiche Theile eines Ganzen anzeigt; z. B. 7 kr. sind ein Bruch in Rücksicht eines Guldens, weil sie sieben sechzigste Theile eines Guldens anzeigen.

41. Jeder Theil eines Ganzen kann in Rücksicht seiner Theile wieder als ein Ganzes betrachtet werden, folglich ist es klar, daß es auch gebrochene Brüche oder Brüche von Brüchen gebe; z. B. ein Schuh ist in Rücksicht der Klafter ein Bruch, in Rücksicht der Zolle hingegen kann ein Schuh als ein Ganzes angesehen werden; es sind also 1 oder 2 Zolle ein Bruch eines Schuhes, und folglich ein Bruch eines Bruches, oder ein gebrochener Bruch in Rücksicht der Klafter.

42. Brüche auszudrücken werden zwey durch einen Querstrich abgesönderte Größen erfordert, deren die unter die Gattung, und die obere die Anzahl der Theile anzeiget; diese wird **Zähler**, und jene **Nenner** geheißen. Z. B. $\frac{7}{8}$ (sieben Achttheile, oder sieben Achtel) zeiget an, daß ein Ganzes in 8 Theile zu zertheilen sey, und daß man 7 solche Theile nehmen solle. Imgleichen $\frac{13}{257}$ heißt dreyzehn 257tel oder 13 getheilt durch 257. $\frac{ax - x^2}{a + x}$ heißt $ax - x^2$ getheilt durch $a + x$; es ist in diesem Beyspiele $ax - x^2$ der Zähler, und $a + x$ der Nenner.

43. Ist nun bey einem Bruche der Zähler dem Nenner gleich, so ist es ein Zeichen, daß man alle Theile des Ganzen, oder ein Ganzes nehmen müße; folglich sind solche Brüche einer Einheit gleich z. B. $\frac{60}{60}$ fl. = 1 fl.; $\frac{12}{12}$ Schuh = 1 Schuh, $\frac{4}{4}$ Zoll = 1 Zoll u. s. w. Ist der Zähler größer als der Nenner, so zeigt ein solcher Bruch mehr Theile an, als ein Ganzes von dieser Gattung in sich enthält; man nennet sie uneigentliche, oder **Afterbrüche**: so ist z. B. $\frac{11}{6}$ Klafter $= 11' = 1°, 5'$ ein Afterbruch; ist endlich der Zähler kleiner als der Nenner, so zeigt der Bruch nicht alle, sondern nur einige Theile des Ganzen an, und diese sind **eigentliche**, oder wahre Brüche. Solche sind alle Reste der Divisionen, z. B. $\frac{3}{4}$ fl. zeiget an, daß man 3 fl. in 4 Theile zertheilen müße: was nun bey dieser Division zum Vorschein kömmt, ist der **Werth** des Bruches; in unserem Beyspiele ist $\frac{3}{4}$ fl. = 45 kr. denn 3 fl. $= 3 \,.\, 60$ kr. $= 180$ kr. folglich $\frac{3}{4}$ fl., nämlich $\frac{3 \text{ fl.}}{4} = \frac{180}{4}$ kr. = 45 kr. Es ist also der Werth eines Bruches der Quotient, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entspringt; da nun bey eigentlichen Brüchen der Zähler kleiner als der Nenner ist, so ist es offenbar, daß man jenen in Einheiten kleinerer Gattung auflösen müße, um die Division vornehmen, und den Werth des Bruches bestimmen zu können.

So ist $\frac{7}{15}$ fl. $= \frac{7 \text{fl.}}{15} = \frac{7 \,.\, 60 \text{ kr.}}{15} = \frac{420 \text{ kr.}}{15} = 28$ kr.

$\frac{11}{24}$ fl. $= \frac{11 \,.\, 60}{24}$ kr. $= \frac{660}{24} = 27 \frac{12}{24}$ kr. $=$ 27 kr. 2 ₰.

$\frac{23}{96}$ Klaft. $= \frac{23 \,.\, 6'}{96} = \frac{138'}{96} = 1 \frac{42}{96}$ Schuh $= 1' + \frac{42 \,.\, 12''}{96} = 1' + \frac{504''}{96} = 1' + 5\frac{24}{96}$ Zoll $= 1' + 5''$

+

$+ \frac{24 . 12'''}{96} = 1' + 5'' + \frac{288'''}{96} = 1', 5'', 3'''$.

$\frac{3}{5}$ Klaft. $= \frac{18'}{5} = 3\frac{3}{5}$ Schuhe $= 3', \frac{3 . 12''}{5} = 3',$ $\frac{36''}{5} = 3', 7\frac{1}{5}$ Zoll $= 3', 7'', \frac{1 . 12'''}{5} = 3', 7'', 2\frac{2}{5}$ Linien $= 3', 7'', 2''', \frac{24''''}{5} = 3', 7'', 2''', 4''''$ und $\frac{4}{5}$ Punkt.

$\frac{31}{64}$ ℔ $= \frac{31 . 32}{264}$ Loth $= 15\frac{32}{64}$ Loth $= 15$ Loth $\frac{32 . 4}{64}$ Quintl $= 15$ Loth, 2 Quintl.

$\frac{2}{240}$ Stund $= \frac{2 . 60}{240}$ Minut. $= \frac{120}{240}$ Minuten $=$ $\frac{120 . 60}{240}$ Sek. $= 30$ Sekunden.

44. Wenn bey unverändertem Nenner eines Bruches der Zähler vermehret wird, so wird sein Werth vergrößert. Denn bleibt der Nenner unverändert, so bleibt die Gattung der Theile immer die nämliche; wird nun der Zähler vergrößert, so zeiget der Bruch immer mehr und mehr Theile der nämlichen Gattung von eben dem nämlichen Ganzen an; folglich wird sein Werth vergrößert: so ist, z. B.

$$\frac{3}{12} < \frac{7}{12} < \frac{11}{12}; \quad \frac{47}{100} < \frac{51}{100} \text{ u. s. w.}$$

45. Wenn bey unverändertem Zähler der Nenner vermehret wird, so wird der Werth des Bruches vermindert. Denn bleibt der Zähler unverändert, so zeigt der Bruch immer die nämliche Anzahl Theile eines Ganzen an, wird nun der Nenner vergrößert, so wird dieß nämliche Ganze in mehrere, und eben darum kleinere Theile getheilet; der Bruch zeigt also zwar

eine

eine nämliche Anzahl, allein kleinerer Theile an, wenn bey unverändertem Zähler der Nenner vermehret wird; es wird demnach sein Werth vermindert: so ist $\frac{5}{20}$ fl. $>$ $\frac{5}{60}$ fl. und überhaupt $\frac{2}{3} > \frac{2}{4} > \frac{2}{5} > \frac{2}{6} > \frac{2}{7}$ u. s. w.

46. Auf die nämliche Art kann man erweisen, daß der Werth des Bruchs vermindert werde, wenn bey unverändertem Nenner der Zähler verkleinert wird; daß hingegen der Werth des Bruchs vergrößert werde, wenn man bey unverändertem Zähler den Nenner vermindert: so ist $\frac{11}{12} > \frac{9}{12} > \frac{6}{12} > \frac{3}{12}$ und $\frac{7}{60} < \frac{7}{30} < \frac{7}{20} < \frac{7}{15} < \frac{7}{10}$, u. s. w.

47. Wenn man den Zähler und Nenner eines Bruchs mit einer nämlichen Größe multipliciret, so bleibt sein Werth unverändert: denn wird der Zähler vergrößert, so wird der Werth des Bruchs vermehret, wird der Nenner vergrößert, so wird der Werth vermindert, das ist, gar nicht geändert wird der Werth des Bruchs, wenn beyde (Zähler und Nenner) gleichviel vergrößert werden; nun aber werden sie nicht beyde gleichviel vergrößert, wenn man sie mit einer nämlichen Größe multipliciret? der Werth des Bruchs bleibt also ungeändert, wenn man den Zähler, und Nenner mit einer nämlichen Größe multipliciret: so ist $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$; $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} = \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{15}{30}$; $\frac{a}{x} = \frac{ac}{cx} = \frac{acm}{cmx}$.

48. Der Werth des Bruches bleibt auch ungeändert, wenn man den Zähler und Nenner durch eine nämliche Größe dividiret: denn wird der Zähler verkleinert, so wird der Werth des Bruches vermindert; wird der Nenner verkleinert, so wird der Werth vermehret; werden also beyde (Zähler und Nenner)

ver-

verkleinert, so wird der Werth vermindert, und vermehret, und zwar gleichviel vermindert, und gleichviel vermehret, das ist gar nicht geändert wird der Werth des Bruches, wenn man beyde gleichviel verkleinert; nun aber werden sie nicht beyde gleichviel verkleinert, wenn man sie durch eine nämliche Größe dividiret? der Werth des Bruchs bleibt also ungeändert, wenn man den Zähler und Nenner durch eine nämliche Größe dividiret.

So ist $\frac{72}{96} = \frac{72 : 6}{96 : 6} = \frac{12}{16} = \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$.

$$\frac{a^2x - x}{ax + x} = \frac{x\,.\,(a-1)\,.\,a+1}{x\,.\,a+1} = a - 1.$$

49. Wenn man nun einen gegebenen Bruch abkürzen, das ist, dergestalt verwandeln sollte, daß er ohne Veränderung seines Werthes einen kleineren Zähler und Nenner erhalte, so hat man nichts anderes zu thun, als den Zähler und Nenner durch eine nämliche Größe zu dividiren, die in beyden genau enthalten ist. Z. B. $\frac{140}{210} = \frac{14}{21} = \frac{14 : 7}{21 : 7} = \frac{2}{3}$; $\frac{168}{210} = \frac{168 : 42}{210 : 42} = \frac{4}{5}$; $\frac{65}{104} = \frac{65 : 13}{104 : 13} = \frac{5}{8}$; $\frac{45}{60} = \frac{3}{4}$; $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$; $\frac{187}{204} = \frac{187 : 17}{204 : 17} = \frac{11}{12}$.

$$\frac{30a^{-n+3}b}{60a^{-n}c^2} = \frac{30a^{-n+3}b : 30a^{-n}}{60a^{-n}c^2 : 30a^{-n}} = \frac{a^3b}{2c^2};\ \frac{-48a^{-n+1}c}{-60a^{-n}c^2} = \frac{48a^{-n+1}c : 12a^{-n}c}{60a^{-n}c^2 : 12a^{-n}c} = \frac{4a}{5c};\ \frac{6x^3 - 6x^2y + 2xy^2 - 2y^3}{12x^2 - 15xy + 3y^2}$$

$= \frac{6x^2 + 2y^2}{12x - 3y}$. wenn man nämlich Zähler und Nenner durch $x - y$ dividiret.

Man pflegt bey Abkürzung der Brüche den größten gemeinschaftlichen Faktor des Zählers, und Nenners auf folgende

Art

Art zu suchen: man dividirt den Nenner durch den Zähler, mit dem Reste dividirt man den Divisor, und so wird mit jedem nachfolgenden Reste der vorhergehende so lange dividiret, bis kein Rest, mehr übrig bleibt; diejenige Größe nun, oder derjenige Rest, mit dem man das letztemal genau dividiret hat, ist des Zählers, und Nenners größter gemeinschaftlicher Faktor z. B. um den größten gemeinschaftlichen Faktor von $\frac{65}{104}$ zu bestimmen, verfahre man also:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & & 2 & \\ 104 & : & 65 & : & 39 & : & 26 & : & 13 \\ \underline{65} & & \underline{39} & & \underline{26} & & \underline{26} & & \\ 39 & & 26 & & 13 & & 0 & & \end{array}$$

Nämlich 104 : 65 giebt 39 zum Reste; 65 : 39 giebt 26; 39 : 26 giebt 13, und endlich 26 : 13 giebt 0 zum Reste; 13 ist also von 104 und 65 der größte gemeinschaftliche Faktor, und in der That ist $\frac{65}{104} = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13}$; eben so findet man, daß bey dem Zähler und Nenner des Bruches $\frac{361}{1495}$ ausser der Einheit kein anderer gemeinschaftlicher Faktor statt habe, weil der größte gemeinschaftliche Faktor 1 ist.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 4 & & 7 & & 12 & & 1 & & 3 & \\ 1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : & 3 & : & 1 \\ \underline{1444} & & \underline{357} & & \underline{48} & & \underline{3} & & \underline{3} & & \\ 51 & & 4 & & 3 & & 1 & & 0 & & \end{array}$$

Dieser Bruch kann demnach nicht abgekürzet werden. In der Ausübung kömmt man mit der Abkürzung der Brüche am geschwindesten fort, wenn man in Zerlegung einer Größe in Fakto-

ren

ren sich eine Fertigkeit erworben hat; denn wenn man die Faktoren, die im Zähler und Nenner angetroffen werden, hinwegläßt, so ist die Abkürzung schon fertig. So ist $\frac{210}{1155} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{2}{11}$; $\frac{45}{180} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$; $\frac{a^2x^2 - x^4}{a^2x + ax^2} = \frac{x \cdot x \cdot (a+x) \cdot (a-x)}{a \cdot x \cdot (a+x)} = \frac{x \cdot a - x}{a} = \frac{ax - x^2}{a} = x - \frac{x^2}{a}$.

50. Wenn man verschiedene Brüche ohne Veränderung ihrer Werthe auf eine gleiche Benennung bringen, das ist selbe dergestalt verwandeln will, daß sie alle einen gemeinschaftlichen Nenner haben, so verfahre man also: man multiplicire jeden Zähler mit allen Nennern, nur mit dem seinigen nicht, das Produkt wird der neue Zähler seyn, und dieses wiederhole man bey jedem Bruche; dann multiplicire man auch alle Nenner zusammen, und dieses Produkt wird der gemeinschaftliche Nenner seyn. Daß bey diesem verfahren der Werth eines jeden Bruches ungeändert bleibe, erhellet daraus, weil der Zähler, und Nenner eines jeden Bruches mit den nämlichen Größen multipliciret wird (47).

Beyspiele $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, = \frac{140,\ 168,\ 105,\ 90}{210}$; $\frac{7}{8}, \frac{5}{12}, \frac{3}{10} = \frac{840,\ 400,\ 288}{960}$; $\frac{2a^3}{4c^2}, \frac{4}{5}, \frac{2a^{m+1}}{3a^{-n}} = \frac{30a^{3-n},\ 48a^{-n}c^2,\ 40a^{m+1}c^2}{60a^{-n}c^2}$.

Die Reduktion der Brüche auf einen gemeinschaftlichen Nenner wird geschwinder zu Stande gebracht, wenn man eine kleine Zahl in Gedanken aufsucht, die sich durch jeden Nenner ge-

genau theilen läßt; denn wenn man diese Zahl durch jeden Nenner dividiret, und den Quotienten mit jedem Zähler multipliciret, so werden diese Produkte die neuen Zähler, und die angeführte kleine Zahl der gemeinschaftliche Nenner seyn; so ist

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{11}{16}, \frac{5}{24} = \frac{32, 40, 30, 28, 33, 10,}{48}.$$

wenn man nämlich die Zahl 48 durch jeden Nenner dividiret, und den Quotienten mit jedem dazu gehörigen Zähler multipliciret.

Imgleichen $\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{9}, \frac{1}{18} = \frac{12, 15, 9, 14, 1}{18}$.

51. Die kleinste Zahl, die sich durch zwey gegebene Zahlen genau theilen läßt, findet man, wenn man die eine mit dem größten gemeinschaftlichen Faktor dividiret, und diesen Quotienten mit der anderen Zahl multipliciret. So ist von 16 und 12 die kleinste Zahl 48, die durch beyde theilbar ist, und man erhält diese, wenn man mit dem größten gemeinschaftlichen Faktor 4 die Zahl 12 dividiret, und den Quotienten 3 mit der anderen Zahl 16 multipliciret, oder wenn man 16 mit dem Faktor 4 dividiret, und den Quotienten 4 mit der Zahl 12 multipliciret.

Will man hingegen die kleinste Zahl bestimmen, die sich durch mehrere gegebene Zahlen genau theilen läßt, so suche man diese Zahl zu der ersten und zweyten gegebenen, dann suche man eine solche Zahl zu der schon gefundenen, und zu der dritten gegebenen, dann zu dieser gefundenen, und zu der 4ten gegebenen u. s. w. bis man zu Ende kömmt. Z. B.

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
6 — 12 — 60 — 60 — 420 — 840 — 2520.

nämlich es ist 2520 die kleinste Zahl, die sich durch die gegebenen 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 genau theilen läßt.

52. Ein uneigentlicher Bruch wird entwickelt, wenn man den Zähler durch den Nenner dividiret, und dann diesen Rest wieder nach (43) bestimmt; so ist $\frac{101}{48}$ Klaft. $= 2\,\frac{5}{48}$ Kl. $= 2^\circ,\ \frac{5\cdot 6'}{48} = 2^\circ,\ \frac{5'}{8} = 2^\circ,\ 0',\ \frac{60''}{8} = 2^\circ,\ 0',$ $7\frac{1}{2}$ Zoll $= 2^\circ,\ 0',\ 7'',\ 6'''$.

53. Eine ganze Größe mit einem angehängten Bruche wird hingegen als ein uneigentlicher Bruch vorgestellet, wenn man die ganze Größe mit dem Nenner des Bruches multipliciret, zu dem Produkte den Zähler des Bruches addiret, und endlich diesem Resultate den Nenner unterschreibet; so ist $11\frac{3}{5} = \frac{11\cdot 5+3}{5} = \frac{58}{5}$.

54. Eine Größe wird in einen Bruch verwandelt, dessen Nenner gegeben ist, wenn man die Größe mit dem gegebenen Nenner multipliciret, und diesem Produkte den gegebenen Nenner unterschreibet; so ist $5 = \frac{5\cdot 1}{1} = \frac{5}{1} = \frac{5\cdot 6}{6} = \frac{30}{6}$; $12 = \frac{12\cdot 7}{7} = \frac{84}{7}$.

55. Wäre hingegen ein Bruch in einen anderen zu verwandeln, dessen Nenner gegeben ist, so multiplicire man den Zähler mit dem gegebenen Nenner, dieß Produkt durch den alten Nenner dividiret giebt den neuen Zähler, diesem unterschreibe man den gegebenen Nenner, so ist die Verwandlung fertig. Es sey z. B. $\frac{86}{125}$ in einen anderen Bruch zu verwandeln, dessen Nenner 1000 sey, so ist $86 \cdot 10000 = 86000$, dieses dividiret durch 125 giebt für den neuen Zähler 688; es ist also $\frac{86}{125} = \frac{688}{1000}$. Imgleichen ist $\frac{3}{4} = \frac{3\cdot 32}{4} : 32$

$= \frac{96}{4} : 32 = \frac{24}{32}$. Daß bey dieser Verwandlung der Werth des Bruches ungeändert bleibe, erhellet daraus, weil der Zähler und Nenner des gegebenen Bruches mit den nämlichen Größen multipliciret, und dividiret wird. Denn $\frac{86}{125}$ geht in $\frac{688}{1000}$ auf folgende Weise über; $\frac{86}{125} = \frac{86 \cdot 1000}{125 \cdot 1000}$ $= \frac{86 \cdot 125 \cdot 8}{125 \cdot 1000} = \frac{86 \cdot 8}{1000} = \frac{688}{1000}$. Imgleichen $\frac{3}{4}$ $= \frac{3 \cdot 32}{4 \cdot 32} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 8}{4 \cdot 32} = \frac{24}{32}$.

Von der Addition, Subtraktion, Multiplikation, und Division der Brüche.

56. Bey der Addition der Brüche beobachte man folgende Regeln.

I. Haben die Brüche gleiche Nenner, so addire man die Zähler, und unterschreibe dieser Summe den gemeinschaftlichen Nenner. $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} + \frac{5}{7} + \frac{6}{7} = \frac{17}{7} = 2\frac{3}{7}$; $\frac{2a^2}{5b} - \frac{3a^2}{5b}$ $+ \frac{x^2}{5b} = \frac{x^2 - a^2}{56}$.

II. Haben die Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie auf eine gleiche Benennung (50) addire sodann die Zähler, und unterschreibe einmal den gemeinschaftlichen Nenner; $\frac{2}{3} +$ $\frac{4}{5} + \frac{6}{7} = \frac{70 + 84 + 90}{105} = \frac{244}{105} = 2\frac{34}{105}$;

$$\frac{7}{8} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + \frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{19}{24} =$$
$$\frac{21 + 16 + 12 + 14 + 20 + 18 + 19}{24.} = \frac{120}{24} = 5.$$

III. Sind nebst Brüchen auch Ganze zu addiren, so kann man sie besonders zusammen zählen, oder in Afterbrüche verwandeln (53), und zu den übrigen Brüchen addiren; so ist $3\frac{2}{5} + 7\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = 3\,\frac{12}{30} + 7\frac{15}{30} + \frac{20}{30} = 10 + \frac{47}{30}$ $= 11\frac{17}{30}$; imgleichen $5\,\frac{2}{3} + 6\frac{5}{6} + 7\,\frac{3}{4} + 8\frac{1}{2} = 26$ $+ \frac{8 + 10 + 9 + 6}{12} = 26 + \frac{33}{12} = 28\,\frac{3}{4}.$

57. Bey der Subtraktion der Brüche beobachte man folgendes.

I. Haben die Brüche einen gemeinschaftlichen Nenner, so ziehe man ihre Zähler von einander ab, und unterschreibe den gemeinschaftlichen Nenner; so ist z. B. $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{5}{12} - \frac{3}{12} - \frac{8}{12} = \frac{5}{12} - \frac{11}{12} = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$

II. Wenn ein Bruch von einer ganzen Zahl abzuziehen ist, so borge man von der ganzen Zahl eine Einheit, verwandle sie in einen Bruch, der mit dem abzuziehenden Bruche einerley Nenner hat, und ziehe sodann den Zähler des abzuziehenden Bruches von diesem Zähler ab; so ist $5 - \frac{2}{3} = 4\frac{3}{3}$ $- \frac{2}{3} = 4\frac{1}{3}$; $9\frac{2}{5} - \frac{4}{5} = 8\frac{7}{5} - \frac{4}{5} = 8\frac{3}{5}.$

III. Haben die Brüche verschiedene Nenner, so bringe man sie auf eine gleiche Benennung, und verrichte sodann die Subtraktion. So ist $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} = \frac{14 - 12}{21} = \frac{2}{21}$; $4\frac{3}{4} - 3\frac{1}{2} = 4\frac{3}{4} - 3\frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$; $6\frac{3}{8} - 10\frac{1}{6} = 6 + \frac{9}{24} - 10 - \frac{4}{24} = -4 + \frac{5}{24} = -3 - \frac{24}{24} + \frac{5}{24} = -3\frac{19}{24}$; $\frac{5a^2b - 2a^2b}{12c^2} = \frac{a^2b}{4c^2}$; $4a + \frac{2b^2}{c} - \left(3a - \frac{3b^2}{c}\right) = a + \frac{5b^2}{c}$.

58. Bey der Multiplikation der Brüche sind folgende Regeln zu beobachten.

I. Wenn beyde Faktoren Brüche sind, so multiplicire man die Zähler, dann auch die Nenner untereinander, und schreibe das zweyte Produkt unter das erste; so ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$; $\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{56}{135}$. Die Ursache davon ist leicht einzusehen; denn jede zwey zu multiplicirenden Brüche können durch $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ vorgestellet werden: nun aber ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; das ist, der eine Zähler wird mit dem anderen, und der eine Nenner mit dem anderen multipliciret, welches ich also erweise:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Man setze } \frac{a}{b} = m \\ \qquad\quad\; \frac{c}{d} = n\end{array}\right\} \text{so ist auch} \begin{array}{l}\frac{a \,.\, b}{b} = b \,.\, m \\ \frac{c \,.\, d}{d} = d \,.\, n\end{array}\left]\begin{array}{l}\ldots a = bm \\ \text{oder} \\ \ldots c = dn\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Es ist also auch} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ac = bdmn\end{array}\right\} \text{vermög dem Grundsatz IV.}$$

und auch $\frac{ac}{bd} = \frac{bdmn}{bd}$ (vermög eben diesem Grundsatz), nämlich $\frac{ac}{bd} = mn$.

Nun aber ist $mn = m \,.\, n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.

Es ist also auch $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ (vermög dem Grundsatz VI.).

II. Wenn ein Bruch mit einer ganzen Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem Bruche zu multipliciren ist, so multiplicire man den Zähler des Bruches mit der ganzen Zahl, und unterschreibe diesem Produkte den Nenner des gegebenen Bruches; so ist z. B. $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$; $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$; $\frac{5}{6} \cdot 12 = 10$.

III. Wenn eine ganze Zahl samt einem angehängten Bruche mit einer ganzen Zahl zu multipliciren ist, so multiplicire man die ganze Zahl, und auch den angehängten Bruch mit der gegebenen Zahl. So ist $5\frac{3}{8} \cdot 2 = 10\frac{6}{8} = 10\frac{3}{4}$; $8 \cdot 12\frac{5}{6} = 96\frac{40}{6} = 102\frac{2}{3}$.

Eben dieses ist zu thun, wenn der eine Faktor eine ganze Zahl mit einem angehängten Bruche, und der andere Faktor auch ein Bruch seyn sollte. $24\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{48}{3} + \frac{8}{15} = 16\frac{8}{15}$; $24\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{32} = \frac{120}{32} + \frac{15}{128} = 3 + \frac{24}{32} + \frac{15}{128} = 3 + \frac{96 + 15}{128} = 3 + \frac{111}{128}$.

IV. Wenn beyde Faktoren aus ganzen Zahlen mit angehängten Brüchen bestehen, so ist es am besten die Faktoren in Afterbrüche zu verwandeln (53), und sodann die Multiplikation vor-

vorzunehmen; so ist $5\frac{2}{3} \cdot 7\frac{5}{6} = \frac{17}{3} \cdot \frac{47}{6} = \frac{799}{18} = 44\,\frac{7}{18}$.

59. Bey der Division der Brüche ist folgendes zu merken.

I. Wenn beyde Dividendus und Divisor Brüche sind, so kehre man den Divisor um, und multiplicire den Dividendus mit demselben; so ist $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$; $\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Daß dieses also seyn müße, erhellet daraus, weil der Divisor mit dem Quotienten multipliciret jederzeit den Dividendus zum Vorschein bringen muß. Man kann sich davon auch auf folgende Weise überzeigen. Es sey $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, so sage ich, daß der Quotient $\frac{ad}{bc}$, nämlich $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ sey, welches ich also erweise:

Man setze $\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b} = m\\[4pt] \frac{c}{d} = n\end{array}\right\}$ so ist auch $\left.\begin{array}{l}\frac{a\,.\,b}{b} = bm\\[4pt] \frac{c\,.\,d}{d} = dn\end{array}\right\}$ oder $\left.\begin{array}{l}a = bm\\ c = dn\end{array}\right.$

Es ist also auch .... $\frac{a}{c} = \frac{bm}{dn}$ } vermög dem Grundsatz IV.

und auch $\frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{bm}{dn} \cdot \frac{d}{b}$ (vermög eben diesem Grundsatz)

nämlich $\frac{m}{n} = \frac{ad}{bc}$.

Nun aber ist $\frac{m}{n} = m : n = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Es ist also auch $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ (Grundsatz VI.)

II.

II. Wenn ein Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren ist, so multiplicire man den Nenner des Bruchs mit der ganzen Zahl; so ist $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$; denn $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$. Wäre aber eine ganze Zahl durch einen Bruch zu dividiren, so kehre man den Bruch um, und verrichte eine Multiplikation; so ist $a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

III. Kommen endlich bey der Division ganze Zahlen mit angehängten Brüchen vor, so verwandle man sie in Afterbrüche, und verrichte sodann die Division; so ist $9\frac{5}{6} : 4\frac{2}{3} = \frac{59}{6} : \frac{14}{3} = \frac{59 \cdot 3}{6 \cdot 14} = \frac{59}{28}$; $\frac{3}{2} : 5\frac{3}{4} = \frac{3}{2} : \frac{23}{4} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 23} = \frac{6}{23}$.

60. Zuweilen ist es erforderlich ganze Größen einer kleineren Gattung, als Brüche einer Größeren Gattung ohne Veränderung ihres Werthes vorzustellen; um dieses zu erhalten setzet man unter die Zahl der kleineren Gattung für den Nenner eine solche Zahl, welche anzeigt, wie viel Einheiten der kleineren Gattung einer einzigen Einheit der größeren Gattung gleich sind; so ist 5 fl. 17 kr. $= 5\frac{17}{60}$ fl. $= \frac{317}{60}$ fl.; $4', 8'' = 4\frac{8'}{12} = 4\frac{2'}{3} = \frac{14'}{3}$; $2^\circ, 0', 9'' = 2^\circ, \frac{9'}{12} = 2^\circ, \frac{3'}{4} = 2\frac{3^\circ}{4 \cdot 6} = 2\frac{1^\circ}{8} = \frac{17^\circ}{8}$; $13', 7'', 8''' = 13', 7\frac{8''}{12} = 13', 7\frac{2''}{3} = 13', \frac{23''}{3} = 13\frac{23'}{3 \cdot 12} = 13\frac{23'}{36} = \frac{491'}{36}$; $0', 4'', 3''', 8'''', = 0', 4'', 3\frac{2'''}{3} = 0', 4'', \frac{11'''}{3}$

$\frac{11'''}{3} = 0', 4\frac{11''}{36} = 0', \frac{155''}{36} = \frac{155'}{36 \cdot 12} = \frac{155'}{432}$;
$0', 0'', 3''', 6'''' = 0'\ 0'', 3\frac{1'''}{2} = 0', 0'', \frac{7'''}{2} = 0'$,
$\frac{7''}{24} = \frac{7'}{288}$.

61. Diese Reduktion giebt uns ein leichtes Mittel an die Hand ungleichnamige Größen, die auf eine gleiche Gattung gebracht werden können, zu multipliciren, und zu dividiren. So ist z. B. $13', 7'', 8''' \times 0', 4'', 3''', 8'''' = \frac{491'}{36} \cdot \frac{155'}{432} = \frac{76105}{15552}$. Imgleichen wie viel müßte man für eine Länge (für einen Balken z. B.) von $11°, 4' 8'$ bezahlen, wenn jede Klafter davon 5 fl. 17 kr. kostet? da $11°, 4', 8'' = \frac{106°}{9}$ und 5 fl. 17 kr. $= \frac{317}{60}$ fl. sind, so kostet diese ganze Länge $\frac{106}{9} \cdot \frac{317}{60}$ fl. $= \frac{33602}{540}$ fl. $= 62\frac{61}{270}$ fl. $=$ 62 fl. $13\frac{5}{9}$ kr.

62. Gebrochene Brüche werden in einfache ohne Veränderung des Werthes verwandelt, wenn man den einen Zähler mit dem anderen, und auch den einen Nenner mit dem anderen multipliciret; so ist $\frac{3}{10}$ von $\frac{5}{6}$ fl. $= \frac{15}{60}$ fl. $=$ 15 kr. imgleichen $\frac{a}{b}$ von $\frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$; denn wenn ich von der Größe $\frac{m}{n}$ den Theil $\frac{a}{b}$ angeben solle, so ist es offenbar, daß ich die Größe $\frac{m}{n}$

durch

durch b dividiren, und diesen Quotienten $\frac{m}{bn}$ (59 II.) a mal nehmen, das ist mit a multipliciren muß: es ist also $\frac{a}{b}$ von $\frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$.

Von den Decimalbrüchen.

63. Decimalbrüche werden jene genennt, die für ihren Nenner einen blossen 1 mit einigen angehängten Nullen haben. So sind $\frac{37}{100}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{17}{1000}$, $17\frac{45}{100} = \frac{1745}{100}$, $8\frac{21}{10000} = \frac{80021}{10000}$ u. s. w. Decimalbrüche; sie werden Kürze halber also ausgedrücket: 8,0021; 17,45; 0,017; 0,7; 0,37, u. s. w. Denn es ist überflüßig den Nenner ausdrücklich anzusetzen, weil man ihn schon aus der Anzahl der Ziffern des Bruches kennet; nur muß man an der linken Seite so viel Nullen vorsetzen, als sich deren im Nenner mehr, als im Zähler Ziffern befinden, damit der Decimalbruch jederzeit so viel Ziffern habe, als der dazu gehörige Nenner Nullen hat; diese Decimalziffern werden von dem Ganzen mit einem Striche (,) abgesöndert, wenn aber kein Ganzes vorhanden seyn sollte, so wird an seine Stelle eine Nulle gesetzt. So ist $3\frac{11}{10000} = 3{,}0011$; $\frac{3}{1000} = 0{,}003$.

64. Die erste Decimalziffer nach dem Striche bedeutet Zehntel, die 2te Hundertel, die 3te Tausendel, die 4te Zehntausendel, u. s. w. so z. B. ist $269{,}357 = 269 + \frac{357}{1000}$

 =

$= 269 + \frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{7}{1000} = 269 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{7}{1000}$. Rückt man nun den Strich um eine Ziffer weiter rechts, so wird jede Ziffer 10 mal größer, rückt man ihn hingegen um eine Stelle weiter links, so wird jede Ziffer 10 mal kleiner. Auch ist es offenbar, daß man jedem Decimalbruche ohne Veränderung des Werthes eine beliebige Menge Nullen anhängen könne. So ist $0{,}25 = 0{,}2500000$.

65. Jeder gegebene Bruch kann in einen Decimalbruch verwandelt werden. Um dieses zu erhalten, so hänge man dem Zähler des gegebenen Bruchs so viele Nullen an, als man in dem Decimalbruche Ziffern haben will, und dividire ihn sodann durch den gegebenen Nenner, so wird der Quotient der gesuchte Decimalbruch seyn (55). So ist $\frac{5}{4} = \frac{5{,}0000}{4} = 1{,}2500 = 1{,}25$; $\frac{9}{16} = \frac{9{,}0000}{16} = 0{,}5625$; $\frac{16}{25} = \frac{16{,}000}{25} = 0{,}640 = 0{,}64$; $\frac{23}{8} = \frac{23{,}000}{8} = 2{,}875$ u. s. w. Nur ist zu merken.

I. Bleibt bey der Division ein Rest übrig, so läßt man ihn hinweg, wenn er kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; ist er aber gleich $\frac{1}{2}$ oder auch größer, so vermehre man die letzte Ziffer des Quotienten um 1. Z. B. $\frac{4}{9} = \frac{4{,}0000}{9} = 0{,}4444$; $\frac{1}{6} = \frac{1{,}0000}{6} = 0{,}1667$.

II. Wenn der Quotient weniger Ziffern hat, als man Nullen hinzugefüget hat, so setze man so viel Nullen vor, als

der

der Quotient zu wenig Ziffern hat. Z. B. $\frac{2}{35} = \frac{2,000}{35}$ $= 0,057$; $\frac{3}{800} = \frac{3,00000}{800} = 0,00375$.

III. Wenn man Schuhe, Zolle, Linien, und Punkten in einen Decimalbruch von Schuhen verwandeln will, so bringe man die Punkten, Linien, und Zolle auf einen Bruch des Schuhes (60) und verwandle sodann diesen Bruch in einen Decimalbruch. So ist $3', 3'', 0''', 6'''' = 3\frac{73'}{288} = 3,2535'$. Imgleichen 16 Loth 3 Quintl $= \frac{67}{128}$ ℔ $= 0,523$ ℔. u. s. w.

66. Bey der Addition, und Subtraktion der Decimalbrüche schreibe man dieselben also, daß die Zehntel unter den Zehnteln, die Hundertel unter den Hunderteln stehen, und verfahre übrigens mit selben eben so, wie mit ganzen Zahlen; nur ist bey der Subtraktion dieses noch zu merken, daß man dem Decimalbruche, von dem ein anderer Decimalbruch abzuziehen ist, genugsame Nullen in Gedanken hinzufüge, wenn er etwann weniger Decimalziffern haben sollte, als sich deren in dem abzuziehenden Bruche befinden.

Beyspiele.

23,07543	zu	von	12,3257	von	0,57
0,923	addiren	abzuziehen	10,813	abzuzieh.	0,4835
6,0024		Differenz.	1,5127	Differenz	0,0865.
30,00083	Summe				

67. Hat man Decimalbrüche untereinander, oder Decimalbrüche mit ganzen Zahlen zu multipliciren, so verrichte man die Multiplikation, als wenn es lauter ganze Zahlen wären, und schneide nur im Produkte an der rechten Seite so viele Ziffern für den Decimalbruch ab, als sich in allen Faktoren Decimalziffern befinden. Sollte nun das Produkt weniger Ziffern enthalten,

so

so setze man nach dem Striche so viele Nullen vor, als in dem Produkte Ziffern zu wenig sind. Z. B. $1,44 \cdot 1,2 = 1,728$; $0,036 \cdot 0,05 \cdot 0,2 = 0,000360 = 0,00036$; $1,12 \cdot 0,09 = 0,1008$, u. s. w. Die Richtigkeit dieses Verfahrens wird ein jeder selbst leicht finden, wenn er nur jedem Bruche seinen gehörigen Nenner unterschreibet, und sodann nach (58.) verfährt.

68. Nun wird es auch nicht mehr beschwerlich seyn den Werth eines Decimalbruches zu bestimmen. So ist z. B. $0,125' = 0,125 \cdot 12'' = 1,5'' = 1\frac{1}{2}'' = 1'' + 6'''$; $0,765$ ℔ $= 0,765 \cdot 32$ Loth $= 24,48$ Loth oder beynahe $24\frac{1}{2}$ Loth.

69. Wenn ein Decimalbruch durch eine ganze Zahl, eine ganze Zahl durch einen Decimalbruch, oder endlich ein Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren ist, so unterschreibe man den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines gewöhnlichen Bruches, hänge dem Zähler, oder dem Nenner, je nachdem einer oder der andere weniger Decimalziffern hat, so viele Nullen an, daß beyde gleichviel Decimalziffern haben, lasse den Strich, der die Decimalziffern absöndert, gänzlich hinweg, und verwandle sodann diesen Bruch nach (65.) in einen Decimalbruch. So ist z. B.

$$3,045 : 15 = \frac{3,045}{15} = \frac{3,045}{15,000} = \frac{3045}{15,000} = 0,203;\ 24 : 0,006 = \frac{24000}{6} = 4000;\ 2,134 : 0,12 = \frac{2134}{120} = 17,7833;\ 0,0036 : 4,8 = \frac{36}{48000} = 0,00074;$$
$$2,5 : 15,625 = 0,16.$$

Auch

Auch die Richtigkeit dieser Arbeit wird ein jeder leicht einsehen, wenn er jedem Bruche seinen Nenner unterschreibet, und sodann nach (59.) verfährt.

70. Zuweilen ist es erforderlich einen weitläuftigen Bruch, dessen Zähler und Nenner nämlich beyde große Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, in einen anderen einfacheren ohne merklicher Veränderung des Werthes zu verwandeln. Dieses geschieht auf folgende Art: man dividire den Zähler und Nenner des gegebenen Bruchs durch den Zähler, so wird der Bruch dadurch in einen anderen verwandelt, dessen Zähler eine Einheit, und der Nenner eine ganze Zahl nebst einem gebrochenen Reste ist; bey diesem und jedem nachfolgenden Reste des Nenners wiederhole man die nämliche Arbeit so lange, bis man einen Nenner ohne Reste erhält. So ist z. B.

$$\frac{361}{1495} = \frac{1}{4+\frac{51}{361}} = \frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{4}{51}}} = \frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12+\frac{3}{4}}}}$$

$$= \frac{1}{4+\frac{1}{7+\frac{1}{12+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}}}.$$

Nachdem der gegebene Bruch in diese schiefe Reihe aufgelöset worden, so nehme man einige Glieder dieser Reihe von Brüchen, und reducire sie auf einen einzigen Bruch, so wird derselbe von dem gegebenen um so weniger verschieden seyn, je mehr Glieder man genommen hat; so ist $\frac{1}{4+\frac{1}{7}} = 1 : \frac{29}{7}$

$=$

$= \frac{7}{29}$ von dem gegebenen Bruche $\frac{361}{1495}$ kaum um $\frac{1}{1000}$ verschieden; nehmen wir drey Glieder, so ist

$$\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12}}} = \frac{1}{4+1:\frac{85}{12}} = \frac{1}{4+\frac{12}{85}} = 1:\frac{352}{85}$$

$= \frac{85}{352}$; und dieser Bruch stimmet mit dem gegebenen bis auf die hunderttausendsten Theile überein, welches ein jeder leicht finden wird, wenn er beyde in Decimalbrüche auflöset. Nimmt man vier Glieder dieser Reihe, so wird der daraus hergeleitete Bruch $\frac{92}{381}$ von dem gegebenen noch weniger abweichen; alle fünf Glieder endlich sind demselben vollkommen gleich. Und außer diesen Brüchen $\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{85}{352}, \frac{92}{381}$ sind gar keine anderen möglich, die einfacher wären, und doch dem gegebenen am Werthe näher kämen.

Die Nenner des aufgelösten Bruches 4, 7, 12, 1, 3 sind nichts anders, als die Quotienten, die zum Vorschein kommen, wenn man bey dem gegebenen Bruche des Zählers und Nenners größten gemeinschaftlichen Faktor suchet (49); es ist nämlich in unserem Beyspiele:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 4 & & 7 & & 12 & & 1 & & 3 & \\
1495 & : & 361 & : & 51 & : & 4 & : & 3 & : & 1 \\
1444 & & 357 & & 48 & & 3 & & 3 & & \\
\hline
51 & & 4 & & 3 & & 1 & & 0 & &
\end{array}$$

das

das ist $\frac{361}{1495} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$.

Eben so ist:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & \overset{1}{\frown} & & \overset{36}{\frown} & & \overset{5}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{2}{\frown} & & \overset{1}{\frown} & & \overset{17}{\frown} & \\
102764 & : & 100000 & : & 2764 & : & 469 & : & 284 & : & 212 & : & 72 & : & 68 & : & 4 \\
\underline{100000} & & \underline{8292} & & \underline{2480} & & \underline{284} & & \underline{212} & & \underline{144} & & \underline{68} & & \underline{4} & & \\
2764 & & \underline{17080} & & 284 & & 212 & & 72 & & 68 & & 4 & & 28 & & \\
 & & \underline{16584} & & & & & & & & & & & & \underline{28} & & \\
 & & 496 & & & & & & & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

nämlich es ist:

$$\frac{100000}{102764} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{36+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}}}}}}$$

Man findet aus diesem, daß der gegebene Bruch ziemlich genau $= \frac{36}{37}$ sey, wenn man nur zwey Glieder entwickelt.

Auf die nämliche Weise findet man, daß $\frac{10000000000}{31415926536}$ beynahe $= \frac{7}{22}$, oder schon sehr genau $= \frac{113}{355}$ sey: denn

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 3 & & 7 & & 15 & \\
31415926536 & : & 10000000000 & : & 1415926536 & : & 885\ldots \\
30000000000 & & 9911485752 & & 88514248 & & 882\ldots \\
\hline
1415926536 & & 88514248 & & 530784056 & & 3\ldots \\
 & & & & 442571240 & & \\
\cline{5-5}
 & & & & 88212816 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & 1 & & 292 & \\
\ldots 14248 & : & 88212816 & : & 301432 \text{ u. s. w.} \\
\ldots 12816 & & & & \\
\cline{1-1}
\ldots 01432 & & & &
\end{array}$$

Folglich ist der gegebene Bruch $= \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292 \text{ u. s. w.}}}}}}$ das ist, er ist $= \frac{7}{22}$ ziemlich genau, wenn man nur zwey Glieder entwickelt. Entwickelt man hingegen vier Glieder, so ist der daraus hergeleitete Bruch $\frac{113}{355}$ von dem gegebenen kaum um 0,00000003 mehr verschieden, weil der Nenner 292 des darauffolgenden Gliedes in Rücksicht einer Einheit schon sehr groß ist; denn $\frac{10000000000}{31415926536} = 0{,}318309886$, und $\frac{113}{355} = 0{,}318309859$; folglich ist ihre Differenz $= 0{,}000000027$.

Setzen wir nun den gegebenen Bruch $f = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+ \&c.}}}}}$ und bezeichnen die abgekürzten Brüche, welche aus 1, 2, 3, 4, ... Gliedern hergeleitet werden, mit f' f'' f''' f'''' so ist nach gehöriger Reduktion, $f' = \frac{1}{a}$,

$f'' = \frac{b}{ab+1}$, $f''' = \frac{bc+1}{abc+a+c}$, $f'''' = \frac{bcd+b+d}{abcd+ab+ad+cd+1}$; u. s. w. Nun ist in dem letzten Beyspiele $a=3$, $b=7$, $c=15$,

$d = 1$, &c.; folglich ist der abgekürzte Bruch, der aus vier Gliedern hergeleitet wird, $= \frac{7.15.1+7+1}{3.7.15.1+3.7+3.1+15.1+1}$ $= \frac{113}{355}$.

Die Zähler und Nenner der abgekürzten Brüche können aus den Quotienten des aufgelösten Bruches auf folgende Art sehr leicht bestimmet werden:

a	$\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$ Die Zähler	a	$\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$ Die Nenner
b	$1 = a.0+1$	b	$a = a.1+0$
c	$b = b.1+0$	c	$ab+1 = b.a+1$
d	$bc+1 = c.b+1$	d	$abc+a+c = c.(ab+1)+a$
e	$bcd+b+d = d.(bc+1)+b$	e	$abcd+ab+ad+cd+1$
&c.	$bcde+bc+be+de+1 =$		$= d.(abc+a+c)+ab+1$
	$e.(bcd+b+d)+bc+1$	&c.	$abcde+abc+ade+$ u. s. w.

Dritte Vorlesung.

Von den Rechnungsarten mit Potenzen.

Von den Eigenschaften der Potenzen.

71. Das Produkt, welches entsteht, wenn man eine Größe etlichemal mit sich selbst multipliciret, wird eine Potenz dieser Größe genennt. So ist $a.a.a = a^3$ eine Potenz von a. Die Größe, welche einigemal durch die Multiplikation angesetzet wird um eine Potenz hervorzubringen, heißt die **Wurzel** dieser Potenz. So ist a die Wurzel der Potenz a^3. Der Exponent, welcher anzeigt, wie oft eine Größe durch die Multiplikation angesetzet sey, giebt den Po-

tenzen einige besondere Benennungen; so ist a^2 die 2te Potenz oder das Quadrat, a^3 die dritte Potenz oder der Cubus (Würfel), a^4 die 4te Potenz oder das Biquatrat, a^5 die 5te ..... a^m die *m*te Potenz von a. Die Größe a hingegen heißt in Rücksicht a^2 die zweyte Wurzel, oder die Quadratwurzel, und wird also ausgedrückt $\sqrt[2]{a^2} = a$, oder vielmehr $\sqrt{a^2} = a$; in Rücksicht a^3 wird a die dritte Wurzel oder die Cubicwurzel genennt, und also bezeichnet $\sqrt[3]{a^3} = a$; in Rücksicht a^4 heißt a die 4te Wurzel, nämlich $a = \sqrt[4]{a^4}$; und endlich wird a in Rücksicht a^m die *m*te Wurzel genennt, nämlich $a = \sqrt[m]{a^m}$. Die *m*te Wurzel einer gegebenen Größe ist demnach nichts anders, als eine gewisse Größe, welche *m*mal durch die Multiplikation angesetzt die gegebene Größe zum Vorschein bringt. So ist a^2 die Cubicwurzel von a^6, nämlich $a^2 = \sqrt[3]{a^6}$, weil $a^2 . a^2 . a^2 = a^6$ ist.

72. Wie Potenzen zu addiren, subtrahiren, multipliciren, und zu dividiren sind, ist bereits erörtert worden, da für die Rechnungsarten der algebraischen Größen mit Exponenten allgemeine Regeln festgesetzet, und die Potenzen nichts anders, als solche Größen sind. So ist a^m addirt zu $\mp a^n = a^m \mp a^n$; $a^m . a^n = a^{m+n}$; $a^m : a^n = a^{m-n}$; setzen wir nun $m = n$, so ist $a^m : a^n = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$; nun ist auch in diesem Falle $a^m : a^n = a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{nämlich } a^m : a^m = a^0 \\ \text{und auch } a^m : a^m = 1 \end{array}\right\} \text{also auch } a^0 = 1 \text{ (Grundsatz VI.)}$$

Nun aber kann a jede einfache, oder zusammengesetzte Größe bedeuten; es ist also jede Größe, die zu ihrem Exponenten eine Nulle hat, einer Einheit gleich. So ist $(12)^0 = 1$; $(a + b)^0 = 1$; $(a - x)^0 = 1$; setzen wir nun $a = x$, so ist $(a - x)^0 = (a - a)^0 = (0)^0 = 1$.

73. In dem Ausdrucke $a^m : a^n = a^{m-n}$ setze man $n = 2m$, so ist $a^m : a^n = a^m : a^{2m} = a^{m-2m} = a^{-m}$; nun ist auch $a^m : a^{2m} = \frac{a^m}{a^{2m}} = \frac{1}{a^m}$;

$$\left.\begin{array}{l}\text{nämlich } a^m : a^{2m} = a^{-m} \\ \text{und auch } a^m : a^{2m} = \frac{1}{a^m}\end{array}\right\} \text{folglich auch } a^{-m} = \frac{1}{a^m} \text{(Grundſ. VI.)}$$

Eben so ist $a^{-m}x = a^{-m} . x = \frac{1}{a^m}x. = \frac{x}{a^m}$; imgleichen auch $d^2x(c^2 - x^2)^{-n} = \frac{d^2x}{(c^2 - x^2)^n}$, wenn $(c^2 - x^2) = a$ und $n = m$ gesetzet wird. Es ist auch richtig, daß $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$ sey; denn $\frac{1}{a^{-m}} = 1 : a^{-m} = 1 : \frac{1}{a^m} = a^m$; imgleichen $\frac{a^2x}{p(c^2 - x^2)^{-n}} = a^2p^{-1}x(c^2 - x^2)^n$; $\frac{5}{9} = 5 . 9^{-1} = \frac{5}{3^2} = 5 . 3^{-2}$. Da also $\frac{1}{a^{-m}} = a^m$, und $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ist, so kann ein jeder Bruch in Gestalt einer ganzen Größe vorgestellet werden.

74. Potenzen können wieder zu anderen Potenzen erhoben werden, deren Exponenten gegeben sind, wenn man die Exponenten der gegebenen Potenzen mit dem Exponenten der gesuchten Potenz multipliciret; so ist

$(a^4)^2 = a^4 . a^4 = a^{4+4} = a^{4 . 2} = a^8$
$(a^4)^3 = a^4 . a^4 . a^4 = a^{4+4+4} = a^{4 . 3} = a^{12}$
$(a^4)^5 = a^4 . a^4 . a^4 . a^4 . a^4 = a^{4 . 5} = a^{20}$
$(a^m)^6 = a^m . a^m . a^m . a^m . a^m . a^m = a^{m . 6} = a^{6m}$.
$(a^m)^n = a^m$ nmal geschrieben $= a^{m . n} = a^{mn}$;
$(a^3 b^4 c^{2m})^n = a^{3n} b^{4n} c^{2mn}$; $((a+b)^2)^3 = (a+b)^6$;
$(a^{-2} x^3)^n = a^{-2n} x^{3n}$; $(a^{-1} b^2)^{-3} = a^3 b^{-6}$. Nur ist hier zu merken, daß man bey einer negativen Größe das Zeichen —

in $+$ verwandle, wenn der gegebene Exponent eine gerade Zahl ist; denn $(-a)^2 = -a . -a = +a^2$; $(-a^m)^4 = -a^m . -a^m . -a^m . -a^m = +a^{4m}$ u. s. w. Die Bezeichnung $(-a^m)^4$ ist von $-(a^m)^4$ wohl zu unterscheiden. Die erste heißt $-a^m$ soll zur 4ten Potenz erhoben werden; die zweyte hingegen zeiget an, daß man $+a^m$ zur 4ten Potenz erheben, und sodann diese Potenz abziehen solle; es ist also $-(a^m)^4 = -a^{4m}$.

75. Auch kann aus jeder einnamigen Potenz, oder aus jeder einnamigen Größe jede beliebige Wurzel angezeiget werden, wenn man die Exponenten der gegebenen Potenz durch den Exponenten der verlangten Wurzel dividiret. So ist $\sqrt{a^2} = \sqrt[2]{a^2} = a = a^{\frac{2}{2}}$; $\sqrt{a^4} = a^2 = a^{\frac{4}{2}}$; $\sqrt{a^6} = a^3 = a^{\frac{6}{2}}$; also auch $\sqrt{a^m} = a^{\frac{m}{2}}$;

$\sqrt[3]{a^3} = a = a^{\frac{3}{3}}$; $\sqrt[3]{a^6} = a^2 = a^{\frac{6}{3}}$; also auch $\sqrt[3]{a^m} = a^{\frac{m}{3}}$; und endlich $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, nämlich $a^{\frac{m}{n}}$ ist die $n$te Wurzel von a^m, das ist, wenn $a^{\frac{m}{n}}$ durch die Multiplikation $n$mal angesetzet wird, so wird es die Größe a^m zum Vorschein bringen. So ist auch $\sqrt[3]{a^2b^3c} = a^{\frac{2}{3}}bc^{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[n]{a^2 - x^2} = \sqrt[n]{(a^2 - x^2)^1} = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{n}}$; $\sqrt[3]{a^{-6}b} = a^{-2}b^{\frac{1}{3}}$;

$\sqrt[-2]{ax^3b^{-4}} = a^{-\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}b^2$; $\sqrt[\frac{2}{3}]{x^2} = x^{2:\frac{2}{3}} = x^{2\cdot\frac{3}{2}} = x^3$, u. s. w. Und auch umgekehrt; $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$; $c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$;

$\sqrt[n]{c}$; $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$; $(a^2 + x^2)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(a^2 + x^2)^4}$.

76. Solche mit den Wurzelzeichen, oder mit den gebrochenen Exponenten behafteten Größen, werden **Wurzelgrößen** genennt: sind diese also beschaffen, daß man sie nur anzeigen, aber niemals vollkommen genau berechnen könne, so werden sie irrationale Größen genennt; so ist $\sqrt{10} = (10)^{\frac{1}{2}}$ eine irrationale Größe, weil man niemals die Zahl genau finden kann, welche mit sich selber multiplicirt die Zahl 10 zum Vorschein bringt; nur nähern kann man sich einer solchen Wurzel nach Belieben, wie wir es weiter unten sehen werden. $\sqrt{49}$ hingegen ist eine rationale Wurzelgröße, weil $\sqrt{49}$ genau $=$ $+ 7$ oder auch $= - 7$ ist. Es ist wohl zu merken, daß jede auszuziehende Wurzel eines geraden Exponenten aus einer positiven Größe das Zeichen **mehr** und **weniger** haben könne (in der Rechenkunst sucht man gemeiniglich nur die positive Wurzel) so ist die Quadratwurzel aus $a^6 = \pm \sqrt{a^6} = \pm a^3$; die 4te Wurzel aus $a = \pm \sqrt[4]{a} = \pm (a^{\frac{1}{4}})$. Die Wurzel eines ungeraden Exponenten hingegen kann aus einer positiven Größe nur positiv, und aus einer negativen Größe nur negativ seyn. So ist die Cubicwurzel aus $+ a^{12} = + \sqrt[3]{a^{12}} =$ $+ a^4$; und die Cubicwurzel aus $- a^{12} = \sqrt[3]{- a^{12}} = - a^4$.

77. Sollte nun aus einer negativen Größe eine Wurzel eines geraden Exponenten ausgezogen werden, so ist eine solche Wurzel schlechterdings **unmöglich**. So ist die Quadratwurzel aus $- a^2$ weder $- a$, noch $+ a$, weil jede dieser Größen mit sich selber multiplicirt $+ a^2$, und nicht $- a^2$, zum Vorschein bringt; es ist also $\pm \sqrt{- a^2}$ eine unmögliche Größe; eben so sind $\sqrt{- x}$, $\sqrt[4]{- a^3}$, $\sqrt[8]{- a^{12}}$ unmögliche Größen; sie werden auch eingebildete Größen (quantitates imaginariæ) genennt. Man läßt diese immer unter der Wurzelgestalt, damit

mit ihre Unmöglichkeit immer vor den Augen schwebe: man kann z. B. $\sqrt[4]{-a^5}$ niemals in $-a^{\frac{5}{4}}$ verwandeln, da man doch $\sqrt[3]{-a^5} = -a^{\frac{5}{3}}$ setzen kann.

78. Wenn ein Bruch zu einer Potenz zu erheben ist, so erhebe man den Zähler und Nenner zu der nämlichen Potenz. Wenn aus einem Bruche eine Wurzel auszuziehen wäre, so ziehe man aus dem Zähler, und auch aus dem Nenner die verlangte Wurzel aus; so ist $\left(\frac{a^2b}{c^3x}\right)^m = \frac{a^{2m}b^m}{c^{3m}x^m}$; $\sqrt[n]{\frac{a^{\frac{n}{m}}c^n x}{d^4f^2}}$ $= \frac{a^{\frac{n}{mn}}c^{\frac{n}{n}}x^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{4}{n}}f^{\frac{2}{n}}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}cx^{\frac{1}{n}}}{d^{\frac{4}{n}}f^{\frac{2}{n}}}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3\cdot3\cdot3}{4\cdot4\cdot4} = \frac{27}{64}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$; $\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$; $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000}$; $\left(\frac{1}{10}\right)^4 = \frac{1}{10000}$; $\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100000}$; $(0,5)^2 = 0,25$; $(0,5)^3 = 0,125$; $(0,5)^4 = 0,0625$; u. s. w.

Wir sehen aus diesem, daß die Potenzen der eigentlichen Brüche in Rücksicht einer Einheit immer kleiner werden, je größer ihre Exponenten sind.

79. Das Quadrat $(a+b)^2$ einer zweynamigen Größe $a+b$ besteht aus dem Quadrate des ersten Gliedes, aus dem doppelten Produkte des ersten Gliedes in das zweyte, und endlich aus dem Quadrate des zweyten Gliedes der vorgegebenen zweynamigen Größe.

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times\ a+b \\ \hline = a^2+ab+ab+b^2 \\ = a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

So ist auch $(19)^2 = (10+9)^2 = (10)^2 + 20.9 + 9^2 = 100 + 180 + 81 = 361$; imgleichen $(3ab - 5x^2)^2 = 9a^2b^2 - 30abx^2 + 25x^4$; u. s. w.

80. Das Quadrat $(a+b+c)^2$ einer dreynamigen Größe oder Wurzel $a+b+c$ besteht, aus dem Quadrate

des

des ersten Gliedes; aus dem doppelten Produkte des ersten Gliedes in das zweyte; aus dem Quadrate des zweyten Gliedes; aus dem doppelten Produkte des ersten und zweyten Gliedes in das dritte; und endlich aus dem Quadrate des dritten Gliedes der gegebenen Größe.

$$\begin{array}{r} a + b + c \\ \times\; a + b + c \\ \hline = a^2 + ab + ac \qquad\qquad \\ + ab + b^2 + bc \qquad \\ + ac + bc + c^2 \\ \hline = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc \\ + c^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

Es ist also auch $(2a^2 - 3ax - 4x^2)^2 = 4a^4 - 12a^3x + 9a^2x^2 - 16a^2x^2 + 24ax^3 + 16x^4$.

81. Wir können schon sicher schließen, daß ein geordnetes Quadrat einer vielnamigen Größe bestehe: aus dem Quadrate des ersten Gliedes; aus dem doppelten Produkte des ersten Gliedes in das zweyte; aus dem Quadrate des zweyten Gliedes: aus dem doppelten Produkte des ersten und zweyten Gliedes in das dritte; aus dem Quadrate des dritten Gliedes: aus dem doppelten Produkte des ersten, zweyten, und dritten Gliedes in das vierte; aus dem Quadrate des vierten Gliedes: aus dem doppelten Produkte des ersten, zweyten, dritten, und vierten Gliedes in das fünfte; aus dem Quadrate des fünften Gliedes: aus dem doppelten Produkte des 1ten 2ten u. s. w. Und auf diese Art sind wir auch im Stande eine Folge von Größen, das ist eine Reihe, die ohne Ende fortläuft, auf das Quadrat zu erheben. So ist z. B. $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots)^2 =$

$$\begin{array}{r} 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + x^6 + 2x^7 + x^8 + \\ + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + \\ + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + \\ + 2x^6 + 2x^7 + 2x^8 + \\ \hline = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + 8x^7 + \ldots \end{array}$$

Es sind gemeiniglich nur einige wenige Glieder hinreichend das Gesetz zu entdecken, nach welchem die übrigen Glieder fortlaufen, und aus dieser Ursache werden auch nur einige wenige Glieder von der Reihe zu der begehrten Potenz erhoben.

82. Die dritte Potenz, oder der Cubus $(a+b)^3$ einer zweynamigen Größe $a+b$ besteht aus dem Cubus des ersten Gliedes; aus dem dreyfachen Produkte des Quadrats vom ersten Gliede in das zweyte; aus dem dreyfachen Produkte des Quadrats vom zweyten Gliede in das erste; und endlich aus dem Cubus des zweyten Gliedes.

$$\begin{array}{l} (a+b).(a+b).(a+b) \\ \hline = a^2 + 2ab + b^2 \\ \times\ a + b \\ \hline = a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad\quad + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ \hline = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{array}$$

Es ist also auch $(2ax - 3x^2)^3 = 8a^3x^3 - 36a^2x^4 + 54ax^5 - 27x^6$

83. Der Cubus $(a+b+c)^3$ einer dreynamigen Größe $a+b+c$ nämlich:

$$\begin{array}{l} (a+b+c).(a+b+c).(a+b+c) \\ = (a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2).(a+b+c) \\ = a^3+2a^2b+ab^2+2a^2c+2abc+ac^2 \\ \quad + a^2b+2ab^2+b^3+2abc+2b^2c+bc^2 \\ \quad\quad + a^2c+2abc+b^2c+2ac^2+2bc^2+c^3 \\ \hline = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2 \\ \quad +3bc^2+c^3 \end{array}$$

besteht aus dem Cubus des ersten Gliedes; aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciret mit dem zweyten; aus dem dreyfachen Quadrate des zweyten Gliedes multipliciret mit dem ersten; aus dem Cubus des zweyten Gliedes: aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten und zweyten Gliedes multipliciret mit dem dritten (nämlich aus $3.(a+b)^2.c = 3a^2c + 6abc + 3b^2c$); aus dem dreyfachen Quadrate des dritten Gliedes multipliciret mit der Summe des ersten und zweyten (nämlich aus $3c^2.(a+b) = 3ac^2 + 3bc^2$) und endlich aus dem Cubus des dritten Gliedes.

83. Wir können schon weiter schließen, und sagen: der geordnete Cubus einer vielnamigen Größe besteht aus dem Cubus des ersten Gliedes; aus dem dreyfachen Quadrate des ersten Gliedes multipliciret mit dem zweyten; aus dem dreyfa-

chen

chen Quadrate des zweyten Gliedes multipliciret mit dem ersten; aus dem Cubus des zweyten Gliedes: aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten und zweyten Gliedes multipliciret mit dem dritten Gliede; aus dem dreyfachen Quadrate des dritten Gliedes multipliciret mit der Summe des ersten und zweyten Gliedes; aus dem Cubus des dritten Gliedes: aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten, zweyten, und dritten Gliedes multipliciret mit dem vierten Gliede; aus dem dreyfachen Quadrate des vierten Gliedes multipliciret mit der Summe des ersten, zweyten, und dritten Gliedes; aus dem Cubus des vierten Gliedes: aus dem dreyfachen Quadrate der Summe des ersten, zweyten, dritten, und vierten Gliedes multipliciret mit dem fünften Gliede, u. s. w. Und diese Bemerkung setzet uns in den Stand auch eine unendliche Reihe zum Cubus zu erheben; so ist z. B.

$$(x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6 + x^7 \ldots)^3$$

$$\begin{aligned} = x^3 - 3x^4 + 3x^5 - x^6 + 3x^7 - 3x^8 + x^9 \\ + 3x^5 - 6x^6 + 3x^7 - 3x^8 + \ldots \\ - 3x^6 + 6x^7 \ldots \ldots \ldots \ldots \\ + 3x^7 \ldots \ldots \ldots \ldots \end{aligned}$$

$$= x^3 - 3x^4 + 6x^5 - 10x^6 + 15x^7 - \ldots \ldots$$

$$= 1x^3 - (1+2)x^4 + (3+3)x^5 - (6+4)x^6 + (10+5)x^7 - (15+6)x^8 + \ldots \ldots \ldots \ldots$$

84. Die Glieder der 4ten, 5ten Potenz wird ein jeder selbst leicht finden können, wenn er $(a + b)$, und dann auch $(a + b + c)$ zu diesen Potenzen erhebt. So z. B. wird man finden, daß die 4te Potenz einer mehrnamigen Größe bestehe.

I. Aus der 4ten Potenz eines jeden Gliedes.

II. Aus dem vierfachen Cubus der Summe aller vorhergehenden Glieder multipliciret mit dem nächst darauf folgenden Gliede.

III. Aus dem 6fachen Quadrate der Summe aller vorhergehenden Glieder multipliciret mit dem Quadrate des nächst darauf folgenden Gliedes.

IV. Endlich aus dem 4fachen Cubus eines jeden nachfolgenden Gliedes multipliciret mit der Summe aller vorhergehenden Glieder.

Von der Ausziehung der Wurzeln aus zusammengesetzten Größen.

85. Wir haben bereits schon gezeiget, wie man aus jeder einnamigen algebraischen Größe was immer für eine Wurzel ziehen solle; nun wollen wir auch noch die Verhaltungsregeln hieher setzen, nach denen die Wurzeln aus zusammengesetzten Größen ausgezogen werden.

86. Für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer zusammengesetzten algebraischen Größe fließen aus (81.) folgende Regeln.

I. Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ziehe man die Wurzel aus, setze sie nach dem Gleichheitszeichen hin, erhebe sie zum Quadrate, und ziehe dieß Quadrat von dem ersten Gliede der gegebenen Größe ab.

II. Den Rest dividire man durch die doppelte schon gefundene Wurzel; den Quotienten füge man mit seinem Zeichen zu der vorigen Wurzel als das 2te Glied hinzu; dieses Glied multiplicire man mit dem Divisor, und mit sich selbst, und ziehe das Produkt von dem Dividendus ab.

III. Diesen Rest dividire man wieder durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel, so wird der Quotient das folgende Glied der Wurzel seyn; dieses neue Glied multiplicire man mit dem Divisor, und mit sich selbst, und ziehe das Produkt von dem Dividendus ab. Wenn nun die gegebene Größe ein vollständiges Quadrat seyn sollte, so wird dieß Verfahren ein Ende nehmen: sollte aber die gegebene Größe ein unvollständiges Quadrat, oder auch eine unendliche Reihe seyn, so pflegt man den Calcul nur so lange fortzusetzen, bis man das Gesetz entdeckt, nach welchem die Glieder der Wurzel fortlaufen.

Beyspiele.

I. $\sqrt{(a^4+6a^3b+5a^2b^2-12ab^3+4b^4)} = a^2+3ab-2b^2.$

$\pm a^4$

Rest $6a^3b + 5a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 : 2a^2$

$\pm 6a^3b \pm 9a^2b^2$

$-4a^2b^2 - 12ab^3 + 4b^4 : 2a^2 + 6ab$

$\mp 4a^2b^2 \mp 12ab^3 \pm 4b^4$

$\emptyset$

II. $\sqrt{(4-8y+4y^3+y^4)} = 2-2y-y^2$

± 4

Rest $-8y+4y^3+y^4 : 4$

$\mp 8y \pm 4y^2$

$-4y^2+4y^3+y^4 : 4-4y$

$\mp 4y^2 \pm 4y^3 \pm y^4$

$\emptyset$

III. $\sqrt{a^2-x^2} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4.a^3} - \frac{x^6}{2.2.4a^5}$

$\pm a^2$

$-x^2 : 2a$

$\mp \frac{2ax^2}{2a} \pm \frac{x^4}{4a^2}$

$-\frac{x^4}{4a^2} : 2a - \frac{2x^2}{2a}$

$\mp \frac{2ax^4}{2.4a^3} \pm \frac{2x^6}{2.2.4a^4} \pm \frac{x^8}{4.16.a^6}$

$-\frac{x^6}{2.4.a^4} - \frac{x^8}{4.16.a^6} : 2a - ..$

IV.

IV. $\sqrt{(x^2 - 4x^3 + 12x^4 - 32x^5 + 80x^6 - 192x^7 + \ldots)}$
$= x - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5 +$.

Das Gesetz der gefundenen Coefficienten 2, 4, 8, 16, fällt in die Augen; es sind nämlich die auf einander folgenden Potenzen der Zahl 2; auch das Gesetz der gegebenen Coefficienten 4, 12, 32, 80, ... ist nicht schwer einzusehen; jeder Coefficient nämlich besteht aus einer Potenz von der Zahl 2, deren Exponent durch die Stelle des Gliedes angezeigt wird, mehr der Summe aller vorhergehenden Coefficienten; so ist der Coefficient des 6ten Gliedes $= 2^6 + 80 + 32 + 12 + 4 = 64 + 80 + 32 + 12 + 4 = 192$.

87. Wenn man mehrere numerische Wurzeln 9, 10, 99, 100, 999, 1000, 9999, u. s. w. zum Quadrate erhebt, und sodann diese Quadrate mit den dazu gehörigen Wurzeln vergleicht, so bemerket man, daß die Wurzel eines jeden Quadrats aus 1 Ziffer bestehe, wenn das Quadrat deren 2 oder $(2 - 1)$ enthält, daß sie aus 2 Ziffern bestehe, wenn das Quadrat deren 4 oder $(4 - 1)$ enthält, daß sie aus 3 Ziffern bestehe, wenn das Quadrat deren 6 oder $(6 - 1)$ enthält; mit einem Worte, daß die Wurzel aus n Ziffern bestehe, wenn das Quadrat deren $2n$ oder $(2n - 1)$ enthält.

Wenn man demnach ein gegebenes Quadrat von der Rechten gegen der Linken in Klassen jede von zwey Ziffern abtheilt (die letzte Klasse links kann auch nur 1 Ziffer enthalten) so kann man sicher schließen, daß die zu diesem Quadrate gehörige Wurzel aus so vielen Ziffern bestehen müße, als Klassen vorhanden sind.

88. Aus dieser Bemerkung, und aus den übrigen bereits erläuterten Eigenschaften des Quadrats einer mehrnamigen Größe werden für das Ausziehen der Quadratwurzel aus jeder gegebenen Zahl folgende Regeln hergeleitet.

I.

I. Nachdem die vorgegebene Zahl bereits in Klassen abgetheilet ist, so setze man die Wurzel der ersten Klasse nach dem Gleichheitszeichen hin; sollte aber diese Klasse keine wirkliche Quadratzahl seyn, so setze man die Wurzel der nächst kleineren Quadratzahl an (man muß aus dieser Ursache die Quadrate der Zahlen von 1 bis 9 sich gut in das Gedächtniß eingepräget haben) und ziehe diese Quadratzahl von der ersten Klasse ab.

II. Zu dem Reste setze man die folgende Klasse herunter, und dividire dieses durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel, so wird der Quotient die zweyte Ziffer der gesuchten Wurzel seyn; diesen Quotienten multiplicire man mit dem Divisor, und mit sich selbst, (dieses geschieht auf einmal, wenn man den Quotienten rechts an den Divisor anhängt, und sodann diesen vermehrten Divisor mit dem nämlichen Quotienten multipliciret) und endlich ziehe man dieses Produkt von dem Dividendus ab.

III. Und so wird zu jedem Reste die darauffolgende Klasse heruntergesetzt, und durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiret; der Quotient wird in der Wurzel angemerket, rechts an den Divisor angehängt, und sodann mit demselben multipliciret, und endlich wird dieses Produkt von dem Dividendus abgezogen u. s. w. z. B.

$\sqrt{5|48|49|64} = 2342$;

```
   4
 148 : 43
 129
 1949 : 464
 1856
   9364 : 4682
   9364
      0
```

nämlich das nächst kleinere Quadrat ist 4, und seine Wurzel gleich 2. Der erste Divisor ist $2 . 2 = 4$; der Quotient an den Divisor gehängt $= 43$; dieses durch den Quotienten selbst multipliciret $= 43 \cdot 3 = 129$, u. s. w.

$\sqrt{74|04|60|25} = 8605$
64
1004 : 166
996
860 : 172
86025 : 17205
86025
∅

In diesem Beyspiele muß bey der Division 860 : 172 in der Wurzel Null angesetzet werden, weil der Quotient keine bedeutliche Ziffer seyn kann; sodann wird zu der Zahl 860 die folgende Klasse 25 herunter gesetzt, und die Zahl 86025 durch die doppelte Wurzel = 1720 dividiret. u. s. w.

Eben so findet man $\sqrt{9042049} = 3007$; $\sqrt{3610000} = 1900$.

IV. Sind einmal bereits alle Klassen herabgesetzt worden, und es bleibt noch ein Rest übrig, so ist es ein Zeichen, daß die gegebene Zahl keine vollkommene Quadratzahl, und folglich die Wurzel dieser Zahl eine irrationale Größe sey, die man nur durch eine Näherung jedoch niemals vollkommen genau bestimmen könne. Um sich nun dieser Wurzel nach Belieben zu näheren, so sucht man zu den ganzen schon gefundenen Einheiten der Wurzel noch einen Decimalbruch auf folgende Art: an den letzten Rest hänget man zwey Nullen, und dividiret dieses durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel, so ist der Quotient die erste Decimalziffer; diese Ziffer hängt man an den Divisor, multipliciret ihn sodann mit der nämlichen Ziffer, und ziehet das Produkt von dem Dividendus ab; und so werden zu jedem nachfolgenden Reste zwey Nullen hinzugefüget, und dieses jederzeit durch das doppelte der schon gefundenen Wurzel dividiret, um die folgende Decimalziffer der Wurzel zu erhalten: oder man hänge der vorgegebenen unvollkommenen Quadratzahl so viel paar Nullen an, als man in der Wurzel Decimalziffern verlanget, söndere diese Nullen mit einem Striche von den Ziffern der vorgegebenen Zahl als einen Decimal-

bruch

bruch ab; ziehe sodann die Quadratwurzel daraus, und vergesse nicht die Ganzen von den Decimalziffern in der Wurzel abzuschneiden. So ist

$\sqrt{212} = 14,56$ beynahe	$\sqrt{123} = 11,0905$
1	1
112 : 24	23 : 21
96	21
1600 : 285	200 : 22
1425	
17500 : 2906	20000 : 2209
17436	19881
64 u. s. w.	11900 : 2218
	1190000 : 221805
	1109025
	80975 u. s. w.

$$\sqrt{10} = \sqrt{10,00000000} = 3,1622.$$

V. Ist endlich aus einem Bruche, dessen Zähler und Nenner unvollkommene Quadrate sind, die Quadratwurzel auszuziehen, so multiplicire man Zähler und Nenner mit dem Nenner, und ziehe sodann die Wurzel aus beyden aus: z. B.

$$\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{2.5}{5.5}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{3,1622}{5}$$
$$= 0,6324.$$

$$\sqrt{\frac{41}{3}} = \sqrt{\frac{123}{9}} = \frac{\sqrt{123}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{123}}{3} = \frac{11,09}{3}$$
$$= 3,69.$$

Oder man verwandle den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch, und ziehe sodann die Wurzel aus; nur merke man dabey,

bey, daß jeder Decimalbruch, aus dem die Quadratwurzel zu ziehen ist, eine gerade Anzahl Decimalziffern haben müße. z. B.

$$\sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{0{,}375} = \sqrt{0{,}375000} = 0{,}612;$$

$\sqrt{9{,}8596} = 3{,}14$; $\sqrt{0{,}0529} = 0{,}23$; $\sqrt{0{,}000144} = 0{,}012$; $\sqrt{28{,}378} = 5{,}32$.

Wenn man nun im Rechnen keinen Fehler begangen hat, so wird das Quadrat der gefundenen Wurzel, wenn man den letzten Rest dazu addirt, der vorgegebenen Zahl gleich seyn.

89. Aus einer zusammengesetzten algebraischen Größe wird die Cubicwurzel nach folgenden Regeln ausgezogen.

I. Aus dem ersten Gliede der gegebenen Größe ziehe man die dritte Wurzel aus, und subtrahire ihren Cubus von der gegebenen Größe.

II. Den Rest dividire man durch das dreyfache Quadrat der gefundenen Wurzel, so wird der Quotient das zweyte Glied der Wurzel seyn; mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor, das dreyfache Quadrat dieses Quotienten multiplicire man mit allen vorhergehenden Gliedern der Wurzel, endlich erhebe man auch diesen Quotienten zum Cubus, und ziehe diese drey Produkte von dem Dividendus ab.

III. Bey jedem nachfolgenden Reste wiederhole man dieses nämliche Verfahren so lange, bis kein Rest mehr übrig bleibt, wenn die gegebene Größe ein vollkommener Cubus ist, oder wenigstens, bis man das Gesetz entdeckt, nach welchem die Glieder der Wurzel fortlaufen. Beyspiele:

$$\sqrt[3]{(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)} = a - b$$

$$\begin{array}{l} \pm\, a^3 \\ \hline \quad - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \;:\; 3a^2 \\ \quad \pm\, 3a^2b \pm 3ab^2 \mp b^3 \\ \hline \qquad\qquad \varnothing \end{array}$$

$\sqrt[3]{}$

$$\sqrt[3]{(8x^6+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27)}$$
$$=2x^2+x-3$$
$$\pm 8x^6$$
$$+12x^5-30x^4-35x^3+45x^2+27x-27 : 12x^4$$
$$\pm 12x^5 \pm 6x^4 \pm x^3$$
$$-36x^4 - 36x^3 + 45x^2 + 27x - 27 : 12x^4$$
$$+12x^3 + 3x^2$$
$$\mp 36x^4 \mp 36x^3 \mp 9x^2 \pm 54x^2 \pm 27x \mp 27$$
$$\varnothing$$

$$\sqrt[3]{a^3+x^3} = a + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8} - \frac{10x^{12}}{243a^{11}} + \text{u.s.w.}$$

90. Wenn man mehrere Zahlen, 2, 3, 9, 10, 99, 100, 150, 999, 1000, u. s. w. zum Cubus erhebt, und die Wurzeln mit diesen Potenzen vergleicht, so bemerkt man, daß die Cubicwurzel einer jeden Zahl aus n Ziffern bestehe, wenn die Zahl selbst $3n$, $3n - 1$, oder endlich $3n - 2$ Ziffern enthält. Aus dieser Bemerkung, und aus den Eigenschaften der dritten Potenz einer zusammengesetzten Größe fließen für die Ausziehung der Cubicwurzel aus einer jeden gegebenen Zahl folgende Regeln.

I. Man theile die vorgegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Klassen jede von 3 Ziffern ab (die erste Klasse links kann auch aus zwey oder gar nur aus einer Ziffer bestehen) dann suche man eine Zahl auf, welche zum Cubus erhoben die erste Klasse zum Vorschein bringt; würde keine solche Zahl möglich seyn, so nehme man die nächst kleinere Zahl für die erste Ziffer der Wurzel, und ziehe ihren Cubus von dieser ersten Klasse ab.

II. Den Rest dividire man durch das dreyfache Quadrat der schon gefundenen Wurzel, so wird der Quotient die zweyte

Ziffer der gesuchten Wurzel seyn: mit diesem Quotienten multiplicire man den Divisor, und schreibe das Produkt unter den Dividendus also, daß die zwey letzten Ziffern frey bleiben; ferner multiplicire man das dreyfache Quadrat des Quotienten mit der übrigen schon gefundenen Wurzel, und schreibe dieß Produkt unter den Dividendus also, daß nur noch die letzte Ziffer frey bleibe; endlich erhebe man auch diesen Quotienten zum Cubus, und schreibe ihn gerade unter den Dividendus hin; diese drey Produkte addire man in eine Summe, und ziehe selbe von dem Dividendus ab.

III. Wenn man dieß bey jedem Reste wiederholet, so wird die Arbeit einmal ein Ende nehmen, wenn die vorgegebene Zahl ein vollkommener Cubus ist: sollte aber die Zahl ein unvollkommener Cubus seyn, so kann man sich der Wurzel nach Belieben näheren, wenn man entweder gleich im Anfange so vielmal drey Nullen in Gestalt eines Decimalbruches an die Zahl anhänget, als man in der Wurzel Decimalziffern haben will; oder aber, wenn man zu jedem Reste, nachdem alle Klassen bereits schon herabgesetzet worden, drey Nullen hinzufüget, und die dadurch erhaltenen Decimalziffern mit einem Striche von den Ganzen absöndert.

IV. Ist aus einem Bruche, dessen Zähler und Nenner unvollkommene Cubi sind, die dritte Wurzel auszuziehen, so multiplicire man den Zähler durch das Quadrat des Nenners, ziehe aus diesem Produkte die dritte Wurzel aus, und dividire sie durch den Nenner; oder man löse den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch auf, und ziehe sodann die dritte Wurzel aus demselben: nur ist noch anzumerken, daß jeder Decimalbruch, aus dem die dritte Wurzel herauszuziehen ist, entweder 3 oder 6 oder 9 u. s. w. Ziffern haben müße, welches gar leicht möglich ist. Beyspiele:

✓

$\sqrt[3]{12|326|391} = 231$

8

Rest 4 326 : 12 das dreyfache Quadrat von 2

3 6 — das Produkt $3 \cdot 12$

54 — das Produkt $3 \cdot 3^2 \cdot 2$

27 — der Cubus von 3

Sum. 4167

Rest 159391 : 1587 das dreyfache Quadrat von 23

1587 — — das Produkt aus dem Quotient. $1 \cdot 1587$

69 — — das Produkt aus $3 \cdot 1^2 \cdot 23$

1 — der Cubus von 1

159391

0

nämlich $\sqrt[3]{(12|326|391)} = 200 + 30 + 1 = 231.$

8 000 000

4 326|391 : 120000

3 600 000

540 000

27 000

4 167 000

159 391 : 158700 $(= 3 \cdot (200 + 30)^2$

158 700 — — $(= 1 \cdot 158700$

690 — — $(= 3 \cdot 1^2 \cdot (200+30)$

1 — — $(= 1^3$

159 391

0

$\sqrt[3]{(2{,}352637)} = 1{,}33;$

```
   1
 ―――――
 1,352 : 3
   9
   27
    27
 ――――――
 1 197
 ――――――――
  155637 : 507
  1521
    351
      27
  ――――――――
  155637
  ――――――――
     ∅
```

$\sqrt[3]{1105} = 10{,}39$ beynahe

```
  1
 ―――――
 105 : 3
 105,000 : 300
 ――――――
 900
  270
    27
 ――――――
 92727
 ――――――
 12273000 : 10609
  9 5481
    25029
      729
  ――――――――
  9 799119
  ――――――――
  2473881   u. s. w.
```

$$\sqrt[3]{1\tfrac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5 \cdot 16}{4 \cdot 16}} = \sqrt[3]{\frac{80}{64}} = \frac{\sqrt[3]{80}}{\sqrt[3]{64}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{80}}{4} = \frac{4{,}3088}{4} = 1{,}0772 \text{ beynahe, oder } \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$= \sqrt[3]{1{,}25} = \sqrt[3]{1{,}25000000} = 1{,}077.$$

Für die Ausziehung der 4ten Wurzel wird die Regeln ein jeder selbst leicht finden können: nur ist die Arbeit bey der Ausziehung der 4ten Wurzel schon sehr langweilig, und wird bey höheren Wurzeln immer verdrüßlicher; aus dieser Ursache werden weiter unten ungemein leichtere, und bequemere Methoden gewiesen werden. Die Ausziehung der Wurzeln, welche den 6ten Grad nicht übersteigen, wird schon durch die am Ende beygefügte Tafel der Potenzen in etwas abgekürzet, da durch Beyhilfe dieser Tafel auf einmal zwey Ziffern der gesuchten Wurzel erhalten werden.

Von den Wurzelgrößen.

91. Wir haben schon angemerkt, daß man jene Größen, die das Wurzelzeichen vor sich haben, **Wurzelgrößen** nenne: sie sind zwar meistentheils irrational, doch können verschiedene Verwandlungen mit denselben vorgenommen werden; sie können addiret, subtrahiret, multipliciret werden, u. s. w. Jene, bey denen das Wurzelzeichen den nämlichen Exponenten hat, heißen **Wurzelgrößen der nämlichen Benennung**, z. B. $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{bc^2}$, $\sqrt[3]{p^2q}$, $\sqrt[3]{xyz}$; ingleichen $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[4]{12}$. Haben über dieses die Wurzelgrößen der nämlichen Benennung vor dem Wurzelzeichen gleichnamige, und nach dem Wurzelzeichen gleiche Größen, so werden sie **gleichnamige Wurzelgrößen** genennt. Z. B. $2a\sqrt{7}$, $5a\sqrt{7}$, $-3a\sqrt{7}$.

92. Wurzelgrößen von verschiedener Benennung werden auf eine gleiche Benennung ohne Veränderung ihres Werthes gebracht, wenn man sie als Potenzen mit gebrochenen Exponenten vorstellet (75), und sodann diese gebrochenen Exponenten auf eine gleiche Benennung bringt (50). So ist

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8} \\ \sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25} \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{6}{12}} = \sqrt[12]{3^6} = \sqrt[12]{729} \\ \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{3}{12}} = \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{125} \\ \sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{4}{12}} = \sqrt[12]{7^4} = \sqrt[12]{2401} \end{cases}$$

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \sqrt[n]{ab} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{3m}{3mn}} b^{\frac{3m}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{3m} b^{3m}} \\ \sqrt[3]{a^n c} = a^{\frac{n}{3}} c^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{n^2m}{3mn}} c^{\frac{mn}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{n^2m} c^{mn}} \\ \sqrt[m]{a^3 b^n} = a^{\frac{3}{m}} b^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{9n}{3mn}} b^{\frac{3n^2}{3mn}} = \sqrt[3mn]{a^{9n} b^{3n^2}} \end{cases}$$

 Diese

Diese Reduktion der Wurzelgrößen auf eine gleiche Benennung zeigt uns an, welche aus zweyen gegebenen größer sey. Z. B. da $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{125}$, und $\sqrt[6]{11} = \sqrt[12]{121}$, so ist $\sqrt[4]{5} > \sqrt[6]{11}$.

93. Wurzelgrößen können auch abgekürzet werden, wenn man die Größe unter dem Zeichen in die Faktoren auflöset, aus den Faktoren, welche vollkommene Potenzen von dem Exponenten des Wurzelzeichens sind, diese Wurzeln auszieht, und selbe ausser dem Zeichen als Coefficienten ansetzt. So ist

$$\sqrt[m]{a^m b c^m} = ac\sqrt[m]{b}; \text{ denn } \sqrt[m]{a^m b c^m} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} c^{\frac{m}{m}} = ac \,.\, b^{\frac{1}{m}} = ac\sqrt[m]{b}.$$

Beyspiele

I. $3\sqrt[3]{8ab^3} = 6b\sqrt[3]{a}$.

II. $7\sqrt[4]{48a^5b^6} = 7\sqrt[4]{3 \,.\, 16 \,.\, a^4 \,.\, a \,.\, b^4 \,.\, b^2} = 14ab\sqrt[4]{3ab^2}$.

III. $\sqrt{a^2x^2 - x^4} = \sqrt{x^2 \,.\, (a^2 - x^2)} = x\sqrt{a^2 - x^2}$.

IV. $6\sqrt{8} - 4\sqrt{18} = 6\sqrt{4 \,.\, 2} - 4\sqrt{9 \,.\, 2} = 12\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 0$.

94. Und umgekehrt die Größen ausser dem Zeichen können unter das Zeichen gebracht werden, wenn man die Größen ausser dem Zeichen auf die Potenz des Exponenten von dem Wurzelzeichen erhebt, und sodann die Größe unter dem Zeichen damit multipliciret. So ist in obigen Beyspielen

$ac\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{b \,.\, a^m c^m} = \sqrt[m]{a^m b c^m}$; $x\sqrt{(a^2 - x^2)} = \sqrt{x^2 \,.\, (a^2 - x^2)} = \sqrt{a^2x^2 - x^4}$. Imgleichen

$$y(ay^2 - y^3)^{-\frac{1}{2}} = (ay^2 \,.\, y^{-2} - y^3 \,.\, y^{-2})^{-\frac{1}{2}} = (a-y)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{(a-y)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(a-y)}}.$$

95. Wurzelgrößen können addiret und subtrahiret werden, wenn sie gleichnamig sind, welches zuweilen erhalten wird, wenn man die gegebenen Größen auf eine gleiche Benennung bringt, und abkürzet. Beyspiele.

I. $\sqrt{50} + \sqrt{18} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

II. $\sqrt[3]{8a^3b} + \sqrt{4a^2b} - \sqrt{a^2b} - \sqrt[3]{27a^3b} = 2a\sqrt[3]{b} + 2a\sqrt{b} - a\sqrt{b} - 3a\sqrt[3]{b} = a\sqrt{b} - a\sqrt[3]{b} = a.(\sqrt{b} - \sqrt[3]{b})$.

III. $2\sqrt{16\sqrt{18}} - \sqrt{12\sqrt{2}} = 2\sqrt{16 \cdot 3\sqrt{2}} - 2\sqrt{3\sqrt{2}} = 8\sqrt{3\sqrt{2}} - 2\sqrt{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 6 \,.\, 3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}:2} = 6.3^{\frac{1}{2}}.\ 2^{\frac{1}{4}} = 6.3^{\frac{2}{4}}.\ 2^{\frac{1}{4}}. = 6\sqrt[4]{3^2.2} = 6\sqrt[4]{18}$.

96. Bey der Multiplikation bringe man die Wurzelgrößen auf eine gleiche Benennung, und multiplicire die Größen ausser dem Zeichen, dann auch die Größen unter dem Zeichen mit einander; so ist $a\sqrt[m]{b} \,.\, c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[mn]{b^n d^m}$; denn $a\sqrt[m]{b} = ab^{\frac{1}{m}}$, und $c\sqrt[n]{d} = cd^{\frac{1}{n}}$; also $a\sqrt[m]{b} \cdot c\sqrt[n]{d} = ab^{\frac{1}{m}}.cd^{\frac{1}{n}} = acb^{\frac{1}{m}}d^{\frac{1}{n}} = ac \,.\, b^{\frac{n}{mn}}d^{\frac{m}{mn}} = ac\sqrt[mn]{b^n d^m}$. Beyspiele.

I. $5\sqrt{ab} \,.\, 2\sqrt[3]{a^2b} = 5\sqrt[6]{a^3b^3}.2\sqrt[6]{a^4b^2} = 10\sqrt[6]{a^7b^5}$
$= 10a\sqrt[6]{ab^5}$.

II. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{6} + \sqrt{9} - \sqrt{4} - \sqrt{6} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$.

III. $3\sqrt{2\sqrt[3]{10}} \,.\, 2\sqrt{5\sqrt[3]{100}} = 6\sqrt{10\sqrt[3]{1000}} = 6\sqrt{10.10} = 6.10 = 60$.

IV. $a^p.(c+x)^{\frac{m}{n}} = (a^{p\cdot\frac{n}{m}})^{\frac{m}{n}} \cdot (c+x)^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{pn}{m}}.(c+x))^{\frac{m}{n}}$
$= (a^{\frac{pn}{m}}c + a^{\frac{pn}{m}}x)^{\frac{m}{n}}$.

V. $a^1.(ax - x^2)^{-\frac{2}{3}} = (a^{1\cdot-\frac{3}{2}})^{-\frac{2}{3}}.(ax - x)^{-\frac{2}{3}} =$
$(a^{-3}.(ax - x^2))^{-\frac{2}{3}} = (a^{-2}x - a^{-3}x^2)^{-\frac{2}{3}} =$
$\left(\frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{ax - x^2}{a^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{a^3}{ax - x^2}\right)^{\frac{2}{3}} =$
$\frac{a^2}{\sqrt[3]{(ax - x^2)^2}}$.

97. Bey der Division der Wurzelgrößen bringe man den Dividendus und den Divisor auf eine gleiche Benennung, schreibe den Divisor unter den Dividendus in Gestalt eines Bruches, und kürze selben ab. Beyspiele

I. $6\sqrt{ab} : 2\sqrt{a} = \frac{6\sqrt{ab}}{2\sqrt{a}} = 3\sqrt{\frac{ab}{a}} = 3\sqrt{b}$.

II. $ab\sqrt{cd} - b^2\sqrt{fd} : bc\sqrt{d} = \frac{a\sqrt{c} - b\sqrt{f}}{c}$.

III. $5 : \sqrt[5]{5} = \sqrt[3]{125} : \sqrt[3]{5} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{125}{5}}$
$= \sqrt[3]{25}$.

IV. $10 : \sqrt{a} - \sqrt{x} = \frac{10}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} = \frac{(10\sqrt{a} + 10\sqrt{x})}{(\sqrt{a} - \sqrt{x}).(\sqrt{a} + \sqrt{x})}$
$= \frac{10\sqrt{a} + 10\sqrt{x}}{a - x}$.

V. $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} : \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} - 1\right) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} :$
$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})}{(1 + \sqrt{5}) \cdot (1 - \sqrt{5})} =$

3

$$\frac{3+\sqrt{5}-3\sqrt{5}-\sqrt{25}}{1+\sqrt{5}-\sqrt{5}-\sqrt{25}} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

VI. $(a^3x - a^2x^2)^{\frac{3}{2}} : a^2 = \frac{(a^3x - a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{(a^{2\cdot\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} =$

$$\left(\frac{a^3x - a^2x^2}{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{5}{3}}x - a^{\frac{2}{3}}x^2)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(a^{\frac{5}{3}}x - a^{\frac{2}{3}}x^2)^3}.$$

Die Multiplikation, und Division der eingebildeten oder unmöglichen Größen wird gemeiniglich nur angezeigt. So ist $3\sqrt{-a} \times 4a\sqrt{-b} = 12a\sqrt{-a}\,.\sqrt{-b}$; $5a\sqrt{c}\,.\,2b\sqrt{-c} = 10ab\sqrt{c}\,.\sqrt{-c}$. Nur wenn eine eingebildete Größe auf die Potenz des Exponenten von dem Wurzelzeichen zu erheben ist, wird das Wurzelzeichen ausgelassen; so ist $\sqrt{-a}\,.\sqrt{-a} = 1\,.\sqrt{-a} \times 1\,.\sqrt{-a} = 1\,.-a = -a$; $-\sqrt{-a}\,.-\sqrt{-a} = -1\,.\sqrt{-a} \times -1\,.\sqrt{-a} = +1\,.-a = -a$; $-\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -1\,.\sqrt{-a} \times +1\,.\sqrt{-a} = -1\,.-a = +a$; $(\sqrt[4]{-a^3})^4 = \sqrt[4]{-a^3}\,.\sqrt[4]{-a^3}\,.\sqrt[4]{-a^3}\,.\sqrt[4]{-a^3} = -a^3$; $4a^2b\sqrt{-cd} : 2ab\sqrt{cm} = \frac{2a\sqrt{-cd}}{\sqrt{cm}}$;

$$\frac{3a^3b^2\sqrt{-a^3}}{3a^2c\sqrt{-a^3}} = \frac{ab^2}{c}.$$

98. Die Wurzelgrößen werden zu Potenzen erhoben, deren Exponenten gegeben sind, wenn man die Größen ausser und unter dem Zeichen auf die Potenz des gegebenen Exponenten erhebt, und selbe sodann abkürzet. So ist $(a\sqrt[m]{b})^n =$ a^n

$a^n \sqrt[m]{b^n}$; denn $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n = a^n b^{\frac{n}{m}} = a^n \sqrt[m]{b^n}$; imgleichen $(3\sqrt{a^2 - x^2})^3 = 27\sqrt{(a^2 - x^2)^3} = 27\sqrt{(a^2 - x^2)^2 . (a^2 - x^2)} = 27 . (a^2 - x^2) . \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $(2\sqrt[3]{a^2})^3 = 8\sqrt[3]{a^6} = 8a^2$; $(b\sqrt[n]{a^m})^n = b^n a^m$.

99. Aus Wurzelgrößen werden wieder andere Wurzeln gezogen, wenn man die Größe ausser dem Zeichen unter das Zeichen wirft (94) sodann den Exponenten des Wurzelzeichens der gegebenen Größe mit dem Exponenten der gesuchten Wurzel multipliciret, und endlich diesen Ausdruck abkürzet. So ist, $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[mn]{a^m b}$; denn $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = (a\sqrt[m]{b})^{\frac{1}{n}} = (\sqrt[m]{a^m b})^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{mn}} b^{\frac{1}{mn}} = \sqrt[mn]{a^m b}$; imgleichen $\sqrt{2\sqrt[3]{120}} = \sqrt{\sqrt[3]{960}} = \sqrt[6]{960} = \sqrt[6]{64 . 15} = 2\sqrt[6]{15}$.

Vierte Vorlesung.

Von den Verhältnißen, und Proportionen.

Von den Verhältnißen.

100. Die Vergleichung zweyer gleichnamigen Größen gegen einander nennt man ein **Verhältniß**: und insbesondere heißt die Vergleichung, in welcher untersucht wird, um wie viel die eine Größe die andere übersteige, ein **arithmetisches Verhältniß**; die Vergleichung zweyer Größen hingegen, in der man untersuchet, wie oft die eine Größe in der anderen enthalten sey, wird ein **geometrisches Verhältniß** genennt. Nun aber findet man, um wie viel die eine Größe die andere übersteige, wenn man ihre Differenz durch die Subtraktion bestimmet: imgleichen findet man, wie oft die eine Größe in der anderen enthalten sey, wenn man die eine durch die andere dividiret, das ist, wenn man ihren Quotienten aufsuchet. Die Differenz zweyer Größen drücket uns demnach das arithmetische, und ihr Quotient das geometrische Verhältniß dieser zwey Größen aus. So ist $39 \div 13$, nämlich 26 das arithmetische Verhältniß dieser zwey Zahlen 39 und 13; hingegen ist $39 : 13$, nämlich 3 das geometrische Verhältniß dieser nämlichen zwey Zahlen; es wird dieses also ausgesprochen: 39 verhält sich zu 13; 39 heißt das erste, und 13 das zweyte Glied des Verhältnißes.

101. Aus diesem folget, daß alle diejenigen arithmetischen Verhältniße einander gleich seyn müßen, die einerley Differenz zum Vorschein bringen, wenn man das 2te Glied von dem ersten subtrahiret; so sind $11 \div 7$, $24 \div 20$, $5 \div 1$, $6 \div 2$; imgleichen auch $3 \div 5$, $5 \div 7$, $7 \div 9$, $11 \div 13$ gleiche arithmetische Verhältniße. Und eben so sind alle die-

jenigen

jenigen geometrischen Verhältniße einander gleich, die einerley Quotienten geben, wenn man in jedem Verhältniße das erste Glied durch das zweyte dividiret; so sind 12 : 4, 18 : 6, 15 : 5, 39 : 13; imgleichen 2 : 4, 4 : 8, 8 : 16, 50 : 100 gleiche geometrische Verhältniße. Es ist nicht unumgänglich nothwendig, das erste Glied durch das zweyte zu dividiren um den Quotienten des geometrischen Verhältnißes zu erhalten. Wir werden in der Folge nur gemeiniglich das zweyte Glied durch das erste dividiren: und alsdann müßen wir sagen, daß diejenigen geometrischen Verhältniße einander gleich seyn, die einerley Quotienten zum Vorschein bringen, wenn man bey jedem Verhältniße das zweyte Glied durch das erste dividiret. So sind 6 : 4, 21 : 14, 12 : 8 gleiche geometrische Verhältniße, denn der Quotient eines jeden Verhältnißes ist $= \frac{2}{3}$. Auch bey den arithmetischen Verhältnißen kann man jederzeit nur das erste Glied von dem zweyten subtrahiren; und so sind zum B. $11 \div 8$, $4 \div 1$, $24 \div 21$ gleiche arithmetische Verhältniße, denn in jedem dieser drey Verhältniße ist die Differenz $= -3$, wenn das erste Glied von dem zweyten abgezogen wird. Wir haben für die arithmetischen Verhältniße das Zeichen $\div$ gewählet, um sie von den geometrischen zu unterscheiden.

102. Jedes arithmetische Verhältniß kann durch $a \div (a+d)$ vorgestellet werden. Denn jedes erste Glied eines arithmetischen Verhältnißes kann durch a, und die Differenz, sie möge positiv oder negativ seyn, durch d ausgedrücket werden; da nun diese Differenz zum Vorschein kömmt, wenn man das erste Glied von dem zweyten subtrahiret, so muß auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied zu der Differenz addiret (23); es muß also das zweyte Glied des arithmetischen Verhältnißes $= (a + d)$ und folglich das Verhältniß selbst $a \div (a + d)$ seyn, wenn man für das erste Glied a, und für die Differenz d annimmt.

103. Und jedes geometrische Verhältniß kann durch $a : aq$ vorgestellet werden; denn das erste Glied kann man durch a, und den Quotienten eines jeden geometrischen Verhältnißes durch q ausdrücken; nun muß der Quotient zum Vorschein kommen, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret, es muß also auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied mit dem Quotienten multipliciret (33); folglich muß das zweyte Glied des geometrischen Verhältnißes aq, und das Verhältniß selbst $a : aq$ seyn, wenn man für das erste Glied a, und für den Quotienten q annimmt.

104. Das Verhältniß der Produkte aus den ersten Gliedern zum Produkte aus den zweyten Gliedern mehrerer geometrischer Verhältniße heißt ein zusammengesetztes Verhältniß. So ist $3 \times 7 : 12 \times 21$ nämlich $21 : 252$ ein zusammengesetztes geometrisches Verhältniß; eben so ist auch $abc : abcmnq$ ein zusammengesetztes Verhältniß. Wir sehen aus diesem, daß der Quotient des zusammengesetzten Verhältnißes dem Produkte aus den Quotienten der einfachen zusammensetzenden Verhältniße gleich sey.

$$\begin{array}{c}
a : aq \\
b : bn \\
c : cm \\
\hline
abc : abcmnq.
\end{array}$$

Sind nun die zusammensetzenden Verhältniße einander gleich, so ist der Quotient des zusammengesetzten Verhältnißes jederzeit eine Potenz des Quotienten von einem der zusammensetzenden Verhältniße, und zwar dieser Quotient ist ein Quadrat, wenn zwey gleiche Verhältniße, er ist ein Cubus, wenn drey gleiche Verhältniße zusammengesetzet werden, u. s. w. z. B.

$$\begin{array}{c}
a : aq \\
b : bq \\
c : cq \\
d : dq \\
\hline
abcd : abcdq^4
\end{array}$$

Es folgt aus diesem, daß ein aus mehreren gleichen Verhältnißen zusammengesetztes Verhältniß dem jenigen Verhältniße gleich sey, welches zum Vorschein kömmt, wenn man das erste und zweyte Glied eines der zusammensetzenden Verhältniße auf die Potenz des Exponenten von der Anzahl der zusammensetzenden Verhältniße erhebt. So ist im obigen Beyspiele $abcd : abcdq^4 = a^4 : a^4q^4 = d^4 : d^4q^4$; denn der Quotient eines jeden dieser Verhältniße ist $= q^4$.

105. Ein geometrisches Verhältniß bleibt ungeändert, wenn man das erste, und zweyte Glied mit einer nämlichen Größe multipliciret, oder auch dividiret. So ist $a : aq = am : amq$ $= \frac{a}{n} : \frac{aq}{n}$; denn der Quotient eines jeden dieser Verhältniße ist $= q$.

Von den Proportionen.

106. Die Gleichheit zweyer Verhältniße heißt eine **Proportion**, und insbesondere wird die Gleichheit zweyer arithmetischer Verhältniße eine **arithmetische**, und die Gleichheit zweyer geometrischer Verhältniße eine **geometrische** Proportion genennt. Die zwey gleichen Verhältniße werden durch das Gleichheitszeichen ($=$) verbunden; so ist $3 \div 7 = 11 \div 15$ eine arithmetische, und $4 : 12 = 7 : 21$ (4 verhält sich zu 12 gleichwie 7 zu 21) eine geometrische Proportion. Das erste und vierte Glied einer Proportion heißen zusammen die **äusseren**, und das zweyte und dritte Glied werden zusammen die **mittleren** Glieder genennt.

107. Durch $a \div (a + d) = b \div (b + d)$ kann jede arithmetische Proportion vorgestellet werden. Denn das eine arithmetische Verhältniß kann durch $a \div (a + d)$, und jedes andere diesem vollkommen gleiche Verhältniß durch $b \div (b+d)$ ausgedrücket werden; es sind demnach $a \div (a + d)$ und $b \div (b + d)$ iede zwey gleiche arithmetische Verhältniße; nun aber stellen zwey gleiche arithmetische Verhältniße eine Proportion vor; es kann demnach durch $a \div (a + d) = b \div (b+d)$ jede arithmetische Proportion vorgestellet werden.

108 In dem Ausdrucke $a \div (a + d) = b \div (b+d)$ ist $a + (b + d) = (a+d) + b$, nämlich $a+b + d = a + b + d$; es ist demnach in einer jeden arithmetischen Proportion die Summe der äusseren der Summe der mittleren Glieder gleich. Es hat dieser Satz auch seine Richtigkeit, wenn das dritte Glied

dem

dem zweyten gleichet; denn jede solche arithmetische Proportion kann durch $a \div (a + d) = (a + d) \div (a + 2d)$ vorgestellet werden; nun aber ist auch in dieser Proportion $a + (a + 2d) = (a + d) + (a + d)$ nämlich $2a + 2d = 2a + 2d$. Diese Proportion wird Zusammenhangend (Continua) genennt.

109. Nun ist es leicht zu drey gegebenen das 4te arithmetische Proportionalglied zu bestimmen, wenn man die zwey mittleren addiret, und von dieser Summe das erste Glied abzieht. Denn es sey das erste Glied $= a$ das zweyte $= b$ das dritte gegebene $= c$, und das vierte Glied, welches man finden soll, sey $= x$, so muß $a \div b = c \div x$ seyn; nun ist $a + x = b + c$; es ist also $x = b + c - a$, wenn man beyderseits a abzieht (Grundsatz IV). So ist $2 \div 5 = 11 \div x$, nämlich $x = 5 + 11 - 2 = 14$; es ist demnach $2 \div 5 = 11 \div 14$. Auch kann zwischen zwey gegebenen das mittlere arithmetische Proportionalglied gefunden werden, wenn man die zwey gegebenen addiret, und sodann diese Summe durch 2 theilet: denn es sey das erste Glied $= a$ das zweyte gegebene $= b$, und das mittlere Proportionalglied, welches man finden soll, sey $= x$, so muß $a \div x = x \div b$ seyn; nun ist $a + b = x + x$, nämlich $2x = a + b$; es ist also auch $x = \frac{a + b}{2}$ (Grundsatz IV). So ist $3 \div x = x \div 13$, nämlich $2x = 16$, $x = 8$, und $3 \div 8 = 8 \div 13$.

110. Jede geometrische Proportion kann durch $a : aq = b : bq$ vorgestellet werden. Denn durch $a : aq$ und $b : bq$ können jede zwey gleiche geometrische Verhältniße ausgedrücket werden; nun aber stellen zwey gleiche geometrische Verhältniße eine Proportion vor; es kann demnach durch $a : aq = b : bq$ jede geometrische Proportion vorgestellet werden. Setzen wir nun $b = aq$, so ist $bq = aq \cdot q = aq^2$; es kann demnach jede zusammenhangende geometrische Proportion durch $a : aq = aq : aq^2$ angezeiget werden.

111.

111. In dem einen dieser Ausdrücke ist $a . bq = aq . b$ nämlich $abq = abq$, und in dem anderen ist $a . aq^2 = aq . aq$ nämlich $a^2q^2 = a^2q^2$; es ist demnach in jeder geometrischen Proportion das Produkt der äusseren dem Produkte der mittleren Glieder gleich. Wir haben also zwey Kennzeichen, aus denen wir auf die Richtigkeit einer geometrischen Proportion schließen können; das erste ist die Gleichheit der Verhältniße, das ist die Gleichheit der Quotienten; und das zweyte ist die Gleichheit der Produkte der äusseren und mittleren Glieder. So bald eines dieser zwey Kennzeichen von vier Größen erwiesen wird, so können wir versichert seyn, daß sie in einer geometrischen Proportion stehen. Nur ist noch hier anzumerken, daß zwey Verhältniße z. B. $a : aq$ und $bq : b$ in denen die gleichen Quotienten auf eine ungleiche Art erhalten werden, nur in einer Proportion stehen können, wenn man das eine Verhältniß verkehret: man kann nicht sagen $a : aq = bq : b$ wohl aber $a : aq = b : bq$, oder $aq : a = bq : b$, oder auch $a : aq = \frac{1}{bq} : \frac{1}{b}$ und $\frac{1}{a} : \frac{1}{aq} = bq : b$. Man sagt in einem solchen Falle: die zwey ersten Glieder stehen mit den zwey letzten in einer verkehrten Proportion (sunt reciproce proportionales).

112. Nun sind wir auch im Stande zu jeden drey gegebenen Gliedern das 4te Proportionalglied zu bestimmen, wenn wir das Produkt der zwey mittleren Glieder durch das erste dividiren. Denn es sey das erste Glied $= a$ das zweyte $= b$ das dritte gegebene Glied $= c$, und das vierte Glied, welches man finden soll, sey $= x$, so muß $a : b = c : x$ seyn; nun ist $ax = bc$; es ist also auch $x = \frac{bc}{a}$ wenn man beyderseits durch a dividiret; nämlich $a : b = c : \frac{bc}{a}$; so ist z. B. $3 : 5 = 12 : x$ nämlich $x = \frac{12 \cdot 5}{3} = 4 \cdot 5 = 20$, und $3 : 5 = 12 : 20$; imgleichen $4 : 6$

=

$= 6 : x$ nämlich $x = \frac{6 \cdot 6}{4} = 9$, und folglich $4 : 6 = 6 : 9$. Auch sind wir im Stande zwischen zwey gegebenen Gliedern das mittlere geometrische Proportionalglied zu bestimmen, wenn wir aus dem Produkte der zwey gegebenen Glieder die Quadratwurzel herausziehen; denn es sey das erste Glied $= a$, das zweyte gegebene Glied $= b$, und das mittlere zu bestimmende Glied sey $= x$, so muß $a : x = x : b$ seyn; nun ist $ab = x^2$, also auch $\sqrt{ab} = \sqrt{x^2}$, nämlich $x = \sqrt{ab}$, und $a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b$. So ist z. B. $4 : x = x : 9$ nämlich $x^2 = 36$, $x = 6$, und $4 : 6 = 6 : 9$. In der Folge werden wir bey den geometrischen Verhältnißen und Proportionen das Wort geometrisch gemeiniglich hinweglassen; nur bey den arithmetischen Verhältnißen und Proportionen, weil sie sehr selten vorkommen, ist es gewöhnlich, daß man das Wort arithmetisch jederzeit hinzusetzet.

113. Wenn zwey Produkte einander gleich sind, so verhält sich der eine Faktor des ersten Produkts zu dem einen Faktor des zweyten Produkts, gleichwie der andere Faktor des zweyten Produkts zu dem anderen Faktor des ersten Produkts, oder: zwey gleiche Produkte können in eine Proportion aufgelöset werden, wenn man zwey Faktoren des einen für die äusseren, und die zwey Faktoren des anderen Produkts für die mittleren Glieder annimmt; nämlich wenn $a \cdot bm = am \cdot b$, so ist $a : am = b : bm$; imgleichen wenn $ax = mn$; so ist $a : m = n : x$; da z. B. $3 \cdot 24 = 4 \cdot 18$, so ist auch $3 : 4 = 18 : 24$; wenn $a^2 + a = ax - x^2$, so ist auch $a : x = (a - x) : (a + 1)$; wenn $x = bc$, so ist auch $1 : b = c : x$, u. s. w.

114. Mit den vier Gliedern einer Proportion können verschiedene Verwandlungen vorgenommen werden; nämlich da,

$a : aq = b : bq$, z. B. $3 : 6 = 5 : 10$, so ist

Durch die Verwechslung (alternando)

$a : b = aq : bq$; $3 : 5 = 6 : 10$.

Durch die Umkehrung (invertendo)

$aq : a = bq : b$; $6 : 3 = 10 : 5$.

Durch die Zusammensetzung (componendo)

$a : a + aq = b : b + bq$; $3 : 3 + 6 = 5 : 5 + 10$; $3 : 9 = 5 : 15$.
$a + aq : aq = b + bq : bq$; $3 + 6 : 6 = 5 + 10 : 10$; $9 : 6 = 15 : 10$.
$a + aq : a = b + bq : b$; $3 + 6 : 3 = 5 + 10 : 5$; $9 : 3 = 15 : 5$.
$a : aq - a = b : bq - b$; $3 : 6 - 3 = 5 : 10 - 5$; $3 : 3 = 5 : 5$.
$a : b - a = aq : bq - aq$; $3 : 5 - 3 = 6 : 10 - 6$; $3 : 2 = 6 : 4$.

Durch die Multiplikation, und Division.

$am : amq = bn : bnq$; $3 . 4 : 6 . 4 = 5 . 7 : 10 . 7$; $12 : 24 = 35 : 70$.
$a : amq = b : bmq$; $3 : 6 . 4 = 5 : 10 . 4$; $3 : 24 = 5 : 40$.
$am : aq = bm : bq$; $3 . 4 : 6 = 5 . 4 : 10$; $12 : 6 = 20 : 10$.

$\frac{a}{n} : \frac{aq}{n} = b : bq$; $\frac{3}{7} : \frac{6}{7} = 5 : 10 = 1 : 2$

$a : \frac{aq}{n} = b : \frac{bq}{n}$; $3 : \frac{6}{7} = 5 : \frac{10}{7}$.

Durch die Erhebung zu Potenzen.

$a^2 : a^2q^2 = b^2 : b^2q^2$; $9 : 36 = 25 : 100$.
$a^3 : a^3q^3 = b^3 : b^3q^3$; $27 : 216 = 125 : 1000$.
$a^m : a^mq^m = b^m : : b^mq^m$, nicht aber $a^m : a^mq^m = b : bq$.

Setzen

Setzen wir nun $m = \frac{1}{n}$, so ist auch

$a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{1}{n}}q^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}}q^{\frac{1}{n}}$, oder $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{aq} = \sqrt[n]{b} : \sqrt[n]{bq}$.
nämlich da z. B. $36 : 144 = 25 : 100$, so ist auch
$\sqrt{36} : \sqrt{144} = \sqrt{25} : \sqrt{100}$; das ist $6 : 12 = 5 : 10$.

115. Auch finden noch folgende Wahrheiten statt.

Wenn $a : aq = b : bq$; $3 : 6 = 5 : 10$.
und $c : cq = b : bq$; $7 : 14 = 5 : 10$.
so ist auch $a : aq = c : cq$; $3 : 6 = 7 : 14$.

Wenn $a : aq = b : bq$; $4 : 12 = 2 : 6$
und $anq : aq = bnq : bq$; $10 : 12 = 5 : 6$
so ist auch $a : anq = b : bnq$; $4 : 10 = 2 : 5$.

Wenn $a : aq = b : bq$; $5 : 15 = 2 : 6$
und $aq : anq = bq : bnq$; $15 : 30 = 6 : 12$
so ist auch $a : anq = b : bnq$; $5 : 30 = 2 : 12$.

Wenn $a : b = c : d$; $4 : 2 = 12 : 6$
und $b : e = f : c$; $2 : 8 = 3 : 12$
so ist auch $a : e = f : d$; $4 : 8 = 3 : 6$
oder wenn $a : b = c : d$; $4 : 2 = 12 : 6$
und $e : b = c : f$; $8 : 2 = 12 : 3$
so ist auch $a : e = f : d$; $4 : 8 = 3 : 6$.

Wenn $a : b = c : d$; $3 : 6 = 5 : 10$
$e : f = g : k$; $7 : 21 = 4 : 12$
$m : n = p : q$; $8 : 32 = 11 : 44$
so ist auch $a.e.m : b.f.n = c.g.p : d.k.q$; $168 : 4032 = 220 : 5280 = 1 : 24$.

Wenn $x = ab$ und $y = cd$ } so ist auch $x : y = ab : cd$; denn in allen diesen Proportionen sind die Produkte der äusseren dem Produkte der mittleren Glieder gleich.

116. Bey mehreren gleichen Verhältnißen verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten, gleichwie jedes erste Glied zu seinem zweyten. Denn mehrere gleiche Verhältniße können durch $a : aq$; $b : bq$; $c : cq$; $d : dq$ u. s. w. vorgestellet werden; nun aber ist $a + b + c : aq + bq + cq = a : aq = c : cq$; und auch $a + b + c + d : aq + bq + cq + dq = a : aq$, oder $= d : dq$; nämlich es verhält sich die Summe aller ersten Glieder zur Summe aller zweyten, gleichwie jedes erste Glied zu seinem zweyten.

117. Bey drey Gliedern, die in einer zusammenhangenden Proportion stehen, nämlich bey a, aq, aq^2, findet folgende Proportion statt; $a : aq^2 = a^2 : a^2q^2$; das ist, das erste Glied verhält sich zum dritten, gleichwie das Quadrat des ersten zum Quadrate des zweyten Gliedes. Wären mehrere Glieder vorhanden a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, die in einer zusammenhangenden Proportion stehen, so kann man ebenfalls sagen $a : aq^3 = a^3 : a^3q^3$; $a : aq^5 = a^5 : a^5q^5$; mit einem Worte man kann sagen, daß sich das erste zum $n$ten Gliede verhalte, gleichwie die Potenz $(n - 1)$ des ersten Gliedes zur Potenz $(n - 1)$ des zweyten Gliedes.

118. Und nun sind wir im Stande zwischen zwey gegebenen Größen zwey mittlere Proportionalen zu bestimmen. Die erste, die man finden muß, ist gleich der Cubicwurzel des Produkts aus dem Quadrate der ersten Größe multipliciret mit der zweyten gegebenen Größe. Denn es sey die eine gegebene Größe $= a$, und die zweyte $= b$; die erste zu bestimmende mittlere Proportionalgröße sey $= x$, und die zweyte $= y$, so sind a, x, y, b Glieder einer zusammenhangenden Proportion; es ist also $a : b = a^3 : x^3$; und $ax^3 = a^3b$, oder $x^3 = a^2b$ wenn man beyderseits mit a dividiret; und endlich $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a^2b}$,

das

das ist, $x = \sqrt[3]{a^2b}$. Es sey $a = 3$ und $b = 192$, so ist $x = \sqrt[3]{9 . 192} = \sqrt[3]{1728} = 12$; da nun y die mittlere Proportionalgröße zwischen $x = 12$ und $b = 192$ seyn muß, so ist $y = \sqrt{bx} = \sqrt{12 . 192} = \sqrt{2304} = 48$ vermög (112). Es sind demnach 12 und 48 die zwey gesuchten mittleren Proportionalgrößen zwischen 3 und 192; und in der That ist $3 : 12 = 12 : 48 = 48 : 192$, nämlich 2, 12, 48, 192 sind Glieder einer zusammenhangenden Proportion.

Von der Regel Detri.

119. Die (112.) vorgetragene Regel zu drey gegebenen Größen die 4te Proportionalgröße zu bestimmen heißt die Regel Detri. Die gegebenen Größen müßen mit der gesuchten Größe in einer wahren geometrischen Proportion stehen, sonst läßt sich die Regel Detri nicht anwenden; ich kann z. B. sagen: wenn drey Ellen von einem gewissen Tuche 10 fl. kosten, so kosten 12 Ellen von eben diesem Tuche 40 fl. nämlich 3 Ellen : 12 Ellen = 10 fl. : 40 fl.; folglich kann ich durch die Regel Detri finden, wie viel 12 Ellen kosten, wenn es bekannt ist, daß 3 Ellen 10 fl. kosten; ich muß um dieses zu bestimmen zu 3, 10, 12, die 4te Proportionalgröße $x = \frac{10 . 12}{3} = 40$ aufsuchen. Allein wenn es bekannt ist, daß z. B. in 3 Minuten 5 Eimer Wein aus einem Faße durch ein Loch am Boden ausfließen, so können wir nicht sagen, daß in 6 Minuten 10 Eimer ausfließen werden; denn es findet die Proportion nicht statt 3 Min. : 6 Min. = 5 Eimer : 10 Eimer, weil die Geschwindigkeit des ausfließenden Weines immer abnimmt. Wir können demnach die Menge des in 6 Min. ausfließenden Weines durch die Regel Detri nicht finden, wenn wir schon für bekannt annehmen, daß in 3 Min. 5 Eimer ausfließen.

Man muß diejenigen Dinge wissen, die untereinander in geometrischen Proportionen stehen können. Solche sind die Waaren einerley Art und ihre Preise; die Arbeit und der Lohn; die Einlage und der Gewinn bey gesellschaftlichen Rechnungen; das Interesse und das Kapital, u. s. w.

120. Die Regel Detri ist **einfach**, wenn zu drey gegebenen Größen die 4te Proportionalgröße gesucht wird; **zusammengesetzt**, wenn zu der ersten und dritten gegebenen Größe noch andere Dinge hinzugefüget werden, die mit ihnen auf keine gleiche Gattung gebracht werden können. Z. B. 5 Mann graben 3 Klafter aus, wie viel Klafter werden 20 Mann ausgraben, nämlich 5 M. : 20 M. = 3 Kl. : x Kl., oder durch die Verwechslung 5 M. : 3 Kl. = 20 M. : x Kl. das ist $x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 12$; dieß ist eine einfache Regel Detri. Wenn ich hingegen sage: 5 Mann graben in 2 Tagen 3 Klafter aus, wie viel Klafter werden 20 Mann in 6 Tagen ausgraben, so ist dieß eine zusammengesetzte Regel Detri.

121. Bey der Auflösung einer einfachen Regel Detri werden die drey gegebenen Proportionalgrößen also angesetzt, daß I. die Fragzahl nach dem Gleichheitszeichen an die dritte Stelle, und II. ihre gleichnamige Zahl, oder jene, die mit der Fragzahl auf eine gleiche Gattung gebracht werden könne, an die erste Stelle zu stehen komme. III. Für die unbekannte wird x an die vierte Stelle, und ihre gleichnamige Zahl an die zweyte Stelle gesetzt. Bemerket man nun bey dieser Stellung der Glieder, daß die Unbekannte x vermög den Eigenschaften der gegebenen Dinge größer werden müße als ihre gleichnamige Zahl, und findet zugleich das 3te Glied ebenfalls größer als das erste; oder auch man erkennet aus der Natur der Sache, daß x kleiner ausfallen müße als das 2te Glied, und findet zugleich das 3te Glied auch kleiner als das erste, so ist dieß eine gerade Regel Detri. Man sieht im obigen Beyspiele 5 M. : 2 Kl. = 20 M. : x Kl. daß x größer ausfallen müße,

als 2 Kl. weil 20 Mann in der nämlichen Zeit mehr ausgraben können als 5 Mann, und findet dabey das 3te Glied auch größer als das zweyte; folglich ist dieß eine gerade Regel Detri. Jmgleichen für zwey Klafter ist der Preis mit 2 fl. 50 kr. festgesetzet, wie viel soll nun für eine halbe Klafter bezahlt werden? nämlich 2 Kl. : $2\frac{5}{6}$ fl. = $\frac{1}{2}$ Kl. : x fl.; in diesem Beyspiele muß x kleiner seyn als $2\frac{5}{6}$ fl., und es ist dabey auch das 3te Glied kleiner als das 1te, folglich ist auch dieß eine gerade Regel Detri. Sieht man hingegen, daß die unbekannte Größe x aus der Natur der Sache kleiner ausfallen müße, als ihre gleichnamige Zahl ist, und findet bey der angeführten Stellung der Glieder das 3te Glied größer als das 1te; oder man erkennet, daß x größer seyn müße als die gleichnamige Zahl, und findet dabey das 3te Glied kleiner als das 1te, so ist dieß eine verkehrte Regel Detri, das ist, die zwey ersten Größen stehen mit den zwey anderen in einer verkehrten Proportion. Z. B. eine gewisse Arbeit wird in 24 Tagen von 5 Mann verfertiget; wie viel Mann sollen zu dieser Arbeit angestellet werden, damit sie in 8 Tagen fertig werden? wenn nun die Glieder also angesetzet werden 34 T. : 5 M. = 8 T. : x M. so sieht man, daß das 3te Glied kleiner sey als das 1te, und doch weiß man aus der Natur der Sache, daß x größer als 5 seyn müße; es ist also dieß eine verkehrte Regel Detri. Jmgleichen ein General rückt mit 2400 Mann in eine Festung, und findet allda eine 3 monatliche Versorgung für 1600 Mann; durch wie viel Monate wird diese Versorgung für seine Mannschaft hinreichend seyn? da man nun bey der gehörigen Stellung der Glieder (1600 Mann : 3 Monat = 2400 Mann : x Monat) das 3te Glied größer findet als das 1te, und dabey von der blossen Vernunft überzeuget ist, daß die unbekannte Anzahl der Monate kleiner seyn müße als 3, so ist auch dieß eine verkehrte Regel Detri.

122. Nachdem die Glieder in die gehörige Ordnung gestellt sind, so multiplicire man das 2te und 3te Glied untereinander, und dividire dieß Produkt durch das erste Glied, wenn die Regel Detri gerade ist: ist hingegen die Regel Detri verkehrt, so multiplicire man das erste und zweyte Glied untereinander, und dividire dieß Produkt durch das 3te Glied; die Quotienten sind in beyden Fällen die gesuchten Größen. So ist in dem letzten Beyspiele $x = \frac{3 \cdot 1600}{2400} = \frac{3 \cdot 2}{3} = 2$ Monat; denn 1600 Mann : 2400 Mann stehen mit 3 Monat : x Monat in einer verkehrten Proportion; nun müßte man um aus diesen Verhältnißen eine gerade Proportion zu machen, selbe also stellen; $\frac{1}{1600} : \frac{1}{2400} = 3 : x$; (111) folglich $x = \frac{3}{2400} : \frac{1}{1600} = \frac{3 \cdot 1600}{2400}$, nämlich die unbekannte Größe x wird in der verkehrten Regel Detri erhalten, wenn man bey der vorgeschriebenen Stellung der Glieder das erste und zweyte Glied untereinander multipliciret, und durch das 3te dividiret. In dem vorletzten Beyspiele 24 T. : 5 M. = 8 T. ; x M. ist $x = \frac{24 \cdot 5}{8} = 3 \cdot 5 = 15$ Mann. In dem vorhergehenden 2 Kl. : $2\frac{5}{8}$ fl. = $\frac{1}{2}$ Kl. : x fl. ist $x = \frac{2\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{17}{8} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{17}{24}$ fl. $= \frac{17 \cdot 60}{24}$ kr. $= \frac{17 \cdot 5}{2} = \frac{85}{2} = 42\frac{1}{2}$ kr.

123. Nur merke man noch folgendes.

I. Das erste und dritte Glied müßen jederzeit vollkommen gleichnamig seyn; sind sie nun in der Aufgabe ungleichnamig, und doch also beschaffen, daß sie auf eine gleiche Gattung gebracht werden können, so muß man in der Stellung der Glie-

der

der wirklich beyde auf die nämliche Gattung bringen, oder die kleinere Größe als einen Bruch von der größeren vorstellen. Z. B. für 3 fl. 12 kr. kauft man 2 ℔ von einer gewissen Waare; wie viel kauft man für 5 fl. von eben dieser Waare.

Dieß kömmt also zu stehen $3\frac{1}{5}$ fl. : 2 = 5 fl. : x ℔ und es ist $x = \frac{10}{3\frac{1}{5}}$ ℔ $= 10 : \frac{16}{5} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$ ℔ = 3 ℔ 4 Loth; oder man kann es auch also entwickeln 192 kr.: 2 ℔ = 300 kr. : x ℔ nämlich $x = \frac{600}{192}$ ℔ $= 3\frac{1}{8}$ ℔. Imgleichen für 12 kr. werden 2 Pfund 16 Loth gekauft, wie viel für 10 fl.? Dieß kömmt also zu stehen; 12 kr. : $2\frac{1}{2}$ Pf. = 600 kr. : x Pf., oder $\frac{1}{5}$ fl.: 80 Loth = 10 fl. : x Lothen.

II. Wenn bey der Fragzahl ebenfalls Größen von verschiedenen Gattungen vorfindig sind, so muß man alles auf eine gleiche Gattung bringen, oder vielmehr die beygefügten Größen der kleineren Gattung als Brüche der größeren Gattung vorstellen. Z. B. 36 Pariser Schuhe machen 37 Wiener Schuhe, wie viel werden 100 Zoll 9 Linien von dem Pariser Maße auf dem Wiener Maße betragen? Dieß wird also angesetzt; $36 : 37 = 100\frac{3}{4} : x$ Wiener Zollen; nämlich $x = \frac{37 \cdot 100\frac{3}{4}}{36} = \frac{37 \cdot \frac{403}{4}}{36} = \frac{14911}{4 \cdot 36} = \frac{14911}{144} = 103,55$ Wienerzoll $= 1^{\circ}, 2', 7'', 6''', 7''''$

III. Ueberhaupt beobachte man bey den Brüchen, die sich bey der Regel Detri einfinden, alles dasjenige, was man in der 2ten Vorlesung vorzüglich von (58) bis (62) davon vorgetragen hat. Beyspiele.

I. Wie viel kosten 9 Pfund 24 Loth von einer gewissen Waare, wenn man für 5 Pfund 1 fl. 30 kr. zahlen muß?

Dieß wird also gefunden; 5 ℔ : $1\frac{1}{2}$ fl. = $9\frac{3}{4}$ ℔ : x fl. nämlich $x = \frac{9\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2}}{5} = \frac{\frac{39}{4} \cdot \frac{3}{2}}{5} = \frac{117}{40} = 2\frac{37}{40}$ fl. $= 2$ fl. $55\frac{1}{2}$ kr.

II. 1000 fl. wie viel geben sie Interesse für eine Woche, wenn sie zu 4 pro Cento angeleget sind? Da 1000 fl. zu 4 pro Cento angelegt für ein ganzes Jahr oder für 365 Tage 40 fl. Interesse geben, so findet man das Interesse für 7 Tage auf folgende Art; 365 T. : 40 fl. = 7 T. : x fl.; nämlich $x = \frac{280}{365}$ fl. = 46 kr. beynahe.

III. Der Durchmesser einer 125pfündigen eisernen Kugel beträgt 10,2 Nürnbergerzolle; wie viel beträgt eben dieser Durchmesser Wienerzolle, da sich der Wienerzoll zu dem bey der deutschen Artillerie eingeführten Nürnbergerzolle verhält, gleichwie 1000000 : 927373? Um dieses zu finden, setze man also 1000000 : 927373 = 10,2 Zoll : x Wienerzollen; folglich $x = 9{,}4592046 = 9'', 5''', 6''''$; denn weil der Wienerzoll größer ist als der Nürnberger, so ist es nothwendig, daß man den Durchmesser, der nach dem Nürnbergermaße 10,2 Zolle beträgt, mit der kleinern Zahl multipliciren, und mit der größeren dividiren müße. Das Verhältniß 1000000 : 927373 kann man auch also ausdrücken $\frac{927373}{1000000}$, und nach (70) in folgendes $\frac{166}{179}$ verwandeln: man kann demnach auch sagen, daß sich das Wienermaß zum Nürnberger verhalte, gleichwie 179 : 166. Eben so läßt sich das Verhältniß des Parisermaßes zum Nürnbergermaße 102764 : 92737 in folgendes 41 : 37 verwandeln. Das Verhältniß des Parisermaßes zum Wienermaße 102764 : 100000 haben wir schon am angeführten Orte (70) in 37 : 36 verwandelt. Wir können bey dieser Gelegenheit die verläßlichsten Verhältniße der bey ver-

verschiedenen Artilleriekorps üblichen Fußmaßen hiehersetzen; sie sind folgende.

Wien 100000, London 96341, Nürnberg 92737, Paris 102764, Rheinländisch 99288, Turin (Piede di Liprando) 162281 bey der königl. sard. Artil. Jedes dieser Verhältniße kann man vermög (70) einfacher ausdrücken: so findet man, daß der liprandische Fuß sich zum Wiener sehr genau verhalte, wie 185 : 114. Imgleichen der Wienerfuß zum Londner, wie 27 : 26, u. s. w. Vermög eben diesem (70.) findet man, daß sich bey unseren Kanonen der Durchmesser der Kugel zum Durchmesser der Seele verhalte wie 22 : 23; und auch daß sich bey unseren Böllern der Durchmesser der Bombe zum Durchmesser des Flugs verhalte wie 21 : 22; denn es ist vorgeschrieben, daß sich der Durchmesser der Kugel zum Durchmesser der Seele verhalte, wie sich der Durchmesser einer 7pfündigen zum Durchmesser einer 8pfündigen Kugel verhält; auch ist es festgesetzt, daß der Durchmesser der Bombe zum Durchmesser des Flugs sich verhalten solle, gleichwie sich der Durchmesser einer 20pfündigen zum Durchmesser einer 23pfündigen Bombe verhält; nun aber ist der Durchmesser einer 7pfündigen = 3,902, der Durchmesser einer 8pfündigen eisernen Kugel = 4,08; der Durchmesser einer 20pfündigen = 8,414, und der Durchmesser einer 23pfündigen Bombe = 8,815 Nürnbergerzoll; und $\frac{3,902}{4,08} = \frac{3902}{4080} = \frac{22}{23}$; u. s. w.

IV. Eine feindliche Armee ist vor 3 Tagen aufgebrochen, und marschirt täglich 3 Meilen um am 9ten Tage eine Festung zu überfallen; man entschließt sich dem Feinde nachzujagen, man will ihn am 8ten Tage einholen um sein Vorhaben zu vereiteln; nun ist die Frage, wie viel Meilen des Tages man marschiren müßte? Man erwäge, daß man den nämlichen Weg, den der Feind in 8 Tagen zurücklegt, in 5 Tagen abschreiten müße; da nun der Feind in 8 Tagen $8 \cdot 3 = 24$ Meilen fortmarschiret, und schon bereits vor 3 Tagen aufgebrochen ist,

so

so muß man um ihn am 8ten Tage einzuholen die nämlichen 24 Meilen in 5 Tagen zurücklegen: man kann demnach setzen 5 T. : 24 M. = 1 T. : x M., nämlich $x = \frac{24}{5} =$ $4\frac{4}{5}$ Meilen.

V. Das Berliner Handelsgewicht verhält sich zum Leipziger Handelsgewichte wie 305 : 304; das Leipziger zum Parisergewichte wie 20 : 21; das Parisergewicht zum Wienergewichte wie 576:659; nun ist die Frage, wie sich das Berlinergewicht zum Wienergewichte verhalte? Dieses findet man durch die Multiplikation folgender drey Proportionen:

$B : L = 305 : 304$ Es bedeutet nämlich B Berliner
$L : P = 20 : 21$ L Leipziger, P Pariser, und W
$P : W = 576 : 659$ Wienergewicht.

$B.L.P : L.P.W = 305 . 20 . 576 : 304 . 21 . 659$
oder $B : W = 305 . 20 . (16 . 12 . 3) : (19 . 16) . (7 . 3) . 659$
nämlich $B : W = 305 . 20 . 12 : 19 . 7 . 659$
das ist $B : W = 73200 : 87647$ vermög (115)
und endlich $B : W = 5 : 6$ beynahe, wenn das Verhältniß $73200 : 87647 = \frac{73200}{87647}$ nach (70) in $\frac{5}{6}$ verwandelt wird. Man muß demnach eine gewisse Anzahl Berlinerpfunde mit $\frac{5}{6}$ multipliciren um sie in Wienerpfunde zu verwandeln; hingegen muß eine Anzahl Wienerpfunde mit $\frac{6}{5}$ multipliciret werden, damit sie Berlinerpfunde bedeute.

Folgende Beyspiele überlasse ich dem eigenen Fleiße der Anfänger zum ausarbeiten: mehrere solche Beyspiele wird sich ein jeder selbst leicht zur Uebung aufsetzen können.

I. Es befinden sich in einer Festung 6000 Mann Besatzung, und sind für 2 Monate mit Proviant versehen; nun wird

wird die Festung mit einer Bloquade bedrohet; der Kommandant erhält Ordre sich durch 3 Monate und 10 Tage zu halten; nun ist die Frage, wie viel er von der Mannschaft aus der Festung fortschicken muß?

II. Nun setze man den Fall, die ganze Mannschaft von 6000 Mann müßte in der Festung bleiben, und da entsteht die Frage, wie viel Brod man des Tages einem Mann geben könne, da sie für 2 Monate dergestalt mit Proviant versehen sind, daß ein jeder durch diese Zeit täglich $1\frac{1}{2}$ ℔ Brod erhalten könnte?

III. Eine belagerte Festung ist dermassen mit Munition versehen, daß man durch 30 Tage täglich 200 Kanonenschüße geben könne; es kömmt aber der Befehl, daß man durch 40 Tage die Festung defendiren müße; nun ist die Frage, wie viel Schüße man täglich losbrennen könne, damit die Munition für diese Zeit hinreichend sey?

124. Bey der Auflösung der zusammengesetzten Regel Detri beobachte man folgende Regeln.

I. Die Fragzahl wird nach dem Gleichheitszeichen angesetzt, und ihre Nebenzahlen werden rechts mit Punkten angehängt.

II. Die zur Fragzahl gleichnamige Größe kömmt an die erste Stelle zu stehen, und ihre Nebenzahlen werden gleichfalls rechts in der gehörigen Ordnung mit Punkten angehängt.

III. Die zu der gesuchten Größe x gleichnamige Zahl wird vor das Gleichheitszeichen hingesetzt.

IV. Nach diesem sucht man zum ersten, 3ten, und 4ten gegebenen Gliede die 4te Proportionalzahl; und

V. Endlich wird zum zweyten gegebenen Gliede, zur itzt gefundenen Zahl, und zum 5ten gegebenen Gliede die 4te Proportionalzahl gesucht, so ist dieß die verlangte Größe, wenn

in

in der Regel Detri 5 Zahlen gegeben werden, und die 6te zu suchen ist. Nur muß man bey einer jeden solchen einfachen Regel Detri, in die man eine zusammengesetzte auf diese Art zertheilet hat, genau untersuchen, ob sie gerade oder verkehrt sey. Es wird demnach das (120) vorgetragene Beyspiel also angesetzt; 5 M. 2 T. : 3 Kl. = 20 M. 6 T. : x Klafter; und dann sagt man 5 M. : 3 Kl. = 20 M. : x Kl. nämlich $x = \frac{3 \cdot 20}{5} = 3 \cdot 4 = 12$ Klafter; ferners 2 T.: 12 Kl. = 6 T. : x Kl., folglich $x = \frac{12 \cdot 6}{2} = 12 \cdot 3 = 36$ Kl.

100 Mann verfertigen in 5 Tagen 250 Klafter von einer Schanze; man will die ganze Länge von 1000 Klaftern in 2 Tagen fertig haben; wie viel Mannschaft solle dazu angestellet werden? Dieß findet man also 250 Kl. 5 T.: 100 M. = 1000 Kl. 2 T. : x M.; nun setze man 250 Kl. : 100 M. = 1000 Kl. : x M., nämlich $x = \frac{100000}{250} = 400$ M.; ferner setze man 5 T. : 400 M. = 2 T. : x M., so ist endlich $x = \frac{5 \cdot 400}{2} = 1000$ Mann, weil dieß eine verkehrte Regel Detri ist.

Imgleichen 5 M. verfertigen in 6 Tagen 600 Faschinen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten; nun sollen in 2 Tagen 18000 Faschinen verfertiget werden, und die Mannschaft solle täglich 12 Stunden lang arbeiten; wie viel Mannschaft solle zu dieser Arbeit angestellet werden? Dieß kömmt also zu stehen.

600 F. 6 T. 8 St. : 5 M. = 18000 F. 2 T. 12 St. : x M. dann setzt man 600 F. : 5 M. = 18000 F. : x M., und es ist $x = \frac{5 \cdot 18000}{600} = 150$ Mann.

Weiters sagt man 6 T. : 150 M. = 2 T. : x Mann, und

es

es ist $x = \frac{6 \,.\, 150}{2} = 450$ Mann.

Und endlich 8 St. : 450 M. = 12 St. : x Mann, und es ist $x = \frac{8 \,.\, 450}{12} = \frac{2 \,.\, 450}{3} = 2 \,.\, 150 = 300$ Mann; es ist demnach die gesuchte Anzahl der Mannschaft = 300.

125. Man gebraucht auch die Regel Detri, wenn ein Ganzes in mehrere Theile zu zertheilen ist, welche ein gewisses Verhältniß untereinander haben müßen. Z. B. Drey setzen zusammen in die Lotterie; A giebt dazu 4, B giebt 6, und C giebt 10 Kreuzer; mit dieser Einlage gewinnen sie eine Summe von 320 Dukaten = 1280 fl.; nun ist die Frage wie viel von dieser Summe einem jeden gebühre?

Eines jeden sein gebührender Theil muß sich eben so zum ganzen Gewinne verhalten, gleichwie sich eines jeden seine Einlage zur sämtlichen Einlage verhält; oder die ganze Einlage verhält sich zum ganzen Gewinne, gleichwie eines jeden seine Einlage zu seinem Gewinne: man addire demnach ihre Einlagen zusammen.

4 + 6 + 10 = 20; dann sage man
20kr. : 1280 fl. = 4kr. : x fl. = 256 fl. der Antheil des 1ten
20kr. : 1280 fl. = 6kr. : x fl. = 384 fl.. .... 2ten
20kr. : 1280 fl. = 10kr. : x fl. = 640 fl.. .... 3ten

der sämtliche Gewinn.. .. = 1280 fl.

Zu einem gewissen Feuerwerksatze gehören von
ganzen reinen Schwefel 7 ℔
gebrochenen Salpeter.. 6 —
gestossenen Antimonium 2 —
Knürsch Pulver......0 — 24 Loth
flüchtigen Stupinen...0 — 10 —

Summe 16 Pf. 2 Loth.

Nun

Nun will man von diesem Satze 257 Pfund verfertigen; wie viel soll von jeder Gattung genommen werden? Dieses findet man also; da 16 Pfund 2 Loth $= 16\frac{1}{16}$ Pf. $= \frac{257}{16}$ Pf., so ist

$\frac{257}{16} : 257 = 7$ Pf. : x 112 Pf. Schwefel
.... $= 6$ — : x 96 — Salpeter
.... $= 2$ — : x 32 — Antimonium
.... $= \frac{3}{4}$ — : x 12 — Pulver
.... $= \frac{5}{16}$ — : x 5 — Stupinen

Zusammen 257 Pfund.

Zu einem guten Schießpulver gehören 6 Theile Salpeter, 1 Theil Schwefel, und 1 Theil Kohlen; wie viel soll man nun zu 24 Centnern von jeder Gattung nehmen? Da $6 + 1 + 1 = 8$ sind, so wird die Regel Detri also angesetzt:

$8 : 24 = 6 : x = 18$ Centner Salpeter
...... $= 1 : x =$ 3.. .... Schwefel
...... $= 1 : x =$ 3.. .... Kohlen

Zusammen 24 Centner.

A giebt zu einer Handlungsgesellschaft 1000, *B* giebt 2000, und *C* giebt 5000 fl. Zusammen 8000; sie gewinnen mit einander 1600 fl. wie viel gebührt einem jeden? Dieses wird also gefunden.

$8000 : 1600 = 1000 : x = 200$ fl. der Gewinn des 1ten
.... $= 2000 : x = 400$ fl.. .... 2ten
.... $= 5000 : x = 1000$ fl.......... 3ten

Alle drey zusammen 1600 fl.

126. Sollte überdieß auch die Zeit verschieden seyn, durch die ein jeder seine Einlage bey der Handlung liegen läßt, so muß eines jeden seine Einlage noch mit der Zeit multipliciret, und die Summe dieser Produkte für das erste Glied der Regel Detri angenommen werden. Z. B. bey einer Handlungsgesellschaft läßt

A 1000 fl. durch 12 Monate liegen...... 12000
B 3000 fl. durch 8.................. 24000
C 5000 fl. durch 4.................. 20000

Summe 56000

Sie gewinnen zusammen 2800 fl.; wie viel soll ein jeder erhalten? Dieses findet man auf folgende Art:

$56000 : 2800 = 12000 : x =$ 600 fl. der Gewinn des 1ten
.... $= 24000 : x =$ 1200 fl............ 2ten
.... $= 20000 : x =$ 1000 fl............ 3ten

Alle drey zusammen 2800 fl.

127. 40 Maaß Wein zu 10 kr., 70 Maaß zu 12 kr. und 50 Maaß zu 24 kr. sollen zusammengemischt werden; wie theuer solle sodann die Maaß hintangegeben werden? Dieses findet man also:

40 Maaß zu 10 kr. kosten 400 kr.
70 .... 12 .... 840 —
50 ...... 24 .... 1200 —

160 Maaß kosten demnach 2440 kr. folglich kostet eine Maaß

$$\frac{2440}{160} = \frac{61}{4} = 15\tfrac{1}{4} \text{ kr.}$$

128. Einen Wein zu 12 kr. will jemand mit einem Weine zu 24 kr. dergestalt vermischen, daß die ganze Vermischung zusammen 300 Maaß betrage, deren jede 16 kr. werth sey; wie viel soll von jeder Gattung dazu genommen werden? Dieses findet man also

$$16\left|\begin{array}{c|c|l} 12 & 24-16 & 8 \text{ Die Differenz zwischen 16 und 24} \\ 24 & 16-12 & 4 \text{ Die Differenz zwischen 16 und 12} \end{array}\right.$$

12 Summe dieser Differenzen.

Dann sagt man $12 : 300 = 8 : x = 200$ Maaß von 12kr. W.
$12 : 300 = 4 : x = 100$ Maaß von 24kr. W.

Zusammen 300 Maaß.

Dieses ist ein Beyspiel von der **Vermischungsregel** (Regula Alligationis) wir werden in der folgenden Vorlesung die sowohl zur Vermischungsregel, als auch die zur sogenannten **Regel des Falschen** zugehörigen Beyspiele auf eine kürzere, und allgemeinere Art auflösen, als es sonst die Rechenmeister nur durch die Regel Detri zu thun pflegen. Folgendes Beyspiel gehört zur Regel des Falschen: einer wurde gefragt, wie viel er im Vermögen habe; er antwortet: der dritte, der vierte, und der fünfte Theil meines Vermögens beträgt 940 fl.; wie groß wird sein Vermögen wohl seyn? Man setze, es sey sein Vermögen einer Zahl gleich, die sich durch 3, 4 und 5 theilen läßt; es sey also sein Vermögen $= 60$ fl.; nun ist $\frac{60}{3} = 20$, $\frac{60}{4} = 15$, $\frac{60}{5} = 12$, nämlich $20 + 15 + 12 = 47$ und nicht 940; folglich ist 60 zu klein; ferner setze man $47 : 940 = 60 : x$, so ist $x = \frac{940 \cdot 60}{47} = 20 \cdot 60 = 1200$, nämlich sein Vermögen ist 1200 fl., wovon der dritte Theil 400, der vierte 300, und der fünfte Theil 240, zusammen 940 fl. betragen. Vermög der folgenden Vorlesung wird sein Vermögen also gefunden.

Man setze das unbekannte Vermögen $= x$ fl., so ist $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 940$ vermög der Aussage

20x

$$\left.\begin{aligned}\frac{20x + 15x + 12x}{60} &= 940\\ \frac{47x}{60} &= 940 \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}$$ Wenn die Brüche auf gleiche Benennung gebracht werden.

$47x = 56400$ wenn man beyderseits mit 60 multipliciret

$x = 1200$ fl. wenn man beyderseits mit 47 dividiret.

Fünfte Vorlesung.

Von den Aufgaben, die durch Gleichungen des ersten und zweyten Grades aufgelöset werden.

Von den Aufgaben, die auf reine Gleichungen führen.

129. Eine **Aufgabe** (Problema) ist das Begehren aus einigen gegebenen bekannten Größen andere unbekannte zu bestimmen: z. B. eine Zahl zu finden, welche mit ihrem 3ten Theile vermehret 12 zum Vorschein bringt, ist eine Aufgabe, bey der die Zahl 12 gegeben ist. Damit man nun aus den bekannten die unbekannten Größen bestimmen könne, so muß zwischen beyden ein gewisser Zusammenhang statt finden; diesen Zusammenhang nennt man die **Bedingungen** der Aufgabe; so ist im obigen Beyspiele die Bedingung diese, daß die unbekannte Größe mit ihrem dritten Theile vermehret die bekannte Größe 12 zum Vorschein bringen müße.

130. Die Bedingungen der Aufgabe müßen durch Gleichungen ausgedrücket werden, wenn eine Aufgabe aufzulösen ist.

Man bezeichnet in dieser Absicht jede der unbekannten Größen, die keinen deutlichen Zusammenhang untereinander haben, durch einen beliebigen Buchstaben. Sollte hingegen eine unbekannte Größe mit der anderen in einem deutlichen Zusammenhange stehen; z. B. die zweyte sollte das doppelte, 3fache ... $n$fache oder $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$.. $\frac{1}{m}$tel von der ersten seyn, so darf man die zweyte nicht mehr durch einen eigenen Buchstaben benennen, wenn man die erste durch x ausgedrücket hat, sondern man muß selbe sodann durch $2x$, $3x$, .. nx oder $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{3}$.. $\frac{x}{m}$ bezeichnen. Die bekannten Größen endlich können durch beliebige Buchstaben ausgedrücket werden; doch ist dieses nicht unumgänglich nothwendig, wenn die bekannten Größen Zahlen sind. Diesem zufolge wird nun obige Aufgabe algebraisch also ausgedrückt.

Eine Zahl zu finden.................. x

welche mit ihrem dritten Theile vermehret.... $x + \frac{x}{3}$

12 zum Vorschein bringt............... $x + \frac{x}{3} = 12$

Folgende Aufgabe wird hingegen also ausgedrückt

Zwey Zahlen zu finden.................... x, y

welche zusammen addiret die Summe s...... $x + y = s$

und von einander abgezogen die Differenz d..... $x - y = d$

zum Vorschein bringen.

131. Wenn man auf diese Art so viele Gleichungen erhält, als unbekannte Größen zu finden sind, so ist die Aufgabe bestimmt, das ist, für jede unbekannte Größe kann nur ein einziger Werth gefunden werden. So sind beyde angeführten Beyspiele bestimmte Aufgaben; denn in dem ersten kan nur $x = 9$, und in dem zweyten Beyspiele $x = \frac{s + d}{2}$, und $y = \frac{s - d}{2}$ seyn, wie wir es in der Folge sehen werden. Sollten hingegen weniger Gleichungen möglich seyn, als unbekannte Größen

zu

zu erfinden sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, das ist, für die unbekannte Größe können mehrere, ja zuweilen unzählige Werthe gesetzet werden, die der Aufgabe ein Genügen leisten; z. B. zwey Zahlen zu finden, welche miteinander multipliciret 48 zum Vorschein bringen, nämlich $xy = 48$, ist eine unbestimmte Aufgabe: denn 2 und 24, 3 und 16, 4 und 12, 6 und 8, nebst unendlich vielen gebrochenen Zahlen 96 und $\frac{1}{2}$, 144 und $\frac{1}{3}$ u. s. w. haben die angeführte Eigenschaft, daß sie mit einander multipliciret 48 zum Vorschein bringen. Setzen wir in dieser Aufgabe die zweyte Bedingung hinzu, daß die erste Größe x von der zweyten $\frac{1}{3}$ seyn solle, nämlich $x = \frac{y}{3}$, so ist die Aufgabe bestimmt; denn es kann alsdann nur $x = 4$, und $y = 12$ seyn.

132. Wenn die Aufgabe bestimmt ist, und eine einzige unbekannte Größe gesucht wird, so kann man durch blosses Calculiren den Werth der unbekannten Größe finden; das ist, man kann zu einer Gleichung gelangen, die auf der einen Seite nur die unbekannte Größe ganz allein in der ersten Potenz mit dem positiven Zeichen, und auf der anderen Seite des Gleichheitszeichens lauter bekannte Größen enthält, wenn man die Bedingung der Aufgabe durch eine Gleichung ausdrücket, und sodann

I. Die bekannten Glieder der Gleichung alle auf die eine, und die unbekannten auf die andere Seite bringet, und selbe beyderseits reduciret,

II. Mit derjenigen Größe, mit der die Unbekannte dividiret ist, alle Glieder der Gleichung multipliciret,

III. Mit derjenigen Größe, mit der die Unbekannte multipliciret ist, alle Glieder der Gleichung dividiret,

IV. Endlich wenn man die Wurzel desjenigen Exponenten aus beyden Theilen der Gleichung auszieht, auf den die unbekannte Größe erhoben ist. Durch eine fleißige, und aufmerksame Uebung wird ein Anfänger sowohl die Fähigkeit eine Aufgabe durch Gleichungen auszudrücken, als auch die Fertigkeit die Gleichungen zu entwickeln erlangen.

So ist im obigen Beyspiele................ $x + \frac{x}{3} = 12$

wenn man die zwey ersten Glieder auf gleiche Benennung bringt, und reduciret................ $\frac{4x}{3} = 12$

wenn man beyderseits mit 3 multipliciret........ $4x = 36$

wenn man beyderseits mit 4 dividiret........... $x = 9.$

Im zweyten Beyspiele................... $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$

wenn man die erste Gleichung zu der 2ten addiret. $2x = s + d$

wenn man beyderseits mit 2 dividiret....... $x = \frac{s + d}{2}$

In dem nämlichen Beyspiele............. $\begin{cases} x + y = s \\ x - y = d \end{cases}$

wenn man die 2te Gleichung von der 1ten abzieht... $2y = s - d$

wenn man beyderseits mit 2 dividiret.......... $y = \frac{s-d}{2}$

Wenn demnach die Summe zweyer Zahlen $= s$, und ihre Differenz $= d$ gegeben sind, so ist die größere $x = \frac{s + d}{2}$ $= \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$, und die kleinere Zahl $y = \frac{s - d}{2} =$ $\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$; das ist, die größere Zahl besteht aus der halben Summe mehr der halben Differenz; und die kleinere Zahl besteht

steht aus der halben Summe weniger der halben Differenz; es sey z. B. $s = 18$, $d = 8$, so ist $x = 9 + 4 = 13$, und $y = 9 - 4 = 5$.

Aus der Gleichung $y = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d$ fließt auch folgende $\frac{1}{2}d = \frac{1}{2}s - y$, wenn man $\frac{1}{2}d$ auf diese, und y auf die andere Seite des Gleichheitszeichens mit verkehrten Zeichen trägt, das ist, wenn man $\frac{1}{2}d$ beyderseits addiret, und y beyderseits abzieht.

Es ist demnach die halbe Differenz gleich der halben Summe weniger der kleineren Zahl; so ist in unserem Beyspiele $4 = 9 - 5$.

Dieses Beyspiel $x + y = s$ und $x - y = d$ wäre eine Aufgabe von zwey unbekannten Größen; ehe wir die Aufgaben von zwey oder mehr unbekannten Größen auseinander setzen, wollen wir einige Beyspiele von einer einzigen unbekannten Größe zur Uebung hieherſetzen. Als

I. Eine Zahl zu finden........ x
welche mit ihrem 10ten Theile, und mit $\frac{19}{2}$ vermehret.................. $x + \frac{x}{10} + \frac{19}{2}$
die Zahl 70 zum Vorschein bringt.... $x + \frac{x}{10} + \frac{19}{2} = 70$

Wenn man nun das bekannte Glied $\frac{19}{2}$ auf die andere Seite mit verkehrten Zeichen trägt, das ist, wenn man beyderseits $\frac{19}{2}$ abzieht (Grundsatz IV) so ist...... $x + \frac{x}{10} = 70 - \frac{19}{2}$

wenn man beyderseits reduciret........ $\frac{11x}{10} = \frac{121}{2}$

wenn man beyderseits mit 10 multipliciret.......................... $11x = 121 . 5$

wenn man beyderseits mit 11 dividiret.. $x = 11 . 5 = 55$

II. Einer wurde um seine monatliche Einnahme befragt; er antwortet: der halbe, der dritte, und der 4te Theil davon übersteigt die Einnahme selbst um 2 fl. Nennen wir demnach seine Einnahme x fl. so ist vermög der

Bedingung der Aufgabe............ $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=x+2$

wenn man alle unbekannte Glieder auf eine Seite trägt, und auf gleiche Benennung bringt............ $\frac{6x+4x+3x-12x}{12}=2$

wenn man selbe reduciret........ $\frac{x}{12}=2$

und endlich mit 12 beyderseits multipliciret.................... $x=24$.

Es ist demnach seine monatliche Einnahme $= 24$ fl. wovon die Hälfte $= 12$, der dritte $= 8$, und der vierte Theil $= 6$ zusammen 26 fl. $= 24 + 2$ beträgt.

III. Es wurde jemand um sein Alter befragt, und er antwortet: wenn man die Anzahl meiner Jahre.. x

um die Hälfte meines Alters vermehrte.. $x+\frac{x}{2}$

und diese ganze Summe um den 4ten Theil dieser nämlichen Summe verminderte $x+\frac{x}{2}-\left(\frac{x+\frac{x}{2}}{4}\right)$

so würde man 99 Jahre erhalten.... $x+\frac{x}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x}{8}=99$.

nämlich $\frac{8x+4x-2x-x}{8}=99$
$\frac{9x}{8}=99$ durch die Reduktion auf eine gleiche Benennung.

$9x = 99 \cdot 8$...... durch die Multiplikation mit 8.

$x = 11 \cdot 8 = 88$ durch die Division mit 9.

IV.

IV. Ein gemeinschaftlicher Gewinn von 6000 fl. ist unter drey Gesellen dergestalt zu theilen, daß der zweyte um 5 fl. mehr als der erste, und der dritte 4mal mehr als die zwey übrigen zusammen weniger 25 fl. haben solle; wie viel soll nun ein jeder erhalten.

Es sey der Antheil des ersten.......... x

so ist der Antheil des zweyten.......... $x + 5$

und der Antheil des 3ten Gesellen.... $8x + 20 - 25$

Da nun alle drey zusammen 6000 fl. haben,

so ist.. $x + (x+5) + (8x + 20 - 25) = 6000$,

nämlich $10x = 6000$;

und folglich der Antheil des ersten $x = 600$,

der Antheil des zweyten $= 600 + 5 = 605$

und endlich der Antheil des dritten $= 4 \cdot (600 + 605) - 25 = 4 \cdot 1205 - 25 = 4820 - 25 = 4795$ fl.

Und diese drey Theile zusammen addirt $600 + 605 + 4795 = 6000$ sind wirklich dem ganzen gegebenen Gewinne gleich.

V. Eine Zahl zu finden.......... x

wovon der vierte Theil mit zwey Drittheilen

vermehrt.......................... $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3}$

den Quotienten von 132 getheilt durch die

gesuchte Zahl zum Vorschein bringt...... $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3} = \frac{130}{x}$

das ist $\frac{11x}{12} = \frac{132}{x}$ durch die Reduktion auf gleiche Benennung

$\frac{11x^2}{12} = 132$ wenn man beyderseits mit x multiplicirt.

$11x^2 = 132 \cdot 12$

$x^2 = 12 \cdot 12 = 144$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}$ } denn die Wurzeln aus gleichen Größen

nämlich $x = 12$ } sind einander gleich

VI. Einige Hauptleute liegen zu Felde; jeder von ihnen hat 3mal so viel Unterofficiere und 20mal so viel Gemeine unter sich, als es der Hauptleute sind; jeder Unterofficier erhält monatlich eben so viel Gulden, jeder Gemeine aber halb so viel Gulden, als es Hauptleute sind; und der monatliche Sold für die Mannschaft aller dieser Hauptleute beträgt 13000 fl. Wie viel waren der Hauptleute? Wie viel Unterofficiere, wie viel Gemeine hatte jeder Hauptmann unter seinem Komando? wie viel betrug der monatliche Sold eines jeden Unterofficiers, wie viel eines jeden Gemeinen?

Bey dem ersten Anblicke scheint die Aufgabe fünf unbekannte Größen zu enthalten: allein bey einer geringen Ueberlegung sieht man alsogleich, daß nur die Anzahl der Hauptleute die eigentliche unbekannte Größe ist; wird einmal diese gefunden, so sind alsogleich auch alle übrigen bekannt.

Es sey demnach die Anzahl der Hauptleute. x
so ist die Anzahl der Unterofficiere eines jeden Hauptmanns. . $3x$
und die Anzahl der Gemeinen. . . . . $20x$
folglich ist die Anzahl aller Unterofficiere. . . . . $3x^2$
und die Anzahl aller Gemeinen. . . . . $20x^2$
denn wenn 1 Hauptmann $20x$ Gemeine hat, so haben x Hauptleute $x \,.\, 20x = 20x^2$ Gemeine unter sich.

Da nun 1 Unterofficier monatlich x fl. erhält, so werden $3x^2$ Unterofficiere $x \,.\, 3x^2 = 3x^3$ fl. erhalten.

Und da 1 Gemeiner monatlich $\frac{1}{2}x$ fl. erhält, so werden $20x^2$ Gemeine $\frac{1}{2}x \,.\, 20x^2 = 10x^3$ fl. erhalten.

Es ist demnach der monatliche Sold aller Unterofficiere $= 3x^3$
und der monatliche Sold aller Gemeinen. . . . . $= 10x^3$
Nun beträgt dieses zusammen 13000; folglich $3x^3 + 10x^3 = 13000$, oder $13x^3 = 13000$; $x^3 = 1000$, und endlich
$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{1000}$, das ist $x = 10$.

Es waren demnach 10 Hauptleute; jeder hatte 30 Unterofficiere, und 200 Gemeine; jeder Unterofficier erhielt monatlich 10, und jeder Gemeine 5 fl.

VII.

VII. Einer kauft etliche Ellen Tuch, und zahlt für jede 2 Ellen 7 fl.; darnach verkauft er jede 3 Ellen zu 11 fl., und gewinnt dabey 50 fl. Nun ist die Frage, wie viel Ellen des Tuchs gewesen sind?

Es sey die Anzahl Ellen x, so kosteten selbe beym Einkaufen $\frac{7x}{2}$ fl.; denn 2 Ellen : 7 fl. $=$ x Ellen : $\frac{7x}{2}$ fl.; dieß ist also die Auslage; die Einnahme hingegen ist $\frac{11x}{3}$; denn da er 3 Ellen um 11 fl. verkaufte, so erhielt er für x Ellen $\frac{11x}{3}$ fl., weil 3 Ellen : 11 fl. $=$ x Ellen : $\frac{11x}{3}$ fl.; nun ist der Gewinn, das ist die Differenz zwischen der Einnahme und Auslage $= 50$; folglich $\frac{11x}{3} - \frac{7x}{2} = 50$; und $x = 300$ Ellen.

VIII. Mehrere Kinder theilten die väterliche Verlassenschaft also untereinander; das 1te nahm 1000 fl. mehr dem 6ten Theile des Ueberrestes; das 2te nahm 2000 mehr dem 6ten Theile des Ueberrestes; das 3te nahm 3000 mehr dem 6ten Theile des Ueberrestes u. s. w. nämlich jedes nachfolgende nahm um 1000 fl. mehr als das vorhergehende, und noch dazu den 6ten Theil des Ueberrestes, der natürlicher Weise immer kleiner werden mußte; der letzte Rest endlich wurde dem jüngsten Kinde gegeben. Nun fügte es sich, daß alle gleichviel bekamen. Wie groß ware diese Verlassenschaft? wie viel waren der Kinder? und wie viel erhielt ein jedes? Wenn die ganze Erbschaft bekannt wäre, so würden wir den Antheil eines jeden Kindes erhalten, wenn wir von der ganzen Erbschaft 1000 fl. nähmen, und noch dazu den 6ten Theil des Ueberrestes hinzusetzten; wenn wir weiters die ganze Erbschaft mit diesem Antheile dividirten, so würde der Quotient die Anzahl der Kinder geben.

Es

Es sey demnach die ganze Erbschaft $= x$

so ist der Antheil des ersten $= 1000 + \frac{x - 1000}{6} = \frac{5000 + x}{6}$

und der Antheil des zweyten $= 2000 + \left(x - \left(\frac{5000 + x}{6}\right) - 2000\right) : 6 = 2000 + \left(\frac{6x - 5000 - x - 12000}{6}\right) : 6$ $= 2000 + \frac{5x - 17000}{36} = \frac{72000 + 5x - 17000}{36} = \frac{55000 + 5x}{36}$.

Nun ist der Antheil des ersten dem Antheile des zweyten gleich; folglich $\frac{5000 + x}{6} = \frac{55000 + 5x}{36}$, und $\frac{30000 + 6x}{36} = \frac{55000 + 5x}{36}$, oder $30000 + 6x = 55000 + 5x$; und endlich die ganze Erbschaft oder Verlassenschaft $x = 25000$ fl.

Es erhielt also das erste Kind $1000 + \frac{24000}{6} = 5000$ fl.; und da jedes der übrigen eben so viel erhielt, so ist die Anzahl der Kinder $= \frac{25000}{5000} = 5$.

IX. Einem Kourier, der schon a Meilen entfernet ist, und täglich b Meilen zurücklegt, wird ein anderer Kourier nachgeschickt, der täglich mehr Meilen als der vorige, nämlich c Meilen täglich zurück legen soll. Nun ist die Frage, nach wie viel Tagen der zweyte Kourier den ersten einholen wird.

Es sey die Anzahl dieser Tage $= x$, so ist der Weg des zweyten Kouriers, der in x Tagen zurückgelegt wird $= cx$ Meilen. In dieser nämlichen Zeit wird der erste Kourier, der

schon

schon a Meilen gemacht hat, noch bx Meilen zurücklegen. Es ist demnach der ganze zurückgelegte Weg des ersten Kouriers $= a + bx$. Nun müßen diese beyden zurückgelegten Wege einander gleich seyn, weil der zweyte Kourier den ersten einholen muß; folglich $cx = a + bx$; $cx - bx = a$; oder $x \cdot (c - b) = a$; und endlich $x = \frac{a}{c - b}$.

Es sey $a = 24$, $b = 6$, $c = 8$ Meilen, so ist $x = 12$ Tag.

Nach dieser nämlichen Formel wird auch folgende Aufgabe aufgelöset. Es wurde jemand gefragt, wie viel Uhr es sey? und er antwortet: ich kann die Abtheilungen der Minuten nicht mehr deutlich unterscheiden; nur so viel sehe ich, daß zwischen 7 und 8 Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger decke. Wie viel Uhr wird es wohl dazumal gewesen seyn? Man setze in obiger Formel $a = 7$ Stunden, $b = 1$, und $c = 12$, weil man weiß, daß der Minutenzeiger 12 deckte, da der Stundenzeiger auf 7 Uhr wiese, und es auch bekannt ist, daß der Minutenzeiger 12 Abtheilungen in der nämlichen Zeit zurücklege, da der Stundenzeiger nur durch eine Abtheilung fortrückt. Es ist demnach $x = \frac{7}{12 - 1} = \frac{7}{11}$ Stund über 7 Uhr, nämlich $\frac{7 \cdot 60}{11}$ Min. $= 38\frac{2}{11}$ Min. über 7 Uhr $= 38$ Min. 11 Sek. beynahe.

Aus obiger Gleichung $cx = a + bx$ fließen folgende

I. $a = cx - bx$, II. $b = c - \frac{a}{x}$ III. $c = b + \frac{a}{x}$

IV. $x = \frac{a}{c - b}$.

Jede dieser Formeln löset verschiedene dazugehörige Aufgaben auf, wenn man die Buchstaben in Zahlen ausdrückt. So z. B. findet man nach der Formel III. daß ein fliegendes

Korps

Korps täglich $c = 5$ Meilen zurücklegen müßte, um eine feindliche Truppe, die $a = 18$ Meilen entfernet ist, und täglich $b = 2$ Meilen fortmarschiret, am $x$ten Tage $= 6$ einzuholen.

X. Zur Erbauung einer Feldschanze werden drey Regimenter zusammen angestellt: man weiß, daß das erste Regiment allein a, das zweyte b, und das dritte c Tage zu dieser Arbeit verwenden müßte; nun ist die Frage, in wie viel Tagen $= x$ die Schanze fertig seyn werde?

Da das erste Regiment in a Tagen 1 Schanze verfertigt, so kann selbes in abc Tagen $\frac{abc}{a} = bc$, das zweyte in eben dieser Zeit $\frac{abc}{b} = ac$, und das dritte Regiment $\frac{abc}{c} = ab$ Schanzen von der nämlichen Beschaffenheit verfertigen, weil a T. : 1 Sch. $= abc$ T. : $\frac{abc}{a}$ Sch. $= bc$, und auch $b : 1 = abc : \frac{abc}{b} = ac$, wie nicht weniger $c : 1 = abc : \frac{abc}{c} = ab$ statt findet: zur Erbauung $(bc + ac + ab)$ Schanzen müßten demnach alle drey Regimenter miteinander abc Tage anwenden, und folglich auf eine Schanze $\frac{abc}{bc + ac + ab} = x$ Tage, da wieder $(bc + ac + ab)$ Sch. : abc T. $=$ 1 Sch. : x T. $= \frac{abc}{bc + ac + ab}$ statt findet.

Eben so findet man, daß eine gewisse Arbeit von zwey Personen in $\frac{xy}{x + y}$ Tagen verfertiget werde, wenn die erste allein zu dieser nämlichen Arbeit x, und die zweyte Person y Tage anwenden muß. Z. B. eine gewisse Menge Munition kann von zwey Kompagnien in 2 Wochen $= \frac{3 \cdot 6}{3 + 6}$ verfertigt wer-

werden, wenn die erste allein 3, und die zweyte Kompagnie 6 Wochen dazu anwenden muß.

Folgende Beyspiele überlasse ich dem Fleiße meiner Leser.

I. Zwey Truppen, die a Meilen von einander entfernet sind, marschiren gegeneinander; die erste legt täglich b, und die zweyte c Meilen zurück; an welchen Tag werden sie zusammenstossen?

II. Pythagoras wurde gefragt, wie viel er Schüler habe? er antwortet: die Hälfte studirt die Philosophie, der dritte Theil die Mathematik, der vierte übt sich aber noch im Stillschweigen; und eben itzt habe ich drey Schüler angenommen.

III. Eine Heidinn gieng in den Tempel Jupiters, und bat, er möchte ihr Geld, das sie bey sich hatte, verdoppeln; Jupiter thats, und sie opferte zur Dankbarkeit 2 fl. Mit dem Ueberreste gieng sie in den Tempel des Apollo, bat ein gleiches, und opferte zur Dankbarkeit für die Verdoppelung ihres bey sich habenden Geldes abermal 2 fl.; darauf verfügte sie sich nach Haus, zählte ihr Geld, und fand mit Verwunderung, daß sie der Verdoppelung ungeachtet nur 1 fl. habe. Nun ist die Frage, wie viel sie Anfangs Geld gehabt habe.

133. Wenn eine bestimmte Aufgabe meheere unbekannte Größen erhält, die in keinem deutlichen Zusammenhange untereinander stehen, so bezeichne man jede unbekannte Größe mit einem eigenen Buchstaben, und drücke sodann die Bedingungen der Aufgabe durch so viele Gleichungen aus, als man unbekannte Größen zu bestimmen hat. Z. B. Ein Wirth wurde gefragt, was er für Weine habe? er antwortet: 2 Maaß von der ersten, 2 Maaß von der zweyten, und 1 Maaß von der dritten Gattung kosten zusammen 1 fl.; 2 Maaß von der ersten, 3 Maaß von der zweyten, und 4 Maaß von der dritten Gattung kosten zusammen 2 fl.; 10 Maaß von der ersten, 4 Maaß von der zweyten, und 2 Maaß von der dritten Gattung kosten zusammen 3 fl. Was wird wohl 1 Maaß von jeder Gattung kosten? Es sey der Preis von 1 Maaß der er-

sten

sten Gattung $= x$, der zweyten $= y$, und der dritten $= z$ fl. so ist vermög der Aussage

$2x + 2y + z = 1$ Denn wenn 1 Maaß x fl. kostet,
$2x + 3y + 4z = 2$ so werden 2 Maaß $2x$ fl. und
$10x + 4y + 2z = 3$ 10 Maaß $10x$ fl. kosten.

Nach diesem suche man den Werth von der einen unbekannten Größe, z. B. von x aus der ersten von diesen Gleichungen; (in unserem Falle ist $x = \frac{1 - 2y - z}{2}$;) und substituire diesen Werth in allen übrigen Gleichungen statt dieser nämlichen unbekannten Größe,

nämlich $1 - 2y - z + 3y + 4z = 2$
$5 - 10y - 5z + 4y + 2z = 3$

oder $\left.\begin{array}{l} y + 3z = 1 \\ -6y - 3z = -2 \end{array}\right\}$ wenn man gehörig reduciret

so wird auf diese Art die eine unbekannte Größe hinweggeschaft, und auch die Anzahl der Hauptgleichungen um 1 vermindert werden.

Dann suche man wieder aus der ersten von diesen letzteren Gleichungen, deren Anzahl um 1 vermindert ist, den Werth von der einen unbekannten Größe; (in unserem Beyspiele ist $y = 1 - 3z$;) und substituire diesen Werth in allen übrigen von diesen letzteren Gleichungen statt der nämlichen unbekannten Größe,

nämlich $-6.(1-3z) - 3z = -2$, oder $-6 + 18z - 3z = -2$
das ist $15z = 4$ wenn man reduciret

und endlich $z = \frac{4}{15}$ fl.

so wird auf diese Art auch die zweyte unbekannte Größe hinweggeschaft, und die Anzahl der Hauptgleichungen um 2 vermindert werden. Wenn man auf diese Art fortfährt, daß man nämlich wieder aus der ersten von diesen letzteren Gleichungen, wenn

wenn deren noch mehrere vorhanden sind, den Werth von der einen unbekannten Größe sucht, und selben in allen übrigen dieser letzteren Gleichungen statt der nämlichen unbekannten Größe substituiret, so wird man endlich zu einer Gleichung gelangen, in der sich eine einzige unbekannte Größe befindet; man wird demnach den Werth dieser unbekannten Größe finden können. So ist in unserem Falle $z = \frac{4}{15}$ fl., das ist 1 Maaß von der dritten Gattung kostet $\frac{4}{15}$ fl. $= \frac{4 \cdot 60}{15}$ kr. $= 4 \cdot 4 = 16$ kr.

Wenn die eine unbekannte Größe gefunden ist, so werden die übrigen leicht entwickelt, wenn man den Rückweg geht, das ist, wenn man in einer der vorhergehenden Gleichungen diesen gefundenen Werth für die unbekannte Größe substituiret; so z. B. ist in unserem Falle $y = 1 - 3z$, nämlich $y = 1 - \frac{3 \cdot 4}{15} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$ fl., wenn man statt z seinen gefundenen Werth setzet. Eine Maaß von der zweyten Gattung kostet demnach $\frac{1}{5}$ fl. $= 12$ kr.

Substituiret man endlich diese beyden Werthe für y und z in einer der vorhergehenden Gleichungen, so wird auch x bestimmet werden. In unserem Beyspiele haben wir $x = \frac{1 - 2y - z}{2}$; folglich $x = \left(1 - \frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right) : 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{2}{15} = \frac{15 - 6 - 4}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ fl. das ist 1 Maaß von der ersten Gattung kostet $\frac{1}{6}$ fl. $= 10$ kr.

Diese Methode die unbekannten Größen aus den Gleichungen hinwegzuschaffen ist allgemein; doch wird sie gemeiniglich nur damals angewendet, wenn die unbekannten Größen entweder untereinander multipliciret, oder wenn selbe in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben sind.

134. Sollten hingegen die unbekannten Größen weder miteinander multipliciret, noch in verschiedenen Gleichungen zu verschiedenen Potenzen erhoben seyn, so können selbe durch die blosse Addition und Subtraktion entwickelt werden, wie es aus folgenden zu ersehen ist.

I. In dem vorigen Beyspiele

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 10x + 4y + 2z = 3 \end{array}\right\} \text{ist} \quad \begin{array}{l} 8x + 8y + 4z = 4 \ldots . \mathfrak{A} \\ 2x + 3y + 4z = 2 \ldots . \mathfrak{B} \\ 20x + 8y + 4z = 6 \ldots . \mathfrak{C} \end{array}$$

wenn man die erste Gleichung mit 4, und die dritte mit 2 multipliciret, damit die eine unbekannte Größe z in allen 3 Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte;

und nun ist $\quad -6x - 5y = -2 \ldots . \mathfrak{D}$

$$18x + 5y = 4 \ldots . \mathfrak{E}$$

wenn die Gleichung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{C}$ abgezogen wird, damit die unbekannte Größe z hinweggeschaffet werde;

es ist also auch $12x = 2$, wenn $\mathfrak{D}$ zu $\mathfrak{E}$ addiret wird, damit auch y verschwinde; nämlich es ist

$x = \frac{1}{6}$

Nun ist aus der Gleichung $\mathfrak{D}$, $y = \dfrac{2 - 6x}{5}$; folglich

$y = \dfrac{2 - 1}{5} = \dfrac{1}{5}$, wenn man statt x den gefundenen Werth setzet. Endlich ist aus der ersten Gleichung $z = 1 - 2y - 2x$ folglich ist, wenn man für x und y ihre Werthe substituiret,

$$z = 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{15 - 6 - 5}{15} = \frac{4}{15} \text{ fl.}$$

II. Drey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden. . . . . x, y, z.
daß die erste zu der zweyten 40. . . . . . $x + y = 40 \ldots \mathfrak{A}$
die zweyte zu der dritten 60. . . . . $y + z = 60 \ldots \mathfrak{B}$
und endlich die erste zu der dritten addirt $58\frac{1}{2}$ zum Vorschein bringe. . . . . $x + z = 58\frac{1}{2} \ldots \mathfrak{C}$.

Nun

Nun ist $z - x = 20$.. D, wenn die erste Gleichung A von der zweyten B abgezogen wird;
es ist also auch $2z = 78\frac{1}{2}$, wenn die Gleichung D zu der Gleichung C addiret wird, damit x verschwinde, weil es in beyden diesen Gleichungen gleiche Coefficienten und verschiedene Zeichen hat; nämlich es ist

$$z = 39\tfrac{1}{4} = \frac{157}{4}.$$

Nun ist aus der zweyten gegebenen Gleichung $y = 60 - z$; folglich

$$y = 60 - 39\tfrac{1}{4} = 20\tfrac{3}{4} = \frac{83}{4}$$

Und endlich ist aus der ersten Gleichung $x = 40 - y$; folglich

$$x = 40 - 20\tfrac{3}{4} = 19\tfrac{1}{4} = \frac{77}{4}.$$

III. Unter drey Regimenter, die sich in einem Treffen tapfer hielten, sind 1326 fl. dergestalt zu theilen, daß von dem Regimente, welches sich am vorzüglichsten auszeichnete, ein jeder Mann 1 fl. erhalten, und der Ueberrest unter die zwey anderen Regimenter gleich zertheilet werden sollte. Wird nun dieser Gulden dem ersten Regimente zuerkennet, so erhält ein jeder Mann von den zwey übrigen Regimentern $\frac{1}{2}$ fl.; giebt man diesen Gulden dem zweyten Regimente, so bekömmt ein jeder von der übrigen Mannschaft nur $\frac{1}{3}$ fl.; fällt endlich dieser Gulden dem dritten Regimente zu, so erhält ein jeder Mann von den zwey anderen Regimentern gar nur $\frac{1}{4}$ fl. Wie stark ist jedes dieser drey Regimenter?

Es sey die Anzahl der Mannschaft des ersten Regimentes $= x$, des zweyten $= y$, und des dritten $= z$

$$\text{so ist}\quad \left.\begin{aligned} x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} &= 1326 \\ \frac{x}{3} + y + \frac{z}{3} &= 1326 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{4} + z &= 1326 \end{aligned}\right\}$$

denn wenn 1 Mann 1, $\frac{1}{3}$, oder $\frac{1}{4}$ fl. erhält, so werden x Männer x, $\frac{x}{3}$, $\frac{x}{4}$ fl. erhalten.

Es ist also auch

$$x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1326 \ldots \mathfrak{A}$$
$$x + 3y + z = 3978 \ldots \mathfrak{B}$$
$$x + y + 4z = 5304 \ldots \mathfrak{C}$$

wenn man die zweyte gegebene Gleichung mit 3 und die dritte mit 4 multipliciret, damit die nämliche unbekannte Größe x in allen drey Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte.

Nun ziehe man die Gleichung $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$, und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{C}$ ab, damit die unbekannte Größe x hinweggeschaffet werde, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{5y}{2} + \frac{z}{2} &= 2652 \\ -2y + 3z &= 1326 \end{aligned}\right\} \text{oder} \quad \begin{aligned} 10y + 2z &= 10608 \ldots \mathfrak{D} \\ -10y + 15z &= 6630 \ldots \mathfrak{E} \end{aligned}$$

wenn die erste der zwey vorhergehenden Gleichungen mit 4 und die zweyte mit 5 multipliciret wird, damit die unbekannte Größe y in beyden Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte. Und endlich ist $17z = 17238$, wenn $\mathfrak{D}$ zu $\mathfrak{E}$ addiret wird, damit auch y verschwinde. Folglich

$$z = \frac{17238}{17} = 1014 = \text{der Mannschaft des dritten Regiments.}$$

Nun ist in einer der vorhergehenden Gleichungen $y = \frac{3z - 1326}{2}$; folglich

$$y = \frac{3042 - 1326}{2} = 858 = \text{der Mannschaft des zweyten Regiments.}$$

Endlich ist aus der ersten Gleichung $x = 1326 - \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$; folglich

$$x = 1326 - 429 - 507 = 390 = \text{der Mannschaft des ersten Regiments.}$$

IV. Zwey giengen miteinander jeder mit einigen schweren Säcken belastet; der erste klagt dem zweyten sein Elend, daß er er so schwer tragen müßte; der zweyte antwortet: du hast nicht Ursache zu klagen, da du so wenig trägst; denn wenn ich einen Sack von dir übernehmen wollte, so würde ich sodann deren zweymal so viel haben, als wie du; übernähmst hingegen du einen von den meinigen, so würden wir beyde gleichviel haben. Wie viel Säcke trug der erste, wie viel der zweyte?

Es sey die Anzahl der Säcke des ersten Trägers $= x$ und des zweyten $= y$; so ist

$$\left.\begin{aligned} x - 1 &= \frac{y + 1}{2} \\ x + 1 &= y - 1 \end{aligned}\right\}$$ denn da $y + 1$ das doppelte von $x - 1$ ist, so muß es durch 2 dividiret werden, damit eine Gleichheit erhalten werde.

Es ist also auch $2 = y - 1 - \left(\frac{y + 1}{2}\right)$, nämlich

$2 = \frac{y}{2} - \frac{3}{2}$, wenn die erste Gleichung von der zweyten abgezogen wird; das ist $y = 7$, wenn man gehörig reduciret.

Nun ist aus der zweyten gegebenen Gleichung $x = y - 2$; folglich $x = 7 - 2 = 5$. Der erste Träger trug demnach 5, und der zweyte 7 Säcke.

V. Es soll ein Wein, von dem 1 Maaß a kr. kostet, mit einem anderen Weine, von dem 1 Maaß b kr. kostet, dergestalt vermischet werden, daß man von der Vermischung d Maaß habe, deren jede c kr. werth ist. Wie viel Maaß sollen von der ersten, wie viel von der zweyten Gattung genommen werden?

Es sey die Anzahl Maaß Wein von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so ist

$$\left.\begin{aligned} x + y &= d \\ ax + by &= cd \end{aligned}\right\}$$ denn wenn 1 Maaß c kr. kostet, so müßen d Maaß cd kr. kosten.

Es ist also auch

$$\left.\begin{aligned} bx + by &= bd \\ ax + by &= cd \end{aligned}\right\}$$ wenn die erste Gleichung mit b multipliciret wird, damit y in beyden Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte.

Und endlich ist
$ax - bx = cd - bd$, wenn die erste der zwey vorhergehenden Gleichungen von der zweyten abgezogen wird, damit y verschwinde; nämlich

$$x = \frac{cd - bd}{a - b} = d \cdot \left(\frac{c - b}{a - b}\right).$$

Nun ist aus der ersten Gleichung $y = d - x$; folglich

$$y = d - \left(\frac{cd - bd}{a - b}\right) = d - \frac{cd}{a - b} + \frac{bd}{a - b} = \frac{ad - cd}{a - b}$$
$$= d \cdot \left(\frac{a - c}{a - b}\right).$$

Es sey $a = 24$, $b = 10$, $c = 16$ kr., und $d = 70$ Maaß, so müßen von der ersten Gattung $70 \cdot \frac{6}{14} = 5 \cdot 6 = 30$ Maaß, und von der zweyten $70 \cdot \frac{8}{14} = 5 \cdot 8 = 40$ Maaß, zusammen 70 zur Vermischung genommen werden.

Es sey $d = 100$ Maaß, $a = 14$, $c = 12$ kr, und $b = 0$, das ist ein 14 kr. Wein soll mit Wasser, dessen Preis $= 0$, dergestalt vermischet werden, daß man von dieser Vermischung 100 Maaß habe, deren jede 12 kr. werth sey, so müßen von dem Weine $100 \cdot \frac{12}{14} = \frac{600}{7} = 85\frac{5}{7}$, und von dem Wasser $100 \cdot \frac{2}{14} = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$, zusammen 100 Maaß zur Vermischung genommen werden.

Wäre hingegen eine Menge Weines $= d$ Maaß, wovon jede Maaß a kr. kostet, mit einem anderen Weine, wovon 1 Maaß nur b kr. kostet, dergestalt zu vermischen, daß jede Maaß von der Vermischung c kr. werth sey, so müßen von der zweyten Gattung $d\left(\frac{a - c}{c - b}\right)$ Maaß unter die Menge von d Maaß des ersten Weines gemischet werden.

Denn

Denn es sey die gesuchte Anzahl $= z$, so muß $(z + d) . c = ad + bz$ seyn, nämlich $cz + cd = ad + bz$, oder $cz - bz = ad - cd$, das ist $z . (c - b) = d . (a - c)$; und endlich $z = d . \left(\frac{a - c}{c - b}\right)$.

Z. B. in einem Faße befinden sich noch 120 Maaß Wein zu 20 kr.; wie viel Maaß 10 kr. Wein müßen hineingegossen werden, daß man jede Maaß sodann um 16 kr. hindangeben könne?

Es müßen $120 . \left(\frac{20 - 16}{16 - 10}\right) = 120 . \frac{4}{6} = 20.4 =$ 80 Maaß hineingegossen werden.

Nach dieser letzten Formel wird auch folgende Aufgabe aufgelöset.

Wie viel soll man zu 3 Mark, oder 48 Loth $= d$, des 11löthigen Silbers $= a$ von dem Fadensilber, welches 16löthig ist $= b$, hinzusetzen, damit es Probmässig, nämlich 13löthig $= c$ werde?

Nach der vorigen Formel aber wird diese Aufgabe aufgelöset.

Ein Goldarbeiter erhält zweyerley Silber, ein 12 und ein 15 löthiges; er muß daraus ein Gefäß verfertigen, welches 2 Mark oder 32 Loth 13 löthiges Silber wiegt. Wie viel muß er von jeder Gattung nehmen?

Nach der letzten Formel wird auch diese Aufgabe aufgelöset; wie viel Maaß Wasser, dessen Preis $b = 0$ ist, soll man unter d Maaß Wein, von dem jede Maaß a kr. kostet, hineingießen, damit man ihn sodann zu c kr. ausschenken könne.

VI. Jemand wird von einigen armen Leuten um ein Allmosen gebeten; der gutthätige Mann will einem jeden 4 kr. geben; er nimmt seinen Geldbeutel heraus, und sieht, daß er 3 kr. zu wenig habe; er giebt also einem jeden nur 3 kr. und es bleiben ihm noch 4 kr. übrig. Wie viel sind es der armen Leute gewesen? und wie viel Kreuzer hatte dieser Mann bey sich?

Es sey die Zahl der armen Leute $= x$, und die Zahl der Kreuzer $= y$, so ist

$\left.\begin{array}{l}4x - 3 = y \\ 3x - 4 = y\end{array}\right\}$ und auch $x - 7 = 0$, wenn die erste Gleichung von der zweyten abgezogen wird; nämlich $x = 7$, und $y = 4 \cdot 7 - 3 = 28 - 3 = 25$. Es waren also 7 arme Leute, und der wohlthätige Mann hatte 25 Kreuzer.

VII. Zwey Kanonier haben zusammen 1000 Stuckpatronen angefüllet, und gleichviel Pulver dazu verwendet. Der erste spricht zum zweyten: hätte ich eben so viel Patronen, als wie du gefüllet, so hätte ich 18 Centner Pulver verarbeitet; der zweyte antwortet: und hätte ich so viel, als wie du gefüllet, so würde ich nur 8 Centner Pulver dazu verwendet haben. Nun ist die Frage, wie viel Patronen der erste, wie viel der zweyte Kanonier gefüllet, und wie viel Centner Pulver jeder dazu verwendet habe?

Es sey die Anzahl Patronen des ersten Kanoniers $= x$, und des zweyten $= y$, so ist einmal $x + y = 1000 \ldots\ldots$ A

Ferner ist das verwendete Pulver des ersten Kanoniers $= \frac{18x}{y}$, und des zweyten $= \frac{8y}{x}$; denn es finden folgende zwey Proportionen statt.

$y : 18$ Centner $= x :$ zu den Centnern Pulvers des ersten Kanoniers$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{18x}{y}$

und $x : 8$ Cent. $= y : \ldots\ldots\ldots$ des zweyten$\ldots\ldots = \frac{8y}{x}$

Da nun beyde gleichviel Pulver verwendet hatten, so ist $\frac{8y}{x} = \frac{18x}{y}$, oder $8y^2 = 18x^2$, und $4y^2 = 9x^2$; es ist also auch $\sqrt{4y^2} = \sqrt{9x^2}$, nämlich $2y = 3x$, und $y = \frac{3}{2}x$.

Man

Man substituire diesen Werth in der Gleichung A, so ist

$x + \frac{3}{2}x = 1000$, oder $5x = 2000$; folglich

$x = 400$, $y = 600$ Patronen, und das von jedem Kanonier verwendete Pulver $= 12$ Cent.

Der erste Kanonier füllte demnach seine Patronen mit 3, und der zweyte mit 2 ℔ Pulver.

VIII. Aus folgenden vier Gleichungen.

$$A + 2B + 4C + 8D = -15 \ldots \mathfrak{A}$$
$$A + 4B + 16C + 64D = -21 \ldots \mathfrak{B}$$
$$A + 6B + 36C + 216D = 45 \ldots \mathfrak{C}$$
$$A + 8B + 64C + 512D = 231 \ldots \mathfrak{D}$$

sollen die unbekannten Größen A, B, C, und D gefunden werden.

Um diese zu finden, subtrahire man die Gleichung A von B, B von C, und C von D, damit A hinweggeschaffet werde, nämlich

$$2B + 12C + 56D = -6 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{E}$$
$$2B + 20C + 152D = 66 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{F}$$
$$2B + 28C + 296D = 186 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{G}.$$

Ferner ziehe man die Gleichung E von F, und F von G ab, damit auch B verschwinde, so ist

$$8C + 96D = 72 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{H}$$
$$8C + 144D = 120 \ldots\ldots\ldots \mathfrak{J}.$$

Endlich ziehe man auch H von J ab, so ist

$48D = 48$, nämlich

$D = 1$.

Nun ist aus der Gleichung H, $C = 9 - 12D$; folglich

$C = -3$.

Ferner ist aus der Gleichung E, $B = -3 - 6C - 28D$; folglich

$B = -13$.

Und endlich ist aus der ersten Gleichung $A = -15 - 2B - 4C - 8D$; folglich
$A = 15$.

IX. Imgleichen 4 Zahlen a, b, c, d von der Beschaffenheit zu finden, daß

$4 = a + b + c + d$
$0 = 2a + 4b + 8c + 16d$
$12 = 3a + 9b + 27c + 81d$
$88 = 4a + 16b + 64c + 256d$ sey.

Um diese zu finden, so setze man die erste Gleichung herunter, ziehe auch die erste Gleichung von der zweyten, die zweyte von der dritten, und die dritte von der vierten ab, damit man eben so viel Gleichungen, als unbekannte Größen sind, und in jeder Gleichung den nämlichen Coefficienten von a erhalte; nämlich

$4 = a + b + c + d$ .... 𝔄
$-4 = a + 3b + 7c + 15d$ ...... 𝔅
$12 = a + 5b + 19c + 65d$ ..... ℭ
$76 = a + 7b + 37c + 175d$ .... 𝔇.

Es ist also auch

$$\left.\begin{aligned} -8 &= 2b + 6c + 14d \ldots \mathfrak{E} \\ 16 &= 2b + 12c + 50d \ldots \mathfrak{F} \\ 64 &= 2b + 18c + 110d \ldots \mathfrak{G} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{wenn } \mathfrak{A} \text{ von } \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{B} \text{ von } \mathfrak{C}, \text{ und} \\ \mathfrak{C} \text{ von } \mathfrak{D} \text{ abgezogen wird.}\end{array}$$

Ferner ist.

$$\left.\begin{aligned} 24 &= 6c + 36d \ldots \mathfrak{H} \\ 48 &= 6c + 60d \ldots \mathfrak{J} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l}\text{wenn } \mathfrak{E} \text{ von } \mathfrak{F}, \\ \text{und } \mathfrak{F} \text{ von } \mathfrak{G} \text{ abgezogen wird.}\end{array}$$

Und endlich ist

$24 = 24d$, wenn 𝔋 von 𝔍 abgezogen wird; nämlich
$d = 1$.

Nun ist aus der Gleichung 𝔋, $c = 4 - 6d$; folglich
$c = -2$.

Sodann ist in der Gleichung 𝔈, $b = -4 - 3c - 7d$; folglich
$b = -5$.

Und

Und endlich ist aus der ersten Gleichung $a = 4 - b - c - d$; folglich

$a = 10$.

Folgende Beyspiele wird ein Anfänger selbst leicht ausarbeiten können.

I. Ein Sterbender hinterließ eine schwangere Frau, und ein reines Vermögen $= a$ (z. B. 9000 fl.). Sein letzter Wille war dieser: gebährst du einen Sohn, so soll derselbe von der Verlassenschaft $m$mal so viel wie du (z. B. 3mal so viel) haben; gebährst du hingegen eine Tochter, so nimm du $n$mal so viel wie sie (z. B. 2mal so viel). Nun fügte es sich, daß die Frau einen Sohn, und eine Tochter gebahr. Wie soll nun das Vermögen ausgetheilet werden?

II. Ein Meister dingt einen Gesellen also auf: für jeden Tag, den du für meine Geschäfte anwendest, zahle ich dir 8 Groschen; und für jeden Tag, den du für deine Geschäfte anwendest, zahlest du mir 6 Groschen. Nach 7 Wochen tratt der Gesell aus diesem Dienste; er machte mit seinem Herrn die Abrechnung, und es fügte sich, daß keiner dem andern etwas schuldig wäre. Nun ist die Frage, durch wie viel Tage dieser Gesell für seinen Herrn, und durch wie viel Tage er für sich gearbeitet habe?

III. Eine Verlassenschaft von 12000 fl. soll unter drey Söhne dergestalt zertheilet werden, daß der erste die Hälfte, der zweyte ein Drittheil, und der dritte ein Vierttheil erhalte, das ist, daß sich ihre Theile gegeneinander verhalten, als wie $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Wie soll nun die Theilung geschehen? Dieses findet man entweder durch die Gleichungen, oder auch nur durch Hilfe einer Gesellschaftsregel (125).

IV. Drey Regimenter werden zu einer gewissen Arbeit zusammen angestellet; das erste und zweyte Regiment hat eine eben solche Arbeit in $a = 70$, das erste und dritte in $b = 84$, und das zweyte und dritte in $c = 140$ Tagen vollendet; nun ist die Frage, in wie viel Tagen alle drey Regimenter miteinander

diese

diese Arbeit verfertigen werden, und wie viel Tage ein jedes insbesondere dazu anwenden würde, wenn es allein diese nämliche Arbeit verfertigen müßte? Man findet nach einer schicklichen Untersuchung, daß das erste Regiment allein 105, das zweyte 210, das dritte 420, und alle drey Regimenter zugleich 60 Tage zu dieser Arbeit verwenden müßen.

Von den Aufgaben, die durch verwickelte quadratische Gleichungen aufgelöset werden.

135. Wenn eine unbekannte Größe dergestalt in einer Gleichung verwickelt ist, daß ihre 1te und 2te Potenz in derselben vorkömmt, so heißt eine solche Gleichung eine verwickelte quadratische Gleichung. Eine solche Gleichung ist $x^2 + ax = b$, wenn a und b bekannte, und x eine unbekannte Größe ist. Sollte sich hingegen in einer quadratischen Gleichung nur die 2te Potenz allein befinden, so heißt sie eine reine quadratische Gleichung; denn man pflegt alle diejenigen Gleichungen, in denen sich eine einzige Potenz von der unbekannten Größe befindet, reine Gleichungen zu nennen.

136. Um die unbekannte Größe aus einer verwickelten quadratischen Gleichung zu entwickeln ordne man die Gleichung dergestalt, daß in dem ersten Gliede des ersten Theils der Gleichung das Quadrat der unbekannten Größe ganz allein ohne allen Coefficienten mit dem positiven Zeichen, und in dem zweyten Gliede die erste Potenz dieser nämlichen unbekannten Größe mit ihrem zugehörigen Coefficienten (der zuweilen auch eine zusammengesetzte algebraische Größe ist) sich befinde, der zweyte Theil der Gleichung aber lauter bekannte Größen enthalte. Auf diese Art wird zum Beyspiele die Gleichung $45x^2 = 800000 - 8000x + 20x^2$ also geordnet $x^2 + 320x = 32000$.

Ist einmal dieß geschehen, so nehme man die Hälfte des Coefficienten des zweyten Gliedes, das ist die Hälfte derjenigen Größe (sie möge einfach oder zusammengesetzt, ganz oder gebrochen

brochen seyn) mit der die erste Potenz der unbekannten Größe multipliciret ist, erhebe diese Hälfte des Coefficienten zum Quadrate, und addire dieß Quadrat zu beyden Theilen der Gleichung, so wird dadurch der erste Theil in ein vollständiges Quadrat verwandelt. Sodann ziehe man aus beyden Theilen der Gleichung die Quadratwurzel aus, so wird auf diese Art die verwickelte quadratische Gleichung in eine reine einfache Gleichung übergehen, aus der man endlich vermög den vorhergehenden den Werth der unbekannten Größe leicht bestimmen kann. So ist in der angeführten Gleichung

$$x^2 + 320x + \left(\frac{320}{2}\right)^2 = 32000 + \left(\frac{320}{2}\right)^2 =$$
$$32000 + (160)^2; \text{ nämlich}$$
$$x^2 + 320x + (160)^2 = 32000 + 25600$$
$$x^2 + 2 \cdot 160x + (160)^2 = 57600$$
$$\sqrt{x^2 + 2 \cdot 160x + (160)^2} = \sqrt{57600}$$
$$x + 160 = 240; \text{ und endlich } x = 80.$$

137. Aus der Gleichung $x^2 + ax = b$. welche alle, nur erdenkliche verwickelte quadratische Gleichungen vorstellt, findet man

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4} = \frac{4b + a^2}{4}$$
$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{4b + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$
$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Nun wissen wir, daß die Quadratwurzel aus einer jeden Größe positiv, und negativ nach Belieben zu nehmen sey; folglich können wir sagen, daß in der angeführten Gleichung $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$ sey. Bey den Aufgaben, in denen

die

die unbekannten Größen Zahlen seyn müßen, nimmt man gemeiniglich nur das positive Zeichen, wie wir es schon einmal angemerket haben.

Wenn in dieser Formel $4b$ negativ, und dabey größer als a^2 seyn sollte, so ist der Werth für die unbekannte Größe unmöglich, oder eingebildet.

Z. B. eine Zahl zu finden................ x
deren Quadrat zu 5 addiret.............. $x^2 + 5$
dieser nämlichen Zahl 2 mal genommen gleich wird $x^2 + 5 = 2x$
das ist $x^2 - 2x = -5$; $x^2 - 2x + 1 = -5 + 1 = -4$;
also auch $x - 1 = \sqrt{-4}$, und endlich $x = 1 + \sqrt{-4}$.

Dieser gefundene Werth von x will so viel sagen, daß gar keine Zahl möglich sey, welche die angeführte Eigenschaft habe; es ist demnach die Auflösung dieser Aufgabe schlechterdings unmöglich.

Beyspiele zur Uebung.

I. Aus der Gleichung $3ax^2 - ab^2 + bx^2 = cx - bx$ soll x gefunden werden.

Es ist $x^2 . (3a + b) + x . (b - c) = ab^2$, und

$$x^2 + x . \left(\frac{b - c}{3a + b}\right) = \frac{ab^2}{3a + b}$$

$$x^2 + x . \left(\frac{b - c}{3a + b}\right) + \left(\frac{b - c}{6a + 2b}\right)^2 =$$

$$\frac{ab^2}{3a + b} + \left(\frac{b - c}{6a + 2b}\right)^2$$

$$x + \frac{b - c}{6a + 2b} = \pm\sqrt{\frac{ab^2}{3a + b} + \left(\frac{b - c}{6a + 2b}\right)^2}$$

$$x = \frac{c - b}{6a + 2b} \pm \sqrt{\frac{ab^2}{3a + b} + \left(\frac{b - c}{6a + 2b}\right)^2}.$$

II. Es wurde jemand gefragt, wie viel er Geld habe? und er antwortet: wenn man von dem fünffachen Quadrate

der

der Anzahl meiner Gulden das 4fache meines Geldes hinweg-nimmt, so bleiben noch Hundert und fünf fl. übrig.

Nämlich $5x^2 - 4x = 105$; $x^2 - \frac{4}{5}x = \frac{105}{5}$;

$$x^2 - \frac{4x}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{105}{5} + \frac{4}{25} = \frac{525}{25} + \frac{4}{25} = \frac{529}{25}$$

$$x - \frac{2}{5} = \sqrt{\frac{529}{25}} = \frac{23}{5}$$

$$x = \frac{2}{5} + \frac{23}{5} = \frac{25}{5} = 5 \text{ fl.}$$

III. Ein Frauenzimmer wurde um die Jahre ihres Alters befragt, und sie antwortet: meine Mutter hat mich in dem 40ten Jahre ihres Alters geboren; wenn man nun meine Jahre mit den Jahren meiner Mutter multipliciret, so kommen die Jahre Mathusalems zum Vorschein, der 969 durchgelebet hatte. Wie alt ist wohl dieß Frauenzimmer?

Es sey ihr Alter $= x$ Jahr, so ist das Alter ihrer Mutter $= 40 + x$.

Nun ist $40x + x^2 = 969$; $x^2 + 40x + (20)^2 =$

$$969 + 400 = 1369$$

$x + 20 = \sqrt{1369} = 37$; und endlich

$$x = 37 - 20 = 17 \text{ Jahr.}$$

IV. Zwey Bauern säeten miteinander 24 Metzen aus; der erste spricht zum zweyten: wenn mir jeder Metzen so viel wiederbringt, als du gesäet hast, so werde ich 135 Metzen haben. Wie viel Metzen hatte der erste, wie viel der zweyte ausgesäet?

Es sey die Anzahl Metzen des ersten $= x$, und des zweyten Bauern $= y$; so ist

$x + y = 24$.. A, und $xy = 135$.. B; es ist also auch

$x^2 + xy = 24x$.. C, wenn die Gleichung A mit x multipliciret wird; und nun ist

$x^2 = 24x - 135$, wenn die Gleichung B von C abgezogen wird, damit y verschwinde.

Nämlich

$x^2 - 24x = -135$; $x^2 - 24x + (12)^2 = -135 + 144 = 9$

$x - 12 = 3$; und endlich $x = 15$ Metzen.

Da nun aus der ersten Gleichung $y = 24 - x$, so ist $y = 24 - 15 = 9$ Metzen.

V. Zwey Gesellen tratten in eine Handlungsgesellschaft; der erste gab dazu 1200 fl., und ließ dieses Geld durch 17 Monate bey der Handlung liegen; die Einlage des zweyten ist unbekannt; nur so viel weiß man, daß er sein Geld bey der Handlung durch 12 Monate liegen hatte, daß der Gewinn dieser beyden zusammen 750 fl., und der Gewinn des zweyten samt seiner Einlage 1030 fl. betruge. Wie groß ware die Einlage des 2ten? wie viel beträgt sein Gewinn? wie groß ist der Gewinn des ersten?

Es sey die Einlage des zweyten Gesellen $= x$ fl., so ist sein Gewinn $= \frac{9000x}{20400 + 12x}$ fl.; denn (1200 fl. $\times$ 17 Monat $+ x$ fl. $\times$ 12 Mon.) : 750 fl. $= x \times 12$: zum Gewinn des zweyten $= \frac{9000x}{20400 + 12x}$ fl. (vermög 126); folglich ist seine Einlage samt dem Gewinne $= x + \frac{9000x}{20400 + 12x} =$

$x + \frac{750x}{1700+x}$; da nun dieses 1040 fl. beträgt, so ist

$$x + \frac{750x}{1700+x} = 1040, \text{ oder}$$

$1700x + x^2 + 750x = 1768000 + 1040x$; das ist,

$x^2 + 1410x = 1768000$;

$x^2 + 1410x + (705)^2 = 1768000 + 497025 = 2265025$;

$x + 705 = \sqrt{2265025} = 1505$; und endlich $x = 800$ fl.

Die Einlage des zweyten beträgt demnach 800, sein Gewinn $1040 - 800 = 240$, und der Gewinn des ersten $= 750 - 240 = 510$ fl.

VI. Zwey Zahlen zu finden . . . . x, y
deren Produkt $= a = 160$ z. B. . . . . $xy = a$
und die Differenz der Quadrate $= b = 156$ sey . $x^2 - y^2 = b$

Nun ist aus der ersten Gleichung $y = \frac{a}{x}$; folglich ist auch

$x^2 - \frac{a^2}{x^2} = b$, wenn man statt y seinen Werth in der zweyten Gleichung substituiret; nämlich

$x^4 - a^2 = bx^2$; oder $x^4 - bx^2 = a^2$; ferner

$$x^4 - bx^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 + b^2}{4};$$

$$x^2 - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{4}} = \pm\frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2};$$

$$x^2 = \frac{b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}; \text{ und endlich}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{2}}.$$

Wenn wir nun statt a und b ihre Werthe setzen, und die positiven Zeichen beybehalten, so ist $x = 16$, und $y = 10$.

Gleichwie wir dieses Beyspiel, welches eine Gleichung vom 4ten Grade wäre, auf eine reine Gleichung reduciret haben, so können alle höheren Gleichungen von dieser Form $x^{2m} + ax^m = b$ auf die nämliche Art entwickelt werden. Denn da $x^{2m} + ax^m = b$ angenommen wird, so ist auch

$$x^{2m} + ax^m + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4} = \frac{4b + a^2}{4};$$

$$x^m + \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{4b+a^2}}{2}; \text{oder } x^m = \frac{-a \pm \sqrt{4b + a^2}}{2};$$

und endlich

$$x = \sqrt[m]{\frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}}.$$

VII. Zwey Zahlen zu finden...... x, y
deren Summe von von der Summe ihrer Quadrate abgezogen $78 = a$ übrig läßt.. $x^2 + y^2 - x - y = a$
und deren Summe zu ihrem Produkte addiret $39 = \frac{a}{2}$ zum Vorschein bringt.... $xy + x + y = \frac{a}{2}$

Nun ist aus der zweyten Gleichung $y = \frac{\frac{1}{2}a - x}{x + 1}$

Man substituire diesen Werth in der ersten Gleichung statt y, und y^2, so ist

$$x^2 + \frac{\frac{1}{4}a^2 - ax + x^2}{x^2 + 2x + 1} - x - \left(\frac{\frac{1}{2}a - x}{x + 1}\right) = a;$$

und bringe alle Glieder auf eine gleiche Benennung,

$$x^4 + 2x^3 + x^2 + \tfrac{1}{4}a^2 - ax + x^2 - x^3 - 2x^2 - x - \tfrac{1}{2}ax + x^2 - \tfrac{1}{2}a + x = ax^2 + 2ax + a;$$ nämlich

x^4

$$\left.\begin{array}{l} x^4+2x^3+x^2-ax\\ \quad -x^3+x^2-x\\ \qquad -2x^2-\frac{1}{2}ax\\ \qquad +x^2+x\\ \qquad -ax^2-2ax\end{array}\right\} = +a-\tfrac{1}{4}a^2+\tfrac{1}{2}a$$

oder $x^4+x^3+(1-a).x^2-\frac{7}{2}ax=\frac{3}{2}a-\frac{1}{4}a^2$;
das ist $x^4+x^3-77x^2-273x=-1404$, wenn wir für a seinem Werth substituiren.

Diese Aufgabe führte uns auf eine verwickelte höhere Gleichung, aus der wir den Werth der unbekannten Größe nach den bisher gegebenen Gründen noch nicht entwickeln können. Doch können wir die zwey unbekannten Zahlen durch reine Gleichungen bestimmen, wenn wir die Summe dieser zwey Zahlen mit $2x$, und ihre Differenz mit $2y$ bezeichnen; denn es ist alsdann vermög (132) die größere . . . . $x+y$
und die kleinere Zahl . . . . $x-y$.
Nun ist das Quadrat der größeren . . . . $x^2+2xy+y^2$
das Quadrat der kleineren Zahl . . . . $x^2-2xy+y^2$
und das Produkt der zwey Zahlen ist . . . . x^2-y^2

Es ist also $x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2-2x=a$,
und $x^2-y^2+2x=\frac{1}{2}a$

oder $\left.\begin{array}{l}2x^2+2y^2-2x=a\\ 2x^2-2y^2+4x=a\end{array}\right\}$ wenn die erste Gleichung reduciret, und die zweyte mit 2 multipliciret wird, damit y^2 in beyden Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte.

Und nun ist $4x^2+2x=2a$, wenn die zwey letzten Gleichungen addiret werden, damit y^2 verschwinde; nämlich

$$x^2+\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}a;$$

$$x^2+\frac{x}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{a}{2}+\frac{1}{16}=\frac{8a+1}{16};$$

$$x+\tfrac{1}{4}=\sqrt{\frac{8a+1}{16}}=\frac{\sqrt{8a+1}}{4};$$ und endlich

$$x = \frac{-1 + \sqrt{8a+1}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{625}}{4} =$$

$$\frac{-1 + 25}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Nun ist aus der zweyten Gleichung

$y^2 = x^2 + 2x - \frac{1}{2}a = 36 + 12 - 39 = 9$; folglich
$y = \sqrt{9} = 3$.

Es ist demnach die größere Zahl $= 6 + 3 = 9$
und die kleinere.............. $= 6 - 3 = 3$.

Auf die nämliche Weise kann folgende Aufgabe sehr leicht aufgelöset werden.

Es hatte jemand zwey Goldstuffen zu verkaufen; er begehrte für jedes Loth des ersten Stückes halb so viel Gulden, als das zweyte Stück Lothe wiegt, und die Anzahl dieser Gulden beträgt eben so viel, als beyde Stücke zusammen Lothe haben. Der Käufer nimmt beyde Stücke, und zahlt für jedes Loth des ersten Stückes eben so viel Gulden als es Lothe wiegt; für jedes Loth des zweyten Stückes aber giebt er nur halb so viel Gulden, als dieses Stück Lothe wiegt; und nach diesem Vergleiche beträgt die ganze Zahlung 27 fl. Wie viel Lothe wiegt das erste, wie viel das zweyte Stück? wie theuer wurde 1 Loth der ersten, wie theuer 1 Loth des zweyten Stücks verkauft?

Imgleichen zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Produkt, und die Differenz der Quadrate einander gleich sind. Bey Auflösung dieser letzten Aufgabe kann man entweder die Summe der zwey unbekannten Zahlen durch $2x$, und ihre Differenz durch $2y$ ausdrücken; oder auch nur die eine Zahl mit x, und die andere mit y bezeichnen.

Von einigen unbestimmten Aufgaben.

138. Bey der Auflösung einer unbestimmten Aufgabe drücke man die Bedingungen durch Gleichungen aus, und schaffe so viele unbekannte Größen hinweg, als es möglich ist. Sollte nun die Zahl der unbekannten Größen die Anzahl der Gleichungen um eine Einheit übersteigen, so wird die letzte Gleichung noch zwey unbekannte Größen enthalten, die auf keine Weise mehr hinwegzuschaffen sind. Man nehme demnach für die eine unbekannte Größe eine ganze positive Zahl nach Belieben an, so werden die übrigen dadurch bestimmet. Doch erstrecket sich dieses Belieben nur so weit, daß auch die Werthe der übrigen unbekannten Größen ganze positive Zahlen werden, weil man in einer unbestimmten Aufgabe gemeiniglich nur ganze positive Größen sucht.

Beyspiele

I. Es sollen aus 12 Centnern Pulver 1000 Stuckpatronen, und zwar die 3 ℔ digen mit 1, die 6 ℔ digen mit 2, und die 12 ℔ digen Stuckpatronen mit 3 Pfund Pulver gefüllet werden; wie viel Säckel sollen nun zu den 3, wie viel zu den 6, und wie viel zu den 12 ℔ digen Patronen genommen werden?

Es sey die Anzahl der 3 ℔ digen $= x$, der 6 ℔ digen $= y$, und der 12 ℔ digen Patronen Säckel $= z$, so ist
$x + y + z = 1000$; und $x + 2y + 3z = 1200$;
es ist also auch $y + 2z = 200$, wenn die erste Gleichung von der zweyten abgezogen wird;
und endlich $y = 200 - 2z$.

Nun kann man für z jede beliebige Zahl von 1 bis 99 annehmen.

Es sind demnach die gesuchten Werthe folgende Zahlen;

$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots\ldots\ldots\ldots 99$
$y = 198,\ 196,\ 194,\ 192,\ 190 \ldots\ldots\ldots\ldots 2$
$x = 801,\ 802,\ 803,\ 804,\ 805 \ldots\ldots\ldots\ldots 899$

II. Ein Münzmeister hat drey Gattungen Silber 15, 11, und 9 Löthiges; er soll daraus 3 Mark oder 48 Loth 13 löthiges Silber verfertigen. Wie viel Lothe soll er von jeder Gattung nehmen?

Es sey die Anzahl Lothe der ersten Gattung $= x$, der zweyten $= y$, und der dritten $= z$, so ist
$x + y + z = 48$, und $15x + 11y + 9z = 48 \cdot 13$;
das ist $9x + 9y + 9z = 432$ wenn die erste Gleichung
und $15x + 11y + 9z = 624$ mit 9 multipliciret wird.

Es ist also auch $6x + 2y = 192$, wenn die erste dieser zwey Gleichungen von der zweyten abgezogen wird; nämlich es ist
$y = 96 - 3x$.

Nun ist 24 die kleinste, und 32 die größte Zahl, die man für x annehmen kann, damit auch die Werthe von y und z ganze positive Zahlen werden. Die Vermischung kann demnach auf folgende Arten geschehen:

$x = 24, 25, 26, 27, 28 \ldots\ldots\ldots\ldots 32$
$y = 24, 21, 18, 15, 12 \ldots\ldots\ldots\ldots 0$
$z = 0, 2, 4, 6, 8 \ldots\ldots\ldots\ldots 16.$

III. Peter ist dem Paul 11 kr. schuldig; jener hat nichts als Siebner, und dieser nichts als Siebenzehner. Wie soll nun Peter den Paul bezahlen?

Peter gebe dem Paul x Siebner also $7x$ kr., und Paul gebe dem Peter y Siebenzehner nämlich $17y$ kr. zurück, so muß vermög der Bedingung der Aufgabe

$7x - 17y = 11$ seyn; nämlich $x = \dfrac{11 + 17y}{7}$, oder

$$x = 1 + \frac{4}{7} + 2y + \frac{3y}{7} = 1 + 2y + \frac{3y + 4}{7}.$$

Nun nehme man für y eine solche ganze Zahl an, daß $\dfrac{3y + 4}{7}$ eine ganze Zahl sey, so wird auch x eine ganze Zahl seyn.

Man

Man setze $y = 1$, so ist $x = 4$. Peter gebe also dem Paul 4 Siebner, und Paul gebe dem Peter 1 Siebenzehner zurück. Man kann auch $y = 8, 15, 22, 29$, u. s. w.
und .... $x = 21, 38, 55, 72$, u. s. w. setzen.

Der kleinste Werth für y kann auf folgende Art gefunden werden:

$\frac{3y + 4}{7}$ muß eine ganze Zahl seyn, damit auch x eine ganze Zahl werde, man setze nun diese Zahl $= A$, so ist $\frac{3y + 4}{7} = A$; nämlich

$$y = \frac{7A - 4}{3} = 2A - 1 + \frac{A - 1}{3}.$$

Es muß auch $\frac{A - 1}{3}$ eine ganze Zahl seyn, damit y eine ganze Zahl werde; man setze diese Zahl $= B$, so ist $\frac{A - 1}{3} = B$; nämlich
$A = 3B + 1$.

Nun substituire man diesen Werth in der vorigen Gleichung von y statt A, so ist $y = \frac{21B + 7 - 4}{3} = 7B + 1$.

Und nun setze man für B die möglichst kleinste Zahl, daß y doch noch einen positiven Werth behalte, nämlich $B = 0$, so ist $y = 1$ die kleinste Zahl, die man für y annehmen kann; und x ist in diesem Falle $= \frac{11 + 17}{7} = 4$; setzen wir hingegen

$$\left.\begin{array}{l} B = 1,\ 2,\ 3 \\ \text{so ist } y = 8,\ 15,\ 22 \\ \text{und } x = 21,\ 38,\ 55 \end{array}\right\} \text{u. s. w.}$$

IV. 5 fl. 30 kr. sollen in Siebnern, und Siebenzehnern gezahlet werden. Wie solle nun die Zahlung geschehen?

Es sey die Anzahl Siebner $= x$, und der Siebenzehner $= y$, so ist $7x + 17y = 330$ kr. oder $x = \frac{330 - 17y}{7}$; nämlich $x = 47 - 2y \frac{-3y + 1}{7}$.

Nun muß $\frac{-3y + 1}{7}$ eine ganze, und zwar negative Zahl seyn; man setze also $\frac{-3y + 1}{7} = -A$, so ist $y = \frac{7A + 1}{3} = 2A + \frac{A + 1}{3}$.

Es muß auch $\frac{A + 1}{3}$ eine ganze Zahl seyn; es sey diese Zahl $= B$, so ist $\frac{A + 1}{3} = B$; nämlich
$A = 3B - 1$.

Man substituire diesen Werth in der vorigen Gleichung von y statt A, so ist
$y = 7B - 2$.

Setzen wir nun $B = 1, \; 2, \; 3$
so ist . . . . $y = 5, \; 12, \; 19$ } Siebenzehner
und . . . . $x = 35, \; 18, \; 1$ } Siebner.

Die Zahlung kann demnach nur auf die drey Arten geschehen: 5 Siebenzehner und 35 Siebner; 12 Siebenzehner und 18 Siebner; 19 Siebenzehner und 1 Siebner.

Wenn die Zahlung eine ganze gerade Anzahl Gulden beträgt, so findet man die Siebner und Siebenzehner sehr geschwinde, wenn man zu der vorgegebenen Zahl eine Nulle hinzufüget, und selbe sodann durch 4 theilet; denn der Quotient zeigt an, wie viel Siebner und Siebenzehner zu nehmen seyn. So z. B. findet man, daß 6 fl. $= \frac{60}{4}$ Siebner $+ \frac{60}{4}$ Siebenzehner $= 15$ Siebner $+ 15$ Siebenzehner gleich seyn.

Sollte

Sollte hingegen eine ganze ungerade Anzahl Gulden mit Siebnern und Siebenzehnern auszuzahlen seyn, so hänge man ebenfalls an diese Zahl eine Nulle, theile sie sodann durch 4, lasse den Rest gänzlich hinweg, und addire zu dem Quotienten 9, so wird diese Summe die Anzahl Siebner anzeigen; von eben diesem Quotienten ziehe man 3 ab, so wird dieser Unterschied die Anzahl der Siebenzehner geben. Z. B. 11 fl. $= \left(\frac{110}{4} + 9\right)$ Siebner $+ \left(\frac{110}{4} - 3\right)$ Siebenzehner $= (27 + 9)$ Siebner $+ (27 - 3)$ Siebenzehner $= 36$ Siebnern $+ 24$ Siebenzehnern. Die Ursache dieses Verfahrens wird ein Anfänger selber leicht entdecken können, wenn er nur erwägt, daß 1 Siebner, und 1 Siebenzehner zusammen 24 kr. gleich seyn.

V. Ein Kaufmann ist 100 fl. schuldig: sein Gläubiger begehrt zweyerley Tuch dafür: die Elle von dem ersten kostet 7, und von dem zweyten 9 fl. Wie viel soll er ihm von jeder Gattung geben?

Es sey die Anzahl Ellen von der ersten Gattung $= x$, und von der zweyten $= y$, so ist

$$7x + 9y = 100;\ y = \frac{100 - 7x}{9} = 11 - \frac{7x + 1}{9};$$

Nun setze man $\frac{-7x + 1}{9} = -A$, so ist

$$x = \frac{9A + 1}{7} = A + \frac{2A + 1}{7} \ldots\ldots \mathfrak{A}$$

Ferner setze man $\frac{2A + 1}{7} = B$, so ist

$$A = \frac{7B - 1}{2} = 3B + \frac{B - 1}{2} \ldots \mathfrak{B}.$$

Weiters setze man $\frac{B - 1}{2} = C$, so ist endlich

$B = 2C + 1.$

 Man

Man substituire diesen Werth in der Gleichung B, so ist $A = 7C + 3$.

Diesen Werth von A substituire man in der Gleichung A, so ist endlich

$x = 9C + 4$.

Setzen wir nun $C = 0,\ 1$

$$\left.\begin{array}{l} \text{So ist } x = 4,\ 13 \\ \text{und } \quad y = 8,\ 1 \end{array}\right\} \text{Ellen.}$$

Der Kaufman kann demnach seinem Gläubiger von dem ersten Tuche 4, und von dem zweyten 8 Ellen; oder von dem ersten 13, und von dem zweyten 1 Elle geben.

139. Wir sehen aus diesem, daß eine unbestimmte Aufgabe, die auf eine Gleichung von dieser Form führet, $y = a + bx \pm \frac{nx \pm c}{m}$, in ganzen positiven Zahlen könne aufgelöset werden, wenn nur die zwey Zahlen m und n keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Sollten hingegen diese zwey Zahlen m und n einen gemeinschaftlichen Faktor haben z. B. $y = 1 + 10x + \frac{4x - 5}{6}$ so ist die Auflösung in ganzen Zahlen unmöglich, wie es ein jeder selbst leicht einsehen wird. Nur merke man, daß $+\frac{nx \pm c}{m} = +A$, und $\frac{-nx \pm c}{m} = -A$ zu setzen sey, um den kleinsten Werth von x zu bestimmen.

Die folgende Aufgabe wollen wir noch auseinander setzen, und die Auflösung der übrigen dem eigenen Fleiße der Anfänger überlassen.

I. Ein Schäfer wurde gefragt, wie viel er Schafe habe? er antwortet: wenn ich sie zu 3 überzähle, so bleiben mir 2 übrig, überzähle ich sie zu 5, so bleiben auch 2 übrig, überzähle ich sie endlich zu 7, so geht es gerade auf. Wiel viel Schafe hatte dieser Schäfer?

Dieses wird also aufgelöset: wenn wir die Anzahl seiner Schafe mit x bezeichnen, so müßen

$\frac{x - 2}{3}$, $\frac{x - 2}{5}$, und $\frac{x}{7}$ ganze Zahlen sey.

Man

Man setze also $\frac{x-2}{3} = A$, so ist

$x = 3A + 2 \ldots\ldots\ldots$ A.

Man substituire diesen Werth in dem zweyten Ausdrucke $\frac{x-2}{5}$ statt x, so ist $\frac{3A}{5}$ eine ganze Zahl; man setze nun

$\frac{3A}{5} = B$, so ist

$A = \frac{5B}{3} = B + \frac{2B}{3} \ldots\ldots$ B

Es muß auch $\frac{2B}{3}$ eine ganze Zahl seyn; man setze diese Zahl $= C$, nämlich $\frac{2B}{3} = C$, so ist

$B = \frac{3C}{2} = C + \frac{C}{2} \ldots\ldots$ C

Auch $\frac{C}{2}$ muß eine ganze Zahl seyn; es sey $\frac{C}{2} = D$, so ist $C = 2D$.

Nun substituire man diesen Werth für C in der Gleichung C, so ist

$B = \frac{3}{2} \cdot 2D = 3D$.

Diesen Werth für B substituire man in der Gleichung B, so ist

$A = \frac{5}{3} \cdot 3D = 5D$.

Diesen Werth für A substituire man in der Gleichung A, so ist $x = 3 \cdot 5D + 2 = 15D + 2 \ldots\ldots$ D.

Nun substituire man diesen Werth in dem dritten gegebenen Ausdrucke $\frac{7}{x}$ für x, so ist

$\frac{15D+2}{7} = 2D + \frac{D+2}{7}$ eine ganze Zahl; nämlich $\frac{D+2}{7}$ muß eine ganze Zahl seyn; man setze also $\frac{D+2}{7} = E$, so ist endlich

$D = 7E - 2$; folglich ist

$x = 15 \cdot (7E - 2) + 2 = 105E - 28$, wenn wir in der Gleichung D diesen Werth statt D substituiren.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Setzen wir nun } E = 1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots \\ \text{so ist } x = 77,\ 182,\ 287 \ldots\ldots\end{array}\right\} \text{und so weiter.}$$

Nämlich es kann für E jede beliebige ganze Zahl gesetzet werden, daß die dadurch erhaltene Zahl die angeführte Eigenschaft habe; unter diesen Zahlen ist 77 die kleinste.

II. Eine Zahl zu finden, die durch 2, 3, 4, 5 getheilt die Reste 1, 2, 3, 4 zum Vorschein bringe.

III. 2 fl. 8 kr. sollen in sieben - und zehn kr. Stücken ausgezahlet werden. Wie viel soll man von jeder Gattung nehmen?

IV. 100 Thaler wurden unter 41 Arme ausgetheilet; jedes der Kinder erhielte 2; jedes Weib 4, und ein jeder Mann 7 fl.; wie viel sind es Kinder? wie viel Weiber? und wie viel Männer gewesen?

V. Man will einen 24 kr. Wein, mit einem 10 - und einem 12 kr. Wein dergestalt vermischen, daß man von der Vermischung 100 Maaß habe, deren jede 16 kr. Werth sey. Wie viel soll von jeder Gattung genommen werden?

VI. Drey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden, daß die erste durch 19 und 15 genau theilbar sey, und durch 28 dividiret 1 übrig lasse; daß die zweyte durch 28 und 15 genau theilbar sey, und durch 19 dividiret auch 1 übrig lasse; daß endlich die dritte durch 28 und 19 genau theilbar sey, und durch 15 dividiret 1 zum Reste gebe.

140.

140. Endlich giebt es noch eine Gattung von Aufgaben, die zwar bestimmt zu seyn scheinen, und doch dabey wirklich unbestimmt sind.

Z.B. Drey Zahlen von der Beschaffenheit zu finden	x, y, z
Daß die Summe der ersten und zweyten 40..	$x + y = 40$
die Summe der zweyten und dritten 100....	$y + z = 100$
und die Differenz der ersten und dritten 60 sey..	$z - x = 60$.

Diese Aufgabe scheint bestimmt zu seyn, weil sie eben so viel Bedingungen, und Gleichungen, als unbekannte Größen enthält. Allein da die letzte Bedingung keine neue Eigenschaft der drey unbekannten Größen anzeigt, sondern nur dasjenige gleichsam wiederholet, was bereits die ersten zwey Bedingungen ausgedrücket haben, so bleibt sie noch immer unbestimmt; und dieses ist auch die Ursache, warum die unbekannten Größen bey Entwicklung der Gleichungen gänzlich verschwinden. Für die unbekannten Größen x, y, z können in unserem Beyspiele folgende Zahlen angenommen werden.

$$x = 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots\ldots 39$$
$$y = 39,\ 38,\ 37,\ 36 \ldots\ldots\ldots 1$$
$$z = 61,\ 62,\ 63,\ 64 \ldots\ldots\ldots 99.$$

Doch dergleichen Aufgaben kommen gar selten vor, wir wollen uns nicht länger damit aufhalten.

Sechste

Sechste Vorlesung.

Von den Reihen.

Von einigen Eigenschaften der Reihen.

141. Eine Reihe ist eine Folge von Größen, die nach einem gewissen und beständigen Gesetze wachsen, oder abnehmen. Ist nun jede nachfolgende Größe kleiner als die vorhergehende, so heißt die Reihe abnehmend (series convergens); ist hingegen jedes nachfolgende Glied größer als das vorhergehende, so heißt die Reihe zunehmend (series divergens). So ist 1, 2, 3, 4, 5, eine zunehmende, hingegen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ eine abnehmende Reihe.

142. Eine Reihe die man sich ohne Ende fortgesetzet vorstellt, und welche demnach eine unendliche Anzahl Glieder enthält, heißt eine unendliche Reihe (series infinita); ist hingegen die Anzahl der Glieder endlich, so wird auch die Reihe endlich genennt.

143. Man nennt aber eine Größe in Ansehung einer anderen unendlich groß, wenn der Quotient, der aus der Division der ersten durch die zweyte entsteht, alle angeblichen endlichen Gränzen übersteiget. So z. B. ist x in Ansehung 0, nämlich der Quotient $\frac{x}{0}$ eine unendliche Größe (es bedeutet aber 0 im mathematischen Verstande eine Größe, die schon über alle angeblichen Gränzen abgenommen hat, und eben verschwindet); denn je kleiner der Divisor desto größer ist der Quotient, wenn der Di-

videndus unverändert bleibet; wenn man x durch $\frac{1}{2}$ dividiret, so ist der Quotient $2x$; theilet man x durch $\frac{1}{10}$, so ist der Quotient $10x$; theilet man es durch $\frac{1}{1000}$, so ist der Quotient $1000x$ u. s. w. dividiret man endlich x durch 0, so wird der Quotient alle angeblichen endlichen Gränzen übersteigen; nämlich der Quotient $\frac{x}{0}$ wird eine unendlich große Größe seyn, obschon x in Betracht anderer endlichen Größen selbst jede endliche Größe vorstellet. Nun aber pflegt man eine unendliche Größe durch das Zeichen ∞ auszudrücken; folglich $\frac{x}{0} = \infty$; oder $\frac{x}{0} \times 0 = \infty \times 0$, nämlich $1 . x = \infty . 0$ (Grundsatz IV);
$\infty : x$
es ist also auch $1 : 0 = x \infty$ vermög (113); und
$1 \pm 0 : 1 = \infty \pm x : \infty$ vermög (114), nämlich
$1 : 1 = \infty \pm x : \infty$, weil $1 \pm 0 = 1$ ist; und endlich
$\infty \pm x = \infty$ (weil in einer jeden wahren Proportion das Produkt der mittleren dem Produkte der äusseren Glieder gleichet); das heißt.

Eine endliche Größe verschwindet in Rücksicht einer unendlichen, und muß in der Rechnung gänzlich hinweggelassen werden, wenn sie zu derselben zu addiren, oder davon abzuziehen ist.

144. Aus der obigen Proportion $1 : 0 = \infty : x$ folgt, daß auch $\frac{1}{0} = \frac{\infty}{x}$ sey; nun aber ist $\frac{1}{0}$ unendlich groß; es ist also auch $\frac{\infty}{x}$ unendlich groß, nämlich eine unendliche Größe durch eine endliche getheilt giebt einen unendlichen Quotienten. Wir können demnach auch sagen: eine unendliche Größe ist diejenige, in der eine endliche Größe unendlichmal enthalten ist.

Stellet

Stellet man sich nun eine Größe vor, in welcher eine unendliche Größe unendlichmal enthalten ist, so heißt sie eine unendliche Größe des zweyten Ranges; man erhält eine solche, wenn man zu einer endlichen Größe 1 und zu einer unendlichen ∞ das dritte Proportionalglied ∞^2 sucht, nämlich $1 : \infty = \infty : \infty^2$. Sucht man ferner zu einer endlichen Größe x, zu einer unendlichen ∞, und zu einer unendlichen Größe des zweyten Ranges ∞^2 das vierte Proportionalglied $\frac{\infty^3}{x}$, so ist dieß eine unendliche Größe des dritten Ranges, weil in derselben eine unendliche Größe des zweyten Ranges unendlichmal enthalten ist u. s. w.

145. Eine unendliche Größe des ersten Ranges verschwindet in Rücksicht einer unendlichen Größe des 2ten Ranges; und auch eine unendliche Größe des 2ten Ranges verschwindet in Ansehung einer unendlichen des 3ten Ranges; und um so mehr verschwindet eine unendliche Größe des ersten Ranges in Rücksicht einer unendlichen des 3ten Ranges: mit einem Worte jede unendliche Größe eines niedrigeren Ranges verschwindet gänzlich, wenn sie zu einer unendlichen Größe eines höheren Ranges zu addiren, oder davon abzuziehen ist. Denn

$x : \infty = \infty : \frac{\infty^2}{x}$; also auch

$\infty \pm x : \infty = \frac{\infty^2}{x} \pm \infty : \frac{\infty^2}{x}$;

nun aber ist $\infty \pm x = \infty$; also auch $\frac{\infty^2}{x} \pm \infty = \frac{\infty^2}{x}$.

Imgleichen $1 : \infty = \infty^2 : \infty^3$; also auch

$\infty \pm 1 : \infty = \infty^3 \pm \infty^2 : \infty^3$;

nun aber ist $\infty \pm 1 = \infty$; also auch $\infty^3 \pm \infty^2 = \infty^3$: u. s. w.

Wenn man demnach folgende Gleichung hätte

$f = an^m + bn^{m-1} + cn^{m-2} + dn^{m-3} + \ldots$ und würde $n = \infty$ setzen, so könnte man sagen, daß in diesem Falle nach der größten Strenge $f = an^m$ sey, vorausgesetzt, daß m eine positive Zahl bedeute.

146. Eine Größe wird in Ansehung einer anderen unendlich klein genennt, wenn sie in derselben unendlichmal enthalten ist. Da nun eine unendlich kleine Größe in einer endlichen unendlichmal, nämlich eben so oft enthalten ist, wie eine endliche Größe in einer unendlichen, so verhält sich eine unendlich kleine Größe zu einer endlichen, gleichwie sich eine endliche Größe zu einer unendlichen verhält. Nun aber pflegt man eine unendlich kleine Größe durch dieses Zeichen $\frac{1}{\infty}$ vorzustellen;

folglich $\frac{1}{\infty} : 1 = 1 : \infty$; also auch

$$1 \pm \frac{1}{\infty} : 1 = \infty \pm 1 : \infty$$

nun ist $\infty \pm 1 = \infty$; also auch $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; das heißt:

eine unendlich kleine Größe verschwindet in Rücksicht einer endlichen; sie ist demnach in der Rechnung für o anzusehen, wenn sie zu einer endlichen zu addiren, oder davon abzuziehen ist. Stellet man sich eine Größe vor, welche in einer unendlich kleinen unendlichmal enthalten ist, so heißt sie eine unendlich kleine Größe des 2ten Ranges; man findet eine solche, wenn man zu einer endlichen Größe 1 und zu einer unendlich kleinen $\frac{1}{\infty}$ das dritte Proportionalglied $\frac{1}{\infty^2}$ suchet,

nämlich $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$; und auf die nämliche Weise

kann man sich unendlich kleine Größen des 3ten, 4ten Ranges, u. s. w. vorstellen.

147. Eine unendlich kleine Größe des 2ten Ranges verschwindet in Rücksicht einer unendlich kleinen des ersten Ranges, und um so mehr verschwindet sie in Rücksicht einer endlichen; mit einem Worte: jede unendlich kleine Größe eines höheren Ranges ist für Null anzusehen, wenn sie zu einer endlichen,

oder zu einer unendlich kleinen eines niedrigeren Ranges zu addiren, oder davon abzuziehen ist;

denn es verhält sich $1 : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$; also auch

$1 \pm \frac{1}{\infty} : 1 = \frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty}$

nun aber ist $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$; also auch $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$

Imgleichen $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty^3} : \frac{1}{\infty^4}$; also auch

$\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^3} + \frac{1}{\infty^4} : \frac{1}{\infty^3}$

nun aber ist $\frac{1}{\infty} \pm \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; also auch $\frac{1}{\infty^3} \pm \frac{1}{\infty^4}$ $= \frac{1}{\infty^3}$, u. s. w.

Wenn demnach eine Gleichung von dieser Form $y = Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ vorfällt, und $x = \frac{1}{\infty}$ gesetzt wird, so kann man sagen, daß in diesem Falle nach der größten Strenge $y = Bx$ sey. Z. B. wenn man eine Größe x um die Größe v vermehret, so wird das Quadrat dieser nämlichen Größe um $2xv + v^2$ vermehret; setzet man nun, daß der zur Größe x hinzugefügte Theil $v = \frac{1}{\infty}$; nämlich unendlich klein sey, so ist die Vermehrung des Quadrats in diesem Falle nur $= 2xv$; denn $v^2 = \frac{1}{\infty^2}$ ist in Rücksicht $2xv = \frac{2x}{\infty}$ vermög vorhergehenden gleich Null zu setzen. Um dieses deutlicher einzusehen, setze man $x = 1$, und $v = \frac{1}{10}$, dann $v = \frac{1}{100}$, ferner

$v = \frac{1}{1000}$ u. s. w. und man wird es augenscheinlich sehen, wie geschwinde v^2 in Rücksicht $2xv$ sich dem Verschwinden nähert.

Anmerkung. Daß eine unendlich kleine Größe in Rücksicht einer endlichen verschwinde, nämlich daß $\frac{1}{\infty} = 0$ sey, läßt sich auch also erweisen: $\frac{1}{0} = \infty$; also auch $1 = 0 . \infty$, und $\frac{1}{\infty} = 0$, oder $1 . \frac{1}{\infty} = 1.0$ (Grundsatz IV); folglich $\frac{1}{\infty} : 1 = 0 : 1$, und $1 \pm \frac{1}{\infty} : 1 = 1 \pm 0 : 1$; nun aber ist $1 \pm 0 = 1$; es ist also auch $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$.

Wir werden in der Trigonometrie noch einmal Gelegenheit haben in der größten Strenge zu erweisen, daß $\frac{1}{0}$, oder allgemein $\frac{x}{0} = \infty$, und folglich $\frac{x}{\infty} = 0$ sey. Denn es ist vermög den trigonometrischen Gründen $\frac{a \text{ sin. } z}{\text{cos. } z} = \text{tang. } z$; setzt man nun $z = 90$ Graden, so ist $\text{tang. } z = \infty$, $\text{sin. } z = a$; und $\text{cos. } z = 0$; folglich $\frac{a^2}{0} = \infty$, oder wenn wir $a^2 = x$ setzen, so ist $\frac{x}{0} = \infty$, und $\frac{x}{\infty} = 0$.

Die unendlich kleinen Dinge kann man billig Größen nennen, weil sie eben so gut, wie die endlichen Größen der Rechnung unterworfen sind; sie verschwinden zwar, wenn sie mit endlichen Größen durch das Zeichen + und — zu verbinden sind; allein sie verschwinden keineswegs, wenn sie mit endlichen

Größen zu multipliciren, oder zu dividiren sind. Sie können untereinander alle möglichen Verhältniße eben so gut vorstellen, wie die endlichen Größen; es kann eine unendlich kleine Größe 2, 3, *n*mal größer, oder kleiner seyn, als eine andere unendlich kleine Größe des nämlichen Ranges. Wenn man z. B. zu 1, zu 10, und zu $\frac{1}{\infty}$ das 4te Proportionalglied suchet, so ist dieses $= \frac{10}{\infty}$, nämlich unendlich klein, und doch 10mal größer als $\frac{1}{\infty}$.

Auch dieses, daß die unendlich kleinen Größen in Rücksicht endlicher Größen nach der größten Strenge gleich Null zu setzen sind, hindert uns nicht sie dennoch der Rechnung zu unterwerfen; denn auch wirkliche Nullen können untereinander alle möglichen Verhältniße vorstellen. Wenn man 2 mit 0 multipliciret, so ist das Produkt $= 0$; wenn man 6 mit 0 multipliciret, so ist das Produkt auch $= 0$; allein dieses letzte Produkt ist augenscheinlich 3mal größer als das erste: denn da $0 \,.\, 2 = (0)$, und $0 \,.\, 6 = [0]$, so verhält sich $0 \,.\, 2 : 0 \,.\, 6 = (0) : [0]$ oder $2 : 6 = (0) : [0]$, und endlich $1 : 3 = (0) : [0]$. Imgleichen ist $\frac{a^2 - a^2}{ac - ac} = \frac{0}{0} = \frac{a \,.\, (a - a)}{c \,.\, (a - a)} = \frac{a}{c}$; es verhält sich demnach die obere Nulle zu der unteren, gleichwie a zu c; oder auch $\frac{a^2 - a^2}{ac - ac} = \frac{0}{0} = \frac{(a + a) \,.\, (a - a)}{c \,.\, (a - a)} = \frac{a + a}{c} = \frac{2a}{c}$; es verhält sich demnach die obere Nulle zu der unteren, wie $2a$ zu c.

Doch der eigentliche, und wahre Werth eines solchen Bruches $\frac{0}{0}$ läßt sich durch die bisher gegebenen Gründe noch nicht allgemein bestimmen; wir können noch nicht entscheiden, ob unser gegenwärtiger Bruch $\frac{a^2 - a^2}{ac - ac} = \frac{a}{c}$ oder $= \frac{2a}{c}$ sey. Wir

werden

werden Gelegenheit haben diese Materie an einem schicklicheren Orte zu erörtern.

148. Wenn eine Reihe von dieser Form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ..$ sie möge endlich, oder unendlich seyn, immerfort gleich o verbleibet, wenn man auch für x was immer für einen Werth annimmt, so ist jederzeit $A = o$, $B = o$, $C = o$, $D = o$, $E = o$, u. s. w. (es erhellet von selbsten, daß A, B, C, D.. zusammengesetzte Größen seyn können, und einige auch seyn müßen, z. B. $A = (1 - m)$, $B = (m^2 - m)$ u. s. w.)

Die Wahrheit dieses Satzes ist einleuchtend. Denn da $o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ..$ statt findet, was man immer für einen Werth der Größe x beylegt, so ist ganz gewiß $A = o$, wenn man $x = \frac{1}{\infty}$ setzet; es ist also auch $o = Bx + Cx^2 + Dx^3 ..$ oder $o = B + Cx + Dx^2 + ...$ es ist demnach auch $B = o$, wenn man wieder $x = \frac{1}{\infty}$ setzet; da nun A und $B = o$ sind, so ist $o = Cx^2 + Dx^3 + ...$ oder $o = C + Dx + ..$ folglich ist in der nämlichen Voraussetzung auch $C = o$, u. s. w. Wenn demnach $o = A + Bx + Cx^2 + ..$ immerfort statt findet, so ist jeder der Coefficienten A, B, C, D.. $= o$, wenn man für x den kleinsten Werth, nämlich $x = \frac{1}{\infty}$ setzet.

Setzen wir nun $x = \infty$, so verschwinden alle Glieder bis Ex^4, wenn Ex^4 das letzte Glied der Reihe ist; es ist demnach in dieser Voraussetzung $Ex^4 = o$, das ist $E = o$; folglich auch $o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$; nun verschwinden wieder alle Glieder bis Dx^3, da $x = \infty$ angenommen worden; folglich $Dx^3 = o$, nämlich $D = o$; eben dieß läßt sich von C, B, A erweisen. Es sind demnach die Coefficienten auch noch $= o$, wenn man für x den größten Werth, nämlich $x = \infty$ setzet.

Da nun die Coefficienten A, B, C, D, E, F.. immer $= 0$ verbleiben, wenn man auch für x den größten, oder den kleinsten Werth setzet, so ist es offenbar, daß sie auch noch $= 0$ verbleiben, wenn man für x was immer für einen beliebigen zwischen dem größten und dem kleinsten begriffenen Werth setzet. Wenn demnach $0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + ..$ immerfort statt findet, man möge für x was immer für einen Werth setzen, so ist jederzeit $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ u. s. w. Da man dieß, was wir hier von 5 Gliedern der Reihe erwiesen haben, von jeder beliebigen Anzahl der Glieder erweisen kann, so folgt, daß dieser Satz sich auf endliche, und unendliche Reihen erstrecke.

Daß die Coefficienten A, B, C, ... auch noch $= 0$ verbleiben, wenn man für x was immer für einen beliebigen zwischen dem größten und dem kleinsten begriffenen Werth setzt, kann man sich auf folgende Art überzeugen: es ist $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, u. s. w. wenn man der veränderlichen Größe x den größten oder den kleinsten Werth beylegt; nun aber sind die Coefficienten A, B, C, ... in der nämlichen Gleichung bey einem jeden beliebigen Werthe von x unveränderlich; folglich sind sie auch noch $= 0$, wenn man schon für x was immer für einen beliebigen zwischen dem größten und dem kleinsten begriffenen Werth setzt.

Dieß ist ein ungemein fruchtbarer Satz, wie wir es in der Folge sehen werden: wir wollen davon gleich eine Anwendung geben.

149. Den Bruch $\frac{1}{a + x}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

Man setze $\frac{1}{a + x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 + \ldots$.

A, B, C, D.. sollen nämlich Größen von einer solchen Beschaffenheit seyn, daß diese Gleichung statt haben könne. In dem ersten Gliede der Reihe kann x keinen Platz finden; denn

da

da der Bruch $\frac{1}{a+x}$ nicht verschwindet, wenn man $x = 0$ setzet, so darf auch die Reihe, welche wir diesem Bruche gleich annehmen, in der nämlichen Voraussetzung nicht verschwinden, welches doch nothwendig erfolgen müßte, wenn sich x auch im ersten Gliede der Reihe befände; es kann demnach x in dem ersten Gliede der Reihe keinen Platz finden Da ferner die Reihe dem Bruche immer gleich seyn solle, es möge x was immer für einen Werth haben, so muß sie allerdings aus den nacheinander folgenden Potenzen von x bestehen; die Gestalt der Reihe $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + ..$ ist demnach richtig angenommen worden. Die ganze Sache beruhet nun darauf, wie man die Größen A, B, C, D, u. s. w. bestimmen solle: dieß wollen wir alsogleich sehen.

Da $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ angenommen worden, so ist auch

$$1 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \ldots$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$$

wenn man nämlich beyde Theile der vorhergehenden Gleichung mit dem Nenner $(a + x)$ multipliciret;

und endlich $0 = (aA - 1) + (aB + A)x + (aC + B)x^2 + (aD + C)x^3 + (aE + D)x^4 + \ldots\ldots$

folglich $(aA - 1) = 0$, $(aB + A) = 0$, $(aC + B) = 0$, $(aD + C) = 0$, u. s. w.

nämlich $A = \frac{1}{a}$; $B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$; $C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$; $D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$ u. s. w.

Es ist demnach $\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} +$ u. s. w.

Nun ist uns das Gesetz der Reihe bekannt: es sind nämlich alle ungeraden Glieder positiv, und alle geraden negativ; der Exponent des Nenners ist die Zahl der Glieder selbst, und der Exponent des Zählers ist um 1 kleiner: es ist also z. B. das 10te Glied $= - \frac{x^9}{a^{10}}$; das 21te Glied $= + \frac{x^{20}}{a^{21}}$; folglich ist das *n*te Glied dieser Reihe $= \pm \frac{x^{n-1}}{a^n}$. Das *n*te Glied einer Reihe wird das **allgemeine Glied** genennt, weil es jedes Glied der Reihe vorstellet, wenn man *n* in Zahlen ausdrücket; so ist z. B. $\frac{x^{n-1}}{a^n} = \frac{1}{a}$ = dem ersten Gliede obiger Reihe, wenn man $n = 1$ setzet; $\frac{x^{n-1}}{a^n} = \frac{x^4}{a^5}$ = dem 5ten Gliede der Reihe, wenn man $n = 5$ setzet, u. s. w.

Das allgemeine Glied einer Reihe muß jederzeit eine Funktion von *n* seyn, wenn man durch *n* jede beliebige Anzahl der Glieder ausdrücken will. Unter dem Worte **Funktion** von *n* verstehen wir jeden algebraischen Ausdruck, in welchem sich *n* auf was immer für eine Art befindet; so sind $(10n)$, $(5 + \frac{1}{2}n)$, $(n^2 - an)$; $\sqrt{a^2 - n^2}$, $(n^m + n^{m-1} + a)$; u. s. w. Funktionen von *n*; eben so sind ax; $(x^2 - 1)$, $\frac{10x}{3}$, $\sqrt[3]{a^2x - b^3}$ u. s. w. Funktionen von *x*.

Diese nämliche Reihe $\frac{1}{a + x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + ..$ findet man durch die blosse Division, wenn man den Zähler 1 als den Dividendus durch das erste Glied des Nenners *a* dividiret, und mit dem Quotienten $\frac{1}{a}$ den Nenner $a + x$ als den Divisor multipliciret, das Produkt von dem

Dividendus abzieht, und den Rest $-\frac{x}{a}$ wieder mit dem ersten Gliede a des Nenners dividiret, u. s. w.

Nämlich $\frac{1}{a+x} = 1:(a+x) = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + .$

$$\pm \frac{a}{a} \pm \frac{x}{a}$$

$$-\frac{x}{a} : (a+x)$$

$$\mp \frac{ax}{a^2} \mp \frac{x^2}{a^2}$$

$$+\frac{x^2}{a^2} : (a+x)$$

$$\pm \frac{ax^2}{a^3} \pm \frac{x^3}{a^3}$$

$$-\frac{x^3}{a^3} : (a+x)$$

u. s. w.

Auf die nämliche Weise findet man $\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \ldots$ wenn man entweder $\frac{1}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots$ setzet, beyderseits mit $(a-x)$ multipliciret, die Gleichung sodann auf 0 bringet, und endlich die Größen A, B, C, D.. bestimmet; oder auch, wenn man diesen Bruch durch die blosse Division in eine unendliche Reihe auflöset. Setzen wir nun in diesem Beyspiele $a = 2$, $x = 1$, so ist der Bruch $= \frac{1}{2-1} = 1$, und die Reihe ist gleich

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$ es ist demnach die Summe aller dieser Brüche einer Einheit gleich, wenn die Reihe ins unendliche fortgesetzet wird, nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1.$

150. Der Bruch $\frac{1}{a + x}$ läßt sich auch in eine unendliche Reihe auflösen, wenn man $\frac{1}{a + x} = A + Bx^{-1} + Cx^{-2} + Dx^{-3} + \ldots$ setzet; denn es ist alsdann, wenn man beyderseits mit $(a + x)$ multipliciret, und die ganze Gleichung auf Null bringet,

$0 = (aA + B - 1) + Ax + (aB + C)x^{-1} + (aC + D)x^{-2} + (aD + E)x^{-3} + \ldots$

folglich $(aA + B - 1) = 0$, $A = 0$, $(aB + C) = 0$, $(aC + D) = 0$ u. s. w.

nämlich $A = 0$, $B = 1$, $C = -a$, $D = +a^2$, $E = -a^3$, u. s. w.

Es ist demnach $\frac{1}{a + x} = x^{-1} - ax^{-2} + a^2x^{-3} - a^3x^{-4} +$

$$= \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^3}{x^4} + \frac{a^4}{x^5} - \frac{a^5}{x^6} + \ldots \pm \frac{a^{n-1}}{x^n}.$$

151. Endlich kann der Bruch $\frac{1}{a + x}$ auch in eine unendliche Reihe verwandelt werden, wenn man $\frac{1}{a + x} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots$ oder auch $\frac{1}{a + x} = A + Ba^{-1} + Ca^{-2} + Da^{-3} + \ldots$ setzet, und sodann die Größen A, B, C, D, .. bestimmet.

Anmerkung. I. Die Reihe muß jederzeit aus den nach einander folgenden Potenzen eines Gliedes des Nenners bestehen; so z. B. muß $\frac{1}{a^2 - x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \ldots$

und $\frac{1}{b + x^m} = A + Bx^m + Cx^{2m} + Dx^{3m} + \ldots$ ingleichen $\frac{1}{a - \sqrt{x}} = \frac{1}{a - x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx^{\frac{2}{2}} + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^{\frac{4}{2}} + Fx^{\frac{5}{2}} + \ldots\ldots$ angenommen werden.

II. Würde der Nenner des Bruches aus mehr als zwey Gliedern bestehen, so müßte man zwey oder mehrere Glieder des Nenners mit einem einzigen Buchstaben benennen. Z. B. wenn $\frac{1}{1 + x + x^3}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln ist, so setze man $x + x^3 = y$, und verwandle den Bruch $\frac{1}{1 + y}$ vermög vorhergehenden in eine unendliche Reihe; nämlich

$\frac{1}{1 + y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \ldots\ldots$ und setze sodann für $y, y^2, y^3, y^4 \ldots$ ihre Werthe $(x + x^3)$, $(x^2 + 2x^4 + x^6)$, $(x^3 + 3x^5 + 3x^7 + x^9)$, $(x^4 + 4x^6 +)$, $(x^5 + 5x^7 + \ldots)$, $(x^6 + \ldots)\ldots\ldots$

$$\text{so ist } \frac{1}{1 + x + x^3} = 1 - x - x^3 + x^2 + 2x^4 + x^6 - x^3 - 3x^5 - 3x^7 + x^4 + 4x^6 - x^5 + x^6 \ldots\ldots$$
$$= 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 4x^5 + 5x^6 \ldots\ldots$$

III. Wäre überdieß der Zähler 1 des gegebenen Bruchs mit einer anderen Größe multipliciret, so muß mit dieser nämlichen Größe auch die Reihe multipliciret werden. Z. B. Da $\frac{1}{a + x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots$ so ist auch

$$\frac{a-x}{a+x} = (a-x) \cdot \frac{1}{a+x} = (a-x) \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\right) = 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{2x^4}{a^4} - \frac{2x^5}{a^5} + .$$

152. Es ist zuweilen erforderlich einen gegebenen Bruch in mehr andere zu zertheilen: und diese Zertheilung kann durch Hilfe des (148.) vorgetragenen Satzes geschehen, wenn sich nur der Nenner des vorgegebenen Bruches in mehrere ungleiche Faktoren auflösen läßt, deren jeder eine Funktion von einer nämlichen Größe des nämlichen Exponenten vorstellt. Z. B. der Bruch $\frac{1}{a^2x - x^3}$ kann in drey andere zertheilet werden, weil $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{x(a+x)(a-x)}$ ist; (der Nenner $a^2x - x^3$ besteht nämlich aus drey ungleichen Faktoren x, $a+x$, $a-x$, jeder ist eine Funktion von der nämlichen Größe x, auch hat x in einem jeden Faktor den nämlichen Exponenten 1); um die drey Brüche zu finden, setze man

$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x},$$

bringe diese drey Brüche auf eine gleiche Benennung, nämlich

$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{a^2A - Ax^2 + aBx - Bx^2 + aCx + Cx^2}{a^2x - x^3}, \text{ oder}$$

$1 = a^2A + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$, und reducire die Gleichung auf Null, so ist

$0 = (a^2A - 1) + (aB + aC)x + (C - B - A)x^2$; folglich auch $a^2A - 1 = 0$, $aB + aC = 0$, $C - A - B = 0$,

nämlich $A = \frac{1}{a^2}$, $B = -\frac{1}{2a^2}$, $C = \frac{1}{2a^2}$.

Es ist demnach $\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}$.

Diese

Diese Zertheilung findet auch noch statt, wenn schon der Zähler des Bruches eine zusammengesetzte Größe seyn sollte; nur muß in diesem Falle der höchste Exponent derjenigen Größe, aus der man die ungleichen Faktoren formiret, in dem Zähler wenigstens um 1 kleiner seyn, als der höchste Exponent der nämlichen Größe in dem Nenner ist. Z. B.

Der Bruch $\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3}$ wird in folgende drey Brüche verwandelt, $\frac{1}{a^2x} - \frac{(1 + a + a^2)}{2a^2(a + x)} + \frac{(1 - a + a^2)}{2a^2(a - x)}$, wenn man $\frac{1 - x + x^2}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a + x} + \frac{C}{a - x}$ setzet, die Brüche auf eine gleiche Benennung bringet, die ganze Gleichung auf Null reduciret, und endlich die Größen A, B, C bestimmet.

153. Würde der Bruch $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{a + bx + cx^2}{x \cdot (x - a)^2} = \frac{a + bx + cx^2}{x \cdot (x - a) \cdot (x - a)}$ zu zertheilen seyn, so müßte man $\frac{a + bx + cx^2}{x^3 - 2ax^2 + a^2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x - a)^2}$ setzen (weil der Nenner sich nicht in lauter ungleiche Faktoren auflösen läßt) und sodann auf die nämliche Weise die Größen A, B, C bestimmen.

Imgleichen da $\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{1 + x^3}{x.(x + a) \cdot (a^2 - ax + x^2)}$, so läßt sich dieser Bruch ebenfalls in andere zertheilen, wenn man $\frac{1 + x^3}{a^3x + x^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a + x} + \frac{Cx + D}{a^2 - ax + x^2}$ setzet, und sodann die Größen A, B, C, D entwickelt.

Würde endlich ein Bruch von folgender Gestalt $\frac{a^4}{ax^3 + x^4} =$

a^4

$\frac{a^4}{(a+x).\,x^3}$ zu zerfällen seyn, so muß man $\frac{a^4}{ax^3+x^4}$ $= \frac{A}{a+x} + \frac{Bx^2+Cx+D}{x^3}$ setzen; denn es ist alsdann

$a^4 = Ax^3 + aBx^2 + aCx + aD + Bx^3 + Cx^2 + Dx$,

wenn man die Brüche auf eine gleiche Benennung bringt, und den gemeinschaftlichen Nenner beyderseits hinwegläßt, oder

$$0 = \begin{array}{l} aD \\ -a^4 \end{array} \left.\begin{array}{l} +\,aC \\ +\,D \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +\,aB \\ +\,C \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +\,A \\ +\,B \end{array}\right\} x^3$$

wenn man die Gleichung ordnet, und selbe auf 0 reduciret; folglich $aD - a^4 = 0$, nämlich $D = a^3$

$$\begin{array}{ll} aC + D = 0 \ldots\ldots\ldots & C = -a^2 \\ aB + C = 0 \ldots\ldots\ldots & B = a \\ A + B = 0 \ldots\ldots\ldots & A = -a \end{array}$$

Es ist demnach der gegebene Bruch $\frac{a^4}{ax^3+x^4} = -\frac{a}{a+x}$ $+ \frac{ax^2 - a^2x + a^3}{x^3} = -\frac{a}{a+x} + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}$. Mehrere hieher gehörige Beyspiele wird sich ein Anfänger selbst leicht zur Uebung aufsetzen können.

154. Um den Gebrauch des (148) vorgetragenen Satzes deutlicher einzusehen, wollen wir denselben auch auf einige Beyspiele von der Ausziehung der Wurzeln anwenden. Z. B. Es sey $\sqrt{a+x}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln.

Um diese Reihe zu finden setze man:

$\sqrt{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$ so ist auch

$$\begin{array}{rl} a + x = & A^2 + 2ABx + B^2x^2 + 2BCx^3 + C^2x^4 + \ldots \\ & \qquad\qquad + 2ACx^2 + 2ADx^3 + 2BDx^4 + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2AEx^4 + \ldots \end{array}$$

wenn man nämlich beyde Theile der Gleichung zur 2ten Potenz erhebt. Nun bringe man die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \begin{array}{l} A^2 \\ -\,a \end{array} \left.\begin{array}{l} +\,2AB \\ -\,1 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{l} +\,B^2 \\ +\,2AC \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} +\,2BC \\ +\,2AD \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} +\,C^2 \\ +\,2BD \\ +\,2AE \end{array}\right\} x^4 +$$

folg-

folglich $A^2 - a = 0$; nämlich $A = a^{\frac{1}{2}}$

$$2AB - 1 = 0 \ldots\ldots B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$$

$$B^2 + 2AC = 0 \ldots C = -\frac{1}{2.2.2.a^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$$

$$2BC + 2AD = 0 \ldots\ldots D = \frac{1}{2.2.2.2.a^{\frac{5}{2}}} =$$

$$-\frac{1.3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}}$$

$$C^2 + 2BD + 2AE = 0 \ldots E = -\frac{1.5}{2.2.2.2.2.2.2.a^{\frac{7}{2}}} =$$

$$-\frac{1.3.5}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} \text{ u. s. w.}$$

Es ist demnach $\sqrt{a+x} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} +$
$\frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \ldots\ldots$

Sollten nun a und x Zahlen seyn, und x wäre in Rücksicht a sehr klein, etwann $a = 100$, $x = 1$, so läuft die Reyhe sehr geschwinde zusammen, so daß man nur etwelche wenige Glieder entwickeln darf, um einen ziemlich genauen Werth von $\sqrt{a+x}$ zu erhalten. Würde hingegen $x > a$ seyn, so müßte man $\sqrt{a+x} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots$ setzen, und sodann auf die nämliche Weise die Größen A, B, C, D bestimmen, um eine abnehmende Reihe $\sqrt{a+x} = x^{\frac{1}{2}} +$

$$\frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{2.4.x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.a^3}{2.4.6.x^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.a^4}{2.4.6.8.x^{\frac{7}{2}}} + ..$$

zu erhalten, weil die zunehmenden unendlichen Reihen von keinem Nutzen sind, wenn man die Buchstaben in Zahlen ausdrückt.

Würde nun $\sqrt{a^2 - x^2}$ in eine unendliche Reihe zu verwandeln seyn, so setze man $\sqrt{a^2 - x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + ...$ weil die Reihe aus den nacheinander folgenden Potenzen eines Gliedes der Wurzelgröße bestehen muß, und man wird nach gehöriger Reduktion finden $\sqrt{a^2 - x^2} =$

$$a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5\,x^8}{2.4.6.8.a^7} -$$

Setzen wir in diesem Ausdrucke $a = 1$, $x = 1$, so ist

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2.4} -$$

$$\frac{1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - ....$$

nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1.3}{2.4.6} + \frac{1.3.5}{2.4.6.8} +$

$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} + ... = 1$, das ist die Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe von Brüchen ist einer Einheit gleich.

Auf die nämliche Weise wird man finden, daß $\sqrt[3]{a^6 - x^6} =$ $a^2 - \frac{x^6}{3a^4} - \frac{x^{12}}{9a^{10}} - \frac{5x^{18}}{81a^{16}} ....$ sey, wenn man $\sqrt[3]{a^6 - x^6}$ $= A + Bx^6 + Cx^{12} + Dx^{18} + Ex^{24} + Fx^{30} + ...$ setzet, beyde Theile der Gleichung zum Cubus erhebet, sodann die ganze Gleichung auf Null bringet, und endlich die Größen $A, B, C, D ....$ entwickelt.

155. Wenn $x = \frac{y}{1+y}$ ist, so ist es offenbar, daß vermög (149) auch $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + ..$ 𝔄 sey.

Nun wird es verlangt den Werth von y aus dieser Gleichung ebenfalls durch eine unendliche Reihe zu bestimmen.

Um diesen Werth von y zu finden, welcher allerdings eine Funktion von x seyn muß, so setze man

$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ 𝔅, so ist auch

$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$

$y^3 = A^3x^3 + 2A^2Bx^4 + \ldots$

$y^4 = A^4x^4 + \ldots$

u. s. w.

Nun substituire man diese Werthe für y, y^2, $y^3 \ldots$ in der Gleichung 𝔄, und bringe sodann die ganze Gleichung auf 0, so ist

$$0 = \left.\begin{array}{l} A \\ -1 \end{array}\right\} x \; \left.\begin{array}{l} +B \\ -A^2 \end{array}\right\} x^2 \; \left.\begin{array}{l} +C \\ -2AB \\ +A^3 \end{array}\right\} x^3 \; \left.\begin{array}{l} +D \\ -2AC \\ -B^2 \\ +2A^2B \\ -A^4 \end{array}\right\} x^4 \text{ u.s.w.}$$

folglich $A - 1 = 0$, nämlich $A = 1$

$B - A^2 = 0 \ldots\ldots B = 1$

$C - 2AB + A^3 = 0 .. C = 1$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung 𝔅 für A, B, C, $D \ldots$ die gefundenen Werthe setzet,

$y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$

Dieses ist einleuchtend; denn wir haben $x = \frac{y}{1+y}$, nämlich $x + xy = y$, das ist $y = \frac{x}{1-x}$ angenommen, welches vermög (149) dieser nämlichen Reihe gleichet.

156. Auf die nämliche Art findet man aus der Gleichung $z = x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot x^9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} + \ldots$ A den Werth von x, wenn man $x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots$ B setzet; denn es ist alsdann

$$x^3 = A^3z^3 + 3A^2Bz^5 + 3AB^2z^7 + B^3z^9 + 3A^2Cz^7 + \ldots$$
$$x^5 = A^5z^5 + 5A^4z^7 + \ldots$$
$$x^7 = A^7z^7 + \ldots$$

u. s. w.

Substituiret man nun diese Werthe für x, x^3, $x^5 \ldots$ in der Gleichung A, und reduciret sodann die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\right\} z \left.\begin{matrix} + B \\ + \frac{A^3}{2 \cdot 3} \end{matrix}\right\} z^3 \left.\begin{matrix} + C \\ + \frac{3A^2B}{2 \cdot 3} \\ + \frac{3A^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} \end{matrix}\right\} z^5 \text{ u. s. w.}$$

folglich $A = 1$, $B = -\frac{1}{2 \cdot 3}$, $C = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$,

$D = -\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$, u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für A, B, C, D, ... diese gefundenen Werthe setzet

$$x = z - \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{z^7}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + .$$

157. Man erhält den nämlichen Werth für x, obschon etwas mühsamer, wenn man $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots$ setzet; denn bey der Entwicklung der Größen A, B, C, $D \ldots$ findet man, daß B, D, u. s. w. nämlich alle Coefficienten der geraden Potenzen Nullen sind,

und

und daß folglich die gesuchte Reihe nur die ungeraden Potenzen von z enthalten müße.

Anwendung der unendlichen Reihen auf die Berechnung der Logarithmen.

158. Wenn eine nämliche positive Wurzel h, welche größer als 1 ist, nacheinander zu verschiedenen Potenzen von den Exponenten m, n, p, u. s. w. erhoben die Größen b, c, d, u. s. w. zum Vorschein bringt, so heißen diese Exponenten m, n, p **Logarithmen** der Größen b, c, d; das ist, wenn $h^m = b$, $h^n = c$, $h^p = d$, u. s. w. so wird m der Logarithmus von b, n der Logarithmus von c genennt, und also bezeichnet; $m = \log. b$, $n = \log. c$, u. s. w. Z. B. da $(10)^1 = 10$, $(10)^2 = 100$, $(10)^3 = 1000$, $(10)^4 = 10000$, $(10)^5 = 100000$ u. s. w. so ist $1 = \log. 10$, $2 = \log. 100$, $3 = \log. 1000$, $4 = \log. 10000$, $5 = \log. 100000$ u. s. w.

159. Da wir $h^m = b$, und $h^n = c$ gesetzet haben, so muß auch $h^m \,.\, h^n = b \,.\, c$, nämlich $h^{m+n} = bc$ seyn (Grundsatz IV); das ist die nämliche Wurzel h muß bc zum Vorschein bringen, wenn sie zur Potenz des Exponenten $(m + n)$ erhoben wird; $(m + n)$ ist also der Logarithmus von bc; nämlich weil $h^{m+n} = bc$, so ist $m + n = \log. bc$; nun ist vermög vorhergehenden $m = \log. b$, und $n = \log. c$; folglich $\log. b + \log. c = \log. bc$; das heißt: **der Logarithmus des Produkts ist gleich der Summe aus den Logarithmen der Faktoren.** Z. B. da $100 \,.\, 1000 = 100000$, so ist auch $\log. 100 + \log. 1000 = \log. (100 \,.\, 1000)$, nämlich $2 + 3 = \log. 100000 = 5$.

Dieser Satz hat seine Richtigkeit, wenn schon das Produkt aus mehr als zwey Faktoren bestünde; so z. B. ist $\log. bcd = \log. b + \log. c + \log. d$; denn es sey $cd = x$, so ist $\log. bcd = \log. bx = \log. b + \log. x$; nun ist log. x = log. cd (weil $cd = x$ gesetzet worden, und gleiche Größen auch gleiche Logarithm n haben) oder log. x = log. c + log. d; folglich log. bcd = log. b + log. c + log. d.

160. Da $h^m = b$, und $h^n = c$ gesetzet worden, so muß auch h^m dividirt durch h^n = b dividirt durch c, nämlich $h^{m-n} = \frac{b}{c}$ seyn; es ist demnach aus dem nämlichen Grunde $(m-n)$ der Logarithmus von $\frac{b}{c}$; nämlich da $h^{m-n} = \frac{b}{c}$, so ist $(m-n) = \log. \frac{b}{c}$; nun ist $m = \log. b$, und $n = \log. c$; folglich $\log. b - \log. c = \log. \frac{b}{c}$, das heißt: **der Logarithmus des Quotienten ist gleich dem Logarithmus des Dividendus weniger dem Logarithmus des Divisors.**

161. Sind nun m und n positive Zahlen, und $m > n$, so ist auch $(m - n)$ eine positive Zahl, und $\frac{b}{c} > 1$; **die Logarithmen aller Zahlen, welche die Einheit übersteigen, sind demnach positive Größen.**

162. Ist $m = n$, so ist $(m - n) = 0$, und $\frac{b}{c} = 1$, weil in diesem Falle $h^{m-n} = \frac{b}{c} = h^0 = 1$; **der Logarithmus der Einheit ist demnach jederzeit gleich Null;** nämlich log. $1 = 0$.

163. Ist endlich $m < n$, so ist $(m - n)$ eine negative Zahl, und $\frac{b}{c}$ ein wahrer Bruch; **die Logarithmen der eigentlichen oder wahren Brüche sind demnach negative Größen.**

Setzen

Setzen wir nun n in Rücksicht m unendlich groß, so ist $m-n = -\infty$, und $\frac{b}{c} = \frac{1}{\infty}$, weil in diesem Falle $h^m = b$ eine endliche, und $h^n = h^\infty = c = \infty$ eine unendliche Größe wird. Der Logarithmus einer unendlich kleinen Größe, oder der Logarithmus von Null ist demnach eine unendliche negative Größe; nämlich $\log. 0 = -\infty$.

164. Da $h^m = b$, so ist auch $(h^m)^x = (b)^x$, nämlich $h^{x \cdot m} = b^x$; folglich $x . m = \log. b^x$; nun ist $m = \log. b$; es ist also auch $x . \log. b = \log. b^x$; das heißt der **Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Wurzel multipliciret mit dem Exponenten der Potenz.** So ist im obigen Beyspiele, da wir $h = 10$ gesetzet haben, der Logarithmus des Quadrats von 1000, nämlich $\log. (1000)^2 = \log. 1000000 = 6 = 2 \log. 1000 = 2 . 3 = 6$.

165. Da $h^m = b$, so ist auch $\sqrt[x]{h^m} = \sqrt[x]{b}$, nämlich $h^{\frac{m}{x}} = \sqrt[x]{b}$; folglich $\frac{m}{x} = \log. \sqrt[x]{b}$; nun aber ist $m = \log. b$; es ist also $\frac{\log. b}{x} = \log. \sqrt[x]{b}$; das heißt: **der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus der Potenz dividirt durch den Exponenten des Wurzelzeichens.** Z. B. der Logarithmus der Cubicwurzel aus $1000000 = \frac{\log. 1000000}{3} = \frac{6}{3} = 2$, und die Cubicwurzel selbst ist gleich 100, weil in diesem Falle zu dem Logarithmus 2 die Zahl 100 zugehöret; nämlich da $\sqrt[3]{1000000} = 100$, so ist auch $\frac{\log. 1000000}{3} = \log. 100$, das ist $\frac{6}{3} = 2$.

166. Wenn man nun $h^p = 2$, $h^q = 3$, $h^r = 5$, $h^s = 7$, $h^t = 11$, $h^v = 13$, $h^u = 17$, $h^w = 19$ ..

$k^{\omega} = 99991$ setzt, und sodann die Größen p, q, r, s, t, v, u, ψ.... ω berechnet, so hat man einmal die Logarithmen der Primzahlen von 1 bis 100000; und aus diesen Logarithmen können die Logarithmen aller übrigen zwischen liegengen ganzen Zahlen durch eine blosse Addition gefunden werden, weil alle übrige Zahlen aus den Primzahlen durch die Multiplikation zusammengesetzt sind. Wenn man sodann diese Logarithmen in eine Tafel ordentlich einträgt, und ihnen die dazu gehörigen natürlichen Zahlen vorsetzt, so erhält man alsdann eine sehr bequeme Tafel, durch deren Hilfe man die bey großen Zahlen sehr beschwerliche Multiplikation und Division durch eine blosse Addition und Subtraktion, die Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzeln hingegen durch eine kleine Multiplikation und Division sehr leicht verrichten kann.

167. Die Größe p, q, r, s, t.... ω können durch unendliche Reihen am füglichsten berechnet werden, und zwar auf folgenve Art.

Aufgabe. Den Logarithmus einer jeden Zahl zu finden.

Auflösung. Jede Zahl kann durch $(1 + x)$ vorgestellet werden; da man nun den Logarithmus von $(1+x)$ durch eine unendliche Reihe ausgedrückt haben will, so muß diese Reihe allerdings aus den nacheinander folgenden Potenzen von x bestehen; man setze demnach

$$\text{Log.}\ (1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 \ldots \ \mathfrak{A}$$

Es ist einleuchtend, daß auch in dem ersten Gliede x sich befinden müße, damit die ganze Reihe $= 0$ sey, wenn man $x = 0$ setzet, weil in dieser Voraussetzung $(1 + x) = 1$ wird, und wir schon vermög vorhergehenden überzeugt sind, daß $\log.\ 1 = 0$ sey. Da wir nun $\log. (1+x) = Ax + B^2x + Cx^3 \ldots$ gesetzet haben, so muß auch

$$\log. (1+y) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 \ldots \ \mathfrak{B} \text{ seyn.}$$

Um die Größen A, B, C, D, E.. zu bestimmen, setze man $(1 + x)^2 = 1 + y$, nämlich $1 + 2x + x^2 = 1 + y$,

so

so ist einmal ganz gewiß

$y = 2x + x^2$

$y^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^4$

$y^3 = 8x^3 + 12x^4 + \ldots$

$y^4 = 16x^4 + \ldots \ldots \ldots$

u. s. w.

Ferner ist $\log.(1+x)^2 = \log.(1+y)$, weil wir $(1+x)^2 = (1+y)$ gesetzet haben, und zu gleichen Größen auch gleiche Logarithmen zugehören müßen; nämlich es ist $2 . \log.(1+x) = \log.(1+y)$ vermög (164); das ist $2 . (Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots) = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots$ wenn man für $\log.(1+x)$ und für $\log.(1+y)$ ihre Werthe A und B setzet.

Wenn man nun die angezeigte Multiplikation mit 2 wirklich verrichtet, und für $y, y^2, y^3, y^4 \ldots$ ihre Werthe substituiret, so ist

$$\begin{aligned} 2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + \ldots = 2Ax + Ax^2 &+ 4Bx^3 + Bx^4 + \ldots \\ + 4Bx^2 &+ 8Cx^3 + 12Cx^4 \\ & \qquad\qquad + 16Dx^4 \end{aligned}$$

Reduciret man endlich die ganze Gleichung auf 0, so ist

$$0 = \left.\begin{matrix} 2A \\ -2A \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} A \\ +4B \\ -2B \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 4B \\ +8C \\ -2C \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} B \\ +12C \\ +16D \\ -2D \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

folglich $2A - 2A = 0$, nämlich $A = A$

$$A + 4B - 2B = 0 \ldots B = -\frac{A}{2}$$

$$4B + 8C - 2C = 0 \ldots C = \frac{A}{3}$$

$$B + 12C + 16D - 2D = 0 \ldots D = -\frac{A}{4}$$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung $\mathfrak{A}$ für A, B, C, D, E.... die gefundenen Werthe setzet.

$$\log. (1 + x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} + \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} + \frac{Ax^7}{7} - \frac{Ax^8}{8} + \ldots \text{ oder}$$

$$\log. (1 + x) = A . (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} + \ldots)$$

Setzen wir nun $x = 1$, so ist $x + 1 = 2$; folglich

$$\log. 2 = A . (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots)$$

$$= A . \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + .\right)$$

168. Wir haben nun eine unendliche Reihe für den Logarithmus einer jeder Zahl gefunden; allein sie nimmt bey den Zahlen, die 2 nicht übersteigen, sehr langsam ab; bey den Zahlen hingegen, die größer sind als 2, ist sie gar nicht zu gebrauchen, weil sie beständig zunimmt. Wir wollen sehen, ob nicht eine Reihe für den Logarithmus einer jeden Zahl möglich sey, die um so mehr abnimmt, je größer die Zahl ist, zu der man den Logarithmus suchet. Um diese Reihe zu bestimmen, suche man den Logarithmus von $(1 - x)$, da man entweder $-x$ statt x in dem schon gefundenen Ausdrucke

$$\log.(1+x) = A . (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots) \text{ substituiret;}$$

oder wenn man $\log. (1 - x) = - Ax - Bx^2 - Cx^3 - \ldots$ setzet; (es ist einleuchtend, daß alle Glieder dieser Reihe negativ seyn müßen, weil $(1 - x)$ immer ein wahrer Bruch verbleibet, man möge für x was immer für einen Werth setzen, und wir schon vermög (163) überzeuget sind, daß die Logarithmen

der

der wahren Brüche negative Größen sind). In beyden Fällen findet man

$$\log.(1-x) = -Ax - \frac{Ax^2}{2} - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4} - \frac{Ax^5}{5} - ..$$

Da nun $\log.(1+x) = Ax - \frac{Ax^2}{2} + \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4}$
$+ \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} + \frac{Ax^7}{7} - \frac{Ax^8}{8} + \ldots$

und $\log.(1-x) = -Ax - \frac{Ax^2}{2} - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Ax^4}{4}$
$- \frac{Ax^5}{5} - \frac{Ax^6}{6} - \frac{Ax^7}{7} - \ldots$

so ist auch $\log.(1+x) - \log.(1-x) = 2Ax + \frac{2Ax^3}{3} + \frac{2Ax^5}{5} + \frac{2Ax^7}{7} + \frac{2Ax^9}{9} + \ldots$

oder $\log.\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2A.\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} +\right)$
vermög (160.)

Nun setze man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$, so ist $x = \frac{1}{2n+1}$;

folglich $\log.\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2A.\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3.(2n+1)^3} + \frac{1}{5.(2n+1)^5} + \frac{1}{7.(2n+1)^7} + \ldots\right)$

oder $\log.(n+1) - \log.n = 2A.\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3.(2n+1)^3} + \frac{1}{5.(2n+1)^5} + \ldots\right)$

und endlich $\log.\ (n+1) = \log.\ n + 2A\ .\ \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3\cdot(2n+1)^3} + \frac{1}{5\cdot(2n+1)^5} + \frac{1}{7\cdot(2n+1)^7} + \ldots\right)$

169. Und dieß ist die gesuchte Reihe, welche die vortreffliche Eigenschaft hat, daß sie desto stärker zusammenläuft, je größer n angenommen wird.

Setzen wir in dieser Formel $n = 1$, so ist

$$\log.2 = 0 + 2A\ .\ \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9} + \ldots\right) = A.0{,}6931472,$$

welches man erhält, wenn man 8 Glieder dieser Reihe in Decimalbrüche verwandelt, und sie sodann zusammen addiret; würden in dem Logarithmus von 2 noch mehr als 7 Decimalziffern erforderlich seyn, so müßten auch mehrere Glieder dieser Reihe entwickelt werden. Setzen wir ferner $n = 2$, sodann $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, u. s. w. so ist

$$\log.3 = \log.2 + 2A.\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5.5^5} + \ldots\right) = A.0{,}6931472 + A.0{,}4054651 = A.1{,}0986123$$

$$\log.4 = \log.\ 2^2 = 2\ .\ \log.2 = 2.A.0{,}6931472 = A.1{,}3862944$$

$$\log.5 = \log.4 + 2A.\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\cdot 9^3} + \frac{1}{5\cdot 9^5} + \frac{1}{7\cdot 9^7} + \right) = A.1{,}6094379$$

$$\log.6 = \log(2.3) = \log.2 + \log.3 = A.1{,}7917595$$

$$\log.7 = \log.\ 6 + 2A.\left(\frac{1}{13} + \frac{1}{3\cdot(13)^3} + \frac{1}{5\cdot(13)^5} + \ldots\right) = A.1{,}9459101$$

log.

$$\log.8 = \log.\ 2^3 = 3 \ .\ \log.\ 2 = A \ .\ 2{,}0794415$$
$$\log.9 = \log.\ 3^2 = 2 \ .\ \log.\ 3 = A \ .\ 2{,}1972246$$
$$\log.10 = \log.(2\ .\ 5) = \log.2 + \log.5 = A\ .\ 2{,}3025851$$
$$\log.11 = \log.\ 10 + 2A\ .\ \left(\frac{1}{23} + \frac{1}{3\ .\ (23)^3} + \frac{1}{5\ .\ (23)^5}\right) = A\ .\ 2{,}3978953$$
$$\log.12 = \log.(3\ .\ 4) = \log.3 + \log.4 = A\ .\ 2{,}4849066$$
$$\log.13 = \log.12 + 2A\ .\ \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{3\ .\ (27)^3}\right)$$
$$= A\ .\ 2{,}4849066 + A\ .\ 0{,}0800428 = A\ .\ 2{,}5649494$$
u. s. w.

Auf diese Art könnte man die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 10000, oder noch darüber berechnen; und diese Logarithmen würden uns die obangeführte Bequemlichkeit gewähren, ohne daß man noch die Größe A bestimmet hätte, der man jedoch jeden beliebigen Werth beylegen kann; z. B. $A = 1$, $A = 2$, oder $A = \frac{1}{10}$, $A = \frac{3}{7}$, u. s. w.

170. Wenn man nun für A einen Werth annimmt, und alle auf die itzt angeführte Art gefundenen Logarithmen damit multipliciret, so erhält man wieder eine Ordnung der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis Zehn oder Hunderttausend und darüber, welche Logarithmen wieder alle erforderlichen Haupteigenschaften haben, nur daß sie aus anderen Ziffern bestehen. Eine solche Ordnung der Logarithmen nennt man ein logarithmisches System. Und der Werth, den man bey einem angenommenen logarithmischen Systeme der Größe A beylegt, heißt das **Modell** dieses logarithmischen Systems.

171. Nun ist es am natürlichsten, daß man das Modell $A = 1$ setzet, damit obige Logarithmen unverändert bleiben können, die daher auch **natürliche Logarithmen** heißen; sie wer-

werden auch hyperbolische Logarithmen genennt; doch die Ursache dieser Benennung können wir aus den bisher angeführten Gründen noch nicht angeben.

172. Bey dem gemeinen oder gewöhnlichen logarithmischen Systeme, welches von einigen das Briggische System genennt wird, hat man einen anderen Werth für A annehmen müßen, weil man nebst den (159.. 165) angeführten Eigenschaften auch noch die sehr nützliche Eigenschaft bey diesen Logarithmen haben wollte, daß man aus der Anzahl Ziffern der vorgegebenen Zahl alsogleich die erste Ziffer des Logarithmus (die man deswegen auch die Kennziffer oder Charakteristik nennt) und umgekehrt, daß man aus der Kennziffer des Logarithmus alsogleich die Anzahl Ziffern der dazu gehörigen Zahl wissen könnte. Diese Eigenschaft wird erhalten, wenn man log. 10 = 1 setzet; denn es ist alsdann log. 100 = 2, log. 1000 = 3, log. 10000 = 4, log. 100000 = 5, log. 1000000 = 6, u. s. w. und die Logarithmen aller Zahlen von 2 bis 9 müßen größer als 0, (weil log. 1 = 0) und kleiner als 1 seyn, (weil log. 10 = 1); sie müßen demnach aus 0 nebst einem Decimalbruche bestehen; folglich ist in dieser Voraussetzung die Kennziffer = 0, wenn die Zahl nur aus 1 Ziffer besteht. Eben so richtig ist es, daß in dieser nämlichen Voraussetzung die Kennziffer des Logarithmus von einer jeden Zahl = 1 sey, wenn die Zahl selbst aus 2 Ziffern besteht, daß die Kennziffer = 2 sey, wenn die Zahl aus 3 Ziffern besteht, u. s. w. Nämlich bey den gemeinen Logarithmen ist die Kennziffer um 1 kleiner, als die Anzahl der Ziffern von der vorgegebenen Zahl; und umgekehrt zu einem gemeinen Logarithmus gehöret eine Zahl zu, deren Anzahl Ziffern um 1 größer ist, als die Kennziffer des vorgegebenen Logarithmus.

173. Nun ist es leicht die Größe A oder das Modell des gemeinen logarithmischen Systems zu bestimmen. Denn A . 2,3025851 ist der Logarithmus von 10 in einem jeden Systeme, das ist log. 10 = A . 2,3025851;

nun

nun aber ist in dem gemeinen logarithmischen Systeme $\log. 10 = 1$ angenommen worden;

folglich $A . 2{,}3025851 = 1$, und $A = \frac{1}{2{,}3025851}$, oder $A = 0{,}4342945$; es sind in diesem Ausdrucke 7 Decimalziffern genug, weil man in den gewöhnlichen Tafeln die gemeinen Logarithmen nur mit 7 Decimalziffern haben wollte.

174. Es ist demnach der gemeine Logarithmus von $(n + 1)$; nämlich

$$\log.\text{vulg.}(n+1) = \log.\text{vulg.}\, n + 0{,}868589 \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \frac{1}{7 (2n+1)^7} + \right)$$

Diese Reihe nimmt dergestalt ab, daß man um den Logarithmus von 151 z. B. zu berechnen, nur das erste Glied der Reihe allein entwickeln darf. Ist einmal n nahe gegen 10000 oder darüber gestiegen, so kann auch die Einheit in dem Nenner $(2n + 1)$ hinweggelassen, und von dem Decimalbruche 0,868589 nur 3 Ziffern beybehalten werden.

Es ist nämlich $\log.\text{vulg.}(n+1) = \log.\text{vulg.}\, n + \frac{0{,}868}{2n} = \log.\text{vulg.}\, n + \frac{0{,}434}{n} = \log.\ \text{vulg.}\, n + \frac{434}{1000n}$, wenn $n >$ 10000, und bey dem Logarithmus nur 7 Decimalziffern gesuchet werden. So z. B. ist

$$\log.\ \text{vulg.}\ 10001 = \log.\ \text{vulg.}\ 10000 + \frac{434}{10000000} = 4 + 0{,}0000434 = 4{,}0000434,$$

welchen Ausdruck man auch findet, wenn man schon mehrere Ziffern vom obigen Bruche, 0,868589, beybehalten, und auch die Einheit in dem Nenner $(2n \div 1)$ nicht hinweglassen wollte. Da nur zweyerley Logarithmen in dem Gebrauche der Mathematik eingeführet sind, nämlich die natürlichen, und die gemeinen, so werden wir jene mit (log. nat.) und diese nur mit (log.) bezeichnen.

175. Nach den bisher angeführten Gründen wäre es nun nicht mehr schwer die gemeinen Logarithmen aller natürlichen Zahlen von 1 bis 100000 zu berechnen; allein wir können nun dieser Mühe überhoben seyn, indem schon unsere Vorfahrer für uns gesorget, und dieses Werk durch eine ungemein beschwerliche Berechnungsart längst vollendet hatten. Uns ist nichts mehr übrig, als daß wir uns den Gebrauch der logarithmischen Tafeln geläufig machen. Der logarithmischen Tafeln giebt es nun eine Menge; aber die meisten enthalten nur die Logarithmen von 1 bis 10000, und sind, ob sie schon mehrmalen aufgelegt worden, dennoch mit vielen Druckfehlern vermenget. Andere Tafeln hingegen, welche zwar die Logarithmen bis 100000 enthalten, wie jene des Scherwinn, jene des Gardiner sind zu theuer, als daß jeder Mathematiker sich selbe anschaffen könnte. Von diesen Schwierigkeiten ist nun die Schulzische Tafel, die 1778 zu Berlin ans Licht trat, völlig frey; denn sie enthält nebst anderen nützlichen und unentbehrlichen Tafeln die gemeinen Logarithmen von 1 bis 101000; die natürlichen Logarithmen hingegen sind in dieser Tafel von 1 bis 2200 von Einheit zu Einheit, und von 2200 bis 10000 nur von den Prim- und starkzusammgesetzten Zahlen mit 48 Decimalziffern anzutreffen; überdieß hat sie die vortheilhafteste innere Einrichtung, eine sehr geschmeidige Gestalt, und ist um einen billigen Preis zu haben.

176. Der Gebrauch der logarithmischen Tafeln beruhet in folgenden.

Den Logarithmus einer Zahl, welche zwischen die in den gewöhnlichen kleinen Tafeln bestimmten Gränzen fällt, findet man in diesen Tafeln sammt der Kennziffer; in der Schulzischen Tafel hingegen findet man nur die Decimalziffern des Logarithmus, weil man die Kennziffer ohnehin schon aus der Anzahl der Ziffern von der vorgegebenen Zahl weiß (172).

Würde

Würde die vorgegebene Zahl, die in der Tafel angenommene Gränze übersteigen, so schneidet man bey dieser Zahl von der Rechten zur Linken so viele Ziffern ab, daß man zu dem Ueberreste den Logarithmus in der Tafel finden könne. Z. B. wenn zu 7825369 nach der kleinen Blakischen Tafel der Logarithmus zu suchen ist, so schneidet man 369 ab, und schlägt den zu 7825 zugehörigen Logarithmus in der Tafel auf; dieser Logarithmus ist $= 3{,}8934843$. Dann sagt man: 1 mit so vielen Nullen, als man Ziffern abgeschnitten hat, verhält sich zu den abgeschnittenen Ziffern, gleichwie sich die in der Tafel zwischen dem aufgeschlagenen und dem nächst größeren Logarithmus befindliche Differenz zu einem 4ten Gliede verhält, welches man sodann zu dem aufgeschlagenen Logarithmus addiret; endlich setzt man bey dieser Summe die gehörige Kennziffer an, so wird dadurch der gesuchte Logarithmus zum Vorschein kommen.

In unserem Beyspiele ist zwischen log. $7825 = 3{,}8934843$, und dem nächst darauf folgenden Logarithmus die Differenz $= 555$; folglich $1000 : 369 = 555 : x = 204$; es ist demnach log. $7825369 = 6{,}8934843 + 204 = 6{,}8935047$.

Dieses Verfahren gründet sich auf den Satz, daß die Differenzen der Logarithmen eben so wachsen, wie die Differenzen der dazu gehörigen Zahlen, welcher Satz bey großen Zahlen, die schon über 1000 reichen, und bey Logarithmen, die nur aus 7 Decimalziffern bestehen, so gut als vollkommen eintrift. Um dieses in einem Beyspiele deutlich einzusehen, so nehme man zwey Zahlen etwann 9137, und 817 nach Belieben an, multiplicire sie untereinander, und suche zu dem Produkte $9137 \cdot 817 = 7464929$ den Logarithmus einmal durch Hilfe der Faktoren, und dann durch den kürzlich angeführten Satz: in jenem Falle findet man log. $7464929 =$ log. $9137 +$ log. $817 = 6{,}8730256$, und in diesem $= 6{,}8730257$, welches so gut, als einerley ist. Man kann die Zuverlässigkeit dieses Satzes erweisen, wenn man den log. $(n+d)$ bestimmet; man findet, daß log. $(n+d) =$ log. $n + 2A . \left(\frac{d}{(2n+d)} + \frac{d^3}{3(2n+d)^3} + ..\right)$ sey, wenn man $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+d}{n}$, das ist $x = \frac{d}{2n+d}$ setzet (169). Ist nun d in Rücksicht n sehr klein, oder n in Rücksicht d sehr groß; zu B. $\frac{d}{n} < \frac{1}{1000}$, so können alle Glieder der Reihe ausser dem ersten, und auch in dem Nenner die Größe d hinweggelassen werden; folglich ist in dieser Voraussetzung log. $(n+d) =$ log. $n + \frac{A.d}{n}$; und aus dem nämlichen Grunde ist log. $(n+md)$ $=$ log. $n + \frac{A.md}{n}$, wenn md in Rücksicht n auch noch sehr klein ist; nun sind die Differenzen $= d$, und $= md$, wenn man die Zahl n von den zwey Zahlen $(n+d)$ und $(n+md)$ abzieht, und die Differenzen ihrer Logarithmen sind $\frac{A.d}{n}$, und $\frac{A.md}{n}$; auch findet die Proportion statt, $d : md = \frac{A.d}{n} : \frac{A.md}{n}$; es verhalten sich demnach in dieser Voraussetzung die Differenzen der Zahlen, wie die Differenzen der dazu gehörigen Logarithmen; das ist die Differenzen der Zahlen wachsen eben so, wie die Differenzen ihrer Logarithmen. So ist in unserem vorigen Beyspiele log. 7825000 = 8934843, und log. 7826000 = 8935398 ohne Kennziffer; um also die Differenz zu erhalten, die zu log. 7825000 = 8924843 zu addiren ist, damit die Summe der Logarithmus von (7825000 + 369) nämlich der Logarithmus von 7825369 sey, wenn man die zu dieser Zahl zugehörige Kennziffer 6 vorsetzt, so sage man nur: die Differenz der zwey Zahlen 7825000 und 7826000 (nämlich 1000) verhält sich zu der Differenz der zwey Zahlen 7825000 und 7825369 (nämlich zu 369), gleichwie sich die

Differenz der zu den zwey Zahlen 7825000 und 7826000 zugehörigen Logarithmen, nämlich gleichwie sich 555 zu derjenigen Differenz verhält, die zwischen dem Logarithmus von 7825000 und dem Logarithmus von 7825369 statt findet; wenn man nun diese gefundene Differenz 204 zu dem Logarithmus von 7825000 (oder welches einerley ist zu dem Logarithmus von 7825) nämlich zu 8934843 addiret, und diesen Decimalziffern die Kennziffer 6 vorsetzt, so ist die Summe 6,8935047 der gesuchte Logarithmus von 7825369. Es wird Niemanden befremden, wenn ich sage, daß der gemeine Logarithmus von 7825 dem Logarithmus von 7825000 in den Decimalziffern gleich, und nur in der Kennziffer verschieden sey. Um sich davon zu überzeugen, bedenke man nur, daß log. 7825000 = log. 7825 + log. 1000 sey; nun aber ist log. 1000 = 3 ohne allen bedeutlichen Decimalziffern; er kann demnach die Decimalziffern des log. 7825 nicht ändern, sondern nur seine Kennziffer vermehren, wenn er zu demselben addiret wird; folglich ist log. 7825 dem log. 7825000 ausser der Kennziffer in den Decimalstellen vollkommen gleich; und dieses findet bey den Logarithmen aller Zahlen statt, die am Ende Nullen haben, wie es ein jeder bey dem Anblicke einer logarithmischen Tafel sehen kann; so z. B. ist log. 11 mit dem log. 110, mit dem log. 1100, mit dem log. 11000 u. s. w. in den Decimalziffern vollkommen einerley.

Wenn man die Schulzische Tafel bey Handen hat, so kann die itzt angeführte Regel Detri erspart werden, da in dieser Tafel die zu den abgeschnittenen Ziffern zugehörigen Proportionaltheile schon angesetzet sind, die man sodann nur zu dem Logarithmus der übrigen 5 Ziffern addiren muß, um den vollständigen Logarithmus der vorgegebenen Zahl zu erhalten, wie es ohnehin die dieser nämlichen Tafel vorgesetzte Einleitung deutlich genug ausweiset.

177. Wenn sich bey der Zahl auch ein Bruch befindet, so bringe man den ganzen Ausdruck auf einen Afterbruch, suche sodann den Logarithmus des Zählers und des Nenners auf

die itzt beschriebene Weise auf, und subtrahire den zweyten von dem ersten, so wird die Differenz der Logarithmus der vorgegebenen Zahl seyn vermög(160). Z.B. $\log. 471\frac{5}{7} = \log. \frac{3302}{7} = \log. 3302 - \log. 7 = 3,5187771 - 0,8450980 = 2,6736791$. Auf die nämliche Art findet man $\log. \frac{36}{37} = \log. 36 - \log. 37 = 1,5563025 - 1,5682017 = -0,0118992$. Befindet sich bey der Zahl ein Decimalbruch, so suche man zu der vorgegebenen Zahl den Logarithmus auf, ohne auf den Strich Acht zu geben, welcher die Decimalstellen von den übrigen ganzen Ziffern scheidet, und setze diesem Logarithmus jene Kennziffer vor, welche die vor dem Striche befindlichen ganzen Ziffern erfordern. Z. B. wenn zu 785,43 der Logarithmus zu bestimmen ist, so suchet man in der Tafel den Logarithmus von 78543 auf; es ist in der Schulzischen Tafel $\log. 78543 = 8951075$ ohne Kennziffer; nun fordern die vor dem Striche befindlichen Ziffern 785 die Kennziffer 2; folglich $\log. 785,43 = 2,8951075$. Die Ursache ist leicht einzusehen; denn $\log. 785,43 = \log. \frac{78543}{100} = \log. 78543 - \log. 100$; nun ist die Kennziffer des ersten Logarithmus $= 4$ und des zweyten $= 2$ ohne Decimalstellen; folglich ist ihre Differenz $= 2$ mit den Decimalstellen des ersten Logarithmus.

178. Zu einem gegebenen Logarithmus wird die zugehörige Zahl auf folgende Art gefunden. Man sucht in der Tafel zu den Decimalziffern des gegebenen Logarithmus ohne auf die Kennziffer Acht zu geben die kleinere am nächsten zustimmende Zahl auf, und merket selbe an; dann sagt man: die Differenz des nächst kleineren und nächst größeren Logarithmus in den Tafeln verhält sich zu der Differenz zwischen dem nächst kleineren und dem gegebenen Logarithmus, gleichwie sich 100 zu einem 4ten Gliede verhält; das ist: an die Differenz des nächst kleineren und des gegebenen Logarithmus hänget man zwey Nul-

len,

len, und dividiret sodann diese Zahl durch die Differenz der Logarithmen in den Tafeln; diesen Quotienten füget man an die schon angemerkte Zahl rechts an, und schneidet bey dieser Zahl von der Linken gegen der Rechten so viele Ziffern mehr einer ab, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus Einheiten enthält, so sind die links stehenden Ziffern ganze Einheiten, und die übrigen rechts stehenden Ziffern sind die Decimalstellen der gesuchten Zahl; von diesen Decimalstellen kann man nun so viele beybehalten, als es die Genauigkeit der Aufgabe fordert; z. B. wenn ich die dem Logarithmus 2,8765432 entsprechende Zahl zu suchen hätte, so schlage ich zu den Decimalziffern des gegebenen Logarithmus die kleinere am nächsten zustimmende Zahl auf, die ich $= 75256$ finde; zu der Differenz 21, die zwischen dem zu dieser angemerkten Zahl zugehörigen und dem gegebenen Logarithmus in den Decimalziffern statt findet, setze ich zwey Nullen, und dividire diese Zahl 2100 durch die Differenz der am nächsten zustimmenden Logarithmen in den Tafeln, nämlich durch 58, so erhalte ich zum Quotienten $\frac{2100}{58} = 36$; wenn ich nun diese Ziffern zu der obigen Zahl 75256 hinzufüge, und sodann von dieser Zahl 7525636 vermög der Kennziffer 2 von der Linken drey Ziffern abschneide, so erhalte ich 752,5636 für die gesuchte Zahl. Wäre es nicht nothwendig die möglichste Genauigkeit zu beobachten, so kann man sagen, daß die gesuchte Zahl beynahe $= 752,56$ sey.

Würde die Kennziffer des gegebenen Logarithmus größer seyn, als die Anzahl der gefundenen 7 Ziffern bey der gesuchten Zahl, so muß man den Abgang mit Nullen ersetzen. Z. B. um die zu dem Logarithmus 8,9234568 zugehörige Zahl zu finden, so schlage man zu den Decimalziffern dieses Logarithmus die kleinere am nächsten zustimmende Zahl, nämlich 83841 in der Schulzischen Tafel auf, wozu der Logarithmus 9234564 zugehört, hänge an die Differenz dieses und des gegebenen Logarithmus, (nämlich an 4) zwey Nullen, und dividire sodann diese Zahl 400 durch die Differenz der Logarithmen in den Tafeln (nämlich durch 52), und füge den Quotienten $\frac{400}{52} = 08$ (indem er jederzeit aus so vielen Ziffern bestehen muß, als man Nullen zu der Differenz gesetzet hat) zu der obigen Zahl 83841, so erhält man 8384108. Da nun diese Zahl nicht mehr als 7 Ziffern enthält, und die Kennziffer deren 9 fordert, so hänge man an die gefundene Zahl noch zwey Nullen, so ist endlich 838410800 die zu dem gegebenen Logarithmus 8,9234568 zugehörige Zahl. Man hätte statt diesen zwey Nullen bedeutliche Ziffern gefunden, wenn man zu obiger Differenz 4, statt zwey Nullen deren mehrere hinzugesetzet hätte; allein da bey den gemeinen Logarithmen, die nur aus 7 Decimalziffern bestehen, die letzten Ziffern der gesuchten Zahl nicht mehr richtig sind, wenn man zu der Differenz mehr als zwey Nullen hinzugefüget, so pflegt man im erforderlichen Falle bey der gesuchten Zahl den Abgang nur mit Nullen zu ergänzen.

Der Grund dieses Verfahrens ist vermög dem vorhergehenden (176.) leicht einzusehen; denn wir wissen einmal, daß in unserem letzten Beyspiele log. 83841 dem log. 8384100, und auch log. 83842 dem log. 8384200 in den Decimalziffern vollkommen gleich sey; ferner wissen wir, daß bey großen Zahlen die Differenzen der Logarithmen sich beynahe eben so verhalten, wie die Differenzen der dazu gehörigen Zahlen: folglich verhält sich 52 (als die Differenz der Logarithmen von 8384100 und 8384200) zu 4 als der Differenz der Logarithmen von den Zahlen 8384100 und $(8384100 + x)$ gleichwie sich 100 als die Differenz der zwey Zahlen 8384100 und 8384200 zu der Differenz x verhält, die man zu 8384100 addiren muß, um die gesuchte Zahl zu finden, nämlich $52 : 4 = 100 : x = \frac{400}{52} = 8$ beynahe; folglich ist die gesuchte Zahl $= 8384100 + 8 = 8384108$, oder diese Zahl ist gleich 83841, wenn man noch 08 hinzufüget. Nun besteht diese

Zahl

Zahl erst aus 7 Ziffern, die verläßlich sind, und die Kennziffer des gegebenen Logarithmus fordert deren 9; man hänge demnach noch zwey Nullen an diese Zahl, so ist 838410800 die zu dem Logarithmus 8,9234568 zugehörige Zahl. Daß man zu einem gemeinen Logarithmus, der nur aus 7 Decimalziffern besteht, die zugehörige Zahl auch nur in den ersten 7 Ziffern richtig finden könne, erhellet daraus, weil schon log. 10000000 von dem log. 10000001 nicht mehr zu unterscheiden ist, wenn er nur aus 7 Decimalziffern besteht: um sich davon zu überzeugen, so erinnere man sich nur, daß $\log. \text{vulg.} (n + 1) = \log. \text{vulg.}\, n + \frac{434}{1000n}$ sey; setzen wir nun $n = 10000000$, so ist $\log. 10000001 = 7 + \frac{434}{10000000000} = 7{,}0000000 = 7 = \log. 10000000$; man kann demnach nicht mehr entscheiden, ob zu dem gemeinen Logarithmus 7 die Zahl 10000000 oder 10000001 zugehöre, u. s. w.

179. Wenn der gegebene Logarithmus eine negative Größe ist, so wissen wir (163), daß die dazu gehörige Zahl ein ächter Bruch sey. Um diesen Bruch zu finden, so suche man die diesem Logarithmus entsprechende Zahl auf vermög (138), und setze diese Zahl für den Nenner eines Bruches, dessen Zähler $= 1$; diesen Bruch kann man sodann in einen Decimalbruch, oder in einen anderen Bruch von einem beliebigen Nenner verwandeln. Daß dieser Bruch die zu dem negativen Logarithmus zugehörige Zahl sey, erhellet aus folgenden.

Es sey der negative gegebene Logarithmus $= -L$, ferner sey $L = \log. n$, so sage ich, daß $-L = \log. \frac{1}{n}$ sey; denn da $L = \log. n$ angenommen worden, so ist auch $-L = -\log. n$, und auch $\log. 1 - L = \log. 1 - \log. n$; nun aber ist $\log. 1 - \log. n = \log. \frac{1}{n}$, und auch $\log. 1 = 0$;

folglich $-L=\log.\frac{1}{n}$; das ist, die zu dem Logarithmus $-L$ zugehörige Zahl ist $=\frac{1}{n}$, wenn dem Logarithmus L die Zahl n entspricht. Z. B. zu dem Logarithmus $-1,3262334$ gehört der Bruch $\frac{1}{21,195}=\frac{1000}{21195}=0,04718$ beynahe.

Auch findet man den zu einem negativen Logarithmus zugehörigen Bruch, wenn man zu dem gegebenen negativen Logarithmus den Logarithmus von 10000, oder von 100000, oder auch von einer Million addiret, sodann zu diesem neuen positiven Logarithmus die zugehörige Zahl aufsuchet, und selbe durch 10000, oder 100000, oder durch eine Million dividiret, je nachdem man den Logarithmus entweder von der einen, oder von der anderen aus diesen drey Zahlen zu dem gegebenen negativen Logarithmus addiret hat. Es ist überflüßig noch einmal zu erinneren, daß eine positive Größe zu einer negativen addiren nichts anderes heiße, als diese von jener abziehen. Nur den Grund muß ich erörtern, worauf diese letzte Auflösung beruhe; dieser ist leicht einzusehen; denn durch die Addition des Logarithmus von 10000, oder von einer Million wird der zu dem negotiven Logarithmus zugehörige Bruch durch 10000, oder durch eine Million multipliciret; die gefundene Zahl ist demnach 10000mal, oder Millionenmal größer, als sie seyn sollte; um also dieser gefundenen Zahl den wahren Werth zu geben, muß selbe durch 10000, oder durch eine Million dividiret werden.

So findet man in dem letzten Beyspiele, daß zu dem Logarithmus $-1,3262334$ die Zahl 0,04718 zugehöre, wenn man zu $-1,3262334$ den Logarithmus von 100000 nämlich 5 addiret; das ist, wenn man 1,3262334 von 5,0000000 abzieht, und zu diesem neuen positiven Logarithmus 3,6737666 die am nächsten zustimmende Zahl 4718 aufsuchet, die man

sodann

sodann nur noch durch 100000 dividiren muß, um die gesuchte Zahl 0,04718 zu erhalten.

Statt dem Logarithmus von 100000 hätte man jeden anderen Logarithmus, z. B. den von 144 zu dem gegebenen negativen Logarithmus addiren, und sodann die dem neuen positiven Logarithmus entsprechende Zahl durch 144 dividiren können.

Ein Anfänger der mit einer logarithmischen Tafel versehen ist, kann dieselbe indessen auf die Erhebung zu Potenzen, und Ausziehung was immer für Wurzeln aus ganzen, und gebrochenen Zahlen anwenden, damit ihm der Gebrauch davon durch die Uebung geläufig werde: er kann z. B. die Zahl $50\frac{5}{7}$ auf die Potenz des Exponenten $\frac{34}{11}$ erheben, er kann $(100)^{\sqrt[4]{51}} = (100)^{(51)^{\frac{1}{4}}}$ er kann $\sqrt[\frac{5}{8}]{99}$, $\sqrt[99]{99}$, er kann auch $\sqrt[\sqrt[3]{9}]{100001} = \sqrt[(9)^{\frac{1}{3}}]{100001}$ durch Hilfe der Logarithmen bestimmen, u. s. w.

180. Von dem Gebrauche der natürlichen Logarithmen haben wir für dießmal nichts besonders anzuführen; nur soviel wollen wir noch erinneren, daß die natürlichen Logarithmen gar leicht in die gemeinen verwandelt werden, wenn man selbe mit dem gefundenen Werthe von A, nämlich mit 0,4342945 multipliciret; und umgekehrt daß die gemeinen Logarithmen in die natürlichen verwandelt werden, wenn man selbe mit 0,4342945 dividiret. Oder auch wenn man einen gemeinen Logarithmus mit 2,3025851 multipliciret, so wird er in einen natürlichen verwandelt; und umgekehrt wenn man einen natürlichen Logarithmus mit 2,3025851 dividiret, so wird er in einen gemeinen umschaffen (173). Diese Verwandlung wird sehr erleichtert, wenn man von dieser Zahl 2,3025851 die einfachen Produkte bis 9 in eine kleine Tafel zusammensetzt (35).

Die Verwandlung eines natürlichen Logarithmus in einen gemeinen kömmt gemeiniglich vor, wenn man zu einem gegebenen natürlichen Logarithmus die zugehörige Zahl bestimmen soll; denn in diesem Falle muß man den gegebenen natürlichen Logarithmus in einen gemeinen verwandeln, und sodann in den gewöhnlichen Tafeln die dazu gehörige Zahl nach (178) aufsuchen. Es sey z. B. zu dem natürlichen Logarithmus 1,5000000 die zugehörige Zahl zu finden, so ist $\frac{1,5000000}{2,3025851} = 0,6514417$, nämlich der natürliche Logarithmus 1,5000000 ist dem gemeinen Logarithmus 0,6514417 gleich; nun aber gehört zu dem gemeinen Logarithmus 0,6514417 die Zahl 4,4816 beynahe; es gehört also auch eben diese Zahl 4,4816 zu dem natürlichen Logarithmus 1,5000000. Und auf die nämliche Weise findet man, daß zu dem natürlichen Logarithmus 1 die Zahl 2,7182818, und zu dem natürlichen Logarithmus 11, nämlich zu 11,0000000 die Zahl 59874,14 beynahe zugehöre; das ist log. nat. 2,7182818 = 1, und log. nat. 59874,14 = 11; u. s. w.

Man kann auch einen algebraischen Ausdruck für die Zahl bestimmen, die zu was immer für einem natürlichen Logarithmus x zugehöret, und zwar auf folgende Art.

Man setze die zu dem natürlichen Logarithmus x zugehörige Zahl $= 1 + y$, weil sie größer seyn muß als 1, da zu dem Logarithmus 0 die Zahl 1 zugehöret; das ist, man setze $x = \text{log. nat. } (1 + y)$, so ist auch

$x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{6}y^6 + \ldots\ldots$ A vermög (167).

Um nun den Werth von y aus dieser Gleichung durch x ausgedrückt zu finden, so setze man

$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$ B vermög (155),

so ist auch

$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots\ldots$

$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots\ldots$

$y^4 = A^4x^4 + \ldots\ldots$

u. s. w.

Nun

Nun substituire man diese Werthe für $y, y^2, y^3, y^4, \ldots$ in der Gleichung A, und reducire sodann die ganze Gleichung auf Null,

$$\text{so ist } 0 = \left.\begin{matrix} A \\ -1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} B \\ -\frac{1}{2}A^2 \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} C \\ -AB \\ +\frac{1}{3}A^3 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} D \\ -\frac{1}{2}B^2 \\ -AC \\ +A^2B \\ -\frac{1}{4}A^4 \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

Folglich $A - 1 = 0$, nämlich $A = 1$

$$B - \tfrac{1}{2}A^2 = 0 \ldots\ldots B = \tfrac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 2}$$

$$C - AB + \tfrac{1}{3}A^3 = 0 \ldots C = \tfrac{1}{6} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man für $A, B, C, D, E \ldots$ in der Gleichung B die gefundenen Werthe substituiret,

$$y = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

und folglich ist die gesuchte Zahl, die dem natürlichen Logarithmus x entspricht, $= 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$, nämlich $x = \text{log. nat.} \left(1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots\right)$, wenn man den gefundenen Werth für y in der ersten Gleichung $x = \text{log. nat.}\,(1 + y)$ substituiret. Setzen wir nun den gegebenen natürlichen Logarithmus $x = 1{,}5000000 = 1{,}5 = 1\tfrac{1}{2} = \frac{3}{2}$, so ist $\frac{3}{2} =$

$$\text{log. nat.} \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3^2}{1.2.2^2} + \frac{3^3}{1.2.3.2^3} + \frac{3^4}{1.2.3.4.2^4} + \right) = \text{log. nat. } 4{,}4816 \text{ beynahe,}$$

wenn man nur einige wenige Glieder dieser unendlichen Reihe entwickelt; setzen wir $x = 1$, so ist $1 = \text{log. nat.} \left(1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{1.2.3.4.5} + \right)$ $= \text{log. nat. } 2{,}7182818 \ldots\ldots$, wie ehevor.

181. In dem natürlichen logarithmischen Systeme ist also diejenige Zahl, zu welcher der Logarithmus 1 zugehört, $= 2{,}7182818$ beynahe. Diese Zahl 2,7182818 wird die **Grundzahl** (basis) oder **Wurzel** des natürlichen logarithmischen Systems genennt, weil sie die Eigenschaft hat, daß sie die Zahlen 2, 3, 4, $4\frac{1}{2}$, u. s. w. zum Vorschein bringt, wenn sie nacheinander auf die Potenz der Exponenten erhoben wird, welche durch die natürlichen Logarithmen von 2, 3, 4, $4\frac{1}{2}$ u. s. w. ausgedrückt sind; das ist, wenn log. nat. 2 $= p$, log. nat. $3 = q$ gesetzt wird, so ist $(2{,}7182818)^p = 2$; $(2{,}7182818)^q = 3$, u. s. w. Denn da log. nat. $2 = p$, log. nat. $3 = q$, u. s. w. gesetzet worden, so ist auch log. nat. $2 = p.1$, log. nat. $3 = q.1$; oder log. nat. $2 = p$. log. nat. 2,7182818, log. nat. $3 = q$. log. nat. 2,7182818, weil log. nat. 2,7182818 $= 1$ ist; folglich ist auch log. nat. $2 =$ log. nat. $(2{,}718218)^p$, log. nat. $3 = (2{,}7182818)^q$ vermög (164); und endlich $2 = (2{,}7182818)^p$, $3 = (2{,}7182818)^q$, u. s. w. weil zu gleichen Logarithmen aus dem nämlichen Systeme auch gleiche Zahlen zugehören. Die Grundzahl des gemeinen logarithmischen Systems ist endlich $= 10$, weil diese Zahl zu dem gemeinen Logarithmus $1{,}0000000 = 1$ zugehört: setzen wir demnach log. vulg. $2 = a$, log. vulg. $3 = b$, u. s. w. so ist $(10)^a = 2$, $(10)^b = 3$, u. s. w.

Die Grundzahl 2,7182818 des natürlichen logarithmischen Systems werden wir in der Folge jederzeit mit h benennen, und uns von allem anderen Gebrauche dieses Buchstaben enthalten, nämlich h soll bey uns jederzeit 2,7182818 bedeuten; einige pflegen diese Zahl jederzeit mit e zu bezeichnen.

Aus dem bisshergesagten können wir schließen, daß $h^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} + \ldots$ sey. Denn vermög vorhergehenden ist $x = \text{log.nat.}\left(1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \right)$; es ist also auch $x \,.\, \text{log.nat.}\, h = \text{log.nat.}\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \right)$, weil $\text{log.nat.}\, h = \text{log.nat.}\ 2,7182818 = 1$ ist;

oder $\text{log. nat.}\, h^x = \text{log.nat.}\left(1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1.2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \right)$; und endlich $h^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \ldots\ldots$

Wenn x in Zahlen gegeben wird, z. B. $x = 19$, $x = \frac{17}{5}$, oder $x = \sqrt{37}$, u. s. w. so kann gemeiniglich der Werth von h^x durch Hilfe der gemeinen Logarithmen viel geschwinder erhalten werden, als durch die unendliche Reihe: man muß in diesem Falle x durch 2,3025851 dividiren, und zu diesem Quotienten, als zu einem gemeinen Logarithmus, in den gewöhnlichen Tafeln die dazu gehörige Zahl aufsuchen, so so wird diese Zahl der Werth von h^x seyn; denn es sey $h^x = z$, so ist auch x . log.nat. h = log.nat. z, nämlich x = log.nat. z, und endlich $\frac{x}{2{,}3025851}$ = log. vulg. z vermög (180); es sey $x = 1{,}5$, so ist $\frac{1{,}5}{2{,}3025851} = 0{,}6514417$ = log. vulg. z = log. vulg. 4,1816, nämlich $z = 4{,}4816$, weil zu dem gemeinen Logarithmus 0,6514417 die Zahl 4,4816 zugehöret; es ist demnach $h^{1{,}5} = 4{,}4816$.

182. Durch Hilfe der Logarithmen können nun manche Aufgaben aufgelöset werden, die alle übrigen Kunstgriffe der Algebra zu übersteigen scheinen. Z. B. Wenn $a^x = b + c$ bey Auflösung irgend einer Aufgabe gefunden wird, so ist $x = \frac{\log.\,(b+c)}{\log.\,a}$; denn da $a^x = b + c$ ist, so muß auch $\log.\,a^x = \log.\,(b+c)$, oder $x\,.\log.\,a = \log.\,(b+c)$, nämlich $x = \frac{\log.\,(b+c)}{\log.\,a}$ seyn.

Es sey ferner aus der Gleichung $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$ der Werth von x zu finden. Dieser wird auf folgende Art entwickelt: es ist $x\,.\log.\,a + qx\,.\log.\,c = mx\,.\log.\,b - n\,.\log.\,b$, oder $mx\,.\log.\,b - qx\,.\log.\,c - x\,.\log.\,a = n\,.\log.\,b$, und endlich $x\,.(m\log.\,b - q\log.\,c - \log.\,a) = n\log.\,b$; folglich

$$x = \frac{n\,.\log.\,b}{m\log.\,b - q\log.\,c - \log.\,a} = \frac{\log.\,b^n}{\log.\,b^m - \log.\,c^q - \log.\,a}$$

Imgleichen es sey aus der Gleichung $2\log.\text{nat.}\,x = \frac{m}{n} + \log.\text{nat.}\,c$ der Werth von x zu bestimmen. Es ist in diesem Falle $\frac{m}{n} = \log.\,\text{nat.}\,x^2 - \log.\,\text{nat.}\,c = \log.\,\text{nat.}\,\frac{x^2}{c}$, oder $\frac{m}{n}\,.\log.\,\text{nat.}\,h = \log.\,\text{nat.}\,\frac{x^2}{c}$, weil $\log.\,\text{nat.}\,h = 1$

ist;

ist; es ist also auch log. nat. $h^{\frac{m}{n}}$ = log nat. $\frac{x^2}{c}$, und auch $h^{\frac{m}{n}}$ $= \frac{x^2}{c}$, und endlich $x = \sqrt{ch^{\frac{m}{n}}}$.

Es sey endlich aus der Gleichung log. nat. $\frac{a}{x} = mx -$ log. nat. c der Werth von x zu bestimmen. In diesem Beyspiele ist log. nat. $\frac{a}{x}$ + log. nat. $c = mx$, oder log. nat. $\frac{ac}{x} = mx = mx$. log. nat. h = log. nat. h^{mx}; folglich auch $\frac{ac}{x} = h^{mx}$; und endlich ist $ac = xh^{mx}$; ferner läßt sich diese Gleichung nicht reduciren, und dieß eräugnet sich gemeiniglich, sobald die unbekannte Größe in der nämlichen Gleichung als Faktor und als Exponent erscheinet. Es sey zum Beyspiele folgende Aufgabe aufzulösen: eine Zahl x zu finden, die mit $\frac{65}{5}$ multipliciret ein Produkt zum Vorschein bringt, welches der $x$ten Potenz von 4 gleichet. Vermög der Bedingung der Aufgabe ist $\frac{64x}{5} = 4^x$; folglich ist auch log. 64 + log. x — log. 5 = x log. 4; oder x log. 4 — log. x = log. 64 — log. 5;
nämlich x . 0,60206 — log. x = 1,10721 . . . . A,
weil log. 4 = 0,60206; log. 64 = 1,80618, und log. 5 = 0,69897; nun versuche man für x eine solche Zahl zu substituiren, daß der erste Theil der Gleichung A dem zweyten Theile gleich werde; setzt man $x = 2$, so ist der erste Theil der Gleichung = 0,90309; setzt man hingegen $x = 3$, so ist der erste Theil der Gleichung = 1,3290587; es ist demnach $x > 2$, und $x < 3$; man setze also $x = \frac{2+3}{2} = 2,5$;

und

und dann ist der erste Theil der Gleichung dem zweyten vollkommen gleich; folglich ist die gesuchte Zahl $= 2{,}5 = \frac{5}{2}$: bey einer ferneren Untersuchung findet man, daß auch die Zahl 0,088298 dieser Aufgabe beynahe ein Genügen leiste.

Aus der vorhergehenden Gleichung $ac = x \,.\, h^{mx}$ könnte der Werth für x durch eine unendliche Reihe entwickelt werden; allein die Reihe würde von keinem Nutzen seyn, wenn sie nicht schleunig zusammenläuft: die gesuchte Reihe könnte auf folgende Art gefunden werden. Da $ac = xh^{mx}$, so ist auch

$$ac = x \,.\, \left(1 + mx + \frac{m^2x^2}{1.2} + \frac{m^3x^3}{1.2.3} + \frac{m^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$

vermög (181); nämlich es ist

$$ac = x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots$$

Nun setze man $ac = y$, so ist

$$y = x + mx^2 + \frac{m^2x^3}{1.2} + \frac{m^3x^4}{1.2.3} + \frac{m^4x^5}{1.2.3.4} + \ldots.$$

Wenn man nun für den Werth von x folgende Reihe annimmt $x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \ldots.$ die Größen $A, B, C \ldots.$ nach (155) bestimmet, und endlich, für $y, y^2, y^3 \ldots$ wieder ihre Werthe $ac, a^2c^2, a^3c^3 \ldots$ substituiret, so wird endlich die gesuchte Reihe als des Werth von x zum Vorschein kommen.

Und auf die nämliche Weise könnte aus der Gleichung $a^x = cx + b$, die sich nicht einfacher ausdrücken läßt, der Werth von x durch eine unendliche Reihe bestimmet werden. Denn es ist einmal

$$a^x = 1 + x \,.\, \text{log. nat.}\, a + \frac{x^2(\log.a)^2}{1.2} + \frac{x^3(\log.a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4(\log.a)^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5 \,.\, (\log.a)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots.$$

Um

Um dieses einzusehen, setze man $a^x = 1 + y$, so ist auch $x \log. nat. a = \log. nat. (1 + y)$, nämlich $x \log. a = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots.$

Weiters setze man $x \log. a = z$, so ist $z = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \ldots.$

Aus dieser Gleichung findet man $y = z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$ (180)

das ist $y = x \log. a + \frac{x^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\log. a)^4}{1.2.3.4} + \ldots$ wenn man für z wieder seinen Werth $x \log. a$ setzet. Folglich

$$a^x = 1 + x \log. a + \frac{x^2(\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

wenn man den gefundenen Werth für y in der obigen Gleichung $a^x = 1 + y$ substituiret.

Da nun $a^x = cx + b$, oder $b = - cx + a^x$ vermög der Voraussetzung, so ist $b = - cx + 1 + x \log. a + \frac{x^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \ldots.$ wenn man für a^x seinen Werth setzet, oder

$$b - 1 = - x. (c - \log. a) + \frac{x^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\log. a)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

Nun setze man $b - 1 = y$, so ist

$$y = - x. (c - \log. a) + \frac{x^2 (\log. a)^2}{1.2} + \frac{x^3 (\log. a)^3}{1.2.3} + \frac{x^4 (\log. a)^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

nehme für den Werth von x folgende Reihe an
$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots$
bestimme die Größen $A, B, C, D, E \ldots$ nach (155), und substituire für $y, y^2, y^3, y^4 \ldots$ wieder ihre Werthe $(b-1)$, $(b-1)^2$, $(b-1)^3$, ... so wird endlich die gesuchte Reihe als der Werth von x zum Vorschein kommen.

183. Ehe wir diese Abhandlung von den Logarithmen beschließen, wollen wir noch untersuchen, um welchen Theil der natürliche Logarithmus einer Größe y zunehme, wenn die Größe y selbst um einen unendlich kleinen Theil $= \frac{y}{\infty}$ wächst; wenn wir diesen unendlich kleinen Wachsthum $\frac{y}{\infty}$ der Größe y mit (dy) bezeichnen, nämlich $\frac{y}{\infty} = (dy)$ setzen, so ist der Wachsthum des natürlichen Logarithmus von y ganz gewiß
$= \log.\text{nat.}(y + (dy)) - \log.\text{nat.}\ y.$
nun aber ist $\log.\text{nat.}\ (y + (dy)) - \log.\text{nat.}\ y = \log.\text{nat.}\left(\frac{y + (dy)}{y}\right) = \log.\text{nat.}\left(1 + \frac{(dy)}{y}\right) =$
$\frac{(dy)}{y} - \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dy)^3}{3y^3} - \frac{(dy)^4}{4y^4} + \ldots\ldots (167)$
folglich ist der Wachsthum des natürlichen Logarithmus von $y =$
$\frac{(dy)}{y} - \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dy)^3}{3y^3} - \ldots$ wenn die Größe selbst um den unendlich kleinen Theil (dy) zunimmt.
Nun verschwinden alle Glieder dieser Reihe in Rücksicht des ersten Gliedes, weil jedes nachfolgende Glied unendlichmal kleiner ist, als das vorhergehende (147). Es ist demnach dieser Wachsthum $= \frac{(dy)}{y}$; nämlich der Theil, um welchen der natürliche Logarithmus einer Größe zunimmt, wenn die Größe um einen unendlich kleinen Theil wächst, ist gleich dem un-

unendlich kleinen Wachsthume der Größe dividiret durch die Größe selbst. Siehet man nun (dy) für einen Grundtheil, oder für ein Element von y an, so muß auch $\frac{(dy)}{y}$ einen Grundtheil, oder ein Element des natürlichen Logarithmus von y vorstellen; das ist, bildet man sich ein, daß y aus unendlich vielen solchen Elementen, deren eines $= (dy)$ ist, bestehe, so muß auch der natürliche Logarithmus von y aus unendlich vielen solchen Elementen bestehen, deren eines $= \frac{dy}{y}$ ist. Ein wichtiger Theil der Mathematik beschäftiget sich mit der Kunst zu jeder gegebenen Größe das zugehörige Element, und umgekehrt zu jedem gegebenen Elemente die dazu gehörige Größe zu bestimmen. Unsere bisher gegebenen Gründe sind noch lange nicht hinreichend diese Kunst auseinander zu setzen: wir werden vielleicht Gelegenheit haben diese Materie an dem gehörigen Orte zu erläuteren.

Anwendung der Reihen auf eine allgemeine Entwicklung der Potenzen.

184. Wir haben schon einmal von den Potenzen gehandelt, wir haben nämlich gezeigt, wie man jede Größe zur 2ten 3ten, 4ten Potenz u. s. w. erheben, wie man aus jeder Größe die 2te, 3te Wurzel, u. s. w. ziehen, wie man endlich jede einnamige Größe zu was immer für einer Potenz erheben könne. Wie man hingegen eine zwey oder mehrnamige Größe zu was immer für einer Potenz erheben solle, dieß haben wir noch nicht gezeigt. Um auch dieses zu erläutern, so wollen wir $(1 + x)$ auf die Potenz des Exponenten m erheben, nämlich wir wollen $(1 + x)^m$ durch eine Reihe entwickeln.

Um diese Reihe zu finden setzen wir

$$(1 + x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots . \; \mathfrak{A}.$$

Wir setzen nämlich, daß die Reihe aus den nacheinander folgenden Potenzen von x bestehe; nur in dem ersten Gliede der Reihe kann x keinen Platz finden, sondern dieß Glied muß $= 1$ seyn, weil diese ganze Reihe als der zweyte Theil der Gleichung auch in der Voraussetzung $x = 0$ dem ersten Theile vollkommen gleich seyn muß, welcher alsdann ganz richtig $= (1 + 0)^m = 1^m = 1$ wird; denn alle Potenzen von 1 sind $= 1$.

Um die Größen A, B, C, D.... zu bestimmen setze man $(1 + x)^m = 1 + y$; nämlich $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + + Ex^5 + \ldots\ldots = 1 + y$, so ist

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots$$
$$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots\ldots$$
$$y^3 = A^3x^3 + 3A^2Bx^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^4 = A^4x^4 + \ldots\ldots\ldots$$

u. s. w.

Da wir nun $(1 + x)^m = 1 + y$ gesetzet haben, so ist auch $\log.\text{nat.}\ (1 + x)^m = \log.\text{nat.}\ (1 + y)$, oder $m \,.\, \log.\text{nat.} (1 + x) = \log.\text{nat.} (1 + y)$, vermög (164) nämlich

$$mx - \frac{mx^2}{2} + \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^4}{4} + \frac{mx^5}{5} - \ldots\ldots = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} \ldots\ldots \text{ vermög (167)}$$

Nun substituire man für y, y^2, y^3 .. ihre Werthe, und reducire die ganze Gleichung auf Null, so ist

$$0 = \left.\begin{array}{l} A \\ -m \end{array}\right\} x \; \left.\begin{array}{l} + B \\ - \frac{A^2}{2} \\ + \frac{m}{2} \end{array}\right\} x^2 \; \left.\begin{array}{l} + C \\ - AB \\ + \frac{A^3}{3} \\ - \frac{m}{3} \end{array}\right\} x^3 \; \left.\begin{array}{l} + D \\ - \frac{B^2}{2} \\ - AC \\ + A^2B \\ - \frac{A^4}{4} \\ + \frac{m}{4} \end{array}\right\} x^4 + \ldots\ldots$$

Folglich $(A - m) = 0$

$$B - \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}m = 0$$

$$C - AB + \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{3}m = 0$$

$$D - \tfrac{1}{2}B^2 - AC + A^2B - \tfrac{1}{4}A^4 + \tfrac{1}{4}m = 0$$

nämlich $A = m$

$$B = \frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2}$$

$$C = \frac{m \,.\, m - 1 \,.\, m - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$$

$$D = \frac{m \,.\, m - 1 \,.\, m - 2 \,.\, m - 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$$

u. s. w.

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung A die gefundenen Werthe für A, B, C, .. setzet,

$$(1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2} x^2 + \frac{m \,.\, m - 1 \,.\, m - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 + \frac{m \,.\, m - 1 \,.\, m - 2 \,.\, m - 3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} x^4 + .$$

185. Nun ist es leicht zu zeigen, daß

$$(a + b)^m = a^m + ma^m \frac{b}{a} + \frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2} a^m \frac{b^2}{a^2} + \frac{m \,.\, m - 1 \,.\, m - 2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^m \frac{b^3}{a^3} + \ldots \text{ oder}$$

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \,.\, m - 1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 + \ldots \text{ sey (73)}$$

Denn $(a + b)^m = a^m . \dfrac{(a + b)^m}{a^m} = a^m . \left(\dfrac{a + b}{a}\right)^m = a^m . \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^m$.

Nun setze man in der obigen Formel $\frac{b}{a}$ statt x, so ist

$$a^m . \left(1 + \frac{b}{a}\right)^m = a^m . \left(1 + m . \frac{b}{a} + \frac{m . m - 1}{1 . 2} . \frac{b^2}{a^2} + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} . \frac{b^3}{a^3} \ldots\right);$$ nämlich

$$(a + b)^m = a^m + ma^m . \frac{b}{a} + \frac{m . m - 1}{1 . 2} a^m . \frac{b^2}{a^2} + \frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} a^m . \frac{b^3}{a^3} + \ldots$$ oder auch

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2}b^2 + \ldots$$

Und dieß hat seine Richtigkeit, es möge m eine positive oder negative, ganze oder gebrochene, rationale oder irrationale Größe seyn. Ist nun m eine ganze positive Zahl, so bricht die Reihe bey jenem Gliede ab, wo der Coefficient $\frac{m . m - 1 . m - 2 \ldots}{1 . 2 . 3 \ldots} = 0$ wird. Es sey; z. B. $m = 2$, so wird $\frac{m . m - 1}{1 . 2} a^{m-2}b^2 = b^2$ das letzte Glied der Reihe seyn, weil alle folgenden Glieder $= 0$ sind; und $(a + b)^m$ ist alsdann $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Ist hingegen m eine ganze negative Zahl, so wird die Reihe niemals aufhören, sondern ins unendliche fortlaufen. Auch wird die Reihe ins unendliche laufen, wenn m eine gebrochene, oder auch eine irrationale Größe ist: nur muß man in dergleichen Fällen bedacht seyn, daß das erste Glied von $(a + b)^m$ in Rücksicht des zweyten sehr groß sey, damit die Reihe sehr geschwinde abnehme.

186. Diese Formel mit Worten ausgedrücket lautet also.

Um eine zweynamige Größe auf was immer für eine Potenz, z. B. $(a + b)$ auf die 7te Potenz zu erheben, so schreibe man

man zwey Reihen eine unter die andere, deren die erste bey der höchsten Potenz des ersten Gliedes der vorgegebenen zweynamigen Größe anfängt, und sich bey der 0ten Potenz von eben diesem Gliede endiget; die zweyte Reihe hingegen fängt bey der 0ten Potenz an, und endiget sich bey der höchsten Potenz des zweyten Gliedes der vorgegebenen zweynamigen Größe; in unserem Falle schreibe man also folgende zwey Reihen an

$$a^7,\ a^6,\ a^5,\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a^1,\ a^0$$
$$b^0,\ b^1,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ b^6,\ b^7$$

dann multiplicire man die Glieder der oberen Reihe mit den darunter stehenden Gliedern der untern Reihe, so erhält man a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^2, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7 für die buchstäblichen Produkte der gesuchten 7ten Potenz von $(a + b)$. Um auch die zugehörigen numerischen Coefficienten zu erhalten, so setze man unter die Exponenten der oberen Reihe die bedeutlichen Exponenten der unteren Reihe um nachfolgende Reihe von Brüchen zu erhalten $\frac{7}{1}, \frac{6}{2}, \frac{5}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{5}, \frac{2}{6}, \frac{1}{7}$; und nun ist der erste Bruch der Coefficient des zweyten Gliedes; das Produkt aus dem ersten, und zweyten Bruche ist der Coefficient des dritten Gliedes; das Produkt aus dem ersten, zweyten und dritten Bruche ist der Coefficient des vierten Gliedes u. s. w. folglich ist

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Doch diese Regel dienet nur, wenn der Exponent der gesuchten Potenz eine ganze positive Zahl ist. Würde hingegen dieser Exponent eine ganze negative, oder auch eine gebrochene Zahl seyn, so müßte man in obiger Formel statt, a, b, und m ihre Werthe setzen, und ein Glied nach dem anderen entwickeln. Es sey z. B. $(c^2 - x^2)$ auf die Potenz $\frac{1}{2}$ zu erheben, das ist es sey $(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c^2 - x^2}$ zu entwickeln;

um dieß zu finden setze man $a = c^2$, $b = -x^2$, und $m = \frac{1}{2}$; und dann ist das erste Glied $a^m = (c^2)^{\frac{1}{2}} = c$.

Das zweyte Glied $ma^m \frac{b}{a} = \frac{1}{2} . c . - \frac{x^2}{c^2} = - \frac{x^2}{2c}$.

Das dritte Glied $\frac{m . m - 1}{1 . 2} a^m \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} . - \frac{1}{4} . c . \frac{x^4}{c^4} =$

$$- \frac{1 . x^4}{2 . 4 . c^3}.$$

Das vierte Glied $\frac{m . m - 1 . m - 2}{1 . 2 . 3} a^m \frac{b^3}{a^3} = \frac{1}{2} . -$

$$\frac{1}{4} . - \frac{3}{6} . c . - \frac{x^6}{c^6} = - \frac{1 . 3 . x^6}{2 . 4 \; 6 . c^5}$$

u. s. w.

folglich $(c^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{c^2 - x^2} = c - \frac{x^2}{2c} - \frac{1 . x^4}{2 . 4 . c^3} -$

$$\frac{1 . 3 . x^6}{2 . 4 . 6 . c^5} - \frac{1 . 3 . 5 . x^8}{2 . 4 . 6 . 8 . c^7} - \ldots.$$

Würde nun die gegebene Größe aus mehr als zwey Gliedern bestehen, so muß man das erste Glied der vorgegebenen Größe $= a$, und alle die übrigen Glieder $= b$ setzen, und sodann alles gehörig reduciren. Z. B. wenn $\sqrt[3]{c^3 + x^2 - x}$ zu entwickeln wäre, so setze man $a = c^3$, $b = (x^2 - x)$, $m = \frac{1}{3}$, und dann verrichte man alles, was die Formel anzeigt, so wird man erhalten, was man verlangte.

187. Diese Formel $(a + b)^m = a^m + ma^m . \frac{b}{a} + \frac{m . m - 1}{1 . 2} . a^m . \frac{b^2}{a^2} + \ldots$ wollen wir auf einen einfacheren Ausdruck bringen, damit man sie leichter im Gedächtniße behalten könne. Um dieses zu erhalten, so betrachte man daß $\frac{b}{a}$

$\frac{b}{a}$ in jedem Gliede vorkömmt; man setze also $\frac{b}{a} = Q$, das ist alle Glieder ausser dem ersten dividiret durch das erste Glied setze man $= Q$; das erste Glied der vorgegebenen Größe aber sey $= P$, so verwandelt sich obige Formel in folgende

$$(a + b)^m = P^m + mP^mQ + \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} P^m Q^2 + \frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} P^m Q^3 + \ldots\ldots$$

Bey einer ferneren Untersuchung findet man, daß das zweyte Glied aus dem ersten multipliciret mQ bestehe; setzen wir nun das erste Glied $Pm = A$, so ist das zweyte Glied $= mAQ$.

Das dritte Glied besteht aus dem zweyten multiplicirt mit $\frac{m - 1}{2} Q$; setzen wir nun das zweyte Glied $mP^mQ = mAQ = B$, so ist das dritte Glied $= \frac{m - 1}{2} BQ$.

Eben so findet man das vierte Glied $= \frac{m - 2}{3} CQ$, wenn man das dritte Glied $= \frac{m - 1}{2} BQ = C$ setzet. u. s. w.

Es ist demnach $(a + b)^m = P^m + mAQ + \frac{m - 1}{2} BQ + \frac{m - 2}{3} CQ + \frac{m - 3}{4} DQ + \ldots$ wenn man nämlich $a = P$, $\frac{b}{a} = Q$, $P^m = A$, u. s. w. setzet.

188. Nun wollen wir nach dieser Formel $\sqrt{30}$ entwickeln; um dieses zu erhalten, so müßen wir 30 in zwey Theile zerfällen, deren der erste eine Quadratzahl sey; es ist $\sqrt{30} =$

$\sqrt{25+5}$, oder $\sqrt{30} = \sqrt{36-6}$; wir wollen das letzte, nämlich $\sqrt{36-6}$ beybehalten, damit die Reihe geschwinder zusammenlaufe, weil im zweyten Falle der zweyte Theil der Größe unter dem Zeichen in Rücksicht des ersten Gliedes kleiner ist, als im vorigen Falle; denn $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, hingegen ist $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.

Es ist also $P = 36$; $Q = -\frac{6}{36} = -\frac{1}{6}$; $m = \frac{1}{2}$; folglich

$$P^m = (36)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6 = A$$

$$mAQ = \tfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot -\tfrac{1}{6} = -\tfrac{1}{2} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = -\tfrac{1}{4} \cdot -\tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{6} = -\frac{1}{2.4.6} = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = -\tfrac{3}{6} \cdot -\frac{1}{2.4.6} \cdot -\tfrac{1}{6} = -\frac{1 \cdot 3}{2.4.6.(6)^2} = D$$

$$\frac{m-3}{4} DQ = -\tfrac{5}{8} \cdot -\frac{1 \cdot 3}{2.4.6.(6)^2} \cdot -\tfrac{1}{6} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (6)^3} = E; \text{ u. s. w.}$$

folglich $\sqrt{30} = 6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3}{2.4.6.(6)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8\,(6)^3} - \ldots$

Reduciret man nun diese vier Brüche auf eine gleiche Benennung, so erhält man für die Quadratwurzel eine Zahl, welche bis auf den 10000ten Decimaltheil richtig ist. Durch Hilfe der Logarithmen findet man die Annäherung zu dieser Wurzel viel geschwinder, wenn man den Logarithmus von 30 halbiret, und sodann die dazu gehörige Zahl mit 7 Ziffern aufsucht. Allein auch durch Hilfe dieser Formel, wenn man mit keiner logarithmischen Tafel versehen ist, kann man eine schlei-

nige

nige Annäherung erhalten, wenn man $\sqrt{30} = \sqrt{\frac{30 . 100}{100}} = \frac{1}{10} . \sqrt{3000} = \frac{1}{10} . \sqrt{3025 - 25}$ setzet. Denn es ist alsdann

$$P = 3025 = (55)^2;\ Q = -\frac{25}{3025} = -\frac{1}{121};\ m = \tfrac{1}{2};\ \text{und}$$

$$P^m = (3025)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3025} = 55 = A$$

$$mAQ = \tfrac{1}{2} . 55 . -\frac{1}{121} = -\frac{55}{2 . 121} = B$$

$$\frac{m-1}{2} BQ = -\tfrac{1}{4} . -\frac{55}{2 . 121} . -\frac{1}{121} = -\frac{1 . 55}{2 . 4 . (121)^2} = C$$

$$\frac{m-2}{3} CQ = -\tfrac{3}{6} . -\frac{1 . 55}{2 . 4 . (121)^2} - \frac{1}{121} = -\frac{1 . 3 . 55}{2 . 4 . 6 . (121)^3} = D, \text{ u. s. w.}$$

folglich $\sqrt{30} = \frac{1}{10} . \left(55 - \frac{55}{2 . 121} - \frac{55}{2.4 . (121)^2} - \text{u. s. w.}\right) = \frac{11}{2} . \left(1 - \frac{1}{2 . 121} - \frac{1}{2.4 . (122)^2} - \frac{1 . 3}{2 . 4 . 6 . (121)^3} - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6 . 8\ (121)^4} - \ldots\right)$

Nun sey auch $(x - x^2 + x^3)^2$ nach dieser Formel zu entwickeln: man setze also $P = x$; $Q = -\frac{x^2}{x} + \frac{x^3}{x} = x^2 - x$; und $m = 2$; so ist

$$P^m = (x)^2 = x^2 = A$$

$$mAQ = 2 . x^2 . (x^2 - x) = 2x^4 - 2x^3 = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \tfrac{1}{2}\cdot 2x^4 - 2x^3 \cdot x^2 - x = x^6 - x^5 -$$
$$x^5 + x^4 = x^6 - 2x^5 + x^4 = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = 0$$

folglich $(x - x^2 + x^3)^2 = x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 2x^5 + x^6$

Endlich wollen wir noch aus $(1 - x)$ die Wurzel n bestimmen, das ist wir wollen $(1 - x)^{\frac{1}{n}}$ durch diese Formel in eine unendliche Reihe verwandeln. Um dieses zu erhalten, setzen wir $P = 1$, $Q = -\frac{x}{1} = -x$, und $m = \frac{1}{n}$, so ist

$$P^m = 1^{\frac{1}{n}} = 1 = A$$

$$mAQ = \frac{1}{n}\cdot 1 \cdot - x = -\frac{x}{n} = B$$

$$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{1-n}{2n}\cdot -\frac{x}{n}\cdot - x = -$$
$$\frac{(n-1)\cdot x^2}{n \cdot 2n} = C$$

$$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{1-2n}{3n}\cdot -\frac{(n-1)\cdot x^2}{n\cdot 2n}\cdot - x = -$$
$$\frac{(n-1)\cdot(2n-1)\cdot x^3}{n \cdot 2n \cdot 3n}$$

u. s. w.

folglich $\sqrt[n]{1 - x} = 1 - \frac{x}{n} - \frac{(n-1)}{n \cdot 2n}\cdot x^2 -$
$$\frac{(n-1)\cdot(2n-1)}{n \cdot 2n \cdot 3n}\cdot x^3 - \ldots\ldots$$

Setzen wir nun $x = 1$, so ist $\sqrt[n]{1 - x} = 0$, folglich

0

$$0 = 1 - \frac{1}{n} - \frac{(n-1)}{n \,.\, 2n} - \frac{(n-1) \,.\, (2n-1)}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} - \frac{(n-1) \,.\, (2n-1) \,.\, (3n-2)}{n \,.\, 2n \,.\, 3n \,.\, 4n} \ldots \text{ das ist}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n \,.\, 2n} + \frac{n-1 \,.\, 2n-1}{n \,.\, 2n \,.\, 3n} + \frac{n-1 \,.\, 2n-1 \,.\, 3n-1}{n \,.\, 2n \,.\, 3n \,.\, 4n} + \ldots = 1 \text{: so z. B. ist}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \,.\, 4} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4 \,.\, 6} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8} + \ldots = 1;$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \,.\, 6} + \frac{2 \,.\, 5}{3 \,.\, 6 \,.\, 9} + \frac{2 \,.\, 5 \,.\, 8}{3 \,.\, 6 \,.\, 9 \,.\, 12} + \ldots = 1$$

u. s. w.

189. Diese Formel $(a + b)^m = P^m + mAQ + \frac{m-1}{2} BQ + \ldots\ldots$ Die Newton erfunden, aber nicht erwiesen hat, leistet uns in den höheren Rechnungen einen großen Nutzen; nur klebet ihr noch dieser Fehler an (wenn er doch ein Fehler zu nennen ist), daß sie uns auch rationale Wurzeln in unendlichen Reihen darstellet. So würde man z. B. für $\sqrt{x^2 + 8x + 16}$ eine unendliche Reihe erhalten, wenn man diesen Ausdruck durch die Formel entwickeln wollte, da uns doch bekannt ist, daß $\sqrt{x^2 + 8x + 16} = x + 4$ sey. Doch findet man bey einer genauen Untersuchung, daß alle Glieder der Reihe, in die $\sqrt{x^2 + 8x + 16}$ durch die angeführte Formel aufgelöset wird, bis auf das das erste Glied x, und das zweyte Glied 4 sich wechselweise aufheben, und eben deswegen ist auch der obberührte Umstand für keinen Fehler anzusehen.

Auch zeigt uns diese Formel, wie wir schon einmal erinnert haben, die Potenz eines ganzen, aber negativen Exponenten in einer unendlichen Reihe, da uns doch andere algebraische

Regeln

Regeln eine solche Potenz in einem endlichen Ausdrucke geben. So z. B. findet man nach dieser Formel.

$$(a+b)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3 + \ldots\ldots$$

Nach (73) findet man hingegen $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} =$

$$\frac{1}{a^2 + 2b + b^2};$$

verwandelt man nun diesen Bruch in eine unendliche Reihe, so wird diese letzte Reihe der vorhergehenden vollkommen gleich seyn.

Setzen wir nun in dieser Formel $(a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2} =$

$$\frac{1}{a^2 + 2ab + b} = \frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} + \ldots\ldots$$ u. s. w. $a = 1$, $b = 1$, so scheint

$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots$ zu seyn.

Von den arithmetischen, geometrischen, und einigen anderen Reihen.

190. Eine Folge von Größen, die in einer zusammenhangenden arithmetischen Proportion stehen, das ist in der die Differenzen jeder zwey neben einander stehenden Glieder beständig sind, wird eine **arithmetische Reihe** genennt; z. B. 1, 2, 3, 4, 5, ... und auch 20, 16, 12, 8, 4 sind arithmetische Reihen, weil in beyden Fällen die Differenzen beständig sind. Eine arithmetische Reihe heißt ferner zunehmend oder wachsend, wenn ihre Glieder immer größer werden; im Gegentheile heißt sie abnehmend, wenn ihre Glieder immer kleiner werden. Da nun jede abnehmende Reihe in eine zunehmende verwandelt werden könne, wenn man die Ordnung der Glieder verkehrt, nämlich das erste Glied an die letzte, und das letzte Glied an die erste Stelle setzt, so wollen wir unsere Abhandlung hauptsächlich auf die wachsenden arithmetischen Reihen einschränken. Das nothwen-

wendigste dabey ist, daß wir für jede gegebene arithmetische Reihe das *nte* oder allgemeine Glied (149) und den allgemeinen Ausdruck der Summe von n Gliedern kennen lernen. So z. B. ist bey der Reihe 1, 3, 5, 7, 9, ... das *nte* oder allgemeine Glied $= (2n - 1)$; denn setzt man $n = 1$, so erscheint das erste, setzt man $n = 2$, so erscheint das zweyte, setzt man $n = 4$, so erscheint das vierte Glied der Reihe $= 7$ u. s. w. und die Summe von n Gliedern dieser nämlichen Reihe ist $= n^2$; denn setzt man $n = 3$, so ist die Summe von 3 Gliedern $= 3^2 = 1 + 3 + 5 = 9$, setzt man $n = 5$, so ist die Summe von fünf Gliedern $= 5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ u. s. w. Um das n Glied, und auch die Summe einer arithmetischen Reihe genauer kennen zu lernen, wollen wir eine allgemeine Formel für alle arithmetischen Reihen aufsuchen.

191. Diese Formel ist $\left\{\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \;\ldots\ldots & n\text{tes Glied} \\ a, & (a+d), & (a+2d), & (a+3d), & (a+4d)\ldots\ldots & (a+(n-1).d). \end{array}\right.$

Denn jedes erste Glied kann durch a, jede beliebige Differenz durch d vorgestellet werden. Nun besteht das zweyte Glied aus dem ersten Gliede a und aus der Differenz d, folglich ist dieß Glied $= (a + d)$; das 3te Glied besteht aus dem zweyten und aus der Differenz, nämlich aus $(a + 2d)$, weil das zweyte von dem dritten Gliede abgezogen d übrig lassen muß, u. s. w.

Bey einer genauen Untersuchung dieser Formel findet man, daß jedes Glied aus dem ersten, mehr der Differenz multiplicirt mit der Anzahl der vorhergehenden Glieder, bestehe; folglich ist das *nte* Glied dieser Reihe, welches wir mit ω bezeichnen wollen, gleich dem ersten Gliede mehr der Differenz mit $(n - 1)$ multipliciret, nämlich
$\omega = a + (n - 1) . d = a + dn - d.$

Bey einer ferneren Untersuchung findet man, daß die Summe von jeder beliebigen Anzahl Glieder, z. B. von 4 Gliedern gleich sey dem ersten und vierten Gliede multipliciret mit der halben Anzahl der Glieder, nämlich mit $\frac{4}{2}$; eben so ist die Summe von 6 Gliedern gleich dem ersten, und 6ten Gliede multipliciret mit der halben Anzahl der Glieder, nämlich mit 3; u. s. w. Folglich ist die Summe von n Gliedern, welche wir mit f bezeichnen wollen, gleich dem ersten, und $n$ten Gliede multipliciret mit $\frac{1}{2}n$, nämlich $f = (a + \omega) . \frac{1}{2}n$ $= \frac{an + \omega n}{2}$, oder wenn man für ω seinen Werth substituiret, so ist $f = (a + a + dn - d) . \frac{1}{2}n = \frac{dn^2 + 2an - dn}{2} =$

$$\tfrac{1}{2} dn^2 + \left(\frac{2a - d}{2}\right) . n.$$

192. Wir können den allgemeinen Ausdruck für die Summe von n Gliedern auch aus anderen Gründen herleiten, und zwar auf folgende Art.

Wir können den Ausdruck für die Summe $f = An + Bn^2$ setzen; denn wir können annehmen, daß die Summe von n Gliedern erhalten werde, wenn das $n$te Glied mit einer gewissen Funktion von n, die wir mit fn bezeichnen, multipliciret wird. Es kann demnach $f = (a + dn - d) . fn = (af - df)\, n + dfn^2$ angenommen werden, (f nämlich muß eine solche Größe seyn, daß dieser Ausdruck die Summe von n Gliedern gebe). Setzen wir nun $(af - df) = A$, und $df = B$, so erhalten wir $f = An + Bn^2$ für die Summe von n Gliedern.

Eben so kann man für die Summe von $(n - 1)$ Gliedern, welche Summe wir mit f^1 bezeichnen, folgenden Ausdruck annehmen.

$$f^1 = A . (n - 1) + B . (n - 1)^2 = An - A + Bn^2 - 2Bn + B.$$

Nun ist jedes Glied gleich der Summe aller Glieder weniger der Summe aller vorhergehenden Glieder; das 5te Glied obiger Reihe z. B. ist gleich der Summe von 5 Gliedern weniger

niger der Summe von 4 Gliedern; es ist demnach auch das $n$te Glied gleich der Summe von n Gliedern weniger der Summe von $(n - 1)$ Gliedern, nämlich $\omega = s - s^{\mathrm{I}}$, oder $a + dn - d = (An + Bn^2) - (An - A + Bn^2 - 2Bn + B) = A + 2Bn - B$, wenn man für ω, s, und s^{I} ihre Werthe setzet.

Reduciret man nun diese Gleichung gehörig, und bringet alle Glieder auf eine Seite, so ist
$o = (A - B - a + d) + (2B - d)n$
folglich $A - B - a + d = o$, und auch $2B - d = o$, nämlich $B = \frac{1}{2}d$, und $A = a - \frac{1}{2}d$ vermög (148).

Es ist demnach die Summe von n Gliedern nämlich

$$s = (a - \tfrac{1}{2}d).n + \tfrac{1}{2}dn^2 = \frac{2an - dn + dn^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dn^2 + \left(\frac{2a - d}{2}\right).n, \text{ wie oben.}$$

Wir können die Größen A und B auch folgende Art bestimmen.

Das $n$te Glied ist einmal $= s - s^{\mathrm{I}} = A + 2Bn - B$; setzen wir nun $n = 1$, so erhalten wir das erste Glied der Reihe $= A + B$; setzen wir $n = 2$, so erhalten wir das zweyte Glied der Reihe $= A + 3B$; nun aber ist in unserer Formel das erste Glied $= a$, und das zweyte $= (a + d)$ folglich

$$\begin{matrix} A + B = a \\ A + 3B = a + d \end{matrix} \quad \text{nämlich} \quad \begin{matrix} A = \dfrac{2a - d}{2} \\ B = \frac{1}{2}d \end{matrix}$$

$$\text{und } s = \left(\frac{2a - d}{2}\right)n + \tfrac{1}{2}dn^2.$$

193. Nach der Formel $f = \left(\frac{2a - d}{2}\right) . n + \frac{1}{2}dn^2$ findet man nun die Summe von n natürlichen Zahlen $= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n . (n + 1)}{2}$, weil das erste Glied a, und auch die Differenz d in der Reihe der natürlichen Zahlen $= 1$ ist. Setzen wir nun $n = \infty$, so ist die Summe aller natürlichen Zahlen $= \frac{\infty . \infty}{2} = \infty . \frac{1}{2} \infty$, das ist sie ist gleich dem letzten Gliede multipliciret mit der halben Anzahl der Glieder.

Eben so findet man die Summe von n geraden natürlichen Zahlen $= n^2 + n$, weil in diesem Falle $a = 2$, und auch $d = 2$ ist; die Summe von n ungeraden natürlichen Zahlen hingegen ist $= n^2$, weil in diesem Falle $a = 1$, und $d = 2$ ist. Ziehen wir nun die eine Summe von der anderen ab, so ist die Differenz $= n =$ der Anzahl Glieder; setzen wir in beyden Fällen die Anzahl Glieder unendlich groß, nämlich $n = \infty$, so ist auch die Differenz dieser beyden Summen unendlich groß. Es kann demnach $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10 + \ldots$ unmöglich $= \frac{1}{4}$ seyn, wie es vermög (189) zu seyn scheinet. Die Ursache liegt darinn, daß man bey einer zunehmenden Reihe, in die eine gewisse Größe entweder durch die Division, oder sonst auf eine andere Art aufgelöset worden, jederzeit noch einen Rest zu der Summe aller Glieder hinzufügen muß, um eine wahre Gleichheit zu erhalten. Nur bey einer abnehmenden unendlichen Reihe kann man sagen, daß sie der Größe vollkommen gleich sey, aus der sie entsteht, weil der Rest bey einer solchen Reihe immer kleiner wird, jemehr Glieder als man entwickelt, und endlich gar verschwindet, wenn die Reihe ins unendliche fortgesetzt wird. Man findet z. B. wenn $\frac{1}{3 - 1}$ durch die Division in die unendliche Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$ aufgelöset wird, daß der Rest nach zwey Gliedern $= \frac{1}{2 \cdot (3)^2}$, nach drey Gliedern $= \frac{1}{2 \cdot (3)^3}$, nach vier Gliedern $= \frac{1}{2 \cdot (3)^4}$, nach n Gliedern $= \frac{1}{2 \cdot 3^n}$, und folglich nach ∞ Gliedern $= \frac{1}{2 \cdot 3^\infty}$, nämlich man findet, daß dieser Rest in Rücksicht einer endlichen Größe $= 0$ sey. Bey den wachsenden Reihen ist das Gegentheil, da wird der Rest immer größer, und endlich $= \infty$, wenn die Reihe ohne Ende fortgesetzet wird. Wenn man z. B. $\frac{1}{1 + 2}$ durch die Division in die unendliche Reihe $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \ldots$ auflöset, so findet man den Rest nach n Gliedern $= \frac{(-2)^n}{1 + 2} = \frac{(-2)^n}{3}$, und folglich nach ∞ Gliedern $= \frac{2^\infty}{3}$, nämlich unendlich groß. Eben dieses ist bey einer unendlichen Reihe von gleichen Gliedern zu beobachten; man findet z. B. daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 1}$ sich durch die Division in folgende Reihe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ auflösen lasse, von der man nur sagen kann, daß sie $= \frac{1}{2}$, wenn man den Rest hinzufüget, der unverändert, und immer $= + \frac{1}{2}$, oder $= - \frac{1}{2}$ ist, je nachdem man die Reihe entweder bey einer geraden, oder bey einer ungeraden Anzahl der Glieder endiget: man kann demnach nicht ohne Einschränkung sagen, daß $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ sey; welches doch einst jemand behaupten, und daraus die Schöpfung aus Nichts erklären wollte. Lasset uns nun wieder zu unseren arithmetischen Reihen zurückkehren.

194. Bey einer arithmetischen Reihe kommen fünf Dinge vor, die man in Betrachtung ziehen kann, nämlich das erste Glied a, die Differenz d, die Anzahl der Glieder n, das $n$te Glied ω, die Summe von n Gliedern $\int$; und diese sind also beschaffen, daß man zu drey gegebenen jederzeit die zwey übrigen durch eine blosse Substitution finden könne, wenn man einmal folgende zwanzig Formeln entwickelt hat.

I. $\omega = a + dn - d$, vermög (191.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{II. } a = \omega + d - dn \\ \text{III. } d = \dfrac{\omega - a}{n - 1} \\ \text{IV. } n = \dfrac{\omega + d - a}{d} \end{array}\right\}\text{fließen aus Nro. I.}$$

V. $\int = \dfrac{an + \omega n}{2}$, vermög (191.)

$$\left.\begin{array}{l} \text{VI. } a = \dfrac{2\int}{n} - \omega \\ \text{VII. } \omega = \dfrac{2\int}{n} - a \\ \text{VIII. } n = \dfrac{2\int}{a + \omega} \end{array}\right\}\text{fließen aus Nro. V.}$$

IX. $\int = \dfrac{2an + dn^2 - dn}{2}$, wenn man in Nro. V. statt ω den Werth aus Nro. I. substituiret.

$$\left.\begin{array}{l} \text{X. } a = \dfrac{2\int + dn - dn^2}{2n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{XI. } d = \dfrac{2\int - 2an}{n^2 - n} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{XII. } n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{d} + \sqrt{\dfrac{2\int}{d} + \dfrac{a^2}{d^2} - \dfrac{a}{d} + \dfrac{1}{4}} \end{array}\right\}\text{fließen aus Nro. IX.}$$

XIII.

XIII. $s = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$, wenn man in Nro. V. den Werth statt a aus Nro. II. substituiret.

XIV. $d = \frac{2\omega n - 2s}{n^2 - n}$ ....

XV. $\omega = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}$ .... fließen aus Nro. XIII.

XVI. $n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}}$

XVII. $s = \frac{ad + \omega d + \omega^2 - a}{2d}$, wenn man in Nro. V. statt n den Werth aus Nro. IV. substituiret.

XVIII. $a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\omega^2 + \omega d + \frac{1}{4}d^2 - 2ds}$

XIX. $\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 + 2ds}$. fließen aus Nro. XVII.

XX. $d = \frac{\omega^2 - a^2}{2s - a - \omega}$ ....

Diese zwanzig Formeln können nun auf folgende Weise ordentlich in eine Tafel eingetragen werden, damit der Werth für jede gesuchte Größe alsogleich aus den gegebenen könne gefunden werden.

zu finden	gegeben	Formeln
a	$\omega,\ d,\ n$	$a = \omega + d - dn$
	$\omega,\ n,\ ſ$	$a = \frac{2ſ}{n} - \omega$
	$\omega,\ d,\ ſ$	$a = \frac{1}{2}d + \sqrt{\omega^2 + \omega d + \frac{1}{4}d^2 - 2dſ}$
	$d,\ n,\ ſ$	$a = \frac{2ſ + dn - dn^2}{2n}$
d	$a,\ \omega,\ n$	$d = \frac{\omega - a}{n - 1}$
	$a,\ n,\ ſ$	$d = \frac{2ſ - 2an}{n^2 - n}$
	$a,\ \omega,\ ſ$	$d = \frac{\omega^2 - a^2}{2ſ - \omega - a}$
	$\omega,\ n,\ ſ$	$d = \frac{2\omega n - 2ſ}{n^2 - n}$
n	$a,\ \omega,\ d$	$n = 1 + \frac{\omega - a}{d}$
	$a,\ \omega,\ ſ$	$n = \frac{2ſ}{a + \omega}$
	$a,\ d,\ ſ$	$n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\frac{2ſ}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}}$
	$\omega,\ d,\ ſ$	$n = \frac{1}{2} + \frac{\omega}{d} + \sqrt{\frac{\omega^2}{d^2} + \frac{\omega}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2ſ}{d}}$

zu finden	gegeben	Formeln
ω	a, d, n	$\omega = a + dn - d$
	$a, n, \int$	$\omega = \frac{2\int}{n} - a$
	$a, d, \int$	$\omega = -\frac{1}{2}d + \sqrt{2d\int + a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2}$
	$d, n, \int$	$\omega = \frac{\int}{n} + \frac{dn - d}{2}$
$\int$	a, ω, n	$\int = \frac{an + \omega n}{2}$
	a, d, n	$\int = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$
	a, d, ω	$\int = \frac{a + \omega}{2} + \frac{\omega^2 - a^2}{2d}$
	ω, d, n	$\int = \frac{2\omega n + dn - dn^2}{2}$

Itzt wollen wir noch eine kleine Anwendung von diesen Formeln hersetzen, als:

I. Zwischen 10 und 20 sollen 4 Glieder eingeschaltet werden, so daß alle 6 Glieder sodann eine arithmetische Reihe ausmachen? Diese vier Glieder können gefunden werden, wenn man die Differenz nach der ersten Formel von d bestimmet, weil $a = 10$, $\omega = 20$, $n = 6$ gegeben sind; es ist nämlich $d = \frac{20 - 10}{6 - 1} = 2$; folglich ist die gesuchte Reihe $= 10, 12, 14, 16, 18, 20.$

II. Aus der Erfahrung ist es bekannt, daß ein frey fallender Körper in der ersten Sekunde ohngefähr 15 Schuhe; und in jeder darauf folgenden Sekunde um 30 Schuhe mehr als in der vorhergehenden zurücklege: wie viel Schuhe wird ein Körper wohl in der 10ten Sekunde zurücklegen? Die Antwort findet man in der ersten Formel für ω, da uns $a = 15$, $d = 30$, $n = 10$ gegeben sind; nämlich der in der 10ten Sekunde zurückgelegte Raum ist $\omega = 15 + 300 - 30 = 285$ Schuh.

III. Man läßt von einer Höhe z. B. von einem Thurme einen Körper frey herunter fallen; die dabey beobachtete Zeit beträgt 8 Sekunden: wie groß mag wohl diese Höhe seyn? Diese Höhe s beträgt nach der zweyten Formel von s, weil uns wieder $a = 15$, $d = 30$, $n = 8$ bekannt sind, nämlich $s = \frac{240 + 1920 - 240}{2} = 960$ Schuhe $= 160$ Klafter.

IV. Ein Körper ist von einer Höhe von 240 Schuhen frey herunter gefallen, wie viel Zeit hat er wohl dazu verwendet? Diese Zeit giebt uns die 3te Formel von n, da $a = 15$ $d = 30$, $s = 240$ bekannt sind, nämlich $n = \frac{1}{2} - \frac{15}{30} + \sqrt{\frac{480}{30} + \frac{225}{900} - \frac{15}{30} + \frac{1}{4}} = \sqrt{16} = 4$ Sekunden.

V. Jemand soll einen Weg von 25 Meilen in 5 Tagen zurücklegen, und zwar dergestalt, daß er jeden nachfolgenden Tag um $1\frac{1}{2}$ Meile mehr als den vorhergehenden zurücklegen müße; nun entsteht die Frage, wie viel Meilen er den ersten Tag zurücklegen solle? Die 4te Formel von a, weil uns $d = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $n = 5$, $s = 25$ bekannt sind, sagt, daß er den ersten Tag $a = \frac{25}{5} - \frac{15}{4} + \frac{3}{4} = 2$ Meilen zurücklegen müße; folglich muß er den zweyten Tag $3\frac{1}{2}$, den dritten 5, den 4ten $6\frac{1}{2}$, und den fünften Tag 8 Meilen zurück legen.

195. Es giebt auch arithmetische Reihen, bey denen die zweyten Differenzen beständig sind; wir wollen zum Unterschiede diese Reihen **arithmetische Reihen des zweyten Ranges** nennen; so ist z. B. 1, 4, 9, 16, 25, ... eine arithmetische Reihe des zweyten Ranges, weil die ersten Differenzen davon = 3, 5, 7, 9.... und die zweyten Differenzen = 2, 2, 2, 2.. nämlich beständige Größen sind; jene arithmetische Reihen hingegen, deren erste Differenzen beständig sind, werden wir in der Folge arithmetische Reihen des ersten Ranges nennen.

Durch drey Glieder wird eine arithmetische Reihe des zweyten Ranges hinlänglich bestimmt; es sey z B. 2 das erste, 5 das zweyte, 10 das dritte Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, so sind die ersten Differenzen davon = 3, 5 .... die zweyten Differenzen sind beständig und = 2; folglich ist die Reihe der ersten Differenzen = 3, 5, 7, 9, 11, ... nun kann das vierte Glied der vorhergehenden Reihe gefunden werden; denn dieses Glied muß also beschaffen seyn, daß es 7 übrig läßt, wenn man das vorhergehende nämlich das 3te Glied 10 davon abzieht; dieses vierte Glied muß demnach = 10 + 7 = 17 seyn; eben so ist das 5te Glied = 17 + 9 = 24, u. s. w. Imgleichen es sey − 2, − 1, + 3, als das erste, zweyte, und dritte Glied einer arithmetischen Reihe des 2ten Ranges gegeben, so sind, wenn man jedes vorhergehende Glied von dem darauffolgenden abzieht, die ersten Differenzen — + 1, + 4.. und die zweyten beständigen Differenzen sind = 3; folglich ist die Reihe der ersten Differenzen = 1, 4, 7, 10, 13.... und das vierte Glied der gegebenen Reihe ist = 3 + 7 = 10; das fünfte Glied = 10 + 10 = 20; das sechste Glied = 20 + 13 = 33, u. s. w.

nämlich Reihe =	− 2,	− 1,	3,	10,	20,	33,	49....
die ersten Differenzen =		+ 1,	4,	7,	10,	13,	16....
die zweyten Differenzen =			3,	3,	3..........		

196. Das nothwendigste bey den arithmetischen Reihen des zweyten Ranges ist dieses, daß man zu jeder gegebenen Reihe van dieser Art das allgemeine, oder *n*te Glied, und auch die Summe von *n* Gliedern zu bestimmen wisse; man kann zu dieser Kenntniß auf folgende Art gelangen.

Vermög dem vorhergehenden sieht man schon, daß die ersten Differenzen einer jeden Reihe von dieser Art nichts anders sind, als eine arithmetische Reihe des ersten Ranges; diese Differenzen können demnach durch a, $(a + d)$, $(a + 2d)$, $(a + 3d)$, $(a + 4d)$ .... vorgestellet werden; ferner können wir für das erste Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges e annehmen; folglich ist das zweyte Glied einer solchen Reihe $= a + e$, das dritte Glied $= a + (a + d) + e$, das vierte Glied $= a + (a + d) + (a + 2d) + e$, u. s. w. nämlich

Das 1te =	e
2.	$a + e$
3.	$a + (a + d) + e$
4.	$a + (a + d) + (a + 2d) + e$
5.	$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + e$
....	....
und endlich das *n*te Glied =	$\dfrac{2a.(n-1) + d.(n-1)^2 - d.(n-1)}{2} + e = an - a + \frac{1}{2}dn^2 - dn + \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}dn + \frac{1}{2}d + e$ $= (e + \frac{1}{2}d - a) + (a - \frac{3}{2}d)n + \frac{1}{2}dn^2$

Setzen wir nun $(e + \frac{1}{2}d - a) = P$, $(a - \frac{3}{2}d) = Q$, $\frac{1}{2}d = R$, so können wir sagen, daß das *n*te Glied einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges $= P + Qn + Rn^2$ sey; nämlich es ist einer jeden solchen Reihe

erstes Glied $= P + Q + R$, wenn $n = 1$
zweytes Glied $= P + 2Q + 4R$ .... $n = 2$
drittes Glied $= P + 3Q + 9R$ .... $n = 3$ gesetzt wird.

Nun

Nun wäre in einem unsrigen Beyspiele das erste Glied $= -2$, das zweyte $= -1$, und das dritte Glied $= +3$; folglich

$$\left.\begin{aligned} P + Q + R &= -2 \\ P + 2Q + 4R &= -1 \\ P + 3Q + 9R &= +3 \end{aligned}\right\} \text{nämlich} \begin{aligned} P &= 0 \\ Q &= -\tfrac{7}{2} \\ R &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

Das *nte* Glied in diesem Beyspiele ist demnach $= -\frac{7}{2}n + \frac{3}{2}n^2$; setzen wir in diesem Ausdrucke $n = 5$, so ist $-\frac{7}{2}n + \frac{3}{2}n^2 = 20$ = dem 5ten Gliede der vorgegebenen Reihe, u. s. w.

Oder allgemein: es sey das erste Glied einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges $= a$, das zweyte $= b$, und das dritte Glied $= c$; so ist

$$\left.\begin{aligned} P + Q + R &= a \\ P + 2Q + 4R &= b \\ P + 3Q + 9R &= c \end{aligned}\right] \text{nämlich} \begin{aligned} P &= \frac{6a + 2c - 6b}{2} \\ Q &= \frac{8b - 5a - 3c}{2} \\ R &= \frac{a + c - 2b}{2} \end{aligned}$$

wenn man diese drey Gleichungen durch die Subtraktion entwickelt.

Folglich ist das *nte* Glied

$$\omega = \frac{(6a + 2c - 6b) + (8b - 5a - 3c)n + (a + c - 2b)n^2}{2}$$

197. Da wir einmal das *nte* Glied kennen, so wird es nicht mehr schwer seyn auch die Summe von n Gliedern für eine jede arithmetische Reihe des zweyten Ranges zu bestimmen. Denn man setze nur, Fn sey eine solche Größe, daß das *nte* Glied mit Fn multipliciret die Summe von n Gliedern gebe, so wird $FPn + FQn^2 + FRn^3$ der gesuchte Ausdruck für die Summe seyn. Setzen wir nun $FP = A$, $FQ = B$, $FR = C$, so können wir auch sagen, daß in einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges $\int = An + Bn^2 + Cn^3$ sey.

Eben so kann man behaupten, daß die Summe von $(n-1)$ Gliedern, nämlich $\int' = A.(n-1) + B.(n-1)^2 + C.(n-1)^3 = An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn^3 - 3Cn^2 + 3Cn - C$ sey.

Nun ist $\int - \int' = \omega$ (192), das ist

$$A + 2Bn - B + 3Cn^2 - 3Cn + C$$
$$= \frac{(6a + 2c - 6b) + (8b - 5a - 3c)n + (a + c - 2b)n^2}{2}$$

oder $0 = (2A - 2B + 2C - 6a - 2c + 6b) + (4B - 6C - 8b + 5a + 3c)n + (6C - a - c + 2b)n^2$

folglich $2A - 2B + 2C - 6a - 2c + 6b = 0$

$4B - 6C - 8b + 5a + 3c = 0$

$6C - a - c + 2b = 0$ vermög (148)

nämlich $A = \frac{11a + 2c - 7b}{6}$

$$B = \frac{9b - 6a - 3c}{6}$$

$$C = \frac{a + c - 2b}{6}$$

Es ist demnach bey einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges, deren erstes Glied $= a$, zweytes $= b$, und drittes Glied $= c$, die Summe von n Gliedern

$$\int = \tfrac{1}{6}n.(11a + 2c - 7b) + \tfrac{1}{6}n^2.(9b - 6a - 3c) + \tfrac{1}{6}n^3.(a + c - 2b)$$

Eben diesen Ausdruck erhält man auch auf folgende Weise.

Das $n$te Glied einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges ist $\int - \int' = A - B + C + 2Bn - 3Cn + 3Cn^2$

folglich $A + B + C =$ dem ersten Gliede, wenn $n = 1$

$A + 3B + 7C =$ dem zweyten Gliede, wenn $n = 2$

$A + 5B + 19C =$ dem dritten Gliede, wenn $n = 3$ ist.

Nun aber haben wir für das erste Glied a, für das zweyte Glied b, und für das dritte Glied c angenommen; folglich ist

$$A + B + C = a; \text{ nämlich } A = (11a + 2c - 7b):6$$
$$A + 3B + 7C = b \;\ldots\ldots B = (9b - 6a - 3c):6$$
$$A + 5B + 19C = c \;\ldots\ldots C = (a + c - 2b):6$$

Es ist demnach bey einer jeden arithmetischen Reihe des zweyten Ranges

$$f = \tfrac{1}{6}n \,.\, (11a + 2c - 7b) + \tfrac{1}{6}n^2 \,.\, (9b - 6a - 3c) + \tfrac{1}{6}n^3 \,.\, (a + c - 2b).$$

198. Nun wollen wir nach dieser Formel einige Reihen summiren.

I. Wir haben schon (195) gesehen, daß die Quadrate der natürlichen Zahlen, nämlich 1, 4, 9, 16, 25, 36,..... in einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges fortwachsen. Wir können demnach die Summe von n Quadraten der natürlichen Zahlen finden, wenn wir eben in der itzt gefundenen Formel $a = 1, b = 4, c = 9$ setzen; es ist nach gehöriger Reduktion $f = \frac{n + 3n^2 + 2n^3}{6} = \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (2n + 1)}{6}$; setzen wir $n = \infty$, so ist die Summe einer unendlichen Reihe der Quadrate von den natürlichen Zahlen $= \frac{\infty \,.\, \infty \,.\, 2\infty}{6} = \frac{1}{3}\infty^2 . \infty$ = dem dritten Theile des Produkts aus dem letzten Gliede ∞^2 multipliciret mit der Anzahl der Glieder ∞.

Nach dieser Formel $f = \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (2n + 1)}{6}$ läßt sich die Anzahl Kugeln, die sich in einer vollständigen viereckigten Pyramide befinden sehr leicht bestimmen. Denn da diese Kugeln eine Reihe der Quadrate von den natürlichen Zahlen vorstellen, deren Anzahl Glieder gleich der Anzahl Kugeln ist, die sich in einer Seite dieser Pyramide befinden, so findet man die Summe dieser Reihe, das ist die Anzahl aller Kugeln, wenn man in der Formel statt n die Anzahl der in einer Seite befindlichen Kugeln substituiret. Es sey z. B. die eine Seite = 20 Kugeln, so ist $ſ = (20 . 21 . 41) : 6 = \frac{17220}{6} = 2870$; nämlich man vermehre die Seite 20 um eine Einheit, und addire diese Zahl 21 zu der vorigen um 41 zu erhalten; diese drey Zahlen multiplicire man untereinander, so ist der 6te Theil des Produkts gleich der gesuchten Anzahl aller Kugeln.

II. Bey einer vollständigen dreyeckigten Kugelpyramide ist die erste Schicht = 1, die zweyte = 3, die dritte = 6, die vierte = 10, die fünfte = 15, die sechste = 21 Kugeln u. s. w. diese Schichten sind nun Glieder einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges.

Denn Reihe	= 1, 3, 6, 10, 15, 21 ....
die 1ten Differenzen	= 2, 3, 4, 5, 6 ....
die 2ten Differenzen	= 1, 1, 1, 1 ....

und die Anzahl der Glieder dieser Reihe ist jederzeit die Zahl der in einer Seite befindlichen Kugeln; man findet demnach die Anzahl aller Kugeln einer vollständigen dreyeckigten Pyramide, bey der die eine Seite n Kugeln enthält, wenn man in unserer allgemeinen Formel $a = 1$, $b = 3$, $c = 6$ setzet; es ist nach gehöriger Reduktion

$$ſ = \frac{2n + 3n^2 + n^3}{6} = \frac{n . (n + 1) . (n + 2)}{6};$$ es sey z. B. die eine Seite = 20, so ist die Summe aller Kugeln = $\frac{20 . 21 . 22}{6} = \frac{9240}{6} = 1540$ Kugeln.

Wären die Pyramiden unvollständig, so müßte man die Rechnung einmal anstellen, als wenn die Pyramiden vollständig wären; dann müßte man auch den abgängigen Theil berechnen, und endlich die zweyte Summe von der ersten abziehen, um die gesuchte Anzahl Kugeln zu erhalten.

III. Auch in länglichte freystehende Haufen pflegt man Kugeln aufzuschlichten; die Schichten davon sind Rechtecke, deren Seiten, wie sie aufeinander folgen, von dem Rücken abwärts immer um eine Einheit wachsen. Es sey z. B. der Rücken eines solchen Haufens $= m$ Kugeln, so besteht die darauffolgende Schicht aus einem Rechtecke, wovon die längere Seite $= (m + 1)$, und die kürzere Seite 2 Kugeln enthält, nämlich die zweyte Schicht besteht aus $(m + 1) . 2 = (2m + 2)$ Kugeln; die dritte Schicht enthält $(m + 2) . 3 = (3m + 6)$; die vierte $(m + 3) . 4 = (4m + 12)$; die fünfte $(m + 4) . 5 = (5m + 20)$ Kugeln, u. s. w. Diese Schichten, deren Anzahl durch die in der Breite, oder auch durch die in einer Eckseite befindlichen Kugeln, ausgedrückt wird, wachsen nun wieder in einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges.

Denn Reihe $=$	m,	$(2m+2)$,	$(3m+6)$,	$(4m+12)$,	$(5m+20)$
die 1ten Differenzen		$(m+2)$,	$(m+4)$,	$(m+6)$,	$(m+8)$
die 2ten Differenzen			2,	2,	2,

folglich können wir die Summe der Kugeln eines solchen Haufens, wovon der Rücken m, und die Breite, oder eine Eckseite n Kugeln enthält, gar leicht bestimmen, wenn wir in unserer allgemeinen Formel $a = m$, $b = (2m + 2)$, $c = (3m + 6)$ setzen; wir finden nach gehöriger Reduktion

$$\int = \frac{n . (n + 1) . (2n - 2 + 3m)}{6}$$; es sey z. B. der Rücken $m = 10$, und die Breite $n = 11$ Kugeln, so ist die Anzahl aller Kugeln $= \frac{11 . 12 . 50}{6} = 11 . 2 . 50 = 1100$.

IV. Auch pflegt man an eine viereckigte Pyramide einen Haufen anzulehnen, der aus lauter gleichen dreyeckigten Schichten zusammengesetzet ist; enthält nun eine Seite einer solchen dreyeckigten Schicht n Kugeln, so enthält die Schicht selbst

$\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ Kugeln, weil in einer solchen Schicht die Kugeln in der Reihe der natürlichen Zahlen wachsen; sind nun m solcher Schichten vorhanden, so ist die Summe aller Kugeln eines solchen Haufens $= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot m}{2}$.

Bey einer genauen Betrachtung eines langen Haufens von der vorigen Art findet man, daß er sich in eine viereckigte Pyramide, und in einen Haufen von der letzten Art zerlegen lasse; er kann demnach auch auf diese Weise berechnet werden.

V. Bey der Untersuchung eines langen Haufens, der an beyden Enden an viereckigte Pyramiden angelehnet ist, und in der Breite der Grundfläche, oder auch in der Eckseite n, in der Länge der Grundfläche aber m Kugeln enthält, findet man, daß er aus einer dreyeckigten Pyramide (in der die eine Seite $= n$) und aus einem Haufen von der zweyten Art nach Nro. IV. (bey dem die Breite $= n$, und die Länge $= m - 1$ ist) zusammengesetzet sey; es ist demnach die Anzahl aller Kugeln eines solchen Haufens $= \frac{n.(n+1).(n+2}{6} + \frac{n.(n+1)(m-1)}{2}$

$$= \frac{m \cdot n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{6}.$$

VI. Endlich lassen sich auch die Kugeln in einen Haufen schlichten, dessen Grundfläche aus einem Rechtecke bestehet, aus dem ein anderes ähnliches Rechteck gleichsam herausgeschnitten ist, so daß die Schlichtung in der Mitte einen leeren Raum übrig lasse, der an allen vier Seiten eingeschlossen ist. Bey der Untersuchung eines solchen Haufens findet man, wenn der Rücken m Kugeln enthält, daß die zweyte Schicht deren $2m$, die dritte $3m$, die vierte $4m$ u. s. w. enthalte, und daß die Anzahl aller Schichten der Anzahl Kugeln gleiche, die sich in einer Eckseite befinden; die Summe eines solchen Haufens ist demnach $s = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot m}{2}$, wenn n eine Eckseite vorstellet, weil die Schichten eines solchen Haufens in einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges wachsen, deren erstes Glied $= m$, die Differenz $= m$, und die Anzahl der Glieder $= n$ ist.

199. Es giebt auch Reihen, in denen die dritten Differenzen beständig sind, z. B. die dritten Potenzen der natürlichen Zahlen stellen eine solche Reihe vor:

nämlich	1,	8,	27,	64,	125,	216......
die 1ten Differenzen		7,	19,	37,	61,	91.......
die 2ten Differenzen			12,	18,	24,	30.......
die 3ten Differenzen				6,	6,	6.......

Wir werden diese Reihen **arithmetische Reihen des dritten Ranges** nennen.

200. Bey einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges müßen 4 Glieder gegeben seyn, damit die Reihe hinlänglich bestimmet werde, weil drey Glieder nicht zureichend sind eine solche Reihe von allen übrigen zu unterscheiden; denn unzählige Reihen des dritten Ranges können die ersten drey Glieder gemein haben, und doch in den übrigen verschieden seyn.

z. B. Reihe =	2,	5,	0,	2,	26,	87,	200.....
die 1ten Differenzen =		3,	−5,	2,	24,	61,	113.....
die 2ten Differenzen =			−8,	7,	22,	37,	52.....
die 3ten Differenzen =				15,	15,	15,	15.....

Reihe =	2,	5,	0,	3,	30,	97,	220.......
die 1ten Differenzen =		3,	− 5,	3,	27,	67,	123.......
die 2ten Differenzen =			− 8,	8,	24,	40,	56.......
die 3ten Differenzen =				16,	16,	16,	16.......

201. Wenn man hier eine dem (196) ähnliche Untersuchung anstellen wollte, so würde man finden, daß das *nte* Glied einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges $= P + Qn + Rn^2 + Sn^3$, und die Summe von n Gliedern einer solchen Reihe $= An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ gesetzet werden könne. Da nun die Reihe der dritten Potenzen von den natürlichen Zahlen zu dieser Gattung gehöret, so können wir für die Summe von n dritten Potenzen der natürlichen Zahlen $\int = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$ setzen, und die Summe von $n - 1$ Gliedern eben dieser Reihe ist $\int' = A(n-1) + B(n-1)^2 + C(n-1)^3 + D(n-1)^4 = An - A + Bn^2 - 2Bn + B + Cn^3 - 3Cn^2 + 3Cn - C + Dn^4 - 4Dn^3 + 6Dn^2 - 4Dn + D$;
es ist also $\int - \int' = \omega = (A - B + C - D) + (2B - 3C + 4D)\,n + (3C - 6D)n^2 + 4Dn^3$;
nun aber ist in diesem Falle $\omega = n^3$; folglich ist, wenn man gehörig reduciret

$$0 = (A - B + C - D) + (2B - 3C + 4D)n + (3C - 6D)n^2 + (4D - 1)n^3;$$ nämlich

$(4D - 1) = 0$; das ist $D = \frac{1}{4}$
$(3C - 6D = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots C = \frac{2}{4}$
$2B - 3C + D = 0 \ldots\ldots\ldots B = \frac{1}{4}$
$A - B + C - D = 0 \ldots\ldots\ldots A = 0$

und endlich $\int = \dfrac{n^2 + 2n^3 + n^4}{4} = \frac{1}{4} \cdot (n \cdot (n + 1))^2$;

setzen wir nun $n = \infty$, so ist die Summe einer unendlichen Reihe der dritten Potenzen von den natürlichen Zahlen $= \frac{1}{4} \cdot (\infty \cdot \infty)^2 = \frac{1}{4}\infty^4 = \frac{1}{4} \cdot \infty^3 \cdot \infty =$ dem vierten Theile des Produkts aus dem letzten Gliede multipliciret mit der Anzahl der Glieder.

202. Wir könnten itzt schon schließen, daß die Summe einer unendlichen Reihe der *mten* Potenzen von den natürlichen Zahlen $= \dfrac{1}{m+1} \cdot \infty^m \cdot \infty$ sey, wenn m eine ganze positive

sitive

sitive Zahl ist. Doch wir können dieses auch auf folgende Weise finden.

Man setze die Summe f von n Gliedern einer Reihe der $m$ten Potenzen von den natürlichen Zahlen $f = An^{m+1} + Bn^{m} + Cn^{m-1} + Dn^{m-2} + \ldots$ bestimme daraus den Werth von f^{I}, da man $(n - 1)$ statt n in der angenommenen Formel substituiret; dann subtrahire man f^{I} von f, setze den gefundenen Ausdruck $= n^{m}$, weil dieses das $n$te Glied der vorgegebenen Reihe ist, bringe sodann die ganze Gleichung auf Null, so werden sich dadurch die Größen A, B, C, $D \ldots$ bestimmen lassen; es ist nämlich nach gehöriger Reduktion

$$f = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \tfrac{1}{2}n^{m} + \frac{m}{2 \cdot 2 \cdot 3} n^{m-1} + 0 \cdot n^{m-2}$$
$$- \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} n^{m-3} + 0 \cdot n^{m-4} +$$
$$\frac{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} n^{m-5} + 0 \cdot n^{m-6} \ldots$$

Setzen wir nun in dieser Formel $n = \infty$, so verschwinden alle Glieder ausser dem ersten, wenn m eine positive Zahl ist; folglich ist in diesem Falle $f = \frac{1}{m+1} \infty^{m+1} = \frac{1}{m+1} \infty^{m} . \infty$; wenn z. B. $m = \frac{1}{2}$ ist, so ist $f = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} . \infty^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} . \infty . ^{\frac{1}{2}}\infty = \frac{2}{3} . \infty . \sqrt{\infty}$. Nämlich die Summe einer unendlichen Reihe von den Quadratwurzeln der natürlichen Zahlen ist gleich zwey Drittheilen des Produkts aus dem letzten Gliede in die Anzahl der Glieder.

203. Wir übergehen die übrigen arithmetischen Reihen, in denen die 4ten, 5ten, 6ten Differenzen beständig sind, mit Stillschweigen, weil sie in der ausübenden Mathematik von keinem besonderen Nutzen sind, und merken für die Anfänger, die sich darinnen üben können, um eine bessere Fertigkeit im Kalkuliren zu erhalten, nur noch folgendes an.

I. Einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges allgemeines Glied $= P + Qn$.

P und Q können gefunden werden, wenn zwey Glieder nebst der Anzeige ihres Ortes in der Reihe gegeben sind. Es sey z. B. das 1te Glied $= 5$, und das 11te $= 105$, so ist $P + Q = 5$, wenn man $n = 1$ setzet; und $P + 11\,Q = 105$, wenn man $n = 11$ setzet; folglich $Q = 10$, $P = -5$, und das allgemeine Glied $= -5 + 10n$.
Und die Summe einer arithmetischen Reihe des ersten Ranges $\int = An + Bn^2$.
A und B können gefunden werden, wenn man das allgemeine Glied bestimmet, aus dem Ausdrucke $\int = An + Bn^2$, auch den Ausdruck $\int - \int^1 = A - B + 2Bn$ aufsuchet, sodann diesen Ausdruck dem gefundenen allgemeinen Gliede gleich setzet, die ganze Gleichung auf Null bringet, und endlich die Größen A und B nach (148) entwickelt.

Es ist demnach in unserem Beyspiele $-5 + 10n = A - B + 2Bn$, das ist $0 = (A - B + 5) + (2B - 10)n$, nämlich $B = 5$, $A = 0$, und $\int = 5n^2$.
A und B können auch auf folgende Art gefunden werden; es ist $A + B = 5$, wenn man $n = 1$ setzet, und auch $A + 21B = 105$, wenn man 11 statt n in dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes $\int - \int^1 = A - B + 2Bn$ substituiret; folglich $B = 5$, $A = 0$, wenn man die erste Gleichung von der zweyten subtrahiret.

II. Einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges allgemeines Glied $= P + Qn + Rn^2$;
P, Q, R, werden gefunden, wenn drey Glieder der Reihe nebst der Stelle eines jeden Gliedes gegeben sind.
Und die Summe einer solchen Reihe ist
$\int = An + Bn^2 + Cn^3$; und
$\int - \int^1 = (A - B + C) + (2B - 3C)n + 3Cn^2$.

III. Einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges allgemeines Glied $= P + Qn + Rn^2 + Sn^3$.
Die Summe $\int = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$

und

und $\int - \int^{\mathrm{I}} = (A - B + C - D) + (2B - 3C + 4D)\,n + (3C - 6D)n^2 + 4Dn^3$.

IV. Einer arithmetischen Reihe des vierten Ranges allgemeines Glied $= P + Qn + Rn^2 + Sn^3 + Tn^4$.
Die Summe $\int = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$
und $\int - \int^{\mathrm{I}} = (A - B + C - D + E) + (2B - 3C + 4D - 5E)n + (3C - 6D + 10E)n^2 + (4D - 10E)n^3 + 5En^4$.

V. Einer arithmetischen Reihe des 5ten Ranges allgemeines Glied $= P + Qn + Rn^2 + Sn^3 + Tn^4 + Vn^5$.
Die Summe $\int = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5 + Fn^6$
und $\int - \int^{\mathrm{I}} = (A - B + C - D + E - F) + (2B - 3C + 4D - 5E + 6F)n + (3C - 6D + 10E - 15F)n^2 + (4D - 10E + 20F)n^3 + (5E - 15F)n^4 + 6Fn^5$.

Es sey nun auch nach diesen Formeln zu einem gegebenen allgemeinen Gliede einer arithmetischen Reihe, z. B. zu $25 + 4n^2 - n^3$ der allgemeine Ausdruck der Summe zu bestimmen. Um diese Summe $\int$ zu finden, so setze man, es sey $\int = An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4$; denn aus dem höchsten Exponenten 3 des gegebenen allgemeinen Gliedes erkennet man, daß es zu einer arithmetischen Reihe des dritten Ranges gehöre. Ferner setze man den Werth von $\int - \int^{\mathrm{I}}$ aus Nro. III. dem gegebenen allgemeinen Gliede gleich, und bringe sodann die ganze Gleichung auf Null, so wird man nach gehöriger Reduktion $\int = \frac{308n + 21n^2 + 10n^3 - 3n^4}{12}$ finden.

204. Eine Folge von Größen, bey der jede nachfolgende Größe durch die vorhergehende getheilt den nämlichen Quotienten zum Vorschein bringt, heißt eine geometrische Reihe; z. B. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... imgleichen $\frac{1}{3}, \frac{1}{9},$

$\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}$ sind geometrische Reihen; der Quotient der ersten ist 2, und der Quotient der zweyten Reihe ist $= \frac{1}{3}$; die erste ist eine zunehmende, und die zweyte eine abnehmende Reihe; schreibt man diese letzte also $\frac{1}{243}, \frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$, so wird sie in eine wachsende geometrische Reihe verwandelt, deren beständiger Quotient $= 3$. Um die Eigenschaften der geometrischen Reihen kennen zu lernen, wollen wir eine allgemeine Formel aufsuchen, die uns eine jede geometrische Reihe vorstellet.

205. Diese Formel ist $a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots aq^{n-1}$. Denn das erste Glied einer jeden geometrischen Reihe kann durch a, und der beständige Quotient durch q vorgestellet werden; nun muß q zum Vorschein kommen, wenn man das zweyte Glied durch das erste dividiret; es muß also auch das zweyte Glied zum Vorschein kommen, wenn man das erste Glied a mit q multipliciret; folglich ist das zweyte Glied $= aq$; das dritte $= aq^2$, u. s. w. Nun sieht man schon, nach was für einem Gesetze diese Glieder fortwachsen: jedes Glied nämlich besteht aus dem ersten multiplicirt mit dem gemeinschaftlichen Quotienten zu der Potenz von der Anzahl der vorhergehenden Glieder erhoben; folglich ist das $n$te Glied $\omega = aq^{n-1}$.

206. Nun wollen wir auch die Summe von n Gliedern bestimmen; es sey diese Summe $= s$, so ist
$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots aq^{n-1}$.

Nun multiplicire man beyde Theile dieser Gleichung mit $q - 1$, so ist

$$sq - s = \left\{ \begin{array}{l} +aq+aq^2+aq^3+aq^4+aq^5+\ldots\ldots aq^n \\ -a-aq-aq^2-aq^3-aq^4-aq^5\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} = -$$

$a + aq^n$, weil alle übrigen Glieder sich wechselweise gegeneinander aufheben; folglich $s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{aq^{n-1}.q - a}{q - 1}$.

Nun

Nun setze man ω statt aq^{n-1}, so ist endlich

$\int = \frac{\omega q - a}{q - 1}$; das ist die Summe von n Gliedern einer wachsenden geometrischen Reihe wird erhalten, wenn man das $n$te oder letzte, nämlich das größte Glied mit dem Quotienten multipliciret, von dem Produkte das erste, nämlich das kleinste Glied abzieht, und dieß durch den um 1 verminderten Quotienten dividiret.

207. Aus diesen zwey Formeln $\int = \frac{\omega q - a}{q - 1}$, und $\omega = aq^{n-1}$ lassen sich noch 18 andere Formeln herleiten, so daß man in allen 20 Formeln hat, nach denen man alle hieher gehörigen Aufgaben auflösen kann. Diese 20 Formeln sind folgende

I. $\int = \frac{\omega q - a}{q - 1}$

II. $a = \omega q + \int - \int q$

III. $q = \frac{\int - a}{\int - \omega}$

IV. $\omega = \frac{\int q + a - \int}{q}$

V. $\omega = aq^{n-1}$

VI. $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$

VII. $q = \sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, oder $\log. q = \frac{1}{n - 1} \log.\left(\frac{\omega}{a}\right)$

VIII. $n = 1 + \frac{\log. \omega - \log. a}{\log. q}$; denn $\omega = aq^{n-1}$, und

$q^{n-1} = \frac{\omega}{a}$; also auch $\log. q^{n-1} =$

$$\log.\frac{\omega}{a};\ (n-1)\log.q = \log.\frac{\omega}{a};$$

$$n\log.q - \log.q = \log.\frac{\omega}{a};\ n\log q =$$

$$\log.q + \log.\left(\frac{\omega}{a}\right);\ n = \frac{\log.q}{\log.q} +$$

$$\frac{\log.\frac{\omega}{a}}{\log.q} = 1 + \frac{\log.\omega - \log.a}{\log.q}$$

IX. $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$, wenn man in Nro. V. für ω seinen Werth aus Nro. IV. setzet.

X. $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$.

XI. $n = \frac{\log.(sq + a - s) - \log.a}{\log.q}$

XII. $q^n - \frac{sq}{a} + \frac{s}{a} - 1 = 0$; dieser Werth für q läßt sich nicht einfacher ausdrücken.

XIII. $\omega = \frac{sq^n - sq^{n-1}}{q^n - 1}$, wenn man in Nro. V. für a seinen Werth aus Nro. II. setzet.

XIV. $s = \frac{\omega q^n - \omega}{q^n - q^{n-1}}$

XV. $q^n - \left(\frac{s}{s-\omega}\right).q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$; auch dieser Werth für q läßt sich nicht einfacher ausdrücken.

$$\text{XVI. } n = 1 + \frac{\log.\ \omega - \log.\ (\omega q + s - sq)}{\log.\ q}$$

$$\text{XVII. } n = 1 + \frac{\log.\ \omega - \log.\ a}{\log.\ (s - a) - \log.\ (s - \omega)},$$ wenn man in Nro. V. für q den Werth aus Nro. III. setzet.

$$\text{XVIII. } s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\text{XIX. } (s - \omega) \,.\, \omega^{\frac{1}{n-1}} - (s - a) \,.\, a^{\frac{1}{n-1}} = 0$$

$$\text{XX. } (s - a) \,.\, a^{\frac{1}{n-1}} - (s - \omega) \,.\, \omega^{\frac{1}{n-1}} = 0.$$

Die zwey letzten Formeln lassen sich wieder auf keinen einfacheren Ausdruck bringen; es sind diese zwey, wie auch die 12te, und 15te Formel höhere Gleichungen, von denen wir bald handeln werden.

208. Da sind nun die gesuchten zwanzig Formeln, die man in eine eben solche Tafel ordnen kann, wie wir es bey den zwanzig Formeln der arithmetischen Reihen des ersten Ranges gethan haben. Nun wollen wir auch noch eine kleine Anwendung hiehersetzen: als:

I. Es setzt jemand 3 kr. in das Lottospiel, und nimmt sich vor das Spiel 10 mal zu duppliren. Nun ist die Frage, wie viel er das 10te mal wird einsetzen müßen. Die Antwort giebt uns die Formel V. $\omega = 3 \,.\, 2^9 = 3 \,.\, 512 = 1536$ kr. $= 25$ fl. 36 kr., weil in diesem Falle $a = 3$, $n = 10$, $q = 2$ gegeben sind, und das 10te Glied ω gesucht wird.

II. Und seine ganze Einlage beträgt nach der Formel I.
$s = \frac{1536 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 3069$ kr. $= 51$ fl. 9 kr. weil a, q, und ω gegeben sind.

III. Zwischen 1 und 2 sollen 11 Glieder dergestalt eingeschaltet werden, daß alle 13 Glieder eine geometrische Reihe vorstellen? Um dieses zu erhalten, so suche man zuerst den gemeinschaftlichen Quotienten dieser Reihe; es ist nach der Formel VII.

$$\log. q = \frac{1}{12}\log 2 = \frac{1}{12} \cdot 0{,}30103 = 0{,}0250858;$$

weil $a = 1$, $\omega = 2$, und $n = 13$ bekannt sind. Ferner ist das allgemeine Glied $= aq^{n-1}$, oder der Logarithmus des allgemeinen Gliedes $= \log. a + (n - 1) \log. q = (n - 1) \cdot 0{,}0250858$.

Setzen wir nun nacheinander $n = 2, 3, 4, \ldots$ so erhalten wir die Logarithmen des 2ten, 3ten, 4ten .. Gliedes, folglich auch die Glieder selbst. Es ist nämlich der Logarithmus

		und das Glied selbst
des 2ten Gliedes	= 0,0250858	= 1,059
3ten	= 0,0501716	= 1,122
4ten	= 0,0752574	= 1,189
5ten	= 0,1003432	= 1,260
6ten	= 0,1254290	= 1,335
7ten	= 0,1505148	= 1,414.

u. s. w.

IV. Die Summe dieser unendlichen Reihe

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^3} + \frac{n}{(n+1)^4} + \ldots\ldots$$

$\frac{n}{(n+1)^\infty}$ soll gefunden werden.

Um diese Summe zu bestimmen, so kehre man die Reihe also um

$$\frac{n}{(n+1)^{\infty}} \cdots\cdots + \frac{n}{(n+1)^5} + \frac{n}{(n+1)^4} + \frac{n}{(n+1)^3}$$
$+ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)}$, so ist sie eine zunehmende geometrische Reihe, deren beständiger Quotient $q = (n+1)$, das erste Glied $a = \frac{n}{(n+1)^{\infty}} = 0$, und das letzte Glied $\omega = \frac{n}{n+1}$; folglich ist nach der ersten Formel die Summe

$$s = \left(\frac{n}{n+1} \cdot (n+1) - \frac{n}{(n+1)^{\infty}}\right) : (n+1) - 1 =$$
$\frac{n-0}{n} = \frac{n}{n} = 1$; so z. B. ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots = 1$; imgleichen $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + = 1$.

V. Man hat einen gewissen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, und dafür folgenden Ausdruck erhalten $0,575757\ldots$ was ist dieß wohl für ein Bruch gewesen? Da $0,575757\ldots$
$= \frac{57}{100} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{1000000} \ldots + \frac{57}{\infty} = \frac{57}{(100)^{\infty}} \ldots$
$+ \frac{57}{(100)^3} + \frac{57}{(100)^2} + \frac{57}{100}$, so ist dieser Bruch

$$s = \left(\frac{57}{100} \cdot 100 - \frac{57}{(100)^{\infty}}\right) : 99 = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$$

VI. Es sey auch die Summe dieser unendlichen Reihe

$$\frac{b}{c} + \frac{b+d}{cm} + \frac{b+2d}{cm^2} + \frac{b+3d}{cm^3} + \frac{b+4d}{cm^4} + \ldots$$

zu bestimmen.

Um diese Summe zu finden, so betrachte man, daß diese Reihe, wenn sie gehörig zertheilet wird, gleich sey

$$\frac{b}{c} + \frac{b}{cm} + \frac{b}{cm^2} + \frac{b}{cm^3} + \frac{b}{cm^4} + \frac{b}{cm^5} + \ldots.$$

$$+ \frac{d}{cm} + \frac{d}{cm^2} + \frac{d}{cm^3} + \frac{d}{cm^4} + \frac{d}{cm^5} + \ldots.$$

$$+ \frac{d}{cm^2} + \frac{d}{cm^3} + \frac{d}{cm^4} + \frac{d}{cm^5} + \ldots$$

$$+ \frac{d}{cm^3} + \frac{d}{cm^4} + \frac{d}{cm^5} + \ldots.$$

$$+ \frac{d}{cm^4} + \frac{d}{cm^5} + \ldots.$$

u. s. w.

Nun sind alle Glieder in der ersten horizontalen Zeile $= \frac{bm}{c.(m-1)}$

Alle Glieder in der zweyten Zeile sind $= \frac{d}{c.(m-1)}$

Alle Glieder in der dritten Zeile sind $= \frac{d}{cm.(m-1)}$

Alle Glieder in der vierten Zeile sind $= \frac{d}{cm^2.(m-1)}$

Alle Glieder in der fünften Zeile sind $= \frac{d}{cm^3.(m-1)}$

u. s. w.

Folglich ist die Summe der gegebenen Reihe $\int = \frac{b}{c} + \frac{b+d}{cm} +$

$$\frac{b+2d}{cm^2} + \ldots = \frac{bm}{c.(m-1)} + \frac{d}{c.(m-1)} + \frac{d}{cm.(m-1)}$$

$$+ \frac{d}{cm^2.(m-1)} + \frac{d}{cm^3.(m-1)} + \ldots.$$

Nun

Nun sind alle Glieder ausser dem ersten in dem zweyten Theile der Gleichung $= \frac{dm}{c \cdot (m - 1) \cdot (m - 1)}$, weil sie auch eine wachsende geometrische Reihe vorstellen, wenn man sie verkehrt ansetzt. Es ist demnach die gegebene Reihe

$$\frac{b}{c} + \frac{b + d}{cm} + \frac{b + 2d}{cm^2} + \ldots\ldots$$

nämlich die Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe

$$s = \frac{bm}{c \cdot (m - 1)} + \frac{dm}{c \cdot (m - 1) \cdot (m - 1)} = \frac{bm^2 - bm + dm}{c \cdot (cm - 1) \cdot (m-1)} = \frac{m \cdot (bm + d - b)}{c \cdot (m - 1)^2}.$$

So z. B. ist die Summe dieser unendlichen Reihe $\frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \ldots = \frac{2 \cdot (6 + 1 - 3)}{8 \cdot (2 - 1)^2} = 1.$

209. Gleichwie es arithmetische Reihen giebt, in denen die zweyten Differenzen beständig sind, so kann es auch geometrische Reihen geben, in denen die zweyten Quotienten beständig sind; es ist eine solche

Reihe	3,	6,	24,	192,	3072......
die 1ten Quotienten	2,	4,	8,	16......	
die 2ten Quotienten		2,	2,	2......	

Es giebt Reihen die aus einer arithmetischen, und einer geometrischen entweder durch die Addition, oder durch die Subtraktion zusammengesetzt sind; es ist eine solche Reihe
$1, 0, 2, 10, 30, 74, .. = (3 - 2, (6 - 6), (12 - 10), (24 - 14), (48 - 18), (96 - 22), \ldots$. Imgleichen $6, 13, 25, 47, 89, \ldots = (5 + 1), (10 + 3), (20 + 5), (40 + 7), (80 + 9), (160 + 11), \ldots$

Es

Es giebt Reihen, die aus einer arithmetischen, und einer geometrischen durch die Multiplikation, oder durch die Division zusammengesetzt sind; z. B. 12, 36, 81, 162........
$= 8 \cdot \frac{3}{2}, 16 \cdot \frac{9}{4}, 24 \cdot \frac{27}{8}, 32 \cdot \frac{81}{16}, 40 \cdot \frac{243}{32}, \ldots\ldots$
Ein Beyspiel von der Zusammensetzung durch die Division haben wir schon in der obberührten Reihe $\frac{b}{c}, \frac{b+d}{cm}, \frac{b+2d}{cm^2} \ldots$ gesehen.

Es giebt Reihen, in denen jedes Glied aus der Summe, oder der Differenz einiger vorhergehenden Glieder besteht. Z. B. in der Reihe 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ... besteht jedes nachfolgende Glied aus der Summe der zwey nächst vorhergehenden Glieder; man nennt dergleichen Reihen wiederkehrende Reihen (series recurrentes).

Allein da es bey dergleichen Reihen etwas beschwerlich fällt, aus etwelchen wenigen gegebenen Gliedern das Gesetz der Reihe zu entdecken, und auch solche Reihen auf die ausübende Mathematik keinen besonderen Einfluß haben, so wollen wir uns auch nicht länger dabey aufhalten.

210. Nur noch eine kleine Erwähnung von den unendlichen Reihen, deren Zähler beständig sind, und deren Nenner in einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges fortwachsen. Einige von diesen Reihen, wenn sie auf die Formel $\frac{a}{b.(b+d)}$,
$\frac{a}{(b+d).(b+2d)}, \frac{a}{(b+2d).(b+3d)}, \frac{a}{(b+3d).(b+4d)} \ldots$
reduciret werden können, lassen sich genau summiren. Denn man findet, daß die Summe zweyer Glieder dieser Reihe $= \frac{2a}{b.(b+2d)}$ sey, wenn man sie auf gleiche Benennung bringt.

Die Summe von drey Gliedern ist $= \frac{3a}{b \cdot (b + 3d)}$

Die Summe von vier Glieder ist $= \frac{4a}{b \cdot (b + 4d)}$

u. s. w.

folglich ist die Summe von n Glieder $= \frac{na}{b \cdot (b + nd)}$

Setzen wir nun $n = \infty$, so ist die Summe aller Glieder dieser Reihe $\frac{\infty a}{\infty bd} = \frac{a}{bd}$; z. B. zehn Glieder dieser Reihe $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots$ sind $= \frac{10}{11}$, und alle Glieder sind $= 1$, weil in diesem Falle $a = 1$, $b = 1$, $d = 1$ ist.

Eben so findet man, daß die Summe von n Gliedern dieser Reihe $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots \frac{1}{(2n - 1) \cdot (2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}$ sey, und die Summe aller Glieder dieser nämlichen Reihe ist $= \frac{1}{2}$, wenn $n = \infty$ gesetzt wird.

211. Es ist sonderbar, daß alle bisher bekannten Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen folgende unendliche Reihe, $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n-1)}$ richtig zu summiren, da sich doch die Summe der vorigen Reihe $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}$ genau angeben läßt, und die zwey Reihen

einander vollkommen ähnlich sind; denn beyde Reihen bestehen aus Brüchen, deren Zähler beständig sind, und deren Nenner in einer arithmetischen Reihe des zweyten Ranges wachsen, überdieß sind die Glieder der Reihe $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots$ nichts anders, als die ungeraden Glieder, nämlich das 1te, 3te, 5te, 7te, Glied u. s. w. der vorigen Reihe $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \ldots$

Stellen wir die ungeraden Glieder folgender Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots$ die sich summiren läßt, in folgender Ordnung $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128} + \ldots$ so läßt sich auch diese Reihe genau summiren; denn ihre Summe ist $= \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 0\right) : 4 - 1 = \frac{2}{3}$. Man sollte denken, daß dieses auch im vorigen Falle möglich sey, da die zu summirende Reihe nichts anders ist, als die Anzahl aller ungeraden Glieder einer Reihe, von der wir die Summe genau kennen. Allein es bleibt bey dem, wie ich schon gesagt habe, daß alle bisher bekannten Regeln und Kunstgriffe der Algebra nicht hinreichen diese Reihe richtig zu summiren: nur durch eine Näherung kann man diese Summe bestimmen, besonders, wenn man die Reihe in eine andere verwandelt, die sehr geschwinde zusammenläuft, welches man bey unendlichen Reihen, die nicht schleunig genug abnehmen, jederzeit ins Werk zu stellen trachten muß; wir haben ein solches Beyspiel bey der Reihe

$$\text{log. nat. } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \text{ gesehen},$$

die wir in folgende Reihe log. nat. $2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots \right)$ verwandelt haben, die schon dergestalt abnimmt, daß man nur einige wenige Glieder 8 oder 9 entwickeln darf, um eine Annäherung zu der Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe zu erhalten, die bis auf den millionten Theil einer Einheit richtig ist.

212. Es eräugnet sich zuweilen, daß nur einige wenige Glieder als z. B. das 20te, 30te, 40te, 50te, und 60te Glied einer Reihe gegeben werden, ohne zu wissen, zu welcher Gattung diese Reihe gehöre, und doch wird es dabey verlanget, daß man die übrigen zwischenliegenden Glieder ziemlich verläßlich bestimmen solle. Beym Bombenwerfen trägt sich dieses zu; es sey z. B. die unter einem nämlichen Erhöhungswinkel erreichte Weite mit 20 Loth Pulver = 80 Klafter, mit 30 Loth = 250, mit 40 Loth = 420, mit 50 Loth = 550, und mit 60 Loth Pulver = 650 Klafter; nun sollen aus diesen durch einen richtigen Versuch gefundenen Wurfweiten unter dem nämlichen Erhöhungswinkel bey dem nämlichen Pöller die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth des nämlichen Pulvers zugehörigen Wurfweiten vom Lothe zu Lothe durch Rechnung bestimmet werden. Dieses kann auf folgende Art geschehen.

Da es einmal gewiß ist, daß die zu den verschiedenen Ladungen von 20 bis 60 Loth zugehörigen Wurfweiten eine zunehmende Reihe ausmachen, von der uns weder das Gesetz, noch sonst etwas ausser dem 20ten, 30ten, 40ten, 50ten, und 60ten Gliede bekannt ist, so setze man die zu n Lothen des nämlichen Pulvers unter dem nämlichen Erhöhungswinkel zugehörige Wurf-

Wurfweite $= An + Bn^2 + Cn^3 + Dn^4 + En^5$.
A, B, C, D, E lassen sich bestimmen; denn

$$80 = 20A + 400B + 8000C + 160000D + \\ + 3200000E$$
$$250 = 30A + 900B + 27000C + 810000D + \\ + 24300000E$$
$$420 = 40A + 1600B + 64000C + 2560000D + \\ + 102400000E$$
$$550 = 50A + 2500B + 125000C + 6250000D + \\ + 312500000E$$
$$650 = 60A + 3600B + 216000C + 12960000D + \\ + 777600000E$$

wenn man nämlich einmal $n = 20$, dann $n = 30, 40, 50$, und endlich $n = 60$ setzet.

Nun ziehe man jede vorhergehende Gleichung von der nächst darauffolgenden ab, halbire die erste Gleichung, und dividire sodann alle Gleichungen durch 10, so erhält man 5 folgende Gleichungen, nämlich man erhält eben so viel Gleichungen, als unbekannte Größen zu entwickeln sind, und dabey in jeder Gleichungen den nämlichen Coefficienten von A.

$$4 = A + 20B + 400C + 8000D + 160000E$$
$$18 = A + 50B + 1900C + 65000D + 2110000E$$
$$16 = A + 70B + 3700C + 175000D + 7810000E$$
$$13 = A + 90B + 6100C + 369000D + 21010000E$$
$$10 = A + 110B + 9100C + 671000D + 46510000E$$

Nun subtrahire man wieder jede vorhergehende Gleichung von der nächst darauffolgenden, damit A verschwinde, nämlich

$$14 = 30B + 1500C + 57000D + 1950000E$$
$$-2 = 20B + 1800C + 110000D + 5700000E$$
$$-3 = 20B + 2400C + 194000D + 13200000E$$
$$-3 = 20B + 3000C + 302000D + 25500000E$$

Man ziehe wieder jede vorhergehende Gleichung von der nächst darauffolgenden ab, nur multiplicire man die zweyte Glei-

Gleichung mit $\frac{3}{2}$, ehe die erste davon abgezogen wird, damit B in allen drey folgenden Gleichungen verschwinde, nämlich

$$-17 = 1200C + 108000D + 6600000E$$
$$-1 = 600C + 84000D + 7500000E$$
$$-0 = 600C + 108000D + 12300000E$$

Die zwey letzten Gleichungen multiplicire man mit 2, und ziehe sodann jede vorhergehende Gleichung von der nächst darauffolgenden ab, damit C hinweggeschaffet werde, so erhält man folgende zwey Gleichungen

$$15 = 60000D + 8400000E$$
$$2 = 48000D + 9600000E.$$

Endlich multiplicire man noch die erste dieser zwey Gleichungen mit 2, und die zweyte mit $\frac{5}{2}$, damit D in beyden Gleichungen den nämlichen Coefficienten erhalte, und ziehe die erste Gleichung von der zweyten ab, so ist

$$-25 = 7200000E.$$

Folglich $E = -\frac{1}{288000}$; $D = \frac{212}{288000}$; $C = -\frac{17660}{288000}$; $B = \frac{679600}{288000}$; $A = -\frac{6912000}{288000}$; und die zu n Lothen zugehörige Wurfweite ist demnach

$$= \frac{-6912000n + 679600n^2 - 17660n^3 + 212n^4 - n^5}{288000}$$

$$= \frac{(679600n^2 + 212n^4) - (6912000n + 17660n^3 + n^5)}{288000} \text{ Kl.}$$

Setzt man nun in dieser Formel $n = 20, 30, 40, 50, 60$, so erhält man für die Wurfweiten die nämlichen Zahlen, die das angenommene Experiment gegeben hat: setzt man ferner in dieser nämlichen Formel $n = 21, 22, 23, \ldots 59$, und reduciret alles gehörig, so erhält man die zu 21, 22, 23, ... 59 Lothen des nämlichen Pulvers unter dem nämlichen Erhöhungswinkel zugehörigen Wurfweiten in Klaftern.

Wenn diese Rechnung nach einem richtigen und genauen Versuche bey einer jeden gebräuchlichen Gattung der Bombenpöller unternommen wird, so läßt sich daraus eine sehr geschmeidige Tafel verfertigen, durch deren Hilfe man im erforderlichen Falle nach dem gemachten Probwurfe die Vermehrung oder Verminderung der Ladung verläßlich bestimmen kann um die vorgegebene Weite zu erreichen, wenn schon der Erhöhungswinkel, oder das Pulver, oder endlich der Zustand der Atmosphäre und der übrigen Umstände, ausser der Bauart des Pöllers und dem Kaliber der Bombe, von dem abgeführten Versuche verschieden seyn sollte. Vielleicht folgt bey einer anderen Gelegenheit etwas mehreres und ausführlicheres von diesem Gegenstande.

213. Ehe wir diese Abhandlung von den Reihen beschliessen, wollen wir noch von den Verbindungen, und Versetzungen der Größen etwas anführen. Bey den Verbindungen der Größen kömmt es hauptsächlich darauf an, daß man die Anzahl der Verbindungen (numerum combinationum) von n Größen zu bestimmen wisse, wenn in jeder Verbindung m Größen beysammen stehen. Dieses können wir auf folgende Art erhalten.

214. Wenn drey Größen a, b, c, dergestalt zu verbinden sind, daß in jeder Verbindung sich deren zwey befinden, so können nur folgende Verbindungen statt finden; ab, ac, bc; die Anzahl der Verbindungen zu zweyen ist demnach bey 3 Größen $= 3 = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1}$.

Wenn vier Größen, a, b, c, d, zu zweyen zu verbinden sind, so erscheinen nur folgende Verbindungen; ab, ac, ad, bc, bd, cd; die Anzahl der Verbindungen zu zweyen ist demnach bey 4 Größen $= 6 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1}$.

Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu zweyen bey n Größen $= \frac{n \cdot (n - 1)}{2 \cdot 1}$.

Sind von den Größen a, b, c, d, drey in jede Verbindung zu setzen, so erhält man nur folgende Verbindungen; abc, abd, acd, bcd; die Anzahl der Verbindungen zu dreyen ist demnach bey 4 Größen $= 4 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Sind fünf Größen a, b, c, d, e, zu dreyen zu verbinden, so kommen nur folgende Verbindungen zum Vorschein; abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde; ihre Anzahl ist demnach $= 10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Folglich ist die Anzahl der Verbindungen zu dreyen bey n Größen $= \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Auf die nämliche Weise findet man, daß die Anzahl der Verbindungen zu vieren bey n Größen gleich sey $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$ u. s. w.

Es ist demnach die Anzahl der verschiedenen Verbindungen bey n Größen, wenn in jeder Verbindung deren m zusammen kommen, gleich $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \ldots (n-m+1)}{m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot m-3 \cdot m-4 \ldots 1}$

215. So ist bey dem gewöhnlichen Lottospiele die Anzahl aller möglichen Quintternen gleich $\frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$
$= 43949268$.

Wollte jemand alle diese 43949268 Quintternen in das Lotto spielen, so würde er ganz gewiß auf einem Zettel den Quinterno errathen; dieser beträgt einmal 10 Ternen. Auf $5 \cdot 85 = 425$ Zetteln würde er Quartternen haben; diese betragen

1700 Ternen, da jeder Quartterno 4 Ternen giebt. Ueber dieses würde er noch $\frac{85 \cdot 84}{2 \cdot 1} \cdot 10 = 35700$ Ternen haben, nämlich auf 35700 Zetteln würden drey Numern errathen, und zwey gefehlet seyn; dieses beträgt zusammen 37410 Ternen.

Setzen wir nun, daß auf ein jedes Zettel mit 5 Numern 1 gesetzet wird (z. B. 1 Zehnkreuzerstück, 1 fl., oder sonst eine beliebige Münze) so beläuft sich die ganze Einlage auf 43949268; da nun die k. k. privil. Lottokammer für jeden Terno die Einlage, die auf ein Zettel mit fünf Numern gesetzet wird, nur 480fach zurückbezahlet, so beträgt die sämtliche Zurückbezahlung nur $480 \cdot 37410 = 17956800$; es gewinnt demnach die Lottokammer in diesem Falle 25992468 von 43949268 oder ohngefähr 59 von 100; nämlich die Lottokammer zahlt bey dem Spiele mit 5 Numern auf einem Zettel, von 100 fl. die hineingesetzet werden, nur ohngefähr 41 fl. zurück.

Die Anzahl aller möglichen Quartternen bey dem Lottospiele ist $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2555190$; wollte man nun auf alle diese Quartternen, nämlich auf jedes Zettel mit vier Numern 1 setzen, so würde die ganze Einlage 2555190 betragen.

Nun würde man in diesem Falle 5 richtige Quartternen haben, weil jede 5 ausgezogene Numern 5 Quartternen geben; diese 5 Quartternen betragen $5 \cdot 4 = 20$ Ternen, da jeder Quartterno vier Ternen giebt.

Ueberdieß würde man noch $10 \cdot 85$ Ternen haben, das ist auf 850 Zetteln würden drey Numern errathen, und eine gefehlt seyn. Diese Ternen betragen zusammen 870.

Die ganze Zurückzahlung würde demnach in diesem Falle $870 \cdot 1200 = 1044000$ betragen, weil die Lottokammer für jeden Terno die Einlage, die auf 1 Zettel mit 4 Numern gesetzet wird, nur 1200fach zurückbezahlet.

Folg-

Folglich ist der Gewinn der Lottokammer 151190 von 255190 oder ohngefähr 59 von 100; nämlich von 100 fl., die bey dem Ternospiele mit 4 Numern auf einem Zettel eingesetzet werden, zahlt die Lottokammer nur ohngefähr 41 fl. zurück.

Die Anzahl aller möglichen Ternen von den 90 Numern bey dem Lottospiele ist $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 117480$. Würden alle diese Ternen eingespielet, und auf jedes Zettel 1 gesetzet, so beläuft sich die ganze Einlage auf 117480. Nun können aus allen diesen Ternen nur 10 getroffen seyn, weil nur 5 Numern ausgezogen werden, welche $10 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ Ternen geben; und da die Lottokammer die Einlage, welche auf ein Zettel mit 3 Numern gesetzet wird, für jeden Terno nur 4800fach zurückbezahlet, so beträgt die ganze Zurückbezahlung nur $4800 \cdot 10 = 48000$; folglich gewinnt die Lottokammer auch in diesem Falle ohngefähr 59 von 100.

Auf die nämliche Art kann der Gewinn der Lottokammer bey dem Ambospiele berechnet werden, da es bekannt ist, daß die Lottokammer für jeden Ambo die Einlage, welche auf ein Zettel mit 5 Numern auf Ambo gesetzet wird, 24fach, die Einlage auf ein Zettel mit 4 Numern 60fach, die Einlage auf ein Zettel mit 3 Numern 80fach, und endlich die Einlage auf ein Zettel mit 2 Numern 240fach zurückbezahlet. Man findet nach gehöriger Untersuchung, daß die Lottokammer bey dem Ambospiele ohngefähr 40 von 100 gewinne.

Und auf die nämliche Weise findet man, daß die Lottokammer bey dem Ambo · 40, und bey dem Ternospiele 59 von 100 gewinne, wenn auch mehr als fünf Numern auf ein Zettel gesetzet werden, weil es schon einmal so eingerichtet ist, daß die Lottokammer für jeden Ambo die Einlage, welche auf ein Zettel mit n Numern gesetzet wird, nur $\frac{480}{n.(n-1)}$fach, und für jeden Terno die Einlage, welche auf ein Zettel mit n Numern gesetzet wird, nur $\frac{28800}{n.(n-1).(n-2)}$fach zurückbezahlet. Setzen wir z. B. daß jemand auf blossen Terno spiele, und für ein Zettel mit zehn Numern $\frac{1}{5}$ fl. einlege, setzen wir ferner den sehr unwahrscheinlichen Fall, daß er 4 aus den 5 herausgezogenen Numern errathe, so betragen diese getroffenen vier Nummern $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ Ternen; und die ganze Summe, die er von der Lottokammer erhält, beläuft sich demnach nur auf $\frac{\frac{1}{5}\text{ fl.} \cdot 28800}{10 \cdot 9 \cdot 8} \cdot 4 = 32$ fl. Nun setzen wir auch, daß für ein Zettel mit allen 90 Numern a Gulden auf blossen Terno eingeleget werden, so beträgt die Zurückbezahlung der Kammer $\frac{a\text{ fl.} \cdot 28800}{90 \cdot 89 \cdot 88} \cdot 10$ Terno $=$ $\frac{288000a}{704880}$ fl. $= \frac{400a}{979}$ fl.; folglich verhält sich die Einlage zur Zurückbezahlung, gleichwie a zu $\frac{400a}{979}$, das ist wie 979 zu 400, oder endlich wie 100 zu 41 beynahe; der Gewinn der Lottokammer beträgt demnach 59 von 100; u. s. w.

Bey dem Estratto determinato ist endlich der Gewinn der Lottokammer 23 von 90, oder ungefähr $25\frac{1}{2}$ von 100; und bey dem einfachen Estratto ist der Gewinn der Kammer 20 von 90, oder beynahe 22 von 100, weil die Einlage bey jenem Estratto 67fach, und bey diesem 14fach zurückbezahlet wird.

Es folgt aus diesem, daß man aus dem nach einer jeden Ziehung herausgegebenen Verzeichniße der Treffer sowohl die sämtliche Einlage aller Spieler, als auch den Gewinn

der

der Lottokammer berechnen könne; man schließt nämlich: 41 verhält sich zu 59, gleichwie die für alle getroffenen Ternen ausgezahlte Summe zum Gewinne der Lottokammer; addiret man nun diesen gefundenen Gewinn zu der ausgezahlten Summe, so erhält man die sämtliche Einlage aller Ternospieler: imgleichen 60 verhält sich zu 40, oder 3 zu 2, gleichwie die für alle getroffenen Ambo ausgezahlte Summe zum Gewinne der Lottokammer von der Einlage aller Ambospieler; u. s. w. Nur wird allhier vorausgesetzt, daß alle Spieler zusammengenommen, und die Lottokammer im Durchschnitte betrachtet gleiches Glück haben.

216. Nun von den Versetzungen: zwey ungleiche Größen a, b, leiden nur zwey Versetzungen ab, und ba; bey drey ungleichen Größen a, b, c, ist die Anzahl der Versetzungen $= 6 = 3 . 2 . 1$; nämlich abc, cba, bac, cab, acb, bca: kömmt die vierte Größe noch dazu, so wird die Anzahl der Versetzungen $= 24 = 4 . 3 . 2 . 1$ seyn; denn bey jeder der 6 vorhergehenden Versetzungen kann die vierte Größe d einmal vorwärts, einmal zwischen der ersten und zweyten, einmal zwischen der zweyten und dritten, und einmal rückwärts stehen; u. s. w.

Folglich ist die Anzahl der Versetzungen bey n ungleichen Größen $= n . n - 1 . n - 2 . n - 3 . n - 4 \ldots\ldots 1$

So z. B. können 8 Personen an einer Tafel $8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 40320$mal speisen, und ihre Sitze wechseln, bis sie genöthiget sind alle ihre vorigen Stellen wieder in der nämlichen Ordnung zu besetzen.

Siebente Vorlesung.

Von den höheren Gleichungen.

Von den Eigenschaften und der Auflösung der höheren Gleichungen.

217. Wenn man bey der Auflösung einer algebraischen Aufgabe auf eine Gleichung verfällt, in der die unbekannte Größe einen Exponenten hat, der größer ist als 1, so nennt man eine solche Gleichung eine **höhere Gleichung**. Befindet sich nun in einer höheren Gleichung eine einzige Potenz von der unbekannten Größe, z. B. $x^m = A$, so heißt eine solche Gleichung eine **reine** höhere Gleichung; befinden sich hingegen in der Gleichung mehrere ungleiche Potenzen von der unbekannten Größe, so heißt die Gleichung eine **verwickelte** höhere Gleichung; überdieß erhalten die Gleichungen auch noch eine Benennung von dem höchsten Exponenten der unbekannten Größe. So heißen die Gleichungen, in denen der höchste Exponent der unbekannten Größe $= 2$ ist, quadratische Gleichungen, oder Gleichungen des **zweyten Grades**; ist der höchste Exponent der unbekannten Größe in einer Gleichung $= 3$, so heißt sie eine Gleichung des **dritten Grades**, oder eine cubische Gleichung; ist der höchste Exponent der unbekannten Größe in einer Gleichung $= m$, so heißt sie eine **Gleichung des $m$ten Grades**. Von den reinen höheren Gleichungen, wie auch von den verwickelten Gleichungen des zweyten Grades haben wir bereits schon gehandelt: es ist uns demnach nichts mehr übrig, als daß wir auch die nothwendigsten Verhaltungsregeln von der Auflösung der verwickelten höheren Gleichungen auseinander setzen.

218.

218. Das erste, so dabey vorkömmt, ist, daß man die Gleichung ordne, das heißt die Gleichung also stelle, daß in dem ersten Gliede des ersten Theils der Gleichung die höchste Potenz der unbekannten Größe ohne allen Coefficienten mit dem positiven Zeichen sich befinde; daß in den übrigen folgenden Gliedern die immer um eine Einheit niedrigeren Potenzen der unbekannten Größe mit ihren zugehörigen Coefficienten und Zeichen stehen; daß die abgängigen Potenzen der unbekannten Größe, das ist die Glieder in denen sich die abgängigen Potenzen befinden sollten, mit einen Sternchen ($*$) bezeichnet werden; daß endlich der ganze zweyte Theil der Gleichung gleich Null sey.

Dieses alles kann durch die ersten Rechnungsarten verrichtet werden. Z. B.

es sey $100 - 20x^2 = \frac{500}{x} - 4x^3$ zu ordnen,

so ist $100x - 20x^3 = 500 - 4x^4$ durch die Multiplikation mit x

$4x^4 - 20x^3 + 100x = 500$ durch die Versetzung;

$x^4 - 5x^3 + 25x = 125$ durch die Division mit 4;

und endlich $x^4 - 5x^3 * + 25x - 125 = 0$.

Da nämlich x^2 abgeht, so wird seine Stelle mit einem Sternchen bezeichnet.

Imgleichen wenn $mx^2 - px^3 + \frac{q - nx + m}{x^2} = tx - f$ zu ordnen wäre, so findet man nach gehöriger Reduktion

$$x^5 - \frac{m}{p}x^4 + \frac{t}{p}x^3 - \frac{f}{p}x^2 + \frac{n}{p}x - \left(\frac{m+q}{p}\right) = 0.$$

Dieses letzte Beyspiel ist nun eine vollständige höhere Gleichung, weil darinnen gar kein Glied fehlet, da hingegen das vorige eine unvollständige höhere Gleichung ware. Wir sehen schon aus diesem, daß eine jede vollständige höhere Gleichung des $m$ten Grades $(m+1)$ Glieder haben müße, und daß man jede höhere Gleichung durch die Formel $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + dx^{m-4} + \ldots + \omega = 0$ vorstellen könne: so ist im obigen Beyspiele, wenn man es mit dieser Formel vergleicht, $m = 4$, $a = -5$, $b = 0$, $c = 25$, $d, e, f, \ldots = 0$, $\omega = -125$; vergleicht man hingegen das zweyte Beyspiel mit dieser Formel, so ist $m = 5$, $a = -\frac{m}{p}$, $b = \frac{t}{p}$, $c = -\frac{f}{p}$, $d = \frac{n}{p}$, $e = 0$, u. s. w. und endlich $\omega = -\left(\frac{m+q}{p}\right)$.

Bey dem Ordnen einer höheren Gleichung ist noch zu merken, daß man die irrationalen Größen hinwegschaffe: dieses kann geschehen, wenn man alle irrationalen Größen auf die eine, und die rationalen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt, und sodann die ganze Gleichung auf die Potenz des Exponenten des Wurzelzeichens erhebt. Z. B.
es sey $10x - \sqrt{5x} = 5x^2$ zu ordnen,
so ist $10x - 5x^2 = \sqrt{5x}$;
also auch $100x^2 - 100x^3 + 25x^4 = 5x$;
und endlich $x^3 - 4x^2 + 4x - \frac{1}{5} = 0$.
Imgleichen es sey zu ordnen $2 - 3\sqrt{2x} = x + \sqrt{10}$;
so ist auch $2 - x = 3\sqrt{2x} + \sqrt{10}$,
und $4 - 4x + x^2 = 18x + 6\sqrt{20x} + 10$;
nämlich $x^2 - 22x - 6 = 6\sqrt{20x}$;
also auch $x^4 - 44x^3 + 484x^2 - 12x^2 + 264x + 36 = 720x$,
und endlich $x^4 - 44x^3 + 472x^2 - 456x + 36 = 0$.

219. Ist einmal eine höhere Gleichung geordnet, so muß man bedacht seyn die Werthe der unbekannten Größe zu bestimmen, welche man die **Wurzeln der Gleichung** nennet. Da nun die geordnete Gleichung $= 0$ ist, und die Coefficienten be-

bekannte Größen sind, so ist es offenbar, daß jede Wurzel der Gleichung also beschaffen seyn müße, daß die ganze Gleichung $= 0$ verbleibet, wenn man eine solche Wurzel statt der unbekannten Größe in der Gleichung setzet. So z. B. sind in der Gleichung $x^3 - 6x^2 - 45x + 50 = 0$ die Wurzeln $10, 1, -6$; nämlich $x = 10$, oder $x = 1$, oder endlich $x = -6$; denn jeder dieser Werthe, wenn er für x gesetzet wird, leistet der Gleichung ein Genügen. Wir haben schon gesehen, daß jede quadratische Gleichung zwey Wurzeln habe, wir haben gesehen, daß in unserem letzten Beyspiele die cubische Gleichung drey Wurzeln hatte; wir werden in der Folge sehen, daß jede höhere Gleichung so viel Wurzeln habe, als der höchste Exponent der unbekannten Größe Einheiten enthält. Unter diesen Wurzeln können einige **positiv**, andere **negativ**, einige **rational**, andere **irrational**, einige **wirklich** oder möglich, andere nur **eingebildet** oder unmöglich seyn; die negativen Wurzeln werden von einigen Analysten **falsche**, und die positiven **wahre** Wurzeln genennt.

220. Die Wurzeln einer geordneten höheren Gleichung hängen ganz gewiß von den Coefficienten, und von dem letzten Gliede ab; denn wenn man nur eines dieser Dinge ändert, so werden alsogleich auch die Wurzeln geändert. Dem ungeachtet hat man bis itzt noch keine allgemeine Methode erfinden können aus den Coefficienten, und aus dem letzten Gliede die Wurzeln einer jeden höheren Gleichung genau zu bestimmen, und es bleibt uns nichts mehr übrig, als eine Größe nach der anderen zu versuchen, die der Gleichung ein Genügen leistet. Dieses Versuchen kann durch folgende Betrachtung etwas erleichtert werden.

221. Wenn man jede geordnete höhere Gleichung ansieht, daß sie aus so vielen einfachen Gleichungen, deren jede $= 0$ ist, durch die Multiplikation zusammengesetzet sey, als der

höchste

höchste Exponent der unbekannten Größe Einheiten enthält, und multipliciret einige einfache Gleichungen untereinander, z. B.

$$\begin{array}{l} x - a = 0 \\ \times\ x - b = 0 \\ \hline = x^2 \left.\begin{array}{l} - a \\ - b \end{array}\right\} x + ab = 0 \\ \times\ x - c = 0 \\ \hline = x^3 \left.\begin{array}{l} - a \\ - b \\ - c \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} + ab \\ + ac \\ + bc \end{array}\right\} x - abc = 0 \\ \times\ x - d \\ \hline = x^4 \left.\begin{array}{l} - a \\ - b \\ - c \\ - d \end{array}\right\} x^3 \left.\begin{array}{l} + ab \\ + ac \\ + ad \\ + bc \\ + bd \\ + cd \end{array}\right\} x^2 \left.\begin{array}{l} - abc \\ - abd \\ - acd \\ - bcd \end{array}\right\} x + abcd = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - \sqrt{-3} = 0 \\ \times\ x + \sqrt{-3} = 0 \\ \hline = x^2 - x\sqrt{-3} + x\sqrt{-3} + 3 = 0 \\ = x^2 + 3 = 0 \\ \times\ x - 4 = 0 \\ \hline = x^3 - 4x^2 + 3x - 12 = 0 \end{array}$$

$$(x - 3 = 0) \times (x - 5 = 0) \times (x - 6 = 0) \times (x + 10 = 0)$$
$$= x^4 - 4x^3 - 77x^2 + 540x - 900 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 + \sqrt{5} = 0 \\ \times\ x - 2 - \sqrt{5} = 0 \end{array}\right\} = x^2 - 4x - 1 = 0 \times (x + 1 = 0)$$
$$= x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0 \times (x - 4 = 0)$$
$$= x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 19x + 4 = 0 \times (x - 2)$$
$$= x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 5x^2 + 42x - 8 = 0,$$

so kann man folgende Schlüße daraus ziehen.

I. Wenn eine geordnete höhere Gleichung keine unmöglichen Wurzeln enthält, so kann die unbekannte Größe x so viele positive Werthe, als Abwechslungen der Zeichen $+ \; -$ oder $- \; +$, und eben so viele negative Werthe annehmen, als Folgen der Zeichen $+ \; +$ oder $- \; -$ in der Gleichung statt finden.

II. Der Coefficient des zweyten Gliedes ist gleich der Summe der Wurzeln; fehlet demnach das zweyte Glied in der Gleichung, so muß die Summe der positiven der Summe der negativen Wurzeln gleich seyn.

III. Der Coefficient des dritten Gliedes ist gleich der Summe der Produkte aus je zwey und zwey Wurzeln, und der Coefficient des 4ten Gliedes ist gleich der Summe der Produkte aus je drey und drey Wurzeln zusammen multipliciret, u.s.w.

IV. Das letzte Glied endlich ist das Produkt aus allen Wurzeln, deren es so viele giebt, als der höchste Exponent der unbekannten Größe Einheiten enthält.

V. Wenn man demnach das letzte Glied in seine Faktoren auflöset (37), so wird jederzeit einer oder mehrere aus den Faktoren entweder positiv oder negativ genommen der Gleichung ein Genügen leisten, wenn sie rationale Wurzeln enthält; auch läßt sich die vorgegebene Gleichung genau dividiren, und wird dadurch um einen Grad niedriger, wenn man aus der gefundenen Wurzel, und aus der unbekannten Größe eine einfache Gleichung zusammensetzt, die Null gleich ist, und sodann diese einfache Gleichung für den Divisor annimmt. Z. B. Da in der Gleichung $x^3 - 4x^2 + 8x - 8 = 0$ einer aus den Faktoren des letzten Gliedes, nämlich 2, der Gleichung ein Genügen leistet, so läßt sich diese Gleichung durch $x - 2 = 0$ genau dividiren; man erhält nach gehöriger Reduktion $x^2 - 2x + 4 = 0$ eine Gleichung, die um einen Grad niedriger ist, welche aber nur unmögliche Wurzeln enthält.

VI. Wenn in einer geordneten Gleichung unmögliche Wurzeln sich befinden, so müßen selbe jederzeit paarweise, das ist,

ent-

entweder 2, oder 4, oder 6 u. s. w. anzutreffen seyn, und je zwey und zwey davon sind nur in den Zeichen + und — verschieden. Das erste erhellet daraus, daß eine ungerade Anzahl unmöglicher Größen gar nicht ein mögliches Produkt geben könne; enthielte demnach eine Gleichung eine ungerade Anzahl unmöglicher Wurzeln, so müßte das letzte Glied der Gleichung, als das Produkt aus allen Wurzeln auch eine unmögliche Größe seyn, welches wieder unsere Voraussetzung läuft, da wir die Gleichung schon geordnet annehmen; das zweyte ist ebenfalls leicht einzusehen; denn würden nicht je zwey und zwey unmögliche Wurzeln einander gleich, und nur in den Zeichen + und — verschieden seyn, so müßten sie in dem zweyten Gliede der Gleichung erscheinen, welches die Summe aller Wurzeln enthält, und dann wäre die Gleichung wieder nicht geordnet, welches wir doch voraussetzten.

VII. Jede geordnete höhere Gleichung, deren höchster Exponent eine ungerade Zahl ist, enthält wenigstens eine mögliche Wurzel, die übrigen Wurzeln können bald möglich bald unmöglich seyn, je nachdem die Coefficiententen und Zeichen der Glieder beschaffen sind.

VIII. Eine geordnete Gleichung hingegen, deren höchster Exponent eine gerade Zahl ist, kann entweder lauter unmögliche, oder lauter mögliche, oder auch einige mögliche, und einige unmögliche Wurzeln enthalten; jedoch kann sie der unmöglichen Wurzeln nur eine gerade Anzahl haben, wie wir schon gesagt haben. Dieß ist einmal gewiß wahrgenommen worden, daß eine solche Gleichung, wenn ihr letztes Glied negativ ist, wenigstens zwey mögliche Wurzeln enthalte.

222. Aus dem bisher angeführten ist es nun sehr leicht zu untersuchen, ob eine höhere Gleichung rationale Wurzeln enthalte, weil dergleichen Wurzeln jederzeit unter den Faktoren des letzten Gliedes entweder mit dem Zeichen + oder mit dem Zeichen — anzutreffen sind; würde hingegen keiner aus den

Faktoren

Faktoren der Gleichung ein Genügen leisten, und man wäre dem ungeachtet überzeuget, daß die Gleichung mögliche Wurzeln enthalte, so kann man sicher schließen, daß die möglichen Wurzeln irrationale Größen sind, die man am füglichsten durch eine Näherung bestimmet; ehe wir diese Näherung erörteren, wollen wit nur von einigen Verwandlungen der Gleichungen eine Meldung machen.

223. Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß alle ihre Wurzeln um eine beliebige Größe vermehret, oder verwindert sind. So z. B. wird die Gleichung $x^3 - x^2 - 10x - 8 = 0$, deren Wurzeln $4, -1, -2$ sind, in eine andere verwandelt, deren Wurzeln um 3 größer sind, wenn $x + 3 = y$, nämlich $x = y - 3$ gesetzet wird; denn

es ist alsdann
$$\begin{array}{rcrrrr}
x^3 & = & y^3 & - 9y^2 & + 27y & - 27 \\
- x^2 & = & & - y^2 & + 6y & - 9 \\
- 10x & = & & & - 10y & + 30 \\
- 8 & = & & & & - 8 \\
\hline
\end{array}$$
$$y^3 - 10y^2 + 23y - 14 = 0$$
die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $7, 2, 1$ um 3 größer sind, als die vorhergehenden.

Wollte man nun diese letzte Gleichung in eine andere dergestalt verwandeln, daß jede ihrer Wurzeln um 10 vermindert wäre, so setze man $y - 10 = z$, nämlich $y = z + 10$,

so ist
$$\begin{array}{rcrrrr}
y^3 & = & z^3 & + 30z^2 & + 300z & + 1000 \\
- 10y^2 & = & & - 10z^2 & - 200z & - 1000 \\
+ 23y & = & & & + 23z & + 230 \\
- 14 & = & & & & - 14 \\
\hline
\end{array}$$
$$z^3 + 20z^3 + 123z + 216 = 0$$
die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $-3, -8, -9$, nämlich jede um 10 kleiner ist, als die vorhergehenden.

Nun

Nun setze man auch in der allgemeinen Formel
$x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + \omega = 0$
$y + p$ statt x, so erhält man vermög (185)

$$\left.\begin{array}{l} x^m = y^m + mpy^{m-1} + \dfrac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} p^2 y^{m-2} + \ldots + p^m \\ + ax^{m-1} = ay^{m-1} + a(m-1)py^{m-2} + \ldots + ap^{m-1} \\ + bx^{m-2} = \qquad\qquad\qquad by^{m-2} + \ldots + bp^{m-2} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \omega = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \omega \end{array}\right\} = 0$$

für die verwandelte Gleichung, in der jede Wurzel um p größer, oder kleiner ist, als in der vorhergehenden, je nachdem p negativ, oder positiv genommen wird.

224. Diese letzte Verwandlung bietet uns ein Mittel dar aus jeder geordneten Gleichung das zweyte Glied hinwegzuschaffen, welches in folgenden besteht: man setze statt der unbekannten Größe x in der gegebenen Gleichung eine andere unbekannte Größe y, zu welcher der Coefficient des zweyten Gliedes getheilt durch den höchsten Exponenten mit entgegengesetzten Zeichen hinzugefüget ist. Denn wenn in unserer verwandelten Gleichung, die wir aus der allgemeinen Formel hergeleitet haben, das zweyte Glied verschwinden soll, so muß $mpy^{m-1} + ay^{m-1} = 0$, oder $mp + a = 0$, nämlich $p = -\frac{a}{m}$ seyn, und folglich $x = y - \frac{a}{m}$ gesetzet werden.

Sollte man demnach aus folgender Gleichung $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$ das zweyte Glied hinwegschaffen,

so setze man $x = y + \frac{12}{3} = y + 4$; denn es ist sodann

$$\begin{array}{rcrrrr} x^3 & = & y^3 & + 12y^2 & + 48y & + 64 \\ - 12x^2 & = & & - 12y^2 & - 96y & - 192 \\ + 41x & = & & & + 41y & + 164 \\ - 42 & = & & & & - 42 \\ \hline & & y^3 & * & - 7y & - 6 = 0 \end{array}$$

die verwandelte Gleichung, in der das zweyte Glied verschwunden ist. Es ist in dieser

Glei-

Gleichung $y = -2$, $y = -1$, oder endlich $y = 3$; da nun $x = y + 4$, so ist in der vorhergehenden Gleichung $x = 2$, $x = 3$, oder endlich $x = 7$.

Alle verwickelte quadratische Gleichungen können nach dieser Methode in reine Gleichungen verwandelt werden. Z. B. wenn man $x = y - \frac{1}{2}a$ in der Gleichung ($x^2 + ax = b$) setzet, so wird sie in folgende Gleichung $y^2 - \frac{1}{4}a^2 = b$, das ist $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4b}$ verwandelt; es ist aber $x = y - \frac{1}{2}a$ gesetzet werden; folglich $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$.

225. Die bis itzt angeführten Verwandlungen geben uns, wenn wir die (223) aus der allgemeinen Formel hergeleitete verwandelte Gleichung mit Aufmerksamkeit betrachten, ein leichtes Mittel an die Hand, aus einer gegebenen geordneten höheren Gleichung das letzte Glied einer anderen Gleichung zu bestimmen, in der die Wurzeln der gegeben Gleichung um eine beliebige Größe vermehret, oder vermindert sind: dieses Mittel besteht in folgenden. Man setze in der gegebenen Gleichung statt x eine positive Größe a, und reducire alles gehörig, so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in der jede Wurzel um a kleiner ist, als in der gegebenen Gleichung; oder man setze in der gegebenen Gleichung statt x eine negative Größe $-b$, und reducire alles gehörig, so wird dieses Resultat das letzte Glied einer neuen Gleichung seyn, in der jede Wurzel um $+b$ größer ist, als in der gegebenen Gleichung. Dieses Mittel leistet uns bey Auflösung einer höheren Gleichung, in der das letzte Glied aus sehr vielen Faktoren besteht, einen guten Nutzen. Denn man versuche nur in einem solchen Falle statt x eine solche Größe in der gegebenen Gleichung zu substituiren, daß das Resultat sehr wenige Faktoren enthalte, löse dieses Resultat in die Faktoren auf, addire zu jedem Faktor die Zahl, die man statt x gesetzet hat, wenn sie positiv ist, oder ziehe diese Zahl von jedem Faktor ab, wenn sie negativ

ist, und versuche sodann, ob diese Größen der gegebenen Gleichung ein Genügen leisten. Z. B. wenn man diese Gleichung aufzulösen hätte, $x^4 - 40x^3 + 595x^2 - 3900x + 9504 = 0$, in der das letzte Glied ungemein viele Faktoren enthält, so versuche man für x eine solche Zahl zu substituiren, daß das Resultat nur aus sehr wenigen Faktoren zusammengesetzet sey; setzet man $+ 10$ statt x, so ist das Resultat $= 10000 - 40000 + 59500 - 39000 + 9504 = 4$; die Faktoren davon sind $2, 1, -1, -2$; nun addire man zu jedem Faktor 10, weil man diese positive Zahl statt x gesetzet hat, so erhält man die Zahlen 12, 11, 9, 8, deren jede obiger Gleichung ein Genügen leistet.

226. Jede geordnete höhere Gleichung kann in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß jede Wurzel mit einer beliebigen Größe multipliciret, oder dividiret ist.

Um dieses zu erhalten, so setze man $nx = y$, nämlich $x = \frac{y}{n}$ in der allgemeinen Formel $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \ldots + \omega = 0$, so erhält man $\frac{y^m}{n^m} + \frac{ay^{m-1}}{n^{m-1}} + \frac{by^{m-2}}{n^{m-2}} + \frac{cy^{m-3}}{n^{m-3}} + \ldots + \omega = 0$, oder wenn man beyde Theile der Gleichung mit n^m multipliciret, $y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^m\omega = 0$, für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln mit den Wurzeln der vorigen Gleichung einerley, nur daß sie mit n multipliciret sind. Diese Formel sagt uns, daß man um die Wurzeln einer geordneten Gleichung mit einer beliebigen Größe n zu multipliciren unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe (deren erstes Glied $= 1$ und der Quotient $= n$ sey) schreiben, und sodann die Glieder der Gleichung mit den Gliedern der Reihe multipliciren solle; nur muß man nicht vergessen auch unter die mit einem Sternchen bezeichneten Glieder der Gleichung die dazu gehörigen Glieder geometrischen Reihe zu unterschreiben. Z. B. wenn man diese Gleichung $x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0$ in eine andere verwandeln will, in der jede Wurzel dieser gegebenen Gleichung mit 2 multipliciret sey, so schreibe man also, und multiplicire die Glieder untereinander.

$$\begin{array}{l} x^4 * - 5x^2 * + 4 = 0 \\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16 \\ \hline \end{array}$$

Und so erhält man.. $x^4 * - 20x * + 64 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $2, 4, -2, -4$, sind; da nun diese Wurzeln mit 2 multipliciret sind, so müßen die Wurzeln der vorhergehenden Gleichung $1, 2, -1, -2$ seyn.

227. Diese Verwandlung giebt uns ein Mittel an die Hand aus jeder geordneten Gleichung die Brüche wegzuschaffen, welches in folgenden besteht. Man suche eine Zahl auf, die sich durch jeden Nenner der in der Gleichung befindlichen Brüche genau theilen läßt (51), schreibe unter die Glieder der Gleichung eine geometrische Reihe, deren erstes Glied $= 1$, und der Quotient der gefundenen Zahl gleich sey, und multiplicire die Glieder der Gleichung mit den dazu gehörigen Gliedern der Reihe, so erhält man eine Gleichung, die von den Brüchen befreyet ist, und deren Wurzeln durch den angenommenen Quotienten der geometrischen Reihe dividiret die Wurzeln der gegebenen Gleichung zum Vorschein bringen: z. B. um aus der Gleichung $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$ die Brüche wegzuschaffen,

so schreibe man also $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$

$$1,\ 18,\ (18)^2,\ (18)^3$$

oder auch auf diese Art .... $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{55}{18}x + \frac{14}{9} = 0$

$$1,\ 6,\ 36,\ 216$$

und multiplicire die Glieder der Gleichung mit den darunterstehenden Gliedern der geometrischen Reihe, so erhält man

$x^3 - 27x^2 + 110x + 336 = 0$ für die verwandelte Gleichung, deren Wurzeln $-2, 8, 21$, sind; nun sind diese Wurzeln nichts anders, als die mit 6 multiplicirten Wurzeln der vorhergehenden Gleichung; es sind demnach die Wurzeln der gegebenen Gleichung $-\frac{2}{6}, \frac{8}{6}, \frac{21}{6}$, nämlich $x = -\frac{1}{3}$, oder $x = \frac{4}{3}$, oder endlich $x = \frac{7}{2}$.

228. Setzen wir $n = \frac{1}{p}$ in der Gleichung $y^m + nay^{m-1} + n^2by^{m-2} + n^3cy^{m-3} + \ldots + n^m\omega = 0$, so erhalten wir $y^m + \frac{a}{p}y^{m-1} + \frac{b}{p^2}y^{m-2} + \ldots \frac{\omega}{p^m} = 0$ eine Gleichung, deren Wurzeln mit den Wurzeln der Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots \omega = 0$ vollkommen einerley, nur daß sie durch p getheilet sind. Wir ersehen aus diesem, daß man jede geordnete Gleichung dergestalt verwandeln kann, daß alle ihre Wurzeln durch eine beliebige Größe dividiret sind. Durch diese letzte, und die vorhergehende Verwandlung kann man zuweilen aus einer gegebenen Gleichung die irrationalen Glieder hinwegschaffen. Z. B. um aus der Gleichung $x^3 - 4x^2\sqrt{3} + 12x - 24\sqrt{3} = 0$ die irrationalen Glieder hinwegzuschaffen, so schreibe man unter diese Gleichung folgende geometrische Reihe; $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}$, und dividire, oder multiplicire die Glieder der Gleichung mit den dazugehörigen Gliedern der geometrischen Reihe; in dem einen Falle erhält man $x^3 - 4x^2 + 4x - 8 = 0$, und in dem anderen $x^3 - 12x^2 + 36x - 216 = 0$.

229. Wenn eine höhere Gleichung, die den zweyten Grad übersteiget, zwar mögliche aber irrationale Wurzeln enthält, so werden selbe auf folgende Art durch eine Näherung entwickelt.

I.

I. Man substituire in der Gleichung statt der unbekannten Größe die natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, ... so lange, bis die Resultate das Zeichen änderen; die Zahl, bey der das Resultat das Zeichen ändert, ist nun größer, als die gesuchte Wurzel; die vorhergehende Zahl hingegen ist kleiner, als eben diese gesuchte Wurzel; z. B. es sey aus der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 78x - 146 = 0$ der Werth von x zu bestimmen, so verfahre man auf folgende Art.

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 - 146 = - 146$
1	$1 - 15 + 78 - 146 = - 82$
2	$8 - 60 + 156 - 146 = - 42$
3	$27 - 135 + 234 - 146 = - 20$
4	$64 - 240 + 312 - 146 = - 10$
5	$125 - 375 + 390 - 146 = - 6$
6	$216 - 540 + 468 - 146 = - 2$
7	$343 - 735 + 546 - 146 = + 8$

Der eine Werth von x ist demnach in dieser Gleichung größer als 6, und kleiner als 7.

II. Nachdem man nun die Zahlen bestimmet hat, zwischen welche die Wurzel fällt, so setze man, daß die Wurzel derjenigen Zahl, die das einfachste Resultat gegeben hat, mehr einem Bruche f gleich sey. In unserem Beyspiele ist also $x = 6 + f$.

III. Nun substituire man diesen Werth in der gegebenen Gleichung statt der unbekannten Größe; in unserem Falle ist nämlich

$$\begin{array}{rcl} x^3 &=& 216 + 108f + 18f^2 + f^3 \\ -15x^2 &=& -540 - 180f - 15f^2 \\ +78x &=& 468 + 78f \\ -146 &=& -146 \\ \hline 0 &=& -2 + 6f + 3f^2 + f^3. \end{array}$$

Nun ist f ein kleiner Bruch; folglich kann man sagen, daß beynahe $0 = -2 + 6f$; das ist $f = \frac{1}{3} = 0{,}33$ sey.

Es ist demnach in gegenwärtiger Gleichung $x = 6 + 0{,}33 = 6{,}33$ beynahe. Erforderen es die Umstände der Aufgabe, daß man den Werth von x genauer haben müße, so ist kein anderes Mittel übrig, als die Arbeit zu wiederholen; nämlich man muß nun in der Gleichung $6{,}33 + f$ statt x substituiren, und den Werth von f sodann noch einmal bestimmen.

Zuweilen eräugnet sich, daß die Resultate wieder zu wachsen anfangen, nachdem sie ehevor abgenommen hatten, oder umgekehrt; auch in einem solchen Falle ist jene Zahl, die das kleinste Resultat gegeben hat, von der einen Wurzel der Gleichung um keine ganze Einheit mehr verschieden. Wenn z. B. aus der Gleichung $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$, die keine rationale Wurzeln enthält, der Werth von x durch die Näherung zu bestimmen wäre, so verfahre man auf folgende Weise.

x	Resultate.
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 53 = 53$
1	$1 - 2 - 20 + 53 = 32$
2	$8 - 8 - 40 + 53 = 13$
3	$27 - 18 - 60 + 53 = 2$
4	$64 - 32 - 80 + 53 = 5$
5	$125 - 50 - 100 + 53 = 28$

Der Werth von x ist demnach in diesem Falle beynahe $= 3$; nun setze man in der gegebenen Gleichung $3 + f$ statt x, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 + 27f + \ldots \\ -2x^2 &= -18 - 12f \ldots \\ -20x &= -60 - 20f \\ +53 &= +53 \\ \hline 0 &= 2 - 5f; \end{aligned}$$

nämlich $f = \frac{2}{5} = 0{,}4$; und folglich $x = 3 + 0{,}4 = 3{,}4$ schon ziemlich genau; will man

den

den Werth von x genauer haben, so setze man nun $3{,}4 + f$ statt x in der nämlichen Gleichung, und bestimme sodann noch einmal den Werth von f.

230. Auf die nämliche Art kann man die negativen irrationalen Wurzeln entwickeln. So z. B. wenn man in der nämlichen Gleichung $x^3 - 2x^2 - 20x + 53 = 0$ statt x folgende Zahlen setzet,

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 + 53 = 53$
-1	$-1 - 2 + 20 + 53 = 70$
-2	$-8 - 8 + 40 + 53 = 77$
-3	$-27 - 18 + 60 + 53 = 68$
-4	$-64 - 32 + 80 + 53 = 37$
-5	$-125 - 50 + 100 + 53 = -22$

so sieht man, daß die eine Wurzel beynahe $= -5$ sey; man setze also in der gegebenen Gleichung $-5 + f$ statt x, so ist

$$\begin{aligned} x^3 &= -125 + 75f \\ -2x^2 &= -50 + 20f \\ -20x &= +100 - 20f \\ +53 &= +33 \\ \hline \end{aligned}$$

$0 = -22 + 75f$; nämlich $f = \frac{22}{75} = 0{,}29$ beynahe; folglich $x = -5 + 0{,}29 = -4{,}71$.

231. Wir wollen eine allgemeine Näherungsformel für alle geordnete höhere Gleichungen hieher setzen; diese ist folgende.

Wenn eine Wurzel dieser Gleichung $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m3} + dx^{m-4} + \dots + \omega = 0$ beynahe $= w$ gefunden wird, so ist

 $x =$

$$x = \frac{(m-1).w^m + (m-2)aw^{m-1} + (m-3)bw^{m-2} + (m-4)cw^{m-3} + \ldots - \omega}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4} + \ldots}$$

Nämlich in den cubischen Gleichungen $x^3 + ax^2 + bx + \omega = 0$

ist $x = \dfrac{2w^3 + aw^2 - \omega}{3w^2 + 2aw + b}$

Bey den Gleichungen des 4ten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + \omega = 0$$

ist $x = \dfrac{3w^4 + 2aw^3 + bw^2 - \omega}{4w^3 + 3aw^2 + 2bw + c}$; u. s. w.

Denn da wir annehmen, daß w von dem wahren Werthe nur noch etwan um einen kleinen Bruch verschieden sey, so ist $x = w + f$, wenn wir diesen Bruch mit f bezeichnen; es ist also auch

$$x^m = w^m + mw^{m-1}f + \frac{m.m-1}{1.2}w^{m-2}f^2 + \ldots$$

$$+ax^{m-1} = aw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2}f + \frac{m-1.m-2}{1.2}aw^{m-3}f^2 + \ldots$$

$$+bx^{m-2} = bw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3}f + \frac{m-2.m-3}{1.2.}bw^{m-4}f^2 + \ldots$$

$$+cx^{m-3} = cw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4}f + \frac{m-3.m-4}{1.2}cw^{m-5}f^2 + \ldots$$

....

$$+\omega = \omega.$$

$$0 = 0$$

Da nun beyde Theile der Gleichung $= 0$ sind, und alle Potenzen des Bruches f, ausser der ersten ohne einen großen Fehler zu begehen hinweggelassen werden können, so ist

0

$$0 = w^m + aw^{m-1} + bw^{m-2} + \ldots + \omega + f.[mw^{m-1} + (m-1).aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots]$$

folglich $f = \dfrac{-w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - \ldots - \omega}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots}$

und $x = w - \dfrac{w^m - aw^{m-1} - bw^{m-2} - \ldots - \omega}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + \ldots}$

oder endlich, wenn man alles auf einen gleichen Nenner bringt, und gehörig reduciret.

$$x = \frac{(m-1)w^m + (m-2)aw^{m-1} + (m-3)bw^{m-2} + (m-4)cw^{m-3} + \ldots - \omega}{mw^{m-1} + (m-1)aw^{m-2} + (m-2)bw^{m-3} + (m-3)cw^{m-4} + \ldots\ldots}$$

Es sey z. B. aus der Gleichung $x^3 - 12x^2 + 57x - 94 = 0$, der Werth von x zu bestimmen? nun findet man vermög (129) daß x beynahe $= 3$ sey; vergleichen wir dahero dieses Beyspiel mit der allgemeinen Formel, so ist $w = 3$, $a = -12$, $b = 57$, und $\omega = -94$; folglich

$$x = \frac{54 - 108 + 94}{27 - 72 + 57} = \frac{40}{12} = \frac{10}{3} = 3{,}33 \text{ beynahe.}$$

Imgleichen aus der Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ sollen die Werthe von x gefunden werden? um diese zu bestimmen, setze man

x	Resultate
0	$0 \quad 0 \quad 0 \quad 109 = -109$
1	$1 - 15 + 72 - 109 = -41$
2	$8 - 60 + 144 - 109 = -17$
3	$27 - 135 + 216 - 109 = -1$
4	$64 - 240 + 288 - 109 = +3$
5	$125 - 375 + 360 - 109 = +1$
6	$216 - 540 + 432 - 109 = -1$
7	$343 - 735 + 504 - 109 = +3$
8	$512 - 960 + 576 - 109 = +19$

so findet man, daß der eine Werth von x beynahe $= 3$, der zweyte beynahe $= 5$, und der dritte Werth endlich beynahe gleich 6 sey. Wir wollen den ersten Werth von x durch unsere allgemeine Näherungsformel bestimmen; es ist nämlich in diesem Falle $w = 3$, $a = -15$, $b = 72$, und $\omega = -109$; folglich

$$x = \frac{54 - 135 + 109}{27 - 90 + 72} = \frac{28}{9} = 3{,}11 \text{ beynahe:}$$

Setzen wir nun $w = 3{,}11$ so ist

$$x = \frac{60{,}160462 - 145{,}0815 + 109}{29{,}0163 - 93{,}3 + 72} = \frac{24{,}078962}{7{,}7163}$$

$= 3{,}1205$ schon sehr genau. Wäre es erforderlich den Werth von x noch genauer zu haben, so müßte man nun $w = 3{,}1205$ setzen, und dann würde man $x = 3{,}1206148$ erhalten.

Um die zwey übrigen Werthe von x zu finden, setze man in der Näherungsformel einmal $w = 5$, und dann $w = 6$; oder auch man dividire die vorgegebene Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ durch $(x - 3{,}1206 = 0)$, so erhält man die quadratische Gleichung $x^2 - 11{,}8794x + 34{,}92914 = 0$, in der $x = 5{,}9397 \pm \sqrt{(5{,}9397)^2 - 34{,}92914}$ nämlich $x = 5{,}3473$, oder $x = 6{,}5321$; es sind demnach die Wurzeln der vorgegebenen Gleichung $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0$ folgende Zahlen; $3{,}1206$, $5{,}3473$, und $6{,}5321$.

Auf die nämliche Art findet man die Wurzeln folgender Gleichung $x^4 * - 20x^2 - 12x + 13 = 0$, wenn man in der Näherungsformel der Gleichungen vom vierten Grade $a = 0$, $b = -20$, $c = -12$, $\omega = 13$, und $w = 1$, $w = 5$, $w = -1$, $w = -4$ setzet; denn wenn $0, 1, 2, 3, 4, 5$, und auch $0, -1, -2, -4, -5$ für x substituiret wird, so zeigt sichs, daß w diese Werthe habe; man erhält nach gehöriger Reduktion $x = 0{,}563$, $x = 4{,}687$, $x = -1{,}223$, und $x = -4{,}027$.

232. Wir können bey dieser Gelegenheit auch eine Näherungsformel für die Ausziehung was immer für einer Wurzel aus jeder vorgegebenen Zahl hieher setzen; diese ist folgende.

Wenn aus der Größe x die Wurzel m zu ziehen wäre, und es ist schon beynahe $\sqrt[m]{x} = w$, welches man entweder durch Hilfe der Logarithmen, oder sonst auf eine andere Art schon bestimmet hat, so ist

$$\sqrt[m]{x} = w + \frac{2w \,.\, (x - w^m)}{(m+1) \,.\, w^m + (m-1) \,.\, x} \text{ sehr genau.}$$

Denn es sey der sehr kleine Bruch, denn man zu w noch hinzufügen muß $= f$, um $\sqrt[m]{x} = w + f$ zu erhalten, so ist auch $x = w^m + mw^{m-1}f + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} w^{m-2} f \,.\, f + \ldots$

folglich $f = \frac{x - w^m}{mw^{m-1}}$ ziemlich genau,

oder $f = \dfrac{x - w^m}{mw^{m-1} + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} w^{m-2} f}$ um vieles genauer.

Nun substituire man $\frac{x - w^m}{mw^{m-1}}$ statt f in dem zweyten Gliede des Nenners bey dieser letzten Gleichung, so ist

$$f = \frac{x - w^m}{mw^{m-1} + \frac{m-1}{2} \,.\, \frac{x - w^m}{w}} = \frac{w \,.\, (x - w^m)}{mw^m + \frac{m-1}{2} \,.\, (x - w^m)}$$

$$= \frac{2w \,.\, (x - w^m)}{2mw^m + (m-1) \,.\, (x - w^m)} = \frac{2w \,.\, (x - w^m)}{(m+1) \,.\, w^m + (m-1) \,.\, x}$$

Es ist also $\sqrt[m]{x} = w + \dfrac{2w \,.\, (x - w^m)}{(m+1) \,.\, w^m + (m-1) \,.\, x}$

So ist $\sqrt{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^2)}{3w^2 + x}$

$$\sqrt[3]{x} = w + \frac{w \cdot (x - w^3)}{2w^3 + x}$$

$$\sqrt[4]{x} = w + \frac{2w \cdot (x - w^4)}{5w^4 + 3x}$$

u. s. w.

Um den Gebrauch dieser Formel deutlicher einzusehen, wollen wir die Cubicwurzel z. B. aus 572 ausziehen.

Nun ist $\frac{1}{3}\log. 572 = \frac{2,7573960}{3} = 0,9191320$, wozu die Zahl 8,30103 gehöret; es ist demnach $\sqrt[3]{572} = 8,30103$ beynahe; folglich $w = 8,30103$; und $\sqrt[3]{572} = 8,30103 + \frac{8,30103 \cdot (572 - (8,30103)^3)}{2 \cdot (8,30103)^3 + 572}$

$= 8,30103 + \frac{0,0008590113143380919}{1715,999793035005454}$

$= 8,30103 + 0,0000005005894044$, nämlich

$\sqrt[3]{572} = 8,3010305005894044$ sehr genau, und bis auf die letzte Decimalziffer verläßlich.

233. Ich übergehe mit Stillschweigen die Auflösung einiger höheren Gleichungen durch Hilfe der Cardanischen Formeln; auch von der Zerfällung einer höheren Gleichung in zwey oder mehrere höhere Gleichungen mache ich keine Erwähnung, weil dieses auf die ausübende Mathematik keinen besonderen Einfluß hat; und verweise die Leser, die sich in diesem Fache vorzüglich üben wollen, auf C. Scherffer Instit. Analyt. Part. I. allwo sie eine sehr ausführliche Abhandlung von den bestimmten sowohl, als auch von den unbestimmten höheren Gleichungen antreffen werden. Auch kann Herrn L. Eulers Anleitung zur Algebra zweyter Theil dießfalls nachgesehen werden.

I. Anhang.

Von einigen Aufgaben.

234. Wir haben gesehen, daß eine dreyeckigte Pyramide $\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$ Kugeln enthalte, wenn sich deren n in einer Seite befinden (198). Nun entsteht auch die Frage, wenn a z. B. 7770 Kugeln in eine dreyeckigte Pyramide geschlichtet werden sollen, wie viel man deren in einer Seite legen solle? dieses findet man aus der höheren Gleichung $\frac{n^3+3n^2+2n}{6} = a$, oder $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$ (in unserem Falle $n^3 + 3n^2 + 2n = 46620$) wenn man vermög der vorhergehenden Vorlesung n bestimmet. Allein wir wollen für diesen Fall eine kürzere Auflösung geben, und zwar folgende:

da $n^3 + 3n^2 + 2n = 6a$,

so ist $n^3 < 6a$, nämlich $n < \sqrt[3]{6a}$;

hingegen $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 6a$, nämlich $(n+1)^3 > 6a$

das ist $n > \sqrt[3]{(6a)} - 1$; vermög Grundsatz V.

Wir sehen aus diesem, daß man von $\sqrt[3]{6a}$ noch etwas abziehen müßte, um den genauen Werth von n zu erhalten, weil $\sqrt[3]{6a} > n$; doch muß dieses **Etwas** kleiner seyn als 1, weil $\sqrt[3]{(6a)} - 1$ schon kleiner ist als n; man müßte demnach nur einen Bruch von $\sqrt[3]{6a}$ abziehen, um den wahren Werth von n zu erhalten.

Nun

Nun aber muß n eine ganze Anzahl Kugeln bedeuten; folglich kann man $n = \sqrt[3]{6a}$ annehmen. In unserem Beyspiele ist die gesuchte Seite $n = \sqrt[3]{46620} = 35$ Kugeln.

Die Regel ist demnach diese: wenn eine gegebene Anzahl Kugeln in eine dreyeckigte Pyramide geschlichtet werden solle, so multiplicire man diese Anzahl mit 6, und ziehe sodann die Cubicwurzel ohne Annäherung nur in ganzen Zahlen aus, so wird das Resultat die Anzahl Kugeln anzeigen, die man in eine Seite legen solle; will man ferner wissen, ob sich die vorgegebene Zahl genau schlichten lasse, so setze man dieses Resultat in der Formel $\frac{n \,.\, (n+1) \,.\, (n+2)}{6}$ statt n, und ziehe dieses von der vorgegebenen Anzahl ab; bleibt nun keine Differenz übrig, so wird die Pyramide vollständig seyn, bleibt hingegen eine Differenz übrig, so werden bey der Pyramide so viele Kugeln fehlen, als diese Differenz Einheiten enthält.

Eben auf diese Art findet man, daß die Seite einer viereckigten Pyramide $= \sqrt[3]{3a}$ seyn müße, wenn man a Kugeln in eine solche Pyramide schlichten solle; denn da vermög (198) $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = a$, nämlich $n^3 + \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}n = 3a$ seyn muß,

so ist $n^3 < 3a$, nämlich $n < \sqrt[3]{3a}$;
hingegen $n^3 + 3n^2 + 3n + 1 > 3a$, das ist $(n+1)^3 > 3a$, und auch $n + 1 > \sqrt[3]{3a}$; folglich $n > \sqrt[3]{(3a)} - 1$.

Da nun wieder n eine ganze Zahl seyn muß, so kann man wie im vorigen Falle $n = \sqrt[3]{3a}$ annehmen.

Wenn demnach eine gegebene Anzahl Kugeln in eine viereckigte Pyramide zu schlichten wäre, so multiplicire man diese Zahl mit

mit 3, und ziehe die Cubicwurzel ohne Annäherung heraus, so wird das Resultat die Anzahl Kugeln anzeigen, die man in eine Seite der Grundfläche legen muß; setzet man ferner dieses Resultat statt n in der Formel $\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6}$, und zieht dieses von der vorgegebenen Zahl ab, so zeigt die Differenz, ob die Pyramide vollständig, oder unvollständig seyn könne, und wie viel Kugeln daran fehlen werden.

Wäre endlich eine vorgegebene Anzahl Kugeln $= a$ in einen langen Haufen zu schlichten, so muß $\frac{n.(n+1).(2n+3m-2)}{6} = a$, nämlich $2n^3 + 3mn^2 + 3mn - 2n = 6a$ seyn. Um in diesem Falle die Schlichtung auszuführen, muß man eine Größe in dieser Formel entweder m oder n nach Belieben annehmen, weil dieses eine unbestimmte Aufgabe ist; wenn wir n nach Belieben annehmen, so ist $m = \frac{6a + 2n - 2n^3}{3n^2 + 3n}$

Es seyn z. B. 70 Kugeln in einen langen Haufen zu schlichten, so ist der Rücken $m = \frac{420 + 2n - 2n^3}{3n^2 + 3n}$; nun nehme man für n eine solche Zahl an, daß der Werth von m eine ganze positive Zahl sey; setzt man $n = 4$, so ist $m = 5$; setzt man hingegen $n = 5$, so ist $m = 2$. Es können demnach 70 Kugeln auf zwey verschiedene Arten in länglichte freystehende Haufen geschlichtet werden.

Wenn man einmal die Breite der Grundfläche, und auch den Rücken des länglichten freystehenden Haufens kennet, so ist es nicht mehr schwer auch die Länge der Grundfläche zu bestimmen; es ist diese Länge $= m + n - 1$, wenn m den Rücken, und n die Breite vorstellt; denn diese Länge der Grundfläche ist das letzte Glied einer arithmetischen Reihe des 1ten Ranges, deren erstes Glied $= m$, die Differenz $= 1$, und die Anzahl der Glieder $= n$.

Um

Um in der Ausübung die Rechnung zu erleichtern, kann man nach der Formel $\frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(2n+3m-2)}{6}$ folgende Tafel für die länglichten freystehenden Haufen verfertigen.

Die Breite $= n$	Der Rücken des Haufens $= m$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	u.s.w.
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	
3	14	20	26	32	38	44	50	56	62	
4	30	40	50	60	70	80	90	100	110	
5	55	70	85	100	115	130	145	160	175	
6	91	112	133	154	175	196	217	238	259	
7	140	168	196	224	252	280	308	336	364	
8	204	240	276	312	348	384	420	456	492	
9	285	330	375	420	465	510	555	600	645	
10	385	440	495	550	600	655	710	765	820	
11	506	572	638	704	770	836	902	968	1034	
u.s.w.										
Die Länge der Grundfläche $= m + n - 1$										

Diese Tafel ist nun leicht fortzusetzen; denn die 2te vertikale Kolonne 1 enthält die Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, die nach der Formel $\frac{n\,.\,(n+1)\,.\,(2n+1)}{2}$ berechnet werden, und dienet zur Berechnung der viereckigten Kugel Pyramiden, da bey diesen der Rücken nur 1 Kugel enthält. Aus dieser Vertikalen Kolonne können die horizontalen Kolonnen durch die blosse Addition bestimmet, und fortgesetzet werden; denn sie sind alle arithmetische Reihen des ersten Ranges: es ist nämlichen bey der horizontalen Kolonne 2 die beständständige Differenz $= 3 = \frac{2 \cdot 3}{2}$; bey der Kolonne 3 ist die Differenz $= 6 = \frac{3 \cdot 4}{2}$; und bey der horizontalen Kolonne n wird folglich die beständige Differenz $= \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$, das erste Glied aber $= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)}{6}$ seyn.

Auch der Gebrauch dieser Tafel ist leicht einzusehen. Es sey z. B. ein Kugelhaufen zu berechnen, der in der Breite 10, und am Rücken 9 Kugeln enthält, so findet man die Anzahl aller Kugeln = 820 in jenem Fache, wo die horizontale Kolonne 10 mit der vertikalen Kolonne 9 zusammenstößt.

Imgleichen wenn 600 Kugeln in einen länglichten freystehenden Haufen zu schlichten wären, so zeigt die Tafel, daß der Haufen entweder 9 Kugeln in der Breite, und 8 Kugeln am Rücken; oder 10 in der Breite, und 5 Kugeln am Rücken haben müße; die Länge des ersten Haufens muß demnach $8 + 9 - 1 = 16$, und die Länge der Grundfläche des zweyten Haufens $= 5 + 10 - 1 = 14$ Kugeln seyn.

Auch für die länglichten Haufen, die an beyden Enden an viereckigte Kugelpyramiden angelehnet sind, läßt sich nach der (198. V.) gegebenen Formel $\frac{m \cdot n \cdot (n + 1)}{2} + \frac{n \cdot (n^2 - 1)}{6}$ eine geschmeidige Tafel verfertigen, und nach Belieben erweitern: sie kann folgende Gestalt haben:

Die Eckseite.	Die Länge der Grundfläche.							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	4	7	10	13	16	19	22	25
3	10	16	22	28	34	40	46	52
4	20	30	40	50	60	70	80	90
5	35	50	65	80	95	110	125	140
6	56	77	98	119	140	161	183	204

Die vertikale Kolonne 1 in dieser Tafel dienet zugleich für die Berechnung der dreyeckigten Pyramiden: aus dieser vertikalen Kolonne können die übrigen horizontalen Kolonnen durch die blosse Addition berechnet werden, weil sie nichts anders sind als arithmetische Reihen des ersten Ranges; denn es ist bey jeder horizontalen Kolonne n die beständige Differenz $= \frac{n.(n+1)}{2}$ und das erste Glied dieser nämlichen Kolonne ist $= \frac{n.(n+1).(n+2)}{6}$

235. Es legt jemand ein Kapital a zu c pro cento an; die Interessen werden jährlich zum Kapitale geschlagen; wie groß wird wohl die ganze Summe s nach n Jahren seyn?

Auflösung. Da $100 : c = a$: zum Interesse, so ist das Interesse des ersten Jahres $= \frac{ac}{100}$; folglich die Summe nach einem Jahre $= a + \frac{ac}{100} = \frac{100a + ac}{100} = a.\left(\frac{100 + c}{100}\right)$

Imgleichen da $100 : c = \left(a + \frac{ac}{100}\right)$: zum Interesse des zweyten Jahres, so ist das Interesse des zweyten Jahres $= \frac{ac}{100}$

+

$+ \frac{ac^2}{(100)^2}$; folglich die Summe nach zwey Jahren $= a + \frac{ac}{100} + \frac{ac}{100} + \frac{ac^2}{(100)^2} = \frac{(100)^2 . a + 200c . a + c^2 . a}{(100)^2} = a . \left(\frac{100+c}{100}\right)^2$.

Eben so findet man die Summe nach 3 Jahren $= a . \left(\frac{100+c}{100}\right)^3$ u. s. w.

Es ist demnach die Summe nach n Jahren $f = a . \left(\frac{100+c}{100}\right)^n$

oder $\log. f = \log. a + n . (\log. (100 + c) - \log. 100)$.

So z. B. wächst ein Kapital von 3452 fl. in 64 Jahren auf eine Summe von 143763,3 fl. wenn es zu 6 pro cento angelegt, und jährlich mit den gefallenen Interessen vermehret wird.

$$
\begin{array}{rrl}
\text{Denn } \log. 106 & = & 2{,}0253059 \\
- \log. 100 & = & - 2{,}0000000 \\
\hline
 & = & 0{,}0253059 \\
\text{multipliciret mit} & & 64 \\
\hline
 & = & 1{,}6195776 \\
\text{dazu addiret } \log. 3452 & = & 3{,}5380708 \\
\hline
\text{giebt } \log. f & = & 5{,}1576484,
\end{array}
$$

wozu 143763,3 fl. gehören.

Aus der Formel I. $\log. f = \log. a + n . (\log. (100 + c) - \log. 100)$

fließen folgende

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{II. } \log. a = \log. f - n . (\log. (100+c) - \log. 100) \\
\text{III. } \log. (100 + c) = \dfrac{\log. f - \log. a + n \log. 100}{n} \\
\text{IV. } n = \dfrac{\log. f - \log. a}{\log. (100 + c) - \log. 100}.
\end{array}
\right.
$$

Nach der Formel I. kann auch folgende Aufgabe aufgelöset werden. In einer Provinz befinden sich 2 Millionen Menschen; wenn nun diese Summe jährlich um den 50ten Theil, das ist zu 2 pro cento zunähme? wie groß würde wohl die Anzahl Menschen nach 100 Jahren seyn?

Nach der Formel II. wird nebst anderen auch diese Aufgabe aufgelöset. Eine Summe f, die nach n Jahren ohne Interesse fällt, wie viel ist sie itzt Werth, wenn die Interessen zu c pro cento vorgeschrieben sind? Imgleichen es will jemand ein Kapital anlegen, und die Interessen zu c pro cento jährlich zum Kapitale schlagen: er will nun nach $n = 20$ Jahren schon eine Summe $f = 10000$ fl. haben; wie groß muß die erste Anlage seyn.

Nach der Formel III. Eine Summe $f = 10000$, die erst nach $n = 10$ Jahren ohne Interesse fällt, verkauft jemand um 6756 fl.; nun ist die Frage nach welchen pro cento dieser Verkauf geschehen sey?

Imgleichen nach der Sündfluth wurde die Erde nur durch 6 Menschen, nämlich durch Noahs drey Söhne, und ihre Frauen bevölkert; nach Verlauf von 200 Jahren belief sich schon die Anzahl der Menschen auf eine Million; nun ist die Frage, um welchen Theil, oder um wie viel von hundert die Bevölkerung jährlich zunehmen mußte? Man findet nach gehöriger Reduktion, daß die Bevölkerung jährlich um 6,2 von hundert, oder beynahe um den sechzehnten Theil zunehmen mußte, welches bey den guten Leibesbeschaffenheiten, und den langen Lebensjahren dieser Menschen gar füglich geschehen konnte.

Denn $\log. f \log. = \log. 1000000 = 6{,}0000000$

$+ n . \log. 100 = 200 . \log. 100 = 400{,}0000000$

$= 406{,}0000000$

$- \log. a = - \log. 6 = - 0{,}7781512$

$= 405{,}2218488$

dividiret durch 200

giebt $\log. (100 + c) = 2{,}0261092$

$= \log. 106{,}2$ beynahe;

es

es ist demnach $100 + c = 106,2$, nämlich $c = 6,2$.

Es legt jemand ein Kapital $a = 1000$ fl. zu $c = 4$ pro cento an, und schlägt die Interessen jährlich zum Kapitale; nun ist die Frage, in wie viel Jahren die ganze Summe 10000 fl. $= s$ betragen werde? die Formel IV. sagt es nach $n = 59$ Jahren beynahe.

$$\begin{array}{lrl} \text{Denn } \log. s = \log. 10000 & = & 4,0000000 \\ - \log. a - \log. 1000 & = & -3,0000000 \\ \hline & = & 1,0000000 \\ \text{und } \log. (100 + c) = \log. 104 & = & 2,0170333 \\ - \log. 100 \ldots\ldots\ldots\ldots & = & 2,0000000 \\ \hline & = & 0,0170333 \end{array}$$

$$\text{folglich } n = \frac{1,0000000}{0,0170333} = \frac{10000000}{170333} = 59$$

236. Ein Kapital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur mit seinen gefallenen Interessen zu c pro cento, sondern auch überdieß noch mit einer Summe b vermehret. Wie groß wird wohl die ganze Summe s nach n Jahren seyn?

Auflösung. Der Anwachs des Kapitals a nach n Jahren ist einmal $a \,.\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$.

Der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des ersten, oder im Anfange des zweyten Jahres angelegt wird, ist $= b \,.\left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1}$.

Der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des zweyten Jahres angelegt wird, ist $= b \,.\left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-2}$.

Der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des dritten Jahres angelegt wird, ist $= b \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3}$ u. s. w.

Und endlich der Anwachs der nämlichen Summe b, die nach Verlauf des vorletzten, oder im Anfange des letzten Jahres angelegt wird, ist $= b \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)$.

Diese Summen nun, auf welche die jährlich angelegten Theile b anwachsen, stehen in einer geometrischen Reihe, deren größtes Glied $= b \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$, kleinstes Glied $= b \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)$, und gemeinschaftlicher Quotient $= \frac{100+c}{100}$; folglich ist die Summe aller dieser Glieder

$$= b \cdot \frac{\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right) - b\left(\frac{100+c}{100}\right)}{\left(\frac{100+c}{100}\right) - 1}$$

$$= \frac{100b}{c} \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n} - \frac{100b}{c} - b \text{ vermög (207).}$$

Addiret man zu dieser itzt gefundenen Summe den ersten Ausdruck $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n}$, so erhält man endlich

$$s = \left(\frac{ac+100b}{c}\right) \cdot \left(\frac{100+c}{100}\right)^{n} - \left(\frac{100b+bc}{c}\right)$$

für die gesuchte ganze Summe; oder

$$\text{V. } s = \text{der Zahl des} \left[\log. \left(\frac{ac+100b}{c}\right) + n . \log. \left(\frac{100+c}{100}\right)\right]$$
$$- b \cdot \left(\frac{100+c}{c}\right).$$

$$\text{VI. } a = \frac{s + b \cdot \left(\frac{100 + c}{c}\right)}{\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n} - \frac{100b}{c}$$

$$\text{VII. } b = \frac{cs - ac \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n}{100 \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n - (100 + c)}$$

$$\text{VIII. } n = \frac{\log. (cs + 100b + bc) - \log. (ac + 100b)}{\log. (100 + c) - \log. 100}$$

Setzen wir nun $b = a$, so ist

$$\text{IX. } s = \left(\frac{100a + ac}{c}\right) \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n - \left(\frac{100a + ac}{c}\right)$$

$$\text{X. } a = \frac{cs}{(100 + c) \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n - (100 + c)}$$

$$\text{XI. } n = \frac{\log. (cs + 100a + ac) - \log. (100a + ac)}{\log. (100 + c) - \log. 100}$$

Jede dieser Formeln löset nun verschiedene daher gehörige Aufgaben auf, wie sich ein jeder deren einige nach Belieben in Zahlen aufsetzen, und durch Hilfe der Logarithmen auflösen kann. Z. B. eine Summe $s = 10000$ fl., die nach $n = 20$ Jahren ohne Interesse fällt, soll dergestalt abgeführet werden, daß durch diese 20 Jahre jährlich eine gleiche Summe a bezahlet wird. Wie groß soll wohl diese Summe a seyn, wenn die Interessen zu $c = 4$ pro cento vorgeschrieben sind? Man findet nach der Formel X den Zähler $cs = 40000$

ferner ist $\log.\left(\frac{100+c}{100}\right) = \log.\left(\frac{104}{100}\right) = 0{,}0170333$

multipliciret mit n $= 20$

$= 0{,}3406660$

dazu addirt $\log.(100+c) = \log. 104 = 2{,}0170333$

$= 2{,}3576993$

wozu die Zahl 227,88 gehöret,

davon 104 abgezogen

giebt 123,88 für den Nenner eines Bruches, von dem $cs = 40000$ der Zähler ist. Folglich ist die gesuchte jährliche Zahlung $= \frac{40000}{123{,}88} = 322{,}9$ fl.; denn 322,9 fl. zu 4 pro cento angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres sowohl mit den gefallenen Interessen als auch mit 322,9 fl. vermehret, bringen in 20 Jahren eine Summe von 10000 fl. zum Vorschein.

237. Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu genießen; er ist gesinnt diese Rente zu verkaufen; was wird sie itzt wohl Werth seyn, wenn die Interessen zu c pro cento vorgeschrieben sind?

Auflösung. Es sey ihr Werth $= s$, so kann s als ein Kapital angelegt, und jährlich mit den Interessen zu c pro cento vermehret in n Jahren eine Summe $= s.\left(\frac{100+c}{100}\right)^n$ hervorbringen (235); und die jährliche Rente a, da sie nach Verlauf des ersten Jahres angelegt, und darauf jährlich sowohl mit den Interessen zu c pro cento als auch mit a vermehret werden kann, bringt nach Verlauf eben dieser Zeit eine Summe

$$= \left(\frac{100a+ac}{c}\right).\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1} - \left(\frac{100a+ac}{c}\right) + a$$

$=$

$$= \left(\frac{100a + ac}{c}\right) \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1} - \frac{100a}{c}$$

zum Vorschein (vermög der Formel IX.) Der Exponent muß in diesem Falle $(n - 1)$ seyn, weil die Rente a vermög der Voraussetzung erst im Anfange des zweyten Jahres angelegt, und folglich nur durch $(n - 1)$ Jahre verzinset werden kann; auch muß a zum obigen Ausdrucke addiret werden, weil nach Verlauf des $n$ten Jahres auch noch ein a ohne Interesse fällt.

Nun muß $f \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n = \left(\frac{100a + ac}{c}\right) \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1} - \frac{100a}{c}$ seyn, damit das Gesetz erfüllet werde, welches die Interessen zu c pro cento vorschreibt; folglich

$$\text{XII. } f = \frac{100a}{c} - \frac{100a}{c} \cdot \left(\frac{100}{100 + c}\right)^n$$

$$\text{XIII. } a = \frac{cf}{100 - 100\left(\frac{100}{100 + c}\right)^n}$$

$$\text{XIV. } n = \frac{\log. 100a - \log. (100a - cf)}{\log. (100 + c) - \log. 100}$$

$$\text{XV. } \left(a - \frac{cf}{100}\right) \cdot \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n = a$$

$$\text{oder } \log. \left(a - \frac{cf}{100}\right) + n.\log. \left(\frac{100 + c}{100}\right) = \log. a$$

Nach der Formel XII. wird auch diese Aufgabe aufgelöset. Es ist jemand gesinnt seinem guten Freunde ein jährliches Auskommen a bey einer allgemeinen Lehnbank durch n Jahre anzuweisen; die Intressen bey dieser Bank sind zu c pro cento festgesetzet; nun ist die Frage, wie groß die Summe f seyn müße, die bey der Lehnbank zu erlegen ist.

Es legt jemand eine Summe s bey einer allgemeinen Lehnbank mit der Bedingniß an, daß er lebenslang jährlich eine gleiche Summe a von der Bank erhalte; nun ist die Frage, wie groß die jährliche Summe a seyn müße, wenn die Bank seine Lebenszeit für n Jahre schätzet, und die Interessen zu c pro cento zahlet? diese Summe a giebt uns die Formel XIII.

Imgleichen eine Schuld s, von der jährlich die Interessen zu c pro cento zu entrichten sind, soll in n Jahren dergestalt getilget werden, daß jährlich eine gleiche Summe a bezahlet werde; wie groß wird wohl diese Summe a seyn müßen? auch dieses findet man nach der Formel XIII.

Es nimmt jemand eine Summe s zu c pro cento auf, und überläßt seinem Gläubiger eine jährliche Rente a, die größer ist als das Interesse $\frac{cs}{100}$; nun ist die Frage, durch wie viel Jahre der Gläubiger diese Rente mit Recht genießen könne? die Antwort giebt uns die Formel XIV.

Imgleichen: es hat jemand ein Kapital $s = 100000$ fl. zu $c = 5$ pro cento anliegen; allein mit dem Interesse $= 5000$ fl. kann er seinen Aufwand nicht bestreiten, er braucht jährlich eine Summe $a = 6000$ fl., und ist daher bemüßiget vom Kapitale jährlich so viel hinweg zu nehmen, daß dieses samt dem gefallenen Interesse 6000 fl. beträgt: in wie viel Jahren wird der Mann wohl ein Bettler werden, wenn er immer so fortfährt? die Formel XIV. sagt es in $n = 36$ Jahren beynahe.

Es nimmt jemand eine Summe $a = 10000$ fl. auf, und verbindet sich durch $n = 6$ Jahre, seinem Gläubiger jährlich eine gleiche Summe $a = 2000$ fl. zu bezahlen; nun ist die Frage, was für ein Interesse bey diesem Vergleiche zum Grunde gelegt sey? die Formel XV. sagt, es sey $c = 5{,}47$ beynahe; das ist, wenn der Gläubiger die 2000 fl., die er nach Verlauf eines jeden Jahres erhält, alsogleich zu 5,47

pro

pro cento verzinset, und das Kapital immer mit den Interessen vermehret, so erhält er am Ende des 6ten Jahres eben das, was er haben würde, wenn er seine hindangegebene Summe von 10000 fl. zu 5,47 angelegt, und durch diese nämliche Zeit das Kapital jährlich mit den Interessen vermehret hätte.

Der Werth von c in der Formel XV. kann entweder durch die allgemeine Näherungsformel (231), oder auch durch Logarithmen bestimmet werden, wenn man nämlich eine Zahl nach der anderen statt c setzet, und dieß so lange versuchet, bis der erste Theil der Gleichung dem zweyten Theile ziemlich genau gleich werde.

Ich überlasse es dem Fleiße meiner Leser über alle diese XV. Formeln verschiedene numerische Beyspiele aufzusetzen, und selbe durch Beyhilfe der Logarithmischen Tafeln zu entwickeln.

Auch läßt sich aus diesen Formeln eine geschmeidige Tafel herleiten, die bey der Einrichtung einer allgemeinen Lehnbank gute Dienste leisten, und als eine Richtschnur dienen kann, nach der ein jeder, wenn er nur mit Ziffern zu rechnen weiß, alle hieher gehörigen Aufgaben auflösen kann.

238. Man nimmt aus einem Gefäße, welches $a = 100$ Maaß Wein enthält, $b = 1$ Maaß heraus, und gießt dafür eben so viel Wasser hinein, von welchem wir voraussetzen, daß es sich mit dem Weine vollkommen vermische; von dieser Vermischung nimmt man wieder $b = 1$ Maaß heraus, und gießt dafür wieder eben so viel Wasser hinein, u. s. w. wie oft müßte man wohl diese Arbeit wiederholen, wenn man haben wollte, daß in dem Gefäße gleichviel Wein und Wasser wäre.

Auflösung. Da bey jedem Herausheben a zu b gleichwie die Menge des Weins, der sich noch im Gefäße befindet, sich zu derjenigen Menge verhält, welche bey diesem Zuge herausgenommen wird, und nach dem ersten Zuge sich nur $a - b$ Maaß Wein in dem Gefäße befinden, so wird bey dem zweyten

Zuge

Zuge $b \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)$ Wein herausgenommen, und es bleibt nach dem zweyten Zuge $\frac{(a-b)^2}{a}$ Wein in dem Gefäße übrig.

Bey dem dritten Zuge wird $b \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^2$ Wein herausgenommen, und $\frac{(a-b)^3}{a^2}$ übrig gelassen u. s. w.

Es wird demnach bey dem $n$ten Zuge $b \cdot \left(\frac{a-b}{a}\right)^{n-1}$ Wein herausgenommen, und $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ zurückgelassen.

Nun soll bey dem $n$ten Zuge $\frac{1}{2}a$ Wein zurückbleiben; folglich $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = \frac{1}{2}a$

oder $n . \log. (a-b) - (n-1) . \log. a = \log. a - \log. 2$;
$n . \log. (a-b) - n \log. a + \log. a = \log. a - \log. 2$;
$n . \log. a - n . \log. (a-b) = \log. 2$; und endlich

$$n . = \frac{\log. 2}{\log. a - \log. (a-b)} = \frac{\log. 2}{\log. 100 - \log. 99}$$
$$= \frac{0{,}3010300}{0{,}0043648} = 69 \text{ beynahe.}$$

239. Nun sey $a = 20$ Maaß Wein, und unter der Menge b des flüßigen Wesens, welches bey dem 4ten Zuge herausgenommen wird, soll sich 1 Maaß Wein befinden; nun ist die Frage, wie groß b sey, oder wie viel Maaß bey jedem Zuge von dem flüßigen Wesen herausgenommen werden?

Auflösung. Da vermög vorhergehenden bey dem $n$ten Zuge $b.\left(\frac{a-b}{a}\right)^{n-1}$ Maaß Wein unter der Menge des flüßigen Wesens sich befinden, so ist ist diesem Falle $b . \left(\frac{20-b}{20}\right) = 1$;

näm-

nämlich $b^4 - 60b^3 + 1200b^2 - 8000b + 8000 = 0$, vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen Näherungsformel (231), so findet man $b = 11,01$; oder auch $b = 1\frac{1}{5}$ Maaß beynahe; beyde diese Werthe von b leisten der Aufgabe ein Genügen; die übrigen zwey Werthe von b hingegen sind nur eingebildet, oder unmöglich.

240. Ein Hausherr läßt einen Brunnen graben, und verspricht dem Brunnenmeister für die erste Klafter 7 fl., für die zweyte 8mal so viel als für die erste, nämlich 56 fl., für die dritte 8mal so viel als für die zweyte, nämlich 448 fl., und so weiter, nämlich für jede nachfolgende Klafter 8mal so viel als für die nächst vorhergehende, weil die Arbeit immer beschwerlicher wird. Der Brunnenmeister bringt einen $2\frac{1}{3}$ Klafter tiefen Brunnen zu Stande; nun entsteht die Frage, wie viel ihm der Hausherr bezahlen müße.

Auflösung. Der geschloßene Vertrag, daß die Zahlungen für die ganzen Klaftern in einer geometrischen Reihe steigen sollen, erfordert, daß auch die Zahlungen für die dritten Theile einer jeden Klafter in einer geometrischen Reihe steigen müßen. Es sey nun der Quotient dieser Reihe $= y$, und die Zahlung für das erste Drittheil $= x$ fl. so ist die Zahlung für das zweyte Drittheil $= xy$, die Zahlung für das dritte Drittheil $= xy^2$, für das vierte $= xy^3$, für das fünfte $= xy^4$, und die Zahlung für das sechste Drittheil $= xy^5$ fl. (205).

Nun ist vermög dem getroffenen Vergleiche die Zahlung für die ersten drey Drittheile, das ist für die erste Klafter $= 7$ fl. folglich $x + xy + xy^2 = 7$ . . . . A
und die Zahlung für die folgenden drey Drittheile nämlich für die zweyte Klafter $= 56$ fl. folglich . . $xy^3 + xy^4 + xy^5 = 56$.
Man multiplicire die erste Gleichung A
mit 8, so ist . . . . $8x + 8xy + 8xy^2 = 56$
Es ist also auch $xy^3 + xy^4 + xy^5 = 8x + 8xy + 8xy^2$
(Grundsatz VI.)

nämlich $y^3 + y^4 + y^5 = 8 + 8y + 8y^2$

und endlich $y^5 + y^4 + y^3 - 8y^2 - 8y - 8 = 0$

Nun

Nun findet man aus dieser Gleichung $y = 2$;
folglich $x + 2x + 4x = 7$; nämlich $x = 1$ fl.
Die Zahlungen müßen demnach folgende seyn.
Für das erste Drittheil 1 fl., für das zweyte Drittheil 2 fl., für das dritte 4, für das vierte 8, für das fünfte 16, für das sechste 32, und für das siebente Drittheil Klafter ist die Zahlung 64 fl.; nämlich für $\frac{7}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$ Klafter beträgt die ganze Zahlung $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$ fl.

Man hätte diese nämliche Summe erhalten, wenn man in der Formel $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ für a, q, und n ihre Werthe, nämlich $a = 7$, $q = 8$, und $n = \frac{7}{3}$ gesetzet hätte.

Aus den zwey Gleichungen $\begin{cases} x + xy + xy^2 = 7 \ldots \mathfrak{A} \\ xy^3 + xy^4 + xy^5 = 56 \ldots \mathfrak{B} \end{cases}$ kann der Werth von y durch eine reine Gleichung bestimmet werden, wenn man die Gleichung $\mathfrak{A}$ mit y^3 multipliciret um .... $xy^3 + xy^4 + xy^5 = 7y^3 \ldots \mathfrak{C}$ zu erhalten, und sodann die Gleichung $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{C}$ abzieht; denn es ist alsdann $0 = 7y^3 - 56$, nämlich $7y^3 = 56$, oder $y^3 = 8$, und folglich $y = \sqrt[3]{8} = 2$; u. s. w.

Ein Anfänger kann diese Aufgabe generalisiren, und selbe also vortragen: jedes Glied der geometrischen Reihe a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5, ... soll im m Theile dergestalt zertheilet werden, daß diese Theile wieder in einer geometrischen Reihe stehen? Man findet nach einer schicklichen Untersuchung den Quotienten $= \sqrt[m]{q}$, und das erste Glied $= \frac{a\sqrt[m]{q} - a}{q - 1}$ dieser neuen Reihe.

II. Anhang.
Von einigen Tafeln.

Folgende Tafel der Primzahlen kann bey Zerlegung einer vorgegebenen Zahl in ihre Faktoren gute Dienste leisten; denn sie zeigt uns, ob die vorgegebene Zahl unter die Primzahlen gehöre, oder ob sie aus Faktoren zusammengesetzt sey, wenn sie die angenommene Gränze von 100000 nicht übersteiget. Auch kann man durch Hilfe dieser Tafel diejenigen Primzahlen bestimmen, mit denen man die Division zu versuchen hat, da eine vorgegebene Zahl in ihre Faktoren zu zerlegen ist, wenn sie nur nicht über 10000000000 reichet. Man zieht in dieser Absicht aus der vorgegebenen Zahl die Quadratwurzel ohne Annäherung nur in ganzen Zahlen aus; und alle Primzahlen unter dieser Wurzel sind sodann diejenigen Zahlen, mit denen man die Division zu versuchen hat: sollte sich eräugnen, daß die vorgegebene Zahl durch keine einzige aus diesen Primzahlen genau theilbar sey, so kann man sicher schließen, daß sie auch selbst unter die Primzahlen gehöre.

In der **Tafel aller einfachen Faktoren** sind alle durch 2, 3, und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10500 in ihre einfachen Faktoren aufgelöset; man findet diese Faktoren, wenn man die Hunderter in der ersten horizontalen Kolonne, die Zehner und Einheiten der vorgegebenen Zahl aber in der ersten vertikalen Kolonne, und endlich den Ort aufsucht, an welchem diese zwey Kolonnen zusammenstossen; denn an diesem Orte sind die Faktoren anzutreffen, wenn die vorgegebene Zahl deren einige enthält: sollte hingegen an dem gefundenen Orte (....) anzutreffen seyn, so ist dieß ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl eine Primzahl sey. Z. B. auf der Seite (329) findet man, daß die Zahl 4199 aus den einfachen Faktoren **13.17.19** zusammengesetzt sey; sie werden einfach ge-

genennt um sie von den übrigen Faktoren 221 = 13.17, 247 = 13.19; 323 = 17.19 zu unterscheiden, durch welche sich die vorgegebene Zahl ebenfalls genau theilen läßt. Auf der nämlichen Seite findet man, daß 4177 eine Primzahl sey. Die durch 2, 3, und 5 theilbaren Zahlen sind in der Tafel weggeblieben, weil die Faktoren 2, 3, oder 5 einer vorgegebenen Zahl gleich bey ihrem Anblicke in die Augen fallen (36). Würde nun eine durch 2, 3, oder 5 theilbare Zahl z. B. 111972 in die Faktoren zu zerlegen seyn, so sieht man alsogleich, daß 111972 = 2.2.3.9331 sey; weiters findet man in der Tafel 9331 = 7.31.43; folglich ist 111972 = 2.2.3.7.31.43. Wenn jemand ein Belieben trägt diese Tafel weiter fortzuführen, der kann **Antons Felkels** Faktorentafel in diese geschmeidige Gestalt umschaffen; diese Felkelsche Tafel, die im Jahre 1776 die von Gehlensche Presse zu Wien verließ, enthält auf 17 Regalbögen alle einfachen Faktoren der durch 2, 3, und 5 nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 408000.

Die darauf folgende **Tafel der Potenzen** enthält die 2te, 3te, 4te, 5te, und 6te Potenz aller Wurzeln von 1 bis 100; sie kann sowohl bey der Auflösung der höheren Gleichungen, als auch bey dem Einschalten oder **Interpolliren** (wenn nämlich zu einigen gegebenen Gliedern einer Reihe die übrigen zwischenliegenden Glieder nach (212) zu bestimmen sind), und auch in anderen Fällen gute Dienste leisten. Durch Hilfe eben dieser Tafel findet man auch die Potenzen von 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; .... 9,9; imgleichen die Potenzen von 0,01; 0,02; 0,03; .... 0,99; wenn man nur für die gesuchte Potenz die gehörigen Dezimalziffern in der Tafel absöndert.

Die **Tafeln der Quadrat- und Cubiczahlen**, wie auch die **Tafeln der Quadrat- und Cubicwurzeln** bedarfen keiner Erläuterung, sie sind für sich deutlich genug; daß diese nämlichen Tafeln auch auf einige Decimalbrüche angewendet werden können, wird ohne meiner Erinnerung ein jeder bey dem ersten Anblicke selbst einsehen.

Tafel

1	233	557	883	1249	1613	2017	2399	2801
2	39	63	87	59	19	27	2411	03
3	41	69	907	77	21	29	17	19
5	51	71	11	79	27	39	23	33
7	57	77	19	83	37	53	37	37
11	63	87	29	89	57	63	41	43
13	69	93	37	91	63	69	47	51
17	71	99	41	97	67	81	59	57
19	77	601	47	1301	69	83	67	61
23	81	07	53	03	93	87	73	79
29	83	13	67	07	97	89	77	87
31	93	17	71	19	99	99	2503	97
37	307	19	77	21	1709	2111	21	2903
41	11	31	83	27	21	13	31	09
43	13	41	91	61	23	29	39	17
47	17	43	97	67	33	31	43	27
53	31	47	1009	73	41	37	49	39
59	37	53	13	81	47	41	51	53
61	47	59	19	99	53	43	57	57
67	49	61	21	1409	59	53	79	63
71	53	73	31	23	77	61	91	69
73	59	77	33	27	83	79	93	71
79	67	83	39	29	87	2203	2609	99
83	73	91	49	33	89	07	17	3001
89	79	701	51	39	1801	13	21	11
97	83	09	61	47	11	21	33	19
101	89	19	63	51	23	37	47	23
03	97	27	69	53	31	39	57	37
07	401	33	87	59	47	43	59	41
09	09	39	91	71	61	51	63	49
13	19	43	93	81	67	67	71	61
27	21	51	97	83	71	69	77	67
31	31	57	1103	87	73	73	83	79
37	33	61	09	89	77	81	87	83
39	39	69	17	93	79	87	89	89
49	43	73	23	99	89	93	93	3109
51	49	87	29	1511	1901	97	99	19
57	57	97	51	23	07	2309	2707	21
63	61	809	53	31	13	11	11	37
67	63	11	63	43	31	33	13	63
73	67	21	71	49	33	39	19	67
79	79	23	81	53	49	41	29	69
81	87	27	87	59	51	47	31	81
91	91	29	93	67	73	51	41	87
93	99	39	1201	71	79	57	49	91
97	503	53	13	79	87	71	53	3203
99	09	57	17	83	93	77	67	09
211	21	59	23	97	97	81	77	17
23	23	63	29	1601	99	83	89	21
27	41	77	31	07	2003	89	91	29
29	47	81	37	09	11	93	97	51

3253	3643	4073	4513	4957	5413	5827	6271	6719
57	59	79	17	67	17	39	77	33
59	71	91	19	69	19	43	87	37
71	73	93	23	73	31	49	99	61
99	77	99	47	87	37	51	6301	63
3301	91	4111	49	93	41	57	11	79
07	97	27	61	99	43	61	17	81
13	3701	29	67	5003	49	67	23	91
19	09	33	83	09	71	69	29	93
23	19	39	91	11	77	79	37	6803
29	27	53	97	21	79	81	43	23
31	33	57	4603	23	83	97	53	27
43	39	59	21	39	5501	5903	59	29
47	61	77	37	51	03	23	61	33
59	67	4201	39	59	07	27	67	41
61	69	11	43	77	19	39	73	57
71	79	17	49	81	21	53	79	63
73	93	19	51	87	27	81	89	69
89	97	29	57	99	31	87	97	71
91	3803	31	63	5101	57	6007	6421	83
3407	21	41	73	07	63	11	27	99
13	23	43	79	13	69	29	49	6907
33	33	53	91	19	73	37	51	11
49	47	59	4703	47	81	43	69	17
57	51	61	21	53	91	47	73	47
61	53	71	23	67	5623	53	81	49
63	63	73	29	71	39	67	91	59
67	77	83	33	79	41	73	6521	61
69	81	89	51	89	47	79	29	67
91	89	97	59	97	51	89	47	71
99	3907	4327	83	5209	53	91	51	77
3511	11	37	87	27	57	6101	53	83
17	17	39	89	31	59	13	63	91
27	19	49	93	33	69	21	69	97
29	23	57	99	37	83	31	71	7001
33	29	63	4801	61	89	33	77	13
39	31	73	13	73	93	43	81	19
41	43	91	17	79	5701	51	99	27
47	47	97	31	81	11	63	6607	39
57	67	4409	61	97	17	73	19	43
59	89	21	71	5303	37	97	37	57
71	4001	23	77	09	41	99	53	69
81	03	41	89	23	43	6203	59	79
83	07	47	4903	33	49	11	61	7103
93	13	51	09	47	79	17	73	09
3607	19	57	19	51	83	21	79	21
13	21	63	31	81	91	29	89	27
17	27	81	33	87	5801	47	91	29
23	49	83	37	93	07	57	6701	51
31	51	93	43	99	13	63	03	59
37	57	4507	51	5407	21	69	09	77

7187	7639	8111	8599	9029	9467	9929	10427	10903
93	43	17	8609	41	73	31	29	09
7207	49	23	23	43	79	41	33	37
11	69	47	27	49	91	49	53	39
13	73	61	29	59	97	67	57	49
19	81	67	41	67	9511	73	59	57
29	87	71	47	91	21	10007	63	73
37	91	79	63	9103	33	09	77	79
43	99	91	69	09	39	37	87	87
47	7703	8209	77	27	47	39	99	93
53	17	19	81	33	51	61	10501	11003
83	23	21	89	37	87	67	13	27
97	27	31	93	51	9601	69	29	47
7307	41	33	99	57	13	79	31	57
09	53	37	8707	61	19	91	59	59
21	57	43	13	73	23	93	67	69
31	59	63	19	81	29	99	89	71
33	89	69	31	87	31	10103	97	83
49	93	73	37	99	43	11	10601	87
51	7817	87	41	9203	49	33	07	93
69	23	91	47	09	61	39	13	11113
93	29	93	53	21	77	41	27	17
7411	41	97	61	27	79	51	31	19
17	53	8311	79	39	89	59	39	31
33	67	17	83	41	97	63	51	49
51	73	29	8803	57	9719	69	57	59
57	77	53	07	77	21	77	63	61
59	79	63	19	81	33	81	67	71
77	83	69	21	83	39	93	87	73
81	7901	77	31	93	43	10211	91	77
87	07	87	37	9311	49	23	10709	97
89	19	89	39	19	67	43	11	11213
99	27	8419	49	23	69	47	23	39
7507	33	23	61	37	81	53	29	43
17	37	29	63	41	87	59	33	51
23	49	31	67	43	91	67	39	57
29	51	43	87	49	9803	71	53	61
37	63	47	93	71	11	73	71	73
41	93	61	8923	77	17	89	81	79
47	8009	67	29	91	29	10301	89	87
49	11	8501	33	97	33	03	99	99
59	17	13	41	9403	39	13	10831	11311
61	39	21	51	13	51	21	37	17
73	53	27	63	19	57	31	47	21
77	59	37	69	21	59	33	53	29
83	69	39	71	31	71	37	59	51
89	81	43	99	33	83	43	61	53
91	87	63	9001	37	87	57	67	69
7603	89	73	07	39	9901	69	83	83
07	93	81	11	61	07	91	89	93
21	8101	97	13	63	23	99	91	99

11411	11923	12391	12829	13313	13799	14347	14797	15287
23	27	12401	41	27	13807	69	14813	89
37	33	09	53	31	29	87	21	99
43	39	13	89	37	31	89	27	15307
47	41	21	93	39	41	14401	31	13
67	53	33	99	67	59	07	43	19
71	59	37	12907	81	73	11	51	29
83	69	51	11	97	77	19	67	31
89	71	57	17	99	79	23	69	49
91	81	73	19	13411	83	31	79	59
97	87	79	23	17	13901	37	87	61
11503	12007	87	41	21	03	47	91	73
19	11	91	53	41	07	49	97	77
27	37	97	59	51	13	61	14923	83
49	41	12503	67	57	21	79	29	91
51	43	11	73	63	31	89	39	15401
79	49	17	79	69	33	14503	47	13
87	71	27	83	77	63	19	51	27
93	73	39	13001	87	67	33	57	39
97	97	41	03	99	97	37	69	43
11617	12101	47	07	13513	99	43	83	51
21	07	53	09	23	14009	49	15013	61
33	09	69	33	37	11	51	17	67
57	13	77	37	53	29	57	31	73
77	19	83	43	67	33	61	53	93
81	43	89	49	77	51	63	61	97
89	49	12601	63	91	57	91	73	15511
99	57	11	93	97	71	93	77	27
11701	61	13	99	13613	81	14621	83	41
17	63	19	13103	19	83	27	91	51
19	97	37	09	27	87	29	15101	59
31	12203	41	21	33	14107	33	07	69
43	11	47	27	49	43	39	21	81
77	27	53	47	69	49	53	31	83
79	39	59	51	79	53	57	37	15601
83	41	71	59	81	59	69	39	07
89	51	89	63	87	73	83	49	19
11801	53	97	71	91	77	99	61	29
07	63	12703	77	93	97	14713	73	41
13	69	13	83	97	14207	17	87	43
21	77	21	87	13709	21	23	93	47
27	81	39	13217	11	43	31	99	49
31	89	43	19	21	49	37	15217	61
33	12301	57	29	23	51	41	27	67
39	23	63	41	29	81	47	33	71
63	29	81	49	51	93	53	41	79
67	43	91	59	57	14303	59	59	83
87	47	99	67	59	21	67	63	15727
97	73	12809	91	63	23	71	69	31
11903	77	21	97	81	27	79	71	33
09	79	23	13309	89	41	83	77	37

15739	16231	16763	17299	17783	18251	18773	19379	19841
49	49	87	17317	89	53	87	81	43
61	53	16811	21	91	57	93	87	53
67	67	23	27	17807	69	97	91	61
73	73	29	33	27	87	18803	19403	67
87	16301	31	41	37	89	39	17	89
91	19	43	51	39	18301	59	21	91
97	33	71	59	51	07	69	23	19913
15803	39	79	77	63	11	99	27	19
09	49	83	83	81	13	18911	29	27
17	61	89	87	91	29	13	33	37
23	63	16901	89	17903	41	17	41	49
59	69	03	93	09	53	19	47	61
77	81	21	17401	11	67	47	57	63
81	16411	27	17	21	71	59	63	73
87	17	31	19	23	79	73	69	79
89	21	37	31	29	97	79	71	91
15901	27	43	43	39	18401	19001	77	93
07	33	63	49	57	13	09	83	97
13	47	79	67	59	27	13	89	20011
19	51	81	71	71	33	31	19501	21
23	53	87	77	77	39	37	07	23
37	77	93	83	81	43	51	31	29
59	81	17011	89	87	51	69	41	47
71	87	21	91	89	57	73	43	51
73	93	27	97	18013	61	79	53	63
91	16519	29	17509	41	81	81	59	71
16001	29	33	19	43	93	87	71	89
07	47	41	39	47	18503	19121	77	20101
33	53	47	51	49	17	39	83	07
57	61	53	69	59	21	41	97	13
61	67	77	73	61	23	57	19603	17
63	73	93	79	77	39	63	09	23
67	16603	99	81	89	41	81	61	29
69	07	17107	97	97	53	83	81	43
73	19	17	99	18119	83	19207	87	47
87	31	23	17609	21	87	11	97	49
91	33	37	23	27	93	13	99	61
97	49	59	27	31	18617	19	19709	73
16103	51	67	57	33	37	31	17	77
11	57	83	59	43	61	37	27	83
27	61	89	69	49	71	49	39	20201
39	73	91	81	69	79	59	51	19
41	91	17203	83	81	91	67	53	31
83	93	07	17707	91	18701	73	59	33
87	99	09	13	99	13	89	63	49
89	16703	31	29	18211	19	19301	77	61
93	29	39	37	17	31	09	93	69
16217	41	57	47	23	43	19	19801	87
23	47	91	49	29	49	33	13	97
29	59	93	61	33	57	73	19	20323

20327	20857	21347	21821	22303	22817	23327	23833	24337
33	73	77	39	07	53	33	57	59
41	79	79	41	43	59	39	69	71
47	87	83	51	49	61	57	73	73
53	97	91	59	67	71	69	79	79
57	99	97	63	69	77	71	87	91
59	20903	21401	71	81	22901	99	93	24407
69	21	07	81	91	07	23417	99	13
89	29	19	93	97	21	31	23909	19
93	39	33	21911	22409	37	47	11	21
99	47	67	29	33	43	59	17	39
20407	59	81	37	41	61	73	29	43
11	63	87	43	47	63	97	57	69
31	81	91	61	53	73	23509	71	73
41	83	93	77	69	93	31	77	81
43	21001	99	91	81	23003	37	81	99
77	11	21503	97	83	11	39	93	24509
79	13	17	22003	22501	17	49	24001	17
83	17	21	13	11	21	57	07	27
20507	19	23	27	31	27	61	19	33
09	23	29	31	41	29	63	23	47
21	31	57	37	43	39	67	29	51
33	59	59	39	49	41	81	43	71
43	61	63	51	67	53	93	49	93
49	67	69	63	71	57	99	61	24611
51	89	77	67	73	59	23603	71	23
63	21101	87	73	22613	63	09	77	31
93	07	89	79	19	71	23	83	59
99	21	99	91	21	81	27	91	71
20611	39	21601	93	37	87	29	97	77
27	43	11	22109	39	99	33	24103	83
39	49	13	11	43	23117	63	07	91
41	57	17	23	51	31	69	09	97
63	63	47	29	69	43	71	13	24709
81	69	49	33	79	59	77	21	33
93	79	61	47	91	67	87	33	49
20707	87	73	53	97	73	89	37	63
17	91	83	57	99	89	23719	51	67
19	93	21701	59	22709	97	41	69	81
31	21211	13	71	17	23201	43	79	93
43	21	27	89	21	03	47	81	99
47	27	37	93	27	09	53	97	24809
49	47	39	22229	39	27	61	24203	21
53	69	51	47	41	51	67	23	41
59	77	57	59	51	69	73	29	47
71	83	67	71	69	79	89	39	51
73	21313	73	73	77	91	23801	47	59
89	17	87	77	83	93	13	51	77
20807	19	99	79	87	97	19	81	89
09	23	21803	83	22807	23311	27	24317	24907
49	41	17	91	11	21	31	29	17

24919	25447	25951	26459	26959	27541	28051	28591	29077
23	53	69	79	81	51	57	97	29101
43	57	81	89	87	81	69	28603	23
53	63	97	97	93	83	81	07	29
67	69	99	26501	27011	27611	87	19	31
71	71	26003	13	17	17	97	21	37
77	25523	17	39	31	31	99	27	47
79	37	21	57	43	47	28109	31	53
89	41	29	61	59	53	11	43	67
25013	61	41	73	61	73	23	49	73
31	77	53	91	67	89	51	57	79
33	79	83	97	73	91	63	61	91
37	83	99	26627	77	97	81	63	9201
57	89	26107	33	91	27701	83	69	07
73	25601	11	41	27103	33	38201	87	09
87	03	13	47	07	37	11	97	21
97	09	19	69	09	39	19	28703	31
25111	21	41	81	27	43	29	11	43
17	33	53	83	43	49	77	23	51
21	39	61	87	79	51	79	29	69
27	43	71	93	91	63	83	51	87
47	57	77	99	97	67	89	53	97
53	67	83	26701	27211	73	97	59	29303
63	73	89	11	39	79	28307	71	11
69	79	26203	13	41	91	09	89	27
71	93	09	17	53	93	19	93	33
83	25703	27	23	59	99	49	28807	39
89	17	37	29	71	27803	51	13	47
25219	33	49	31	77	09	87	17	63
29	41	51	37	81	17	93	37	83
37	47	61	59	83	23	28403	43	87
43	59	63	77	99	27	09	59	89
47	63	67	83	27329	47	11	67	99
53	71	93	26801	37	51	29	71	29401
61	93	97	13	61	83	33	79	11
25301	99	26309	21	67	93	39	28901	23
03	25801	17	33	97	27901	47	09	29
07	19	21	39	27407	17	63	21	37
09	41	39	49	09	19	77	27	43
21	47	47	61	27	41	93	33	53
39	49	57	63	31	43	99	49	73
43	67	71	79	37	47	28513	61	83
49	73	87	81	49	53	17	79	29501
57	89	93	91	57	61	37	29009	27
67	25903	99	93	79	67	41	17	31
73	13	26407	26903	81	83	47	21	37
91	19	17	21	87	97	49	23	67
25409	31	23	27	27509	28001	59	27	69
11	33	31	47	27	19	71	33	73
23	39	37	51	29	27	73	59	81
39	43	49	53	39	31	79	63	87

29599	30181	30727	31237	31771	32327	32803	33343	33809
29611	87	57	47	93	41	31	47	11
29	97	63	49	99	53	33	49	27
33	30203	73	53	31817	59	39	53	29
41	11	81	59	47	63	43	59	51
63	23	30803	67	49	69	69	77	57
69	41	09	71	59	71	87	91	63
71	53	17	77	73	77	32909	33403	71
83	59	29	31307	83	81	11	09	89
29717	69	39	19	91	32401	17	13	93
23	71	41	21	31907	11	33	27	33911
41	93	51	27	57	13	39	57	23
53	30307	53	33	63	23	41	61	31
59	13	59	37	73	29	57	69	37
61	19	69	57	81	41	69	79	41
89	23	71	79	91	43	71	87	61
29803	41	81	87	32003	67	83	93	67
19	47	93	91	09	79	87	33503	97
33	67	30911	93	27	91	93	21	34019
37	89	31	97	29	97	99	29	31
51	91	37	31469	51	32503	33013	33	33
63	30403	41	77	57	07	23	47	39
67	27	49	81	59	31	29	63	57
73	31	71	89	63	33	37	69	61
79	49	77	31511	69	37	49	77	34123
81	67	83	13	77	61	53	81	27
29917	69	31013	17	83	63	71	87	29
21	91	19	31	89	69	73	89	41
27	93	33	41	99	73	83	99	47
47	97	39	43	32117	79	91	33601	57
59	30509	51	47	19	87	33107	13	59
83	17	63	67	41	32603	13	17	71
89	29	69	73	43	09	19	19	83
30011	39	79	83	59	11	49	23	34211
13	53	81	31601	73	21	51	29	13
29	57	91	07	83	33	61	37	17
47	59	31121	27	89	47	79	41	31
59	77	23	43	91	53	81	47	53
71	93	39	49	32203	87	91	79	59
89	30631	47	57	13	93	99	33703	61
91	37	51	63	33	32707	33203	13	67
97	43	53	67	37	13	11	21	73
30103	49	59	87	51	17	23	39	83
09	61	77	99	57	19	47	49	97
13	71	81	31721	61	49	87	51	34301
19	77	83	23	97	71	89	57	03
33	89	89	27	99	79	33301	67	13
37	97	93	29	32303	83	11	69	19
39	30703	31219	41	09	89	17	73	27
61	07	23	51	21	97	29	91	37
69	13	31	69	23	32801	31	97	51

34361	34877	35437	36007	36559	37021	37567	38177	38713
67	83	47	11	63	39	71	83	23
69	97	49	13	71	49	73	89	29
81	34913	61	17	83	57	79	97	37
34403	19	91	37	87	61	89	38201	47
21	39	35507	61	99	87	91	19	49
29	49	09	67	36607	97	37607	31	67
29	61	21	73	29	37117	19	37	83
57	63	27	83	37	23	33	39	91
69	81	31	97	43	39	43	61	38803
71	35023	33	36107	53	59	49	73	21
83	27	37	09	71	71	57	81	33
87	51	43	31	77	81	63	87	39
99	53	69	37	83	89	91	99	51
34501	59	73	51	91	99	93	38303	61
11	69	91	61	97	37201	99	17	67
13	81	93	87	36709	17	37717	21	73
19	83	97	91	13	23	47	27	91
37	89	35603	36209	21	43	81	29	38903
43	99	17	17	39	53	83	33	17
49	35107	71	29	49	73	99	51	21
83	11	77	41	61	77	37811	71	23
89	17	35729	51	67	37307	13	77	33
91	29	31	63	79	09	31	93	53
34603	41	47	69	81	13	47	38431	59
07	49	53	77	87	21	53	47	71
13	53	59	93	91	37	61	49	77
31	59	71	99	93	39	71	53	93
49	71	97	36307	36809	57	79	59	39019
51	35201	35801	13	21	61	89	61	23
67	21	03	19	33	63	97	38501	41
73	27	09	41	47	69	37907	43	43
79	51	31	43	57	79	51	57	47
87	57	37	53	71	97	57	61	79
93	67	39	73	77	37409	63	67	89
34703	79	51	83	87	23	67	69	97
21	81	63	89	99	41	87	93	39103
29	91	69	36433	36901	47	91	48603	07
39	35311	79	51	13	63	93	09	13
47	17	97	57	19	83	97	11	19
57	23	99	67	23	89	38011	29	33
59	27	35911	69	29	93	39	39	39
63	39	23	73	31	37501	47	51	57
81	53	33	79	43	07	53	53	61
34807	63	51	93	47	11	69	69	63
19	81	63	97	73	17	83	71	81
41	93	69	36523	79	29	38113	77	91
43	35401	77	27	97	37	19	93	99
47	07	83	29	37003	47	49	99	39209
49	19	93	41	13	49	53	38707	17
71	23	99	51	19	61	67	11	27

39229	39791	40351	40903	41443	41953	42437	42937	43577
33	99	57	27	53	57	43	43	79
39	39821	61	33	67	59	51	53	91
41	27	87	39	79	69	57	61	97
51	29	40423	49	91	81	61	67	43607
93	39	27	61	41507	83	63	79	09
39301	41	29	73	13	99	67	89	13
13	47	33	93	19	42013	73	43003	27
17	57	59	41011	21	17	87	13	33
23	63	71	17	39	19	91	19	49
41	69	83	23	43	23	99	37	51
43	77	87	39	49	43	42509	49	61
59	83	93	47	79	61	33	51	69
67	87	99	51	93	71	57	63	91
71	39901	40507	57	97	73	69	67	43711
73	29	19	77	41603	83	71	93	17
83	37	29	81	09	89	77	43103	21
97	53	31	41113	11	42101	89	17	53
39409	71	43	17	17	31	42611	33	59
19	79	59	31	21	39	41	51	77
39	83	77	41	27	57	43	59	81
43	89	83	43	41	69	49	77	83
51	40009	91	49	47	79	67	89	87
61	13	97	61	51	81	77	43201	89
99	31	40609	77	59	87	83	07	93
39503	37	27	79	69	93	89	23	43801
09	39	37	83	81	97	97	37	53
11	63	39	89	87	42209	42701	61	67
21	87	93	41201	41719	21	03	71	89
41	93	97	03	29	23	09	83	91
51	99	99	13	37	27	19	91	43913
63	40111	40709	21	59	39	27	43313	33
69	23	39	27	61	57	37	19	43
81	27	51	31	71	81	43	21	51
39607	29	59	33	77	83	51	31	61
19	51	63	43	41801	93	67	91	63
23	53	71	57	09	99	73	97	69
31	63	87	63	13	42307	87	99	73
59	69	40801	69	43	23	93	43403	87
67	77	13	81	49	31	97	11	91
71	89	19	99	51	37	42821	27	97
79	93	23	41333	63	49	29	41	44017
39703	40213	29	41	79	59	39	51	21
09	31	41	51	87	73	41	57	27
19	37	47	57	93	79	53	81	29
27	41	49	81	97	91	59	87	41
33	53	53	87	41903	97	63	99	53
49	77	67	89	11	42403	99	43517	59
61	83	79	99	27	07	42901	41	71
69	89	83	41411	41	09	23	43	87
79	40343	97	13	47	33	29	73	89

44101	44647	45197	45779	46351	46889	47501	48017	48589
11	51	45233	45817	81	46901	07	23	93
19	57	47	21	99	19	13	29	48611
23	83	59	23	46411	33	21	49	19
29	87	63	27	39	57	27	73	23
31	99	81	33	41	93	33	79	47
59	44701	89	41	47	97	43	91	49
71	11	93	53	51	47017	63	48109	61
79	29	45307	63	57	41	69	19	73
89	41	17	69	71	51	81	21	77
44201	53	19	87	77	57	91	31	79
03	71	29	93	89	59	99	57	48731
07	73	37	45943	99	87	47609	63	33
21	77	41	49	46507	93	23	79	51
49	89	43	53	11	47111	29	87	57
57	97	61	59	23	19	39	93	61
63	44809	77	71	49	23	53	97	67
67	19	89	79	59	29	57	48221	79
69	39	45403	89	67	37	59	39	81
73	43	13	46021	73	43	81	47	87
79	51	27	27	89	47	99	59	99
81	67	33	49	91	49	47701	71	48809
93	79	39	51	46601	61	11	81	17
44351	87	81	61	19	89	13	99	21
57	93	91	73	33	47207	17	48311	23
71	44909	97	91	39	21	37	13	47
81	17	45503	93	43	37	41	37	57
83	27	23	99	49	51	43	41	59
89	39	33	46103	63	69	77	53	69
44417	53	41	33	79	79	79	71	71
49	59	53	41	81	87	91	83	83
53	63	57	47	87	93	97	97	89
83	71	69	53	91	97	47807	48407	48907
91	83	87	71	46703	47303	09	09	47
97	87	89	81	23	09	19	13	53
44501	45007	99	83	27	17	37	37	73
07	13	45613	87	47	39	43	49	89
19	53	31	99	51	51	57	63	91
31	61	41	46219	57	53	69	73	49003
33	77	59	29	69	63	81	79	09
37	83	67	37	71	81	47903	81	19
43	45119	73	61	46807	87	11	87	31
49	21	77	71	11	89	17	91	33
63	27	91	73	17	47407	33	97	37
79	31	97	79	19	17	39	48523	43
87	37	45707	46301	29	19	47	27	57
44617	39	37	07	31	31	51	33	69
21	61	51	09	53	41	63	39	81
23	79	57	27	61	59	69	41	49103
33	81	63	37	67	91	77	63	09
41	91	67	49	77	97	81	71	17

49121	49663	50153	50773	51347	51839	52391	52973	53551
23	67	59	77	49	53	52433	81	69
39	69	77	89	61	59	53	99	91
57	81	50207	50821	83	69	57	53003	93
69	97	21	33	51407	71	89	17	97
71	49711	27	39	13	93	52501	47	53609
77	27	31	49	19	99	11	51	11
93	39	61	57	21	51907	17	69	17
99	41	63	67	27	13	29	77	23
49201	47	73	73	31	29	41	87	29
07	57	87	91	37	41	43	89	33
11	83	91	93	39	49	53	93	39
23	87	50311	50909	49	71	61	53101	53
53	89	21	23	61	73	67	13	57
61	49801	29	29	73	77	71	17	81
77	07	33	51	79	91	79	29	93
79	11	41	57	81	52009	83	47	99
97	23	59	69	87	21	52609	49	53717
49307	31	63	71	51503	27	27	61	19
31	43	77	89	11	51	31	71	31
33	53	83	93	17	57	39	73	59
39	71	87	51001	21	67	67	89	73
63	77	50411	31	39	69	73	97	77
67	91	17	43	51	81	91	53201	83
69	49919	23	47	63	52103	97	31	91
91	21	41	59	77	21	52709	33	53813
93	27	59	61	81	27	11	39	19
49409	37	61	71	93	47	21	67	31
11	39	97	51109	99	53	27	69	49
17	43	50503	31	51607	63	33	79	57
29	57	13	33	13	77	47	81	61
33	91	27	37	31	81	57	99	81
51	93	39	51	37	83	69	53309	87
59	99	43	57	47	89	83	23	91
63	50021	49	69	59	52201	52807	27	97
77	23	51	93	73	23	13	53	99
81	33	81	97	79	37	17	59	53917
99	47	87	99	83	49	37	77	23
49523	51	91	51203	91	53	59	81	27
29	53	93	17	51713	59	61	53401	39
31	69	99	29	19	67	79	07	51
37	77	50627	39	21	89	83	11	59
47	87	47	41	49	91	89	19	87
49	93	51	57	67	52301	52901	37	93
59	50101	71	63	69	13	03	41	54001
97	11	83	83	87	21	19	53	11
49603	19	50707	87	97	61	37	79	13
13	23	23	51307	51803	63	51	53503	37
27	29	41	29	17	69	57	07	49
33	31	53	41	27	79	63	27	59
39	47	67	43	29	87	67	49	83

54091	54623	55217	55799	56333	56827	57331	57899	58427
54101	29	19	55807	59	43	47	57901	39
21	31	29	13	69	57	49	17	41
33	47	43	17	77	73	67	23	51
39	67	49	19	83	91	73	43	53
51	73	59	23	93	93	83	47	77
63	79	91	29	56401	97	89	73	81
67	54709	55313	37	17	56909	97	77	58511
81	13	31	43	31	11	57413	91	37
93	21	33	49	37	21	27	58013	43
54217	27	37	71	43	23	57	27	49
51	51	39	89	53	29	67	31	67
69	67	43	97	67	41	87	43	73
77	73	51	55901	73	51	93	49	79
87	79	73	03	77	57	57503	57	58601
93	87	81	21	79	63	27	61	03
54311	99	99	27	89	83	29	67	13
19	54829	55411	31	56501	89	57	73	31
23	33	39	33	03	93	59	99	57
31	51	41	49	09	99	71	58109	61
47	69	57	67	19	57037	87	11	79
61	77	69	87	27	41	93	29	87
67	81	87	97	31	47	57601	47	93
71	54907	55501	56003	33	59	37	51	99
77	17	11	09	43	73	41	53	58711
54401	19	29	39	69	77	49	69	27
03	41	41	41	91	89	53	71	33
09	49	47	53	97	97	67	89	41
13	59	79	81	99	57107	79	93	57
19	73	89	87	56611	19	89	99	63
21	79	55603	93	29	31	97	58207	71
37	83	09	99	33	39	57709	11	87
43	55001	19	56101	59	43	13	17	89
49	09	21	13	63	49	19	29	58831
69	21	31	23	71	63	27	31	89
93	49	33	31	81	73	31	37	97
97	51	39	49	87	79	37	43	58901
99	57	61	67	56701	91	51	71	07
54503	61	63	71	11	93	73	58309	09
17	73	67	79	13	57203	81	13	13
21	79	73	97	31	21	87	21	21
39	55103	81	56207	37	23	91	37	37
41	09	91	09	47	41	93	63	43
47	17	97	37	67	51	57803	67	63
59	27	55711	39	73	59	09	69	67
63	47	17	49	79	69	29	79	79
77	63	21	63	83	71	39	91	91
81	71	33	67	56807	83	47	93	97
83	55201	63	69	09	87	53	58403	59009
54601	07	87	99	13	57301	59	11	11
17	13	93	56311	21	29	81	17	21

59023	59513	60107	60719	61339	61879	62477	63067	63601
29	39	27	27	43	61909	83	73	07
51	57	33	33	57	27	97	79	11
53	61	39	37	63	33	62501	97	17
63	67	49	57	79	49	07	63103	29
69	81	61	61	81	61	33	13	47
77	59611	67	63	61403	67	39	27	49
83	17	69	73	09	79	49	31	59
93	21	60209	79	17	81	63	49	67
59107	27	17	93	41	87	81	79	71
13	29	23	60811	63	91	91	97	89
19	51	51	21	69	62003	97	99	91
23	59	57	59	71	11	62603	63211	97
41	63	59	69	83	17	17	41	63703
49	69	71	87	87	39	27	47	09
59	71	89	89	93	47	33	77	19
67	93	93	99	61507	53	39	81	27
83	99	60317	60901	11	57	53	99	37
97	59707	31	13	19	71	59	63311	43
59207	23	37	17	43	81	83	13	61
09	29	43	19	47	99	87	17	73
19	43	53	23	53	62119	62701	31	81
21	47	73	37	59	29	23	37	93
33	53	83	43	61	31	31	47	99
39	71	97	53	83	37	43	53	63803
43	79	60413	61	61603	41	53	61	09
63	91	27	61001	09	43	61	67	23
73	97	43	07	13	71	73	77	39
81	59809	49	27	27	89	91	89	41
59333	33	57	31	31	91	62801	91	53
41	63	93	43	37	62201	19	97	57
51	79	97	51	43	07	27	63409	63
57	87	60509	57	51	13	51	19	63901
59	59921	21	91	57	19	61	21	07
69	29	27	99	67	33	69	39	13
77	51	39	61121	73	73	73	43	29
87	57	89	29	81	97	97	63	49
93	71	60601	41	87	99	62903	67	77
99	81	07	51	61703	62303	21	73	97
59407	99	11	53	17	11	27	87	64007
17	60013	17	69	23	23	29	93	13
19	17	23	61211	29	27	39	99	19
41	29	31	23	51	47	69	63521	33
43	37	37	31	57	51	71	27	37
47	41	47	53	81	83	81	33	63
53	77	49	61	61813	62401	83	41	67
67	83	59	83	19	17	87	59	81
71	89	61	91	37	23	89	77	91
73	91	79	97	43	59	63029	87	64109
97	60101	89	61331	61	67	31	89	23
59509	03	60703	33	71	73	59	99	51

64153	64793	65357	65851	66499	67057	67567	68113	68749
57	64811	71	67	66509	61	77	41	67
71	17	81	81	23	73	79	47	71
87	49	93	99	29	79	89	61	77
89	53	65407	65921	33	67103	67601	71	91
64217	71	13	27	41	21	07	68207	68813
23	77	19	29	53	29	19	09	19
31	79	23	51	69	39	31	13	21
37	91	37	57	71	41	51	19	63
71	64901	47	63	87	53	79	27	79
79	19	49	81	93	57	99	39	81
83	21	79	83	66601	69	67709	61	91
64301	27	97	93	17	81	23	79	97
03	37	65519	66029	29	87	33	81	99
19	51	21	37	43	89	41	68311	68903
27	69	37	41	53	67211	51	29	09
33	97	39	47	83	13	57	51	17
73	65003	43	67	97	17	59	71	27
81	11	51	71	66701	19	63	89	47
99	27	57	83	13	31	77	99	63
64403	29	63	89	21	47	83	68437	93
33	33	79	66103	33	61	89	43	69001
39	53	81	07	39	71	67801	47	11
51	63	87	09	49	73	07	49	19
53	71	99	37	51	89	19	73	29
83	89	65609	61	63	67307	29	77	31
89	99	17	69	91	39	43	83	61
99	65101	29	73	97	43	53	89	67
64513	11	33	79	66809	49	67	91	73
53	19	47	91	21	69	83	68501	69109
67	23	51	66221	41	91	91	07	19
77	29	57	39	51	99	67901	21	27
79	41	77	71	53	67409	27	31	43
91	47	87	93	63	11	31	39	49
64601	67	99	66301	77	21	33	43	51
09	71	65701	37	83	27	39	67	63
13	73	07	43	89	29	43	81	91
21	79	13	47	66919	33	57	97	93
27	83	17	59	23	47	61	68611	97
33	65203	19	61	31	53	67	33	69203
61	13	29	73	43	77	79	39	21
63	39	31	77	47	81	87	59	33
67	57	61	83	49	89	93	69	39
79	67	77	66403	59	93	68023	83	47
93	69	89	13	73	99	41	87	57
64709	87	65809	31	77	67511	53	99	59
17	93	27	49	67003	23	59	68711	63
47	65309	31	57	21	31	71	13	69313
63	23	37	63	33	37	87	29	17
81	27	39	67	43	47	99	37	37
83	53	43	91	49	59	68111	43	41

69371	70001	70507	71069	71569	72109	72707	73327	73883
79	03	29	81	93	39	19	31	97
83	09	37	89	97	61	27	51	73907
89	19	49	71119	71633	67	33	61	39
69401	39	71	29	47	69	39	63	43
03	51	73	43	63	73	63	69	51
27	61	83	47	71	72211	67	79	61
31	67	89	53	93	21	97	87	73
39	79	70607	61	99	23	72817	73417	99
57	99	19	67	71707	27	23	21	74017
63	70111	21	71	11	29	59	33	21
67	17	27	91	13	51	69	53	27
73	21	39	71209	19	53	71	59	47
81	23	57	33	41	69	83	71	51
91	39	63	37	61	71	89	77	71
93	41	67	49	77	77	93	83	77
97	57	87	57	89	87	72901	73517	93
99	63	70709	61	71807	72307	07	23	99
69539	77	17	63	09	13	11	29	74101
57	81	29	87	21	37	23	47	31
93	83	53	93	37	41	31	53	43
69623	99	69	71317	43	53	37	61	49
53	70201	83	27	49	67	49	71	59
61	07	93	29	61	79	53	83	61
77	23	70823	33	67	83	59	89	67
91	29	41	39	79	72421	73	97	77
97	37	43	41	81	31	77	73607	89
69709	41	49	47	87	61	97	09	97
37	49	53	53	99	67	73009	13	74201
39	71	67	59	71909	69	13	37	03
61	89	77	63	17	81	19	43	09
63	97	79	87	33	93	37	51	19
67	70309	91	89	41	97	39	73	31
79	13	70901	99	47	72503	43	79	57
69809	21	13	71411	63	33	61	81	79
21	27	19	13	71	47	63	93	87
27	51	21	19	83	51	79	99	93
29	73	37	29	87	59	91	73709	97
33	79	49	37	93	77	73121	21	74311
47	81	51	43	99	72613	27	27	17
57	93	57	53	72019	17	33	51	23
59	70423	69	71	31	23	41	57	53
77	29	79	73	43	43	81	71	57
99	39	81	79	47	47	89	83	63
69911	51	91	83	53	49	73237	73819	77
29	57	97	71503	73	61	43	23	81
31	59	99	27	77	71	59	47	83
41	81	71011	37	89	73	77	49	74411
59	87	23	49	91	79	91	59	13
91	89	39	51	72101	89	73303	67	19
97	70501	59	63	03	72701	09	77	41

74449	75013	75577	76157	76771	77347	77839	78487	79103
53	17	83	59	77	51	49	97	11
71	29	75611	63	81	59	63	78509	33
89	37	17	76207	76801	69	67	11	39
74507	41	19	13	19	77	93	17	47
09	79	29	31	29	83	99	39	51
21	83	41	43	31	77417	77929	41	53
27	75109	53	49	37	19	33	53	59
31	33	59	53	47	31	51	69	81
51	49	79	59	71	47	69	71	87
61	61	83	61	73	71	77	77	93
67	67	89	83	83	77	83	83	79201
73	69	75703	89	76907	79	99	93	29
87	81	07	76303	13	89	78007	78607	31
97	93	09	33	19	91	17	23	41
74609	75209	21	43	43	77509	31	43	59
11	11	31	67	49	13	41	49	73
23	17	43	69	61	21	49	53	79
53	23	67	79	63	27	59	91	83
87	27	73	87	91	43	79	97	79301
99	39	81	76403	77003	49	78101	78707	09
74707	53	87	21	17	51	21	13	19
13	69	93	23	23	57	37	21	33
17	77	97	41	29	63	39	37	37
19	89	75821	63	41	69	57	79	49
29	75307	33	71	47	73	63	81	57
31	23	53	81	69	87	67	87	67
47	29	69	87	81	91	73	91	79
59	37	83	93	93	77611	79	97	93
61	47	75913	76507	77101	17	91	78803	97
71	53	31	11	37	21	93	09	99
79	67	37	19	41	41	78203	23	79411
97	77	41	37	53	47	29	39	23
74821	89	67	41	67	59	33	53	27
27	91	79	43	71	81	41	57	33
31	75401	83	61	91	87	59	77	51
43	03	89	79	77201	89	77	87	81
57	07	91	97	13	99	83	89	93
61	31	97	76603	37	77711	78301	93	79531
69	37	76001	07	39	13	07	78901	37
73	79	03	31	43	19	11	19	49
87	75503	31	49	49	23	17	29	59
91	11	39	51	61	31	41	41	61
97	21	79	67	63	43	47	77	79
74903	27	81	73	67	47	67	79	89
23	33	91	79	69	61	78401	89	79601
29	39	99	97	79	73	27	79031	09
33	41	76103	76717	91	83	37	39	13
41	53	23	33	77317	97	39	43	21
59	57	29	53	23	77801	67	63	27
75011	71	47	57	39	13	79	87	31

79633	80209	80777	81299	81899	82457	83023	83609	8422
57	21	79	81307	81901	63	47	17	293
69	31	83	31	19	69	59	21	39
87	33	89	43	29	71	63	39	47
91	39	80803	49	31	83	71	41	63
93	51	09	53	37	87	77	53	99
97	63	19	59	43	93	89	63	84307
99	73	31	71	53	99	93	89	13
79757	79	33	73	67	82507	83101	83701	17
69	87	49	81401	71	29	17	17	19
77	80309	63	09	73	31	37	19	47
79801	17	97	21	82003	49	77	37	49
11	29	80909	39	07	59	83203	61	77
13	41	11	57	09	61	07	73	89
17	47	17	63	13	67	19	77	91
23	63	23	81509	21	71	21	91	84401
29	69	29	17	31	91	27	83813	07
41	87	33	27	37	82601	31	33	21
43	80407	53	33	39	09	33	43	31
47	29	63	47	51	13	43	57	37
61	47	89	51	67	19	57	69	43
67	49	81001	53	73	33	67	73	49
73	71	13	59	82129	51	69	91	57
89	73	17	63	39	57	73	83903	63
79901	89	19	69	41	99	99	11	67
03	91	23	81611	53	82721	83311	21	81
07	80513	31	19	63	23	39	33	99
39	27	41	29	71	27	41	39	84503
43	37	43	37	83	29	57	69	09
67	57	47	47	89	57	83	83	21
73	67	49	49	93	59	89	87	23
79	99	71	67	82207	63	99	84011	33
87	80603	77	71	17	81	83401	17	51
97	11	83	77	19	87	07	47	59
99	21	97	89	23	93	17	53	89
80021	27	81101	81701	31	99	23	59	84629
39	29	19	03	37	82811	31	61	31
51	51	31	07	41	13	37	67	49
71	57	57	27	61	37	43	89	53
77	69	63	37	67	47	49	84121	59
80107	71	73	49	79	83	59	27	73
11	77	81	61	82301	89	71	31	91
41	81	97	69	07	91	77	37	97
47	83	99	73	39	82903	97	43	84701
49	87	81203	99	49	13	83537	63	13
53	80701	23	81817	51	39	57	79	19
67	13	33	39	61	63	61	81	31
73	37	39	47	73	81	63	91	37
77	47	81	53	87	97	79	99	51
91	49	83	69	93	83003	91	84211	61
80207	61	93	83	82421	09	97	21	87

84793	85411	86017	86533	87181	87697	88379	88997	89527
84809	27	27	39	87	87701	97	89003	33
11	29	29	61	87211	19	88411	09	61
27	39	69	73	21	21	23	17	63
57	47	77	79	23	39	27	21	67
59	51	83	87	51	43	63	41	91
69	53	86111	99	53	51	69	51	97
71	69	13	86627	57	67	71	57	99
84913	87	17	29	77	93	93	69	89603
19	85513	31	77	81	97	99	71	1
47	17	37	89	93	87803	88513	83	27
61	23	43	93	99	11	23	87	33
67	31	61	86711	87313	33	47	89101	53
77	49	71	19	17	53	89	07	57
79	71	79	29	23	69	91	13	59
91	77	83	43	37	77	88607	19	69
85009	97	97	53	59	81	09	23	71
21	85601	86201	67	83	87	43	37	81
27	07	09	71	87403	87911	51	53	89
37	19	39	83	07	17	57	89	89753
49	21	43	86813	21	31	61	89203	59
61	27	49	37	27	43	63	09	67
81	39	57	43	33	59	67	13	79
87	43	63	51	43	61	81	27	83
91	61	69	57	73	73	88721	31	97
93	67	87	61	81	77	29	37	89809
85103	69	91	69	91	91	41	61	19
09	91	93	86923	87509	88001	47	69	21
21	85703	97	27	11	03	71	73	33
33	11	86311	29	17	07	89	93	39
47	17	23	39	23	19	93	89303	49
59	33	41	51	39	37	99	17	67
93	51	51	59	41	69	88801	29	91
99	81	53	69	47	79	07	63	97
85201	93	57	81	53	93	11	71	99
13	85817	69	93	57	88117	13	81	89909
23	19	71	87011	59	29	17	87	17
29	29	81	13	83	69	19	93	23
37	31	89	37	87	77	43	99	39
43	37	99	41	89	88211	53	89413	59
47	43	86413	49	87613	23	61	17	63
59	47	23	71	23	37	67	31	77
97	53	41	83	29	41	73	43	83
85303	89	53	87103	31	59	83	49	89
13	85903	61	07	41	61	97	59	90001
31	09	67	19	43	89	88903	77	07
33	31	77	21	49	88301	19	91	11
61	33	91	33	71	21	37	89501	17
63	91	86501	49	79	27	51	13	19
69	99	09	51	83	37	69	19	23
81	86011	31	79	91	39	93	21	31

90053	90631	91237	91837	92387	92899	93487	94099	94651
59	41	43	41	99	92921	91	94109	87
67	47	49	67	92401	27	93	11	93
71	59	53	73	13	41	97	17	94709
73	77	83	91909	19	51	93503	21	23
89	79	91	21	31	57	23	51	27
90107	97	97	39	59	59	29	53	47
21	90703	91303	43	61	87	53	69	71
27	09	09	51	67	93	57	94201	77
49	31	31	57	79	93001	59	07	81
63	49	67	61	89	47	63	19	89
73	87	69	67	92503	53	81	29	93
87	93	73	69	07	59	93601	53	94811
91	90803	81	97	51	77	07	61	19
97	21	87	92003	57	83	29	73	23
99	23	93	09	67	89	37	91	37
90203	33	97	33	69	97	83	94307	41
17	41	91411	41	81	93103	93701	09	47
27	47	23	51	93	13	03	21	49
39	63	33	77	92623	31	19	27	73
47	87	53	83	27	33	39	31	89
63	90901	57	92107	39	39	61	43	94903
71	07	59	11	41	51	63	49	07
81	11	63	19	47	69	87	51	33
89	17	93	43	57	79	93809	79	49
90313	31	99	53	69	87	11	97	51
53	47	91513	73	71	99	27	99	61
59	71	29	77	81	93229	51	94421	93
71	77	41	79	83	39	71	27	99
73	89	71	89	93	41	87	33	95003
79	97	73	92203	99	51	89	39	09
97	91009	77	19	92707	53	93	41	21
90401	19	83	21	17	57	93901	47	27
03	33	91	27	23	63	11	63	63
07	79	91621	33	37	81	13	77	71
37	81	31	37	53	83	23	83	83
39	97	39	43	61	87	37	94513	87
69	99	73	51	67	93307	41	29	89
73	91121	91	69	79	19	49	31	93
81	27	91703	97	89	23	67	41	95101
99	29	11	92311	91	29	71	43	07
90511	39	33	17	92801	37	79	47	11
23	41	53	33	09	71	83	59	31
27	51	57	47	21	77	97	61	43
29	53	71	53	31	83	94007	73	53
33	59	81	57	49	93407	09	83	77
47	63	91801	63	57	19	33	97	89
83	83	07	69	61	27	49	94603	91
99	93	11	77	63	63	57	13	95203
90617	99	13	81	67	79	63	21	13
19	91229	23	83	93	81	79	49	19

95231	95783	96353	96973	97577	98251	98837	99371	99929
33	89	77	79	79	57	49	77	61
39	91	96401	89	83	69	67	91	71
57	95801	19	97	97607	97	69	97	89
61	03	31	97001	09	99	73	99401	91
67	13	43	03	13	98317	87	09	100003
73	19	51	07	49	21	93	31	
79	57	57	21	51	23	97	39	
87	69	61	39	73	27	99	69	
95311	73	69	73	87	47	98909	87	
17	81	79	81	97711	69	11	97	
27	91	87	97103	29	77	27	99523	
39	95911	93	17	71	87	29	27	
69	17	97	27	77	89	39	29	
83	23	96517	51	87	98407	47	51	
93	29	27	57	89	11	53	59	
95401	47	53	59	97813	19	63	63	
13	57	57	69	29	29	81	71	
19	59	81	71	41	43	93	77	
29	71	87	77	43	53	99	81	
41	87	89	87	47	59	99013	99607	
43	89	96601	97213	49	67	17	11	
61	96001	43	31	59	73	23	23	
67	13	61	41	61	79	41	43	
71	17	67	59	71	91	53	61	
79	43	71	83	79	98507	79	67	
83	53	97	97301	83	19	83	79	
95507	59	96703	03	97919	33	89	89	
27	79	31	27	27	43	99103	99707	
31	97	37	67	31	61	09	09	
39	96137	39	69	43	63	19	13	
49	49	49	73	61	73	31	19	
61	57	57	79	67	97	33	21	
69	67	63	81	73	98621	37	33	
81	79	69	87	87	27	39	61	
97	81	79	97	98009	39	49	67	
95603	99	87	97423	11	41	73	87	
17	96211	97	29	17	63	81	93	
21	21	99	41	41	69	91	99809	
29	23	96821	53	47	89	99223	17	
33	33	23	59	57	98711	33	23	
51	59	27	63	81	13	41	29	
95701	63	47	99	98101	17	51	33	
07	69	51	97501	23	29	57	39	
13	81	57	11	29	31	59	59	
17	89	93	23	43	37	77	71	
23	93	96907	47	79	73	89	77	
31	96323	11	49	98207	79	99317	81	
37	29	31	53	13	98801	47	99901	
47	31	53	61	21	07	49	07	
73	37	59	71	27	09	67	23	

von 1

	0	300	600	900	1200	1500	1800
1	....	7·43	....	17·53	....	19·79	....
7	....	....	....	....	17·71	11·137	13·139
11	....	....	13·47	....	7·173	....	....
13	....	....	....	11·83	....	17·89	7·7·37
17	....	....	....	7·131	....	37·41	23·79
19	....	11·29	....	....	23·53	7·7·31	17·107
23	....	17·19	7·89	13·71	....	....	....
29	....	7·47	17·37	....	....	11·139	31·59
31	....	....	....	7·7·19	....	....	....
37	....	....	7·7·13	....	....	29·53	11·167
41	....	11·31	....	....	17·73	23·67	7·263
43	....	7·7·7	....	23·41	11·113	....	19·97
47	....	....	....	....	29·43	7·13·17	....
49	7·7	....	11·59	13·73	....	....	43·43
53	....	....	....	....	7·179	....	17·109
59	....	....	....	7·137	....	....	11·13·13
61	....	19·19	....	31·31	13·97	7·223	....
67	....	....	23·29	....	7·181	....	....
71	....	7·53	11·61	....	31·41	....	....
73	....	....	....	7·139	19·67	11·11·13	....
77	7·11	13·29	....	....	....	19·83	....
79	....	....	7·97	11·89	....	....	....
83	....	....	....	....	....	....	7·269
89	....	....	13·53	23·43	....	7·227	....
91	7·13	17·23	....	....	....	37·43	31·61
97	....	....	17·41	....	....	....	7·271

	100	400	700	1000	1300	1600	1900
1	....	....	....	7·11·13	....	....	....
3	....	13·31	19·37	17·59	....	7·229	11·173
7	....	11·37	7·101	19·53	....	....	....
9	....	....	....	....	7·11·17	....	23·83
13	....	7·59	23·31	....	13·101	....	....
19	7·17	....	....	....	....	....	19·101
21	11·11	....	7·103	....	....	....	17·113
27	....	7·61	....	13·79	....	....	41·47
31	....	....	17·43	....	11·11·11	7·233	....
33	7·19	....	....	....	31·43	23·71	....
37	....	19·23	11·67	17·61	7·191	....	13·149
39	....	....	....	....	13·103	11·149	7·277
43	11·13	....	....	7·149	17·79	31·53	29·67
49	....	....	7·107	....	19·71	17·97	....

	200	500	800	1100	1400	1700	2000
3	7·29	....	11·73	....	23·61	13·131	....
9	11·19	....	....	....	....	....	7·7·41
11	....	7·73	....	11·101	17·83	29·59	....
17	7·31	11·47	19·43	....	13·109	17·101	....
21	13·17	....	....	19·59	7·7·29	....	43·47
23	....	....	....	....	....	....	7·17·17
27	....	17·31	....	7·7·23	....	11·157	....
29	....	23·23	....	....	....	7·13·19	....
33	....	13·41	7·7·17	11·103	....	....	19·107
39	....	7·7·11	....	17·67	....	37·47	....
41	....	....	29·29	7·163	11·131	....	13·157
47	13·19	....	7·11·11	31·37	....	....	23·89
51	....	19·29	23·37	....	....	17·103	7·293
53	11·23	7·79	....	....	....	....	....
57	....	....	....	13·89	31·47	7·251	11·11·17
59	7·37	13·43	....	19·61	....	....	29·71
63	....	....	....	....	7·11·19	41·43	....
69	....	....	11·79	7·167	13·113	29·61	....
71	....	....	13·67	....	....	7·11·23	19·109
77	....	....	....	11·107	7·211	....	31·67
81	....	7·83	....	....	....	13·137	....
83	....	11·53	....	7·13·13	....	....	....
87	7·41	....	....	....	....	....	....
89	17·17	19·31	7·127	29·41	....	....	....
93	....	....	19·47	....	....	11·163	7·13·23
99	13·23	....	29·31	11·109	....	7·257	....

	100	400	700	1000	1300	1600	1900
51	....	11·41	....	....	7·193	13·127	....
57	....	....	....	7·151	23·59	....	19·103
61	7·23	....	....	....	....	11·151	37·53
63	....	....	7·109	....	29·47	....	13·151
67	....	....	13·59	11·97	....	....	7·281
69	13·13	7·67	....	....	37·37	....	11·179
73	....	11·43	....	29·37	....	7·239	....
79	....	....	19·41	13·83	7·197	23·73	....
81	....	13·37	11·71	23·47	....	41·41	7·283
87	11·17	....	....	....	19·73	7·241	....
91	....	....	7·113	....	13·107	19·89	11·181
93	....	17·29	13·61	....	7·199	....	....
97	....	7·71	....	....	11·127	....	....
99	....	....	17·47	7·157	....	....	....

von 2100

	2100	2400	2700	3000	3300	3600	3900
1	11·191	7·7·7·7	37·73	....	....	13·277	47·83
7	7·7·43	29·83	....	31·97	....	....	....
11	....	....	....	....	7·11·43	23·157	....
13	....	19·127	....	23·131	....	....	7·13·43
17	29·73	....	11·13·19	7·431	31·107	....	....
19	13·163	41·59	....	....	....	7·11·47	....
23	11·193	....	7·389	....	....	....	....
29	....	7·347	....	13·233	....	19·191	....
31	....	11·13·17	....	7·433	....	....	....
37	....	....	7·17·23	....	47·71	....	31·127
41	....	....	....	....	13·257	11·331	7·563
43	....	7·349	13·211	17·179	....	....	....
47	19·113	....	41·67	11·277	....	7·521	....
49	7·307	31·79	....	....	17·197	41·89	11·359
53	....	11·223	....	43·71	7·479	13·281	59·67
59	17·127	....	31·89	7·19·23	....	....	37·107
61	....	23·107	11·251	....	....	7·523	17·233
67	11·197	....	....	....	7·13·37	19·193	....
71	13·167	7·353	17·163	37·83	....	....	11·19·19
73	41·53	....	47·59	7·439	....	....	29·137
77	7·311	....	....	17·181	11·307	....	41·97
79	....	37·67	7·397	....	31·109	13·283	23·173
83	37·59	13·191	11·11·23	....	17·199	29·127	7·569
89	11·199	19·131	....	....	....	7·17·31	....
91	7·313	47·53	....	11·281	....	....	13·307
97	13·13·13	11·227	....	19·163	43·79	....	7·571

	2200	2500	2800	3100	3400	3700	4000
1	31·71	41·61	....	7·443	19·179	....	....
3	....	....	....	29·107	41·83	7·23·23	....
7	....	23·109	7·401	13·239	....	11·337	....
9	47·47	13·193	53·53	....	7·487	....	19·211
13	....	7·359	29·97	11·283	....	47·79	....
19	7·317	11·229	....	....	13·263	....	....
21	....	....	7·13·31	....	11·311	61·61	....
27	17·131	7·19·19	11·257	53·59	23·149	....	....
31	23·97	....	19·149	31·101	47·73	7·13·41	29·139
33	7·11·29	17·149	....	13·241	....	....	37·109
37	....	43·59	....	....	7·491	37·101	11·367
39	....	....	17·167	43·73	19·181	....	7·577
43	....	....	....	7·449	11·313	19·197	13·311
49	13·173	....	7·11·37	47·67	....	23·163	....

	2300	2600	2900	3200	3500	3800	4100
3	7·7·47	19·137	....	....	31·113	....	11·373
9	....	....	....	....	11·11·29	13·293	7·587
11	....	7·373	41·71	13·13·19	....	37·103	....
17	7·331	....	....	....	....	11·347	23·179
21	11·211	....	23·127	....	7·503	....	13·317
23	23·101	43·61	37·79	11·293	13·271	....	7·19·31
27	13·179	37·71	....	7·461	....	43·89	....
29	17·137	11·239	29·101	....	....	7·547	....
33	....	....	7·419	53·61	....	....	....
39	....	7·13·29	....	41·79	....	11·349	....
41	....	19·139	17·173	7·463	....	23·167	41·101
47	....	....	7·421	17·191	....	....	11·13·29
51	....	11·241	13·227	....	53·67	....	7·593
53	13·181	7·379	....	....	11·17·19	....	....
57	....	....	....	....	....	7·19·29	....
59	7·337	....	11·269	....	....	17·227	....
63	17·139	....	....	13·251	7·509	....	23·181
69	23·103	17·157	....	7·467	43·83	53·73	11·379
71	....	....	....	....	....	7·7·79	43·97
77	....	....	13·229	29·113	7·7·73	....	....
81	....	7·383	11·271	17·193	....	....	37·113
83	....	....	19·157	7·7·67	....	11·353	47·89
87	7·11·31	....	29·103	19·173	17·211	13·13·23	53·79
89	....	....	7·7·61	11·13·23	37·97	....	59·71
93	....	....	41·73	37·89	....	17·229	7·599
99	....	....	....	....	59·61	7·557	13·17·19

	2200	2500	2800	3100	3400	3700	4000
51	....	....	....	23·137	7·17·29	11·11·31	....
57	37·61	....	....	7·11·41	....	13·17·17	....
61	7·17·19	13·197	....	29·109	....	....	31·131
63	31·73	11·233	7·409	....	....	53·71	17·239
67	....	17·151	47·61	....	....	....	7·7·83
69	....	7·367	19·151	....	....	....	13·313
73	....	31·83	13·13·17	19·167	23·151	7·7·7·11	....
79	43·53	....	....	11·17·17	7·7·71	....	....
81	....	29·89	43·67	....	59·59	19·199	7·11·53
87	....	13·199	....	....	11·317	7·541	61·67
91	29·79	....	7·7·59	....	....	17·223	....
93	....	....	11·263	31·103	7·499	....	....
97	....	7·7·53	....	23·139	13·269	....	17·241
99	11·11·19	23·113	13·223	7·457	....	29·131	....

von 4200

	4200	4500	4800	5100	5400	5700	6000
1	....	7·643	....	....	11·491	....	17·353
7	7·601	....	11·19·23	....	....	13·439	....
11	....	13·347	17·283	19·269	7·773	....	....
13	11·383	....	....	....	....	29·197	7·859
17	...	....	....	7·17·43	....	....	11·547
19	....	....	61· 79	....	....	7·19·43	13·463
23	41·103	....	7·13·53	47·109	11·17·29	59· 97	19·317
29	....	7·647	11·439	23·223	61 · 89	17·337	....
31	....	23·197	....	7·733	....	11·521	37·163
37	19·223	13·349	7·691	11·467	....	....	....
41	....	19·239	47·103	53· 97	....	....	7·863
43	....	7·11·59	29·167	37·139	....	....	....
47	31·137	....	37·131	....	13·419	7·821	....
49	7·607	....	13·373	19·271	....	....	23·263
53	....	29·157	23·211	....	7·19·41	11·523	....
59	....	47·97	43·113	7·11·67	53·103	13·443	73·83
61	....	....	....	13·397	43·127	7·823	11·19·29
67	17·251	....	31·157	....	7·11·71	73· 79	....
71	....	7·653	....	....	....	29·199	13·467
73	....	17·269	11·443	7·739	13·421	23·251	....
77	7·13·47	23·199	....	31·167	....	53·109	59·103
79	11·389	19·241	7·17·41	....	....	....	....
83	....	....	19·257	71·73	....	....	7·11·19
89	....	13·353	....	....	11·499	7·827	....
91	7·613	....	67· 73	29·179	17·17·19	....	....
97	....	....	59·83	....	23·239	11·17·31	7·13·67

	4300	4600	4900	5200	5500	5800	6100
1	11·17·23	43·107	13·13·29	7·743	....	....	....
3	13·331	....	....	11·11·43	....	7·829	17·359
7	59· 73	17·271	7·701	41·127	....	....	31·197
9	31·139	11·419	....	....	7·787	37·157	41·149
13	19·227	7·659	17·17·17	13·401	37·149	....	....
19	7·617	31·149	....	17·307	....	11·23·23	29·211
21	29·149	....	7·19·37	23·227	....	....	....
27	....	7·661	13·379	....	....	....	11·557
31	61· 71	11·421	....	....	....	7·7·7·17	....
33	7·619	41·113	....	....	11·503	19·307	....
37	....	....	....	....	7·7·113	13·449	17·19·19
39	....	....	11·449	13·13·31	29·191	....	7·877
43	43·101	....	....	7·7·107	23·241	....	....
49	....	....	7·7·101	29·181	31·179	....	11·13·43

	4400	4700	5000	5300	5600	5900	6200
3	7·17·37	....	....	....	13·431	....	....
9	....	17·277	....	....	71·79	19·311	7·887
11	11·401	7·673	....	47·113	31·181	23·257	....
17	7·631	53·89	29·173	13·409	41·137	61·97	....
21	....	....	....	17·313	7·11·73	31·191	....
23	....	....	....	....	....	....	7·7·127
27	19·233	29·163	11·457	7·761	17·331	....	13·479
29	43·103	....	47·107	73·73	13·433	7.7.11.11	....
33	11·13·31	....	7·719	....	43·131	17·349	23·271
39	23·193	7·677	....	19·281	....	....	17·367
41	....	11·431	71·71	7·7·109	....	13·457	79·79
47	....	47·101	7·7·103	....	....	19·313	....
51	....	....	....	....	....	11·541	7·19·47
53	61·73	7·7·97	31·163	53·101	....	....	13·13·37
57	....	67·71	13·389	11·487	....	7·23·37	....
59	7·7·7·13	....	....	23·233	....	59·101	11·569
63	....	11·433	61·83	31·173	7·809	67·89	....
69	41·109	19·251	37·137	7·13·59	....	47·127	....
71	17·263	13·367	11·461	41·131	53·107	7·853	....
77	11·11·37	17·281	....	19·283	7·811	43·139	....
81	....	7·683	....	....	13·19·23	....	11·571
83	....	....	13·17·23	7·769	....	31·193	61·103
87	7·641	....	....	....	11·11·47	....	....
89	67·67	....	7·727	17·317	....	53·113	19·331
93	....	....	11·463	....	....	13·461	7·29·31
99	11·409	....	....	....	41·139	7·857	....

	4300	4600	4900	5200	5500	5800	6100
51	19·229	....	....	59·89	7·13·61	....	....
57	....	....	....	7·751	....	....	47·131
61	7·7·89	59·79	11·11·41	....	67·83	....	61·101
63	....	....	7·709	19·277	....	11·13·41	....
67	11·397	13·359	....	23·229	19·293	....	7·881
69	17·257	7·23·29	....	11·479	....	....	31·199
73	....	....	....	....	....	7·839	....
79	29·151	....	13·383	....	7·797	....	37·167
81	13·337	31·151	17·293	....	....	....	7·883
87	41·107	43·109	....	17·311	37·151	7·29·29	23·269
91	....	....	7·23·31	11·13·37	....	43·137	41·151
93	23·191	13·19·19	....	67·69	7·17·47	71·83	11·563
97	....	7·11·61	19·263	....	29·193	....	....
99	53·83	37·127	....	7·757	11·509	17·347	....

von 6300

	6300	6600	6900	7200	7500	7800	8100
1	....	7·23·41	67·103	19·379	13·577	29·269	....
7	7·17·53	....	....	....	....	37·211	11·11·67
11	....	11·601	....	....	7·29·37	73·107	....
13	59·107	17·389	31·223	....	11·683	13·601	7·19·61
17	....	13·509	....	7·1031	....	....	....
19	71·89	....	11·17·37	....	73·103	7·1117	23·353
23	....	37·179	7·23·43	31·223	....	....	....
29	....	7·947	13·13·41	....	....	....	11·739
31	13·487	19·349	29·239	7·1033	17·443	41·191	47·173
37	....	....	7·991	....	....	17·461	79·103
41	17·373	29·229	11·631	13·557	....	....	7·1163
43	....	7·13·73	53·131	....	19·397	11·23·31	17·479
47	11·577	17·17·23	....	....	....	7·19·59	....
49	7·907	61·109	....	11·659	....	47·167	29·281
53	....	....	17·409	....	7·13·83	....	31·263
59	....	....	....	7·17·61	....	29·271	41·199
61	....	....	....	53·137	....	7·1123	....
67	....	59·113	....	13·13·43	7·23·47	....	....
71	23·277	7·953	....	11·661	67·113	17·463	....
73	....	....	19·367	7·1039	....	....	11·743
77	7·911	11·607	....	19·383	....	....	13·17·37
79	....	....	7·977	29·251	11·13·53	....	....
83	13·491	41·163	....	....	....	....	7·7·167
89	....	....	29·241	37·197	....	7·7·7·23	19·431
91	7·11·83	....	....	23·317	....	13·607	....
97	....	37·181	....	....	71·107	53·149	7·1171

	6400	6700	7000	7300	7600	7900	8200
1	37·173	....	....	7·7·149	11·691	....	59·139
3	19·337	....	47·149	67·109	....	7·11·29	13·631
7	43·149	19·353	7·7.11.13	....	....	....	29·283
9	13·17·29	....	43·163	....	7·1087	11·719	....
13	11·11·53	7·7·137	....	71·103	23·331	41·193	43·191
19	7·7·131	....	....	13·563	19·401	....	....
21	....	11·13·47	7·17·59	....	....	89·89	....
27	....	7·31·31	....	17·431	29·263	....	19·433
31	59·109	53·127	79·89	....	13·587	7·11·103	....
33	7·919	....	13·541	....	17·449	....	....
37	41·157	....	31·227	11·23·29	7·1091	....	....
39	47·137	23·293	....	41·179	....	17·467	7·11·107
43	17·379	11·613	....	7·1049	....	13·13·47	....
49	....	17·397	7·19·53	....	....	....	73·113

	6500	6800	7100	7400	7700	8000	8300
3	7·929	....	....	11·673	....	53·151	19·19·23
9	23·283	11·619	....	31·239	13·593	....	7·1187
11	17·383	7·7·139	13·547	....	11·701	....	....
17	7·7·7·19	17·401	11·647	....	....	....	....
21	....	19·359	....	41·181	7·1103	13·617	53·157
23	11·593	....	17·419	13·571	....	71·113	7·29·41
27	61·107	....	....	7·1061	....	23·349	11·757
29	....	....	....	17·19·23	59·131	7·31·37	....
33	47·139	....	7·1019	....	11·19·37	29·277	13·641
39	13·503	7·977	11·11·59	43·173	71·109	....	31·269
41	31·211	....	37·143	7·1063	....	11·17·43	19·439
47	....	41·167	7·1021	11·677	61·127	13·619	17·491
51	....	13·17·31	....	....	23·337	83·97	7·1193
53	....	7·11·89	23·311	29·257	....	....	....
57	79·83	....	17·421	....	....	7·1151	61·137
59	7·937	19·19·19	....	....	....	....	13·643
63	....	....	13·19·29	17·439	7·1109	11·733	....
69	....	....	67·107	7·11·97	17·457	....	....
71	....	....	71·101	31·241	19·409	7·1153	11·761
77	....	13·23·23	....	....	7·11·101	41·97	....
81	....	7·983	43·167	....	31·251	....	17·17·29
83	29·227	....	11·653	7·1069	43·181	59·137	83·101
87	7·941	71·97	....	....	13·599	....	....
89	11·599	83·83	7·13·79	....	....	....	....
93	19·347	61·113	....	59·127	....	....	7·11·109
99	....	....	23·313	....	11·709	7·13·89	37·227

	6400	6700	7000	7300	7600	7900	8200
51	....	43·157	11·641	....	7·1093	....	37·223
57	11·587	29·233	....	7·1051	13·19·31	73·109	23·359
61	7·13·71	....	23·307	17·433	47·163	19·419	11·751
63	23·281	....	7·1009	37·199	79·97	....	....
67	29·223	67·101	37·191	53·139	11·17·41	31·257	7·1181
69	....	7·967	....	....	....	13·613	....
73	....	13·521	11·643	73·101	....	7·17·67	....
79	11·19·31	....	....	47·157	7·1097	79·101	17·487
81	....	....	73·97	11·11·61	....	23·347	7.7.13.13
87	13·499	11·617	19·373	83·89	....	7·7·163	....
91	....	....	7·1013	19·389	....	61·131	....
93	43·151	....	41·173	....	7·7·157	....	....
97	73·89	7·971	47·151	13·569	43·179	11·727	....
99	67·97	13·523	31·229	7·7·151	....	19·421	43·193

von 8400

	8400	8700	9000	9300	9600	9900	10200
1	31·271	7·11·113	....	71·131	....	....	101·101
7	7·1201	....	....	41·217	13·739	....	59·173
11	13·647	31·281	....	....	7·1373	11·17·53	....
13	47·179	....	....	67·139	....	23·431	7·1459
17	19·443	23·379	71·127	7.11.11.11	59·163	47·211	17·601
19	....	....	29·311	....	....	7·13·109	11·929
23	....	11·13·61	7·1289	....	....	....	....
29	.. .	7·29·43	....	19·491	....	....	53·193
31	....	....	11·821	7·31·43	....	....	13·787
37	11·13·59	....	7·1291	....	23·419	19·523	29·353
41	23·367	....	....	....	31·311	....	7.7 11.19
43	....	7·1249	....	....	....	61·163	....
47	....	....	83·109	13·719	11·877	7·7·7·29	....
49	7·17·71	13·673	....	....	....	....	37·277
53	79·107	....	11·823	47·199	7·7·197	37·269	....
59	11·769	19·461	....	7·7·191	13·743	23·433	....
61	....	....	13·17·41	11·23·37	....	7·1423	31·331
67	....	11·797	....	17·19·29	7·1381	....	....
71	43·197	7·7·179	47·193	....	19·509	13·13·59	....
73	37·229	31·283	43·211	7·13·103	17·569	....	....
77	7·7·173	67·131	29·313	....	....	11·907	43·239
79	61·139	....	7·1297	83·113	....	17·587	19·541
83	17·499	....	31·293	11·853	23·421	67·149	7·13·113
89	13·653	11·17·47	61·149	41·229	....	7·1427	....
91	7·1213	59·149	....	....	11·881	97·103	41·251
97	29·293	19·463	11·827	....	...	13·769	7·1471

	8500	8800	9100	9400	9700	10000	10300
1	....	13·677	19·479	7·17·79	89·109	73·137	....
3	11·773	....	....	....	31·313	7·1429	....
7	47·181	.. .	7·1301	23·409	17·571	....	11·937
9	67·127	23·383	....	97· 97	7·19·73	....	13·13·61
13	....	7·1259	13·701	....	11·883	17·19·31	....
19	7·1217	....	11·829	....	....	43·233	17·607
21	....	....	7·1303	....	....	11·911	....
27	....	7·13·97	....	11·857	71·137	37·271	23·449
31	19·449	....	23·397	....	37·263	7·1433	....
33	7·23·53	11·11·73	....	....	....	79·127	....
37	....	....	....	....	7·13·107	....	....
39	....	....	13·19·37	....	....	....	7·7·211
43	....	37·239	41·233	7·19·71	....	11·11·83	....
49	83·103	....	7·1307	11·859	....	13·773	79·131

	8600	8900	9200	9500	9800	10100	10400
3	7·1229	29·307	....	13·17·43	....	....	101·103
9	....	59·151	....	37·257	17·577	11·919	7·1487
11	79·109	7·19·67	61·151	....	....	....	29·359
17	7·1231	37·241	13·709	31·307	....	67·151	11·947
21	37·233	11·811	....	....	7·23·61	29·349	17·613
23	....	....	23·401	89·107	11·19·47	53·191	7·1489
27	....	79·113	....	7·1361	31·317	13·19·41	....
29	....	....	11·839	13·733	....	7·1447	....
33	89·97	....	7·1319	....	....	....	....
39	53·163	7·1277	....	....	....	....	11·13·73
41	....	....	....	7·29·47	13·757	....	53·197
47	....	23·389	7·1321	....	43·219	73·139	31·337
51	41·211	....	11·29·29	....	....	....	7·1493
53	17·509	7·1279	19·487	41·233	59·167	11·13·71	....
57	11·787	13·13·53	....	19·503	....	7·1451	....
59	7·1237	17·17·31	47·197	11·11·79	....	....	....
63	....	....	59·157	73·131	7·1409	....	....
69	....	....	13·23·31	7·1367	71·139	....	19·19·29
71	13·23·29	....	73·127	17·563	....	7·1453	37·283
77	....	47·191	....	61·157	7·17·83	....	....
81	....	7·1283	....	11·13·67	41·241	....	47·223
83	19·457	13·691	....	7·37·37	....	17·599	11·953
87	7·17·73	11·19·43	37·251	....	....	61·167	....
89	....	89·101	7·1327	43·223	11·29·31	23·443	17·617
93	....	17·23·23	....	53·181	13·761	....	7·1499
99	....	....	17·547	29·331	19·521	7·31·47	....

	8500	8800	9100	9400	9700	10000	10300
51	17·503	53·167	....	13·727	7·7·199	19·23·23	11·941
57	43·199	17·521	....	7·7·193	11·887	89·113	....
61	7·19·67	....	....	....	43·227	....	13·797
63	....	....	7.7.11.17	....	13·751	29·347	43·241
67	13·659	....	89·103	....	....	....	7·1481
69	11·19·41	7·7·181	53·173	17·557	....	....	....
73	....	19·467	....	....	29·337	7·1439	11·23·41
79	2 3·273	13·683	67·137	....	7·11·127	....	97·107
81	....	83·107	....	19·499	....	17·593	7·1483
87	31·277	....	....	53·179	....	7·11·131	13·17·47
91	11·11·71	17·523	7·13·101	....	....	....	....
93	13·661	....	29·317	11·863	7·1399	....	19·547
97	....	7·31·41	17·541	....	97·101	23·439	37·281
99	....	11·809	....	7·23·59	41·239	....	....

bis 10500

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64
3	9	27	81	243	729
4	16	64	256	1024	4096
5	25	125	625	3125	15625
6	36	216	1296	7776	46656
7	49	343	2401	16807	117649
8	64	512	4096	32768	262144
9	81	729	6561	59049	531441
10	100	1000	10000	100000	1000000
11	121	1331	14641	161051	1771561
12	144	1728	20736	248832	2985984
13	169	2197	28561	371293	4826809
14	196	2744	38416	537824	7529536
15	225	3375	50625	759375	11390625
16	256	4096	65536	1048576	16777216
17	289	4913	83521	1419857	24137569
18	324	5832	104976	1889568	34012224
19	361	6859	130321	2476099	47045881
20	400	8000	160000	3200000	64000000
21	441	9261	194481	4084101	85766121
22	484	10648	234256	5153632	113379904
23	529	12167	279841	6436343	148035889
24	576	13824	331776	7962624	191102976
25	625	15625	390625	9765625	244140625
26	676	17576	456976	11881376	308915776
27	729	19683	531441	14348907	387420489
28	784	21952	614656	17210368	481890304
29	841	24389	707281	20511149	594823321
30	900	27000	810000	24300000	729000000
31	961	29791	923521	28629151	887503681
32	1024	32768	1048576	33554432	1073741824
33	1089	35937	1185921	39135393	1291467969
34	1156	39304	1336336	45435424	1544804416
35	1225	42875	1500625	52521875	1838265625
36	1296	46656	1679616	60466176	2176782336
37	1369	50653	1874161	69343957	2565726409
38	1444	54872	2085136	79235168	3010936384
39	1521	59319	2313441	90224199	3518743761
40	1600	64000	2560000	102400000	4096000000
41	1681	68921	2825761	115856201	4750104241
42	1764	74088	3111696	130691232	5489031744
43	1849	79507	3418801	147008443	6321363049
44	1936	85184	3748096	164916224	7256313856
45	2025	91125	4100625	184528125	8303765625
46	2116	97336	4477456	205962976	9474296896
47	2209	103823	4879681	229345007	10779215329
48	2304	110592	5308416	254803968	12230590464
49	2401	117649	5764801	282475249	13841287201
50	2500	125000	6250000	312500000	15625000000

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
51	2601	132651	6765201	345025251	17596287701
52	2704	140608	7311616	380204032	19770609664
53	2809	148877	7890481	418195493	22164361129
54	2916	157464	8503056	459165024	24794911296
55	3025	166375	9150625	503284375	27680640625
56	3136	175616	9834496	550731776	30840979456
57	3249	185193	10556001	601692057	34296447249
58	3364	195112	11316496	656356768	38068692544
59	3481	205379	12117361	714924299	42180533641
60	3600	216000	12960000	777600000	46656000000
61	3721	226981	13845841	844596301	51518374361
62	3844	238328	14776336	916132832	56800235584
63	3969	250047	15752961	992436543	62523502209
64	4096	262144	16777216	1073741824	68719476736
65	4225	274625	17850625	1160290625	75418890625
66	4356	287496	18974736	1252332576	82653950016
67	4489	300763	20151121	1350125107	90458382169
68	4624	314432	21381376	1453933568	98867482624
69	4761	328509	22667121	1564031349	107918163081
70	4900	343000	24010000	1680700000	117649000000
71	5041	357911	25411681	1804229351	128100283921
72	5184	373248	26873856	1934917632	139314069504
73	5329	389017	28398241	2073071593	151334226289
74	5476	405224	29986576	2219006624	164206490176
75	5625	421875	31640625	2373046875	177978515625
76	5776	438976	33362176	2535525376	192699928576
77	5929	456533	35153041	2706784157	208422380089
78	6084	474552	37015056	2887174368	225199600704
79	6241	493039	38950081	3077056399	243087455521
80	6400	512000	40960000	3276800000	262144000000
81	6561	531441	43046721	3486784401	282429536481
82	6724	551368	45212176	3707398432	304006671424
83	6889	571787	47458321	3939040643	326940373369
84	7056	592704	49787136	4182119424	351298031616
85	7225	614125	52200625	4437053125	377149515625
86	7396	636056	54700816	4704270176	404567235136
87	7569	658503	57289761	4984209207	433626201009
88	7744	681472	59969536	5277319168	464404086784
89	7921	704969	62742241	5584059449	496981290961
90	8100	729000	65610000	5904900000	531441000000
91	8281	753571	68574961	6240321451	567869252041
92	8464	778688	71639296	6590815232	606355001344
93	8649	804357	74805201	6956883693	646990183449
94	8836	830584	78074896	7339040224	689869781056
95	9025	857375	81450625	7737809375	735091890625
96	9216	884736	84934656	8153726976	782757789696
97	9409	912673	88529281	8587340257	832972004929
98	9604	941192	92236816	9039207968	885842380864
99	9801	970299	96059601	9509900499	941480149401
100	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000

	0	100	200	300	400
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	16 836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190961
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601
50	2500	22500	62500	122500	202500

	500	600	700	800	900
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	720801	900601
50	302500	422500	562500	722500	902500

	0	100	200	300	400
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23409	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	68121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296.
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	83521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001
100	10000	40000	90000	160000	250000

	500	600	700	800	900
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434281	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	321489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327184	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	980025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001
100	360000	490000	640000	810000	1000000

	0	100	200	300	400
1	1	1030301	8120601	67270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964808
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29791000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13824	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11697083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000

	500	600	700	800	900
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	379503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796597983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825293672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000

	0	100	200	300	400
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102503232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53357376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	5735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776471	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499
100	1000000	8000000	27000000	64000000	125000000

	500	600	700	800	900
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	929714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999
100	216000000	343000000	512000000	729000000	1000000000

	0	100	200	300	400
1	1, 0000000	10, 0498756	14, 1774469	17, 3493516	20, 0249844
2	1, 4142136	0995049	2126704	3781472	0499376
3	1, 7320508	1488915	2478069	4068952	0748599
4	2, 0000000	1980390	2828569	4355958	0997512
5	2360680	2469507	3178210	4642492	1246118
6	4494897	2956301	3527000	4928557	1494417
7	6457513	3440804	3874946	5214155	1742410
8	2, 8284271	3923048	4222051	5499288	1990099
9	3, 0000000	4403065	4568323	5783958	2237484
10	1622777	10, 4880885	14, 4913767	17, 6068168	20, 2484567
11	3166248	5356537	5258390	6351921	2731349
12	4641016	5830052	5602197	6635217	2977831
13	6055513	6301458	5945195	6918060	3224014
14	7416574	6770782	6287387	7200452	3469899
15	3, 8729833	7238053	6628783	7482393	3715488
16	4, 0000000	7703296	6969365	7763888	3960780
17	1231056	8166538	7309199	8044938	4205779
18	2426407	8627805	7648231	8325545	4450483
19	3588989	9087121	7986485	8605711	4694895
20	4721359	10, 9544511	14. 8323969	17, 8885438	20 4939015
21	5825757	11, 0000000	8660687	9164729	5182845
22	6904158	0453610	8996644	9443584	5426386
23	7958315	0905365	9331845	17, 9722008	5669638
24	4, 8989795	1355287	14, 9666295	18, 0000000	5912603
25	5, 0000000	1803399	15, 0000000	0277564	6155281
26	0990195	2249722	15, 0332964	0554701	6397677
27	1961524	2694276	0665192	0831413	6639784
28	2915026	3137085	0996689	1107703	6881609
29	3851648	3578167	1327459	1383571	7123152
30	4772256	11, 4017542	15. 1657509	18, 1659021	20, 7364413
31	5677644	4455231	1986841	1934054	7605395
32	6568543	4891253	2315462	2208671	7846097
33	7445626	5325626	2643375	2482876	8086520
34	8309519	5758369	2970585	2756669	8326667
35	5, 9160798	6189500	3297097	3030055	8566539
36	6, 0000000	6619038	3622915	3303029	8806130
37	0827625	7046999	3948043	3575598	9045450
38	1644140	7473401	4272486	3847763	9284495
39	2449980	7898261	4596248	4119526	9523269
40	3245553	8321596	15, 4919333	18, 4390889	20, 9761770
41	4031242	8743421	5241747	4661853	21, 0000000
42	4807407	9163753	5563492	4932420	0237960
43	5574385	11, 9582607	5884573	5202592	0475652
44	6332496	12, 0000000	6204993	5472370	0713075
45	7082039	0415945	6524759	5741756	0950231
46	7823300	0830460	6843871	6010752	1187121
47	8556547	1243556	7162337	6279360	1423745
48	6, 9282032	1655251	7480157	6547584	1660105
59	7, 0000000	2065556	7797339	6815416	1896201
50	7, 0710678	12, 2474487	15, 8113883	18, 7082869	21, 2132034

	500	600	700	800	900
1	22,3830292	24,5153013	26,4764046	28,3019434	30,0166620
2	4053565	5356883	4952825	3196045	0333145
3	4276615	5560583	5141471	3372546	0499584
4	4499443	5764114	5329983	3548937	0665927
5	4722051	5967477	5518361	3725219	0832179
6	4944437	6170672	5706605	3901391	0998339
7	5166605	6373699	5894716	4077454	1164407
8	5388553	6576560	6082694	4253408	1330383
9	5610283	6779253	6270539	4429253	1496268
10	22,5831795	24,6981781	26,6458252	28,4604989	30,1662062
11	6053091	7184140	6645832	4780617	1827765
12	6274170	7386337	6833281	4956137	1993377
13	6495033	7588368	7020598	5131548	2158898
14	6715681	7790234	7207784	5306850	2324329
15	6936114	7991935	7394839	5482048	2489669
16	7156334	8193473	7581763	5657137	2654919
17	7376340	8394847	7768556	5832118	2820078
18	7596136	8596058	7955220	6006993	2985148
19	7815715	8797106	8141753	6181760	3150128
20	22,8035085	24,8997992	26,8328157	28,6356421	30,3315018
21	8254244	9198716	8514431	6530977	3479818
22	8473193	9399278	8700577	6705423	3644529
23	8691932	9599679	8886593	6879766	3809150
24	8910463	24,9799919	9072481	7054002	3973683
25	9128785	25,0000000	9258240	7228131	4138126
26	9346898	0199920	9443871	7402157	4302481
27	9564805	0399680	9629375	7576077	4466748
28	22,9782505	0599281	26,9814751	7749891	4630924
29	23,0000000	0798724	27,0000000	7923601	4795013
30	0217288	25,0998007	0185121	28,8097206	30,4959013
31	0434372	1197133	0370117	8270706	5122926
32	0651252	1396102	0554985	8444102	5286750
33	0867928	1594912	0739727	8617393	5450487
34	1084400	1793566	0924344	8790581	5614136
35	1300670	1992063	1108832	8963666	5777697
36	1516738	2190404	1293199	9136646	5941171
37	1732604	2388587	1477439	9309523	6104557
38	1948270	2586619	1661554	9482296	6267857
39	2163735	2784493	1845544	9654967	6431069
40	23,2379000	25,2982213	27,2029410	28,9827535	30,6594194
41	2594067	3179778	2213151	29,0000000	6757233
42	2808935	3377189	2396769	0172362	6920187
43	3023604	3574446	2580263	0344623	7083051
44	3238076	3771551	2763634	0516781	7245829
45	3452350	3968502	2946883	0688837	7408523
46	3666429	4165300	3130006	0860791	7571130
47	3880311	4361946	3313007	1032644	7733651
48	4093998	4558441	3495887	1204395	7896086
49	4307490	4754784	3678645	1376045	8058436
50	23,4520788	25,4950975	27,3861277	29,1547595	30,8220700

	0	100	200	300	400
51	7, 1414284	12, 2882057	15, 8429795	18, 7349939	21, 2367606
52	2111026	3288280	8745079	7616630	2602916
53	2801099	3693169	9059737	7882942	2837966
54	3484692	4096737	9373775	8148876	3072757
55	4161985	4498996	15, 9687194	8414436	3307290
56	4833148	4899960	16, 0000000	8679622	3541565
57	5498344	5299641	0312195	8944436	3775581
58	6157731	5698051	0623784	9208879	4009345
59	6811458	6095202	0934769	9472953	4242853
60	7459667	12, 6491106	1245155	18. 9736659	21, 4476106
61	8102497	6885775	1554944	19, 0000000	4709105
62	8740078	7279220	1864140	0262976	4941852
63	7, 9372539	7671453	2172747	0525589	5174348
64	8, 0000000	8062485	2480768	0787840	5406592
65	0622577	8452326	16. 2788206	1049734	5638587
66	1240384	8840987	3095064	1311265	5870331
67	1853527	9228480	3401346	1572441	6101828
68	2462112	12, 9614814	3707055	1833261	6333076
69	3066239	13, 0000000	4012195	2093727	6564078
70	3666003	0384048	4316767	19, 2353841	21, 6794834
71	4261497	0766968	4620776	2613603	7025344
72	4852814	1148770	4924225	2873015	7255609
73	5440037	1529464	5227116	3132079	7485631
74	6023253	1909059	5529453	3390796	7715410
75	6602540	2287565	16, 5831239	3649167	7944947
76.	7177978	2664992	6132477	3907194	8174242
77	7749644	3041347	6433170	4164878	8403297
78	8317609	3416641	6733320	4422221	8632111
79	8881944	3790882	7032931	4679224	8860686
80	8, 9442719	13, 4164078	16. 7332005	19. 4935887	21, 9089022
81	9, 0000000	4536240	7630546	5192213	9317122
82	0553851	4907376	7928553	5448203	9544984
83	1104336	5277492	8226039	5703858	21, 9772609
84	1651514	5646599	8522995	5959180	22, 0000000
85	2195445	6014705	8819430	6214169	0227155
86	2736185	6381817	9115345	6468827	0454077
87	3273791	6747943	9410743	6723156	0680769
88	3808315	7113092	16, 9705628	6977156	0907220
89	4339811	7477271	17, 0000000	7230829	1133444
90	4868330	7840487	0293864	19, 7484176	1359436
91	5393919	8202749	0587221	7737199	1585198
92	5916630	8564064	0880075	7989899	1810730
93	6436507	8924440	1172427	8242276	2036032
94	6953597	9283883	1464283	8494332	2261107
95	7467943	13, 9642400	1755640	8746069	2485955
96	7979589	14, 0000000	2046505	8997487	2710575
97	8488577	0356688	2336879	9248588	2934968
98	8994949	0712473	2626765	9499373	3159138
99	9, 9498744	1067359	2916164	19, 9749844	3383079
100	10, 0000000	14, 1421356	17. 3205081	20, 0000000	22, 3606796

	500	600	700	800	900
51	23,4733892	25,5147014	27,4043792	29,1719045	30,8382879
52	4946802	5342906	4226184	1890390	8544972
53	5159520	5538646	4408455	2061637	8706981
54	5372046	5734237	4590604	2232784	8868904
55	5584379	5929678	4772633	2403830	9030742
56	5796522	6124969	4954541	2574777	9192497
57	6008474	6320112	5136330	2745623	9354166
58	6220236	6515107	5317998	2916370	9515751
59	6431803	6709953	5499546	3087018	9677251
60	23,7643191	25,6904651	27,5680975	29 3257566	30,9838668
61	6854385	7099203	5862284	3428015	31,0000000
62	7065392	7293606	6043475	3598365	0161248
63	7276210	7487864	6224547	3768616	0222413
64	7486841	7681974	6405499	3938769	0483494
65	7697286	7875939	6586334	4108823	0644492
66	7907545	8069756	6767050	4278779	0805405
67	8117618	8263431	6947648	4448637	0966236
68	8327505	8456959	7128129	4618397	1126983
69	8537209	8650343	7308492	4788059	1287648
70	23 8746727	25, 8843582	27, 7488739	29, 4957624	31, 1448230
71	8956063	9036677	7668867	5127091	1608729
72	9165215	9229628	7848879	5296461	1769145
73	9374184	9422435	8028775	5465734	1929479
74	9582971	9615099	8208555	5634910	2089731
75	23, 9791576	25, 9807621	8388218	5803989	2249899
76	24, 0000000	26, 0000000	8567765	5972972	2409987
77	0208241	0192236	8747199	6141858	2569992
78	0416305	0384331	8926514	6310648	2729915
79	0624188	0576284	9105714	6479341	2889757
80	0831891	0768096	9284801	29 6647939	31, 3049517
81	1039416	0959767	9463770	6816442	3209179
82	1246761	1151297	9642629	6984848	3368792
83	1453929	1342687	27, 9821371	7153159	3528308
84	1660919	1533936	28, 0000000	7321375	3687743
85	24, 1867732	26, 1725047	0178514	7489495	3847097
86	2074368	1916017	0356915	7657521	4006369
87	2280829	2106848	0535203	7825452	4165561
88	2487113	2297541	0713377	7993288	4324673
89	2693222	2488095	0891438	8161030	4483704
90	2899156	2678511	1069386	29, 8328678	31, 4642654
91	3104916	2868789	1247222	8496231	4801525
92	3310500	3058929	1424945	8663690	4960315
93	3515913	3248931	1602556	8831056	5119025
94	3721152	3438797	1780056	8998328	5277655
95	24, 3926218	26, 3628526	28, 1957443	9165506	5436206
96	4131112	3818119	2134719	9332591	5594677
97	4335834	4007575	2311884	9499582	5753068
98	4540385	4196896	2488938	9666481	5911380
99	4744765	4386081	2665880	29, 9833287	6069611
100	24, 4948974	26, 4575131	28, 2842712	30, 0000000	31, 6227766

	0	100	200	300	400
1	1,0000000	4,6570095	5,8577661	6,7017594	7,3741979
2	2599205	6723288	674643	091728	803227
3	4422496	6875481	771306	165699	864373
4	5874011	4,7026694	867653	239508	925416
5	7099759	176940	5,8963688	313155	7,3986362
6	8171206	26234	5,9059405	386641	7,4047206
7	1,9129312	474594	154817	459972	107950
8	2,0000000	622032	249921	533128	168595
9	0800837	768562	344721	606143	229141
10	1544347	4,7914199	439218	678994	289588
11	2239801	4,8058956	533418	751689	349937
12	2894286	202845	627320	824228	410189
13	3513347	345881	720926	896613	470342
14	4101422	488075	814240	6,7968848	530399
15	4662121	629411	5,9907264	6,8040921	590359
16	5198421	769989	6,0000000	112846	650223
17	5712816	4,8909730	092449	184620	709992
18	6207414	4,9048681	184616	256242	769662
19	6684016	186847	276501	327714	829241
20	2,7144177	324242	368106	399037	888723
21	7589243	460874	459436	470212	7,4948112
22	8020393	596756	550489	541240	7,5007406
23	8438670	731898	641270	612120	066607
24	8844991	4,9866309	731780	682855	125715
25	9240177	5,0000000	822019	753444	184729
26	2,9624960	132980	6,0911994	823887	243652
27	3,0000000	265257	6,1001704	894186	302482
28	0365889	396842	091148	6,8964344	361220
29	0723168	527744	180332	6,9034360	419867
30	1072325	657970	269256	104232	478423
31	1413806	787531	357924	173964	536889
32	1748021	5,0916434	446336	243555	595260
33	2075343	5,1044687	534494	313007	653548
34	2396118	172299	622401	382321	711742
35	2710663	299275	710058	451495	769848
36	3019272	425632	797466	520533	827865
37	3322218	551368	884628	589434	885793
38	3619754	676492	6,1971543	658198	7,5943633
39	3912114	801013	6,2058218	726827	7,6001385
40	3,4199519	5,1924941	144650	795321	059050
41	4482172	5,2048279	230843	863680	116626
42	4760266	171034	316796	6,9931906	174116
43	5033981	293215	402515	7,0000000	231519
44	5303483	414828	487999	067961	288836
45	5568933	535878	573247	135791	346067
46	5830479	656374	658265	203489	403212
47	6088261	776321	743053	271058	460272
48	6342411	5,2895725	827613	338496	517247
49	6593057	5,3014592	911946	405800	574137
50	3,6840314	5,3132928	6,2996052	7,0472980	7,663[illegible]

	500	600	700	800	900
1	7,9422931	8,4390098	8,8832616	9,2870440	9,658468
2	475737	436877	874882	909072	62040
3	528476	483605	917062	947671	65609
4	581144	530281	8,8969204	9,2986239	69176
5	633742	576905	8,9001304	9.3024775	72740
6	686271	623478	043365	063277	763017
7	738731	670001	085337	101750	79860
8	791122	716472	127368	140190	834166
9	843583	762891	169311	178599	869702
10	895697	809261	211214	216975	905211
11	7,9947883	855580	253077	255320	940694
12	8,0000000	901847	294902	293634	9,6976151
13	052049	948055	336686	331916	9,7011583
14	104031	8,4994232	378433	370163	046988
15	155945	8,5040349	420140	408386	082369
16	207793	086417	461808	446574	11772
17	259574	132434	503438	484731	15305
18	311282	178402	545033	522857	18835
19	362934	224321	586581	560952	223631
20	414515	270189	628095	599022	258883
21	466030	316009	669570	637049	29410
22	517479	361779	711007	675051	329309
23	568862	407501	752406	713022	364487
24	620180	453173	793766	750963	399634
25	671432	498797	835088	788873	434758
26	722625	544372	876373	826752	469856
27	773743	589899	917620	864600	504931
28	824800	635377	8,9958829	902418	539979
29	875794	680807	9,0000000	940207	575002
30	926723	726188	041133	9.3977964	610001
31	8,0977588	771522	082229	9,4015691	644973
32	8,1028385	816808	123287	053387	679922
33	079128	862048	164309	091054	714845
34	129830	907238	205292	128691	749742
35	180413	952380	246239	166296	784616
36	230962	8,5997476	287148	203872	819465
37	281448	8,6042524	328021	241419	854238
38	331870	087526	368856	278936	889037
39	382230	132480	409655	316423	923863
40	432528	177388	450418	353880	958611
41	482764	222248	491142	391307	9,7993335
42	532939	267062	531831	428704	9,8028036
43	583056	311829	572482	466072	062711
44	633102	356551	613098	503410	097362
45	683091	401226	653677	540719	131986
46	733020	445855	694219	577999	166591
47	782887	490437	734726	615249	20116
48	832694	534974	775197	652469	235723
49	882441	579465	815631	689661	270252
50	8,1932127	8,6623901	9,0856030	9.4726825	9,8304757

	0	100	200	300	400
51	3,7084298	5,3250740	6,3079935	7,0540040	7,6687664
52	7325111	368033	163596	606966	744304
53	7562858	484812	247035	673766	800862
54	7797631	601085	330255	740439	857333
55	8029525	716853	413257	806987	913716
56	8258624	832126	496042	873411	7,6970022
57	8485011	5,3946907	578612	7,0939709	7,7026242
58	8708766	5,4061202	660968	7,1005883	082391
59	8929965	175016	743111	071936	138448
60	9148676	288352	825043	137866	194426
61	9364972	401218	906765	203673	250324
62	9578915	513618	6,3988279	269359	306140
63	3,9790571	625556	6,4069586	334923	361877
64	4,0000000	737036	150686	400369	417533
65	0207256	848065	231583	465694	473107
66	0412401	5,4958647	312275	530901	528605
67	0615480	5,5068784	392767	595988	584022
68	0816551	178484	473057	660958	639360
69	1015661	287748	553148	725808	694620
70	1212853	396583	633041	790543	749806
71	1408178	504993	712736	855152	804903
72	1601676	612979	792236	919663	859931
73	1793390	720547	871547	7,1984050	914875
74	1983364	827701	6,4950653	7,2048321	7,7969745
75	2171633	5,5934447	6,5029571	112478	7,8024537
76	2358236	5,6040787	108301	176522	079253
77	2543210	146724	186840	240451	133892
78	2726586	252263	265188	304267	188450
79	2908404	357408	343349	367972	242942
80	4,3088695	462162	421326	431564	297353
81	3267487	566528	499116	495045	351687
82	3444815	670511	576722	558415	405949
83	3620707	774114	654144	621674	460133
84	3795191	877340	731392	684823	514240
85	3968296	5,6980192	808444	747863	568280
86	4140049	5,7082670	885323	810794	622241
87	4310476	184790	6,5962023	873616	676130
88	4479602	286544	6,6038545	936330	729944
89	4647451	387936	114890	7,2998936	783684
90	4814047	488970	191059	7,3061436	837352
91	4979414	589652	267054	123828	890946
92	5143574	689986	342874	186114	944468
93	5306549	789965	418523	248294	7,8997917
94	5468359	889603	493997	310369	7,9051294
95	5629026	5,7988907	569301	372339	104599
96	5788570	5,8087857	644437	434204	157832
97	5947009	186478	719403	495966	210994
98	6104363	284766	794200	557622	264085
99	6260650	382724	868831	619177	317104
100	4,6415888	5.8480354	6,6943296	7,3680630	7.9370058

	500	600	700	800	900
51	8, 1981752	8, 6668310	9, 0896392	9, 4763959	9, 8339238
52	8, 2031318	712665	936718	801061	373695
53	080824	756974	9, 0977003	838136	408127
54	130271	801238	9, 1017265	875182	442536
55	179657	845456	057435	912199	476920
56	228985	889630	097668	949188	511283
57	278253	933758	137818	9, 4986147	545620
58	327463	8, 6977842	177931	9, 5023078	579929
59	376614	8, 7021882	218009	059980	614217
60	425706	065876	258053	096854	648433
61	474739	109827	298060	133700	682724
62	523715	153733	338033	170519	716941
63	572632	197595	377971	207303	751130
64	621492	241414	417874	244063	785305
65	670294	285187	457742	280798	819451
66	719038	328917	497576	317497	853574
67	767725	372604	537375	354172	887673
68	816355	416247	577139	390818	921749
69	864927	459846	616869	427436	955801
70	913443	503401	656564	464027	9, 8989830
71	8, 2961902	546915	696225	500589	9, 9023835
72	8, 3010305	590383	735852	537123	057817
73	058651	633809	775444	573629	091776
74	106941	677192	815003	610108	125712
75	155175	720532	854527	646560	159624
76	203352	763829	894018	682982	193513
77	251475	807084	933447	719377	227379
78	299542	850296	9, 1972896	755745	261222
79	347553	893466	9, 2012289	792085	295042
80	395508	936593	051641	828397	328838
81	443410	8, 7979679	090962	864682	362616
82	491256	8, 8022721	130251	900939	396363
83	539047	065722	169505	937169	430092
84	586783	108681	208726	9, 5973372	463797
85	634465	151598	247914	9, 6009548	497469
86	682094	194473	287068	045695	531138
87	729667	237307	326189	081817	564775
88	777187	280099	365278	117913	598389
89	824652	322850	404333	153977	631980
90	872065	365559	443355	190017	665543
91	919424	408227	482344	226029	699095
92	8, 3966729	450853	521300	262015	732619
93	8, 4013981	493446	560224	297974	766120
94	061180	535985	599111	333907	799599
95	108326	578489	637972	369812	833054
96	155423	620951	676798	405690	866486
97	202460	663373	715592	441542	899899
98	249447	705757	754352	477367	933288
99	296383	748099	793081	513166	9, 9966655
100	8, 4343266	8, 8790400	9, 2831776	9, 6548938	10, 0000000

H					
4	Kr.				
12	3	Gr.			
240	60	20	Fl.		
360	90	30	1½	R. th.	
480	120	40	2	1⅓	Sp.thl.

Punkten				
12	Linien			
144	12	Zolle		
1728	144	12	Schuhe	
10368	864	72	6	Klafter

Grane					
60	Quintl				
240	4	Lothe			
480	8	2	Unzen		
7680	128	32	16	℔de	
768000	12800	3200	1600	100	Cent.

Sekunden			
60	Minut.		
3600	60	Stund.	
86400	1440	24	Tag

Die einfachen Produkte der Zahl, wodurch die gemeinen Logarithmen in die natürlichen, und auch die natürlichen in die gemeinen verwandelt werden (§. 180). Man kann von diesen Produkten bey dem Gebrauche nur so viele Decimalziffern beybehalten, als es erforderlich ist.

1	2,302585092994
2	4,605170185988
3	6,907755278982
4	9,210340371976
5	11,512925464970
6	13,815510557964
7	16,118095650958
8	18,420680743952
9	20,723265836946

Ende des ersten Bandes.